

Lemme: Myrtille est (γ, ν) -accurate pour l'estimation d'un décile sur la distribution exponentielle de paramètre b avec

$$\alpha = \beta \mapsto 8 (\log k + \log 2/\beta) / \varepsilon$$

$$\nu = \sup_{(a, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]} \left(\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{n-in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\ & + \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & + \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & + \beta \end{aligned} \right)$$

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma, \beta \in [0, 1]^2$. On suppose x triée par ordre croissant pour faciliter les notations.

- Nous pourrions démontrer comme dans le cas uniforme que

$$\mathbb{P}(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]) \geq \mathbb{P}([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]) - \beta$$

- Minorons enfin $\mathbb{P}([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma])$ pour conclure!

Cette probabilité est la conjonction des deux événements: A = “au moins α des valeurs avant le i -ème décile sont à γ près de ce déciles” et B l'événement analogue pour les valeurs supérieurs.

La distribution exponentielle étant sans mémoire,

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k}$$

Or, A est plus probable que l'événement “ A et $d_i \geq a$ ”. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) & \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(d_i \geq a) - 1 \\ & = \left(1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k}\right) \\ & \quad + 1 - \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} - 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]) \\ & \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 - \beta \\ & \geq 1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\ & \quad - \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & \quad - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & \quad - \beta \end{aligned}$$

Théorème: Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+$, **Myrtille** a une erreur quadratique moyenne $\sqrt{9}\gamma$ sur la distribution uniforme sur $[0, 1]$ avec une probabilité au moins $(1 - \nu)^9$ pour

$$\alpha = \beta \mapsto 8(\log k + \log 2/\beta) / \varepsilon$$

$$\nu = \sup_{(a, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]} \left(\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{n-in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\ & + \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & + \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n-in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\ & + \beta \end{aligned} \right)$$

Démonstration: C'est un corollaire direct du lemme précédent.