Вариант 15 Задание 6

$X = \left\{ k\sqrt{k} \sin\frac{1}{k^2} \right\}_{k=1}^{\infty}$ $X_k^p = \left(k\sqrt{k} \sin\frac{1}{k^2}\right)^p \sim k^{\frac{3}{2}p} \cdot \sin^p\frac{1}{k^2}$

$X_k^1 = k^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\frac{1}{k^2}$ – ряд расходится

$X_k^2 = k^3 \sin\frac{1}{k^2}$ – ряд расходится

$X_k^3 = k^{\frac{9}{2}} \sin^3\frac{1}{k^2}$ – сходится

$\lim\limits_{k\to\infty} \sin\frac{1}{k^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\alpha\ \frac{3}{2} > 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\frac{9}{2}} \sin^3\frac{1}{k^2}$ сходится

Ответ: $p = 3$ – наименьший $p \in \mathbb{Z}$, при котором $X_k^p \in \ell^p$

Вариант 15 Задание 8

Вариант 15 Задание 8

а) $x(t)=\frac{6t}{t^2+3}$, $y(t)=\frac{6}{t^2+3}$, $C[-4;2]$

$\rho_C(x(t),y(t))=\max\limits_{t\in[-4;2]}|y(t)-x(t)|=\max\frac{6}{t^2+3}-\frac{6t}{t^2+3}=\max\frac{6-6t}{t^2+3}$

с учетом $C[-4;2]$

$u(-4)=1\frac{11}{19}$

$u(-3)=2$

$u(-2)=2\frac{4}{7}$

$u(-1)=3 \Rightarrow \rho_C(x(t),y(t))=3$

$u(0)=2$

$u(1)=0$

$u(2)=-\frac{6}{7}$

Ответ: $\rho_C(x(t),y(t))=3$

б) $x(t)=t$, $y(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ $L^2(0;1)$

$\rho_{L^2(0;1)}(x(t),y(t))=\int_0^1\left(t-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^2dt=\int_0^1 t^2-\frac{2t}{\sqrt[3]{t}}+\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt=\int t^2-2t^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\,dt=$

$=\int t^2dt-\int 2t^{\frac{2}{3}}dt+\int\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}dt=\frac{t^3}{3}-\frac{6t\sqrt[3]{t^2}}{5}+3\sqrt[3]{t}\Big|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{6\cdot1\sqrt[3]{1^2}}{5}+3\sqrt[3]{1}-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{6a\sqrt[3]{a^2}}{5}+3\sqrt[3]{a}\right)$

$=\lim\limits_{t\to0+}\left(\frac{32}{15}-\frac{t^3}{3}+\frac{6t\sqrt[3]{t^2}}{5}-3\sqrt[3]{t}\right)=\frac{32}{15}=2\frac{2}{15}$

Ответ: $\frac{32}{15}=2\frac{2}{15}$

$X = \{k\sqrt{k}\ \sin\frac{1}{k^2}\}_{k=1}$ $\qquad X_k^p = \left(k\sqrt{k}\sin\frac{1}{k^2}\right)^p \sim k^{\frac{3}{2}p}\cdot\sin^p\frac{1}{k^2}$

$X_k^1 = k^{\frac{3}{2}}\cdot \sin\ 1$

Вариант 15 $\qquad$ Задание 10

$x(t) = 9 - \frac{16}{t+2} \qquad y(t) = t^2+4t-2 \qquad r = 2 \qquad C[-1;1]$

а) $\rho_C(x(t), y(t)) = \max\limits_{t\in[-1;1]} |y(t)-x(t)| = \max\limits_{t\in[-1;1]} \left|\left(9-\frac{16}{t+2}\right)-(t^2+4t-2)\right| = \max\limits_{t\in[-1;1]} \left|\frac{-t^3-6t^2+3t+6}{t+2}\right|$

с учетом $C[-1;1]$

$u(1) = \frac{2}{3}$

$u(0) = 3$

$u(-1) = 10$

$\rho_C(x(t), y(t) = 10 \not< r \Rightarrow$ не принадлежит шару $B_2(x)$

б) $x(t) = t,\ y(t) = \cos t \qquad r = 4 \qquad L^2(0;\pi)$

$\rho_{L^2(0;\pi)}(x(t), y(t)) = \int_0^{\pi} (t-\cos t)^2\,dt =$

$= \int t^2 - 2t\cdot\cos t + \cos(t)^2\,dt = \int t^2\,dt - \int 2t\cdot\cos t\,dt + \int \cos t^2\,dt =$

$= \frac{t^3}{3} - 2t\cdot\sin t - 2\cos t + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} - 2\pi\cdot\sin\pi - 2\cos\pi + \frac{1}{2}\pi +$

$+ \frac{\sin 2\pi}{4} - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot 0\sin 0 - 2\cos 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sin(2\cdot 0)}{4}\right) = \frac{\pi^3}{3} + 4 + \frac{\pi}{2} \approx 15{,}90622$

$15{,}90622 > r(4) \Rightarrow$ не принадлежит шару $B_1(x)$