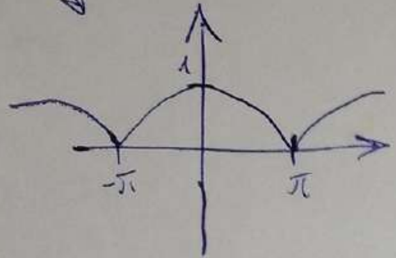
Вар 15 $(1^3\ 2^3\ 3^3\ 4^3 \ldots)$

Задание 1 Вар 15

$x(t) = |\cos t|$ $C[-1;1]$, $C^1[-1;1]$, $C^2[-1;1]$

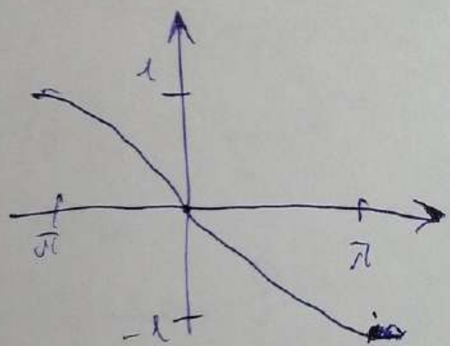


$x \in C[-1;1]$

$x'(t) = -\dfrac{\cos t \sin t}{|\cos(t)|}$

$x \in C^1[-1;1]$

нет разрыва



$C^2 \in C^1 \Rightarrow x \in C^2[-1;1]$

Задание 2 Вариант 15

$x(t) = \frac{1}{t \ln^2 t}$ $(a,b) = (1;e)$ $L^1(1;e)$ $L^2(1;e)$

$L^1 = \int_1^e \frac{1}{t \ln^2 t} dt \notin L^1(1;e)$, т.к. $x(t)dt$ при $t=1 \to \infty \Rightarrow$ интеграл расходится

$L^2 = \int_1^e \frac{1}{t^2 \cdot \ln^4 t} dt$ несобственный интеграл, не принадлежит $\notin L^2(1;e)$

Ответ: $x(t) \notin L^1(1;e)$; $x(t) \notin L^2(1;e)$

Задание 3 Вариант 15

а) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}$ б) $x(t)=\cos t$

$C[0;1]$ $L^1(0;1), L^2(0;1), L^\infty(0;1)$

$L^1(1;+\infty), L^2(1;+\infty), L^\infty(1;+\infty)$

а) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}$

$x(t)\xrightarrow[t=\frac{2}{3}]{}\infty \Rightarrow x(t)\notin C[0;1]$

$L^1=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}=\infty$ при $t=\frac{2}{3} \Rightarrow x(t)\notin L^1(0;1)$, $x(t)\notin L^2(0;1)$

$L^1\supset L^2\supset L^\infty\supset C\supset C^1 \dots \Rightarrow x(t)\notin L^\infty(0;1)$

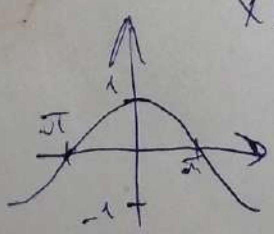
$L^1=\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}=$ интеграл расходится $\Rightarrow x(t)\notin L^1(1;\infty)$

$L^2=\int_1^\infty\left(\frac{dt}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}\right)^2=1 \Rightarrow x(t)\in L^2(1;+\infty)$

$L^\infty=\sup\limits_{t=1,\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}$ при значении $\frac{2}{3} \Rightarrow \infty \Rightarrow x(t)\notin L^\infty(1;+\infty)$

б) $x(t)=\cos t$

$x(t)\in C[0;1]$



$L^1=\int_0^1\cos t\,dt=\sin(1)\Rightarrow x(t)\in L^1(0;1)$

$L^2=\int_0^1\cos^2 t\,dt=\frac{\sin 2}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow x(t)\in L^2(0;1)$

$L^1\supset L^2\supset L^\infty\supset C\supset C^1\Rightarrow x(t)\in L^\infty(0;1)$

$L^1=\int_1^\infty\cos(t)dt=$ интеграл расходится $\Rightarrow$ $L^1(1;+\infty)\Rightarrow x(t)\notin L^2(1;+\infty)$

$L^\infty=\sup\limits_{t=1,\infty}\cos t = x(1)=1\Rightarrow x(t)\in L^\infty(1;+\infty)$

Задание 4 Вар 15

15) $x \in L^2(0;1)$, $x \in L^2(1;+\infty)$

$x(t) = \frac{1}{t+1}$

$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{(t+1)^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow x(t) \in L^2(0;1)$

$\int_1^\infty \frac{1}{(t+1)^2} dt = -\frac{1}{t+1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow x(t) \in L^2(1;+\infty)$

5) $x \in L^3(2;4)$, $x \notin L^4(2;4)$

$x(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{(t-3)^2}}$

$\int_2^4 \frac{1}{(t-3)^{\frac{6}{7}}} dt = (t-3)^{\frac{1}{7}}\Big|_2^3 + (t-3)^{\frac{1}{7}}\Big|_3^4 = 1+1 = 2 < \infty \Rightarrow x(t) \in L^3(2;4)$

$\int_2^4 \frac{1}{(t-3)^{\frac{8}{7}}} dt = \frac{1}{\sqrt[7]{t-3}}\Big|_2^3 + \frac{1}{\sqrt[7]{t-3}}\Big|_2^3 = \infty \Rightarrow x(t) \notin L^4(2;4)$

