Lemme: `Myrtille` est (γ, p)-accurate pour l'estimation d'un décile sur la distribution uniforme sur $[0,1]$ avec

$$\alpha : \beta \in [0,1] \mapsto 8\left(\log k + \log 2/\beta\right)/\varepsilon$$
$$p = \inf_{\beta \in [0,1]} \left(\sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} \times \sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{9n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} + \beta \right)$$

Démonstration: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma, \beta \in [0,1]^2$. On suppose x triée par ordre croissant pour faciliter les notations.

- On pose $\alpha = 8\left(\log k + \log 2/\beta\right)/\varepsilon$. On sait que `AboveThreshold` est alors (α, β)-accurate. On en déduit que,
$$\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}]\right) \geq 1 - \beta$$

- Posons alors $(d_i)_i$ les déciles de x. On note que
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \\ \geq\ &\mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma] \ \wedge\ \mathcal{M}(x)_i \in [x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}]\right) \end{aligned}$$

  Or,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \geq 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

  Ainsi,
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \\ \geq\ &\mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}]\right) - 1 \\ \geq\ &\mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) - \beta \end{aligned}$$

- Minorons enfin $\mathbb{P}\left([x_{in/10-\alpha}, x_{in/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right)$ pour conclure!

  L'événement dont nous essayons de minorer la probabilité est l'événement $A =$ "au moins α valeurs, parmi celles plus petites que d_i, sont dans $[d_i - \gamma, d_i]$ de longueur γ et au moins α valeurs, parmi celles plus grandes que d_i, sont dans $[d_i, d_i + \gamma]$". Ainsi,
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left([x_{i\times n/10-\alpha}, x_{i\times n/10+\alpha}] \subset [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \\ =\ &1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} \times \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{9n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{M}(x)_i \in [d_i - \gamma, d_i + \gamma]\right) \geq 1 - \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} \times \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{9n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} - \beta$$

Théorème: Pour tout $\beta \in [0,1]$ et tout $\gamma \in \mathbb{R}_+$, `Myrtille` a une erreur quadratique moyenne inférieur à $\sqrt{9}\gamma$ sur la distribution uniforme sur $[0,1]$ avec une probabilité au moins $\left(1-p\right))^9$ pour

$$\alpha : \beta \in [0,1] \mapsto 8\left(\log k + \log 2/\beta\right)/\varepsilon$$
$$p = \inf_{\beta \in [0,1]} \left(\sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} \times \sum_{k=0}^{\alpha(\beta)} \binom{9n/10}{k} (\gamma)^k (1-\gamma)^{n-k} + \beta \right)$$

Démonstration: C'est un corollaire direct du lemme précédent.