Lemme: Pour tout $\beta \in [0,1]$, `Myrtille` est (γ, ν)-accurate pour l'estimation d'un décile sur la distribution exponentielle de paramètre b avec

$$\begin{aligned}
\alpha &= 8\left(\log k + \log 2/\beta\right)/\varepsilon \\
\nu &= \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad + \beta
\end{aligned}$$

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma, \beta \in [0,1]^2$. On suppose x triée par ordre croissant pour faciliter les notations.

- Nous pourrions démontrer comme dans le cas uniforme que

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \geq \mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) - \beta$$

- Minorons enfin $\mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right)$ pour conclure!

  Cette probabilité est la conjonction des deux événements: $A =$ "au moins α des valeurs avant le i-ème décile sont à γ près de ce déciles" et B l'événement analogue pour les valeurs supérieurs.

  La distribution exponentielle étant sans mémoire,

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k}$$

  Or, A est plus probable que l'événement "A et $d_i \geq a$". Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(d_i \geq a) - 1 \\
&= \left(1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k}\right) \\
&\quad +1 - \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} - 1
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \\
&\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 - \beta \\
&\geq 1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^k \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad - \beta
\end{aligned}$$

Théorème: Pour tout $\beta \in [0,1]$ et tout $\gamma \in \mathbb{R}_+$, `Myrtille` a une erreur quadratique moyenne $\sqrt{9}\gamma$ sur la distribution uniforme sur $[0,1]$ avec une probabilité au moins $(1-\nu))^9$ pour

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 8\left(\log k + \log 2/\beta\right)/\varepsilon \\
\nu &= \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{n-in/10-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{in/10} \binom{n}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)\right)^{k} \exp\left(-\frac{a-\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n - in/10}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)\right)^{k} \exp\left(-\frac{\gamma}{b}\right)^{n-k} \\
&\quad + \beta
\end{aligned}
$$

Démonstration: C'est un corollaire direct du lemme précédent.