10) $x \in L^4(0;10)$, $x \notin L^1(0;+\infty)$

$x(t) = t+1$

$\int_0^{10} (t+1)^4 dt = \frac{(t+1)^5}{5}\Big|_0^{10} = \frac{11^5}{5} < \infty \Rightarrow x(t) \in L^4(0;10)$

$\int_0^\infty (t+1) dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^\infty = \infty \Rightarrow x(t) \notin L^1(0;+\infty)$

21) $x \notin L^3(0;+\infty)$, $x \in L^4(-1;+\infty)$

$x(t) = \frac{1}{(t+3)^{\frac{1}{3}}}$

$\int_0^\infty \frac{1}{(t+3)^{\frac{3}{3}}} dt = \ln|t+3|\Big|_0^\infty = \ln\infty - \ln 3 = \infty \Rightarrow x(t) \notin L^3(0;+\infty)$

$\int_{-1}^\infty \frac{1}{(t+3)^{\frac{4}{3}}} dt = -\frac{3}{(t+3)^{\frac{1}{3}}}\Big|_{-1}^\infty = 0 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} < \infty \Rightarrow x(t) \in L^4(-1;+\infty)$

Ответ: 15) $x(t) = \frac{1}{t+1}$; 5) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{(t-3)^2}}$ 10) $x(t) = t+1$ 21) $x(t) = \frac{1}{(t+3)^{\frac{1}{3}}}$

Задание 5 Вар 15

а) $X = \left\{ 2^{(-1)^k \cdot k} \right\}_{k=1}^{\infty}$

$X_k^1 = 2^{(-1)^1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

$k=1,\ x = \frac{1}{2}$

$k=2,\ x = 4$

$k=3,\ x = \frac{1}{8}$

$k=4,\ x = 16$

ряд расходится $\Rightarrow x \notin l^1$

$X_k^2 = 2^{(-1)^k \cdot k \cdot 2}$

$k=1,\ x = \frac{1}{4}$

$k=2,\ x = 16$

$k=3,\ x = \frac{1}{64}$

$k=4,\ x = 256$

ряд расходящ. $\Rightarrow x \notin l^2$

$x \notin l^1, l^2, l^3, l^4, l^\infty$ $\qquad l^1 \in l^2 \in l^3 \in l^4 \in l^\infty$

б) $x = \left\{ \frac{\sqrt{\ln k}}{k} \right\}_{k=1}^{\infty}$

$x_k^1 = \frac{\sqrt{\ln k}}{k}$

$k=1 \Rightarrow x=0$

$k=2 \Rightarrow x = 0{,}416277$

$k=3 \Rightarrow x = 0{,}349382$

ряд расходится

$x \notin l^1$

$x_k^2 = \left(\frac{\sqrt{\ln k}}{k}\right)^2$ ряд сходящийся $\Rightarrow x \in l^2 \Rightarrow x \in l^3, l^4, l^\infty$ $\quad \frac{1}{k^2} \cdot \ln k$

$l^1 \in l^2 \in l^3 \in l^4 \in l^\infty$

Ответ: а) $x \notin l^1, l^2, l^3, l^4, l^\infty$

б) $x \notin l^1;\ x \in l^2, l^3, l^4, l^\infty$

Задание 7 Вар 15

$n=4$ $x=(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $y=(0, \sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$

$\rho_1(x,y) = |\sqrt{3}-0| + |\sqrt{3}-\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}-\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}-\sqrt{3}| = 3\sqrt{3}+2\sqrt{2} \approx 8{,}02$

$\rho_2(x,y) = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{24-2\sqrt{6}} \approx 4{,}37$

$\rho_\infty(x,y) = \max\{\underset{1,7}{|\sqrt{3}-0|}; \underset{0,3}{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}; \underset{2,83}{|-\sqrt{2}-\sqrt{2}|}; \underset{3,15}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}\} = 3{,}15$

Наибольшее расст в метрике $\rho_1(x,y)$

Наименьшее в $\rho_\infty(x,y)$

Ответ: $\rho_1(x,y) = 8{,}02$; $\rho_2(x,y) = 4{,}37$; $\rho_\infty(x,y) = 3{,}15$

Задание 7 Вар 15

Задание 9 Вар 15

$X = \left(\frac{2^3}{2^2}; \frac{3^3}{2^3}; \frac{4^3}{2^4}; \frac{5^3}{2^5}; \dots \right)$ $Y = \left(\frac{1^3}{2^1}; \frac{2^3}{2^2}; \frac{3^3}{2^3}; \frac{4^3}{2^4}; \dots \right)$

$\rho L^1(X,Y) = \sum_{k=1}^{\infty} |X_k - Y_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k - Y_k| = \frac{3}{2} + \frac{11}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{32} + \dots$

$X_k = \frac{(1+k)^3}{2^{k+1}}$

$Y_k = \frac{k^3}{2^k}$

$\rho(X_k, Y_k) = \max_{k=1,\infty} \left| \frac{1+k}{2^{k+1}} - \frac{k^3}{2^k} \right| = \left| \frac{-2k^3 + k + k}{2^{k+1}} \right|$

$\rho(X_k; Y_k) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$k = 1$

Ответ: $\rho(X_k; Y_k) = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $k = 1$