ПЗ 18

а) множество X бесконечно малых числовых последовательностей.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

~~$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$~~ ~~$\alpha > 1$ — ряд сходится~~ ~~$\alpha \leq 1$ — расходится~~

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n) = 0 = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n \\ &\lim_{n\to\infty}(k\alpha_n) = 0 = k\cdot\lim_{n\to\infty}\alpha_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{лин. простр.}$$

$x_n = \frac{1}{n^2}$ — принадлежит пространству

~~$\lim\limits_{n\to\infty} n$~~ $x_n = n$ — не является членом пространства

в) множество X чётных функций на числовой прямой

$x_n = \cos n$ — принадлежит пространству, $x_n = \sin n$ — не принадл.

$$f(x) = f(-x) \neq -f(x)$$

$f(x_n + b_n) = f(x_n) + f(b_n)$ — чётная функ.

$f(x_n - b_n) = f(x_n) + f(b_n)$ ~~$\neq f(x_n) - f(b_n) \Rightarrow$~~ — чётная функ.

~~$\Rightarrow$ не лин. простр.~~

$x_n = n^2$ — принадлежит простр.

$\Rightarrow$ лин. пространство

ПЗ 19

l^{∞}, $p(x) = \inf\limits_{1 \le k < \infty} |x_k|$

I. $p(x) \geq 0$ $\quad p(x) = 0 \iff x = 0$

Если $x=0$, $p(x)=0$. Если $p(x)=0$, $\inf|x_k| =$

Из этого не следует, что $x_k = 0$.

Нормой быть не может

II. $p(\alpha x) = \inf\limits_{1 \le k < \infty} |\alpha x_k| =$

$= \alpha \inf\limits_{1 \le k < \infty} |x_k|$

III Неравенство треугольника: $\inf\limits_{i=1} |x_i + y_i| \le \inf\limits_{i=1} |x_i| + \inf\limits_{i=1} |y_i|$

Пример: ~~$x = (1;2)$, $y = (2;1)$~~ $\Rightarrow 3 \le 4$? не верно $\Rightarrow$

$x = (1, 2, 0, 0 \dots)$, $y = (2, 1, 0, 0, \dots)$.

Неравенство треугольника

$\Rightarrow$ Не выполняется. Функция $\inf|x_k|$ не может быть ни нормой, ни полунормой.

ПЗ 20

$\varphi(t) = x(t) = \sin 2t - t$, $[a;b] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\|x\|_C = \max_{t\in[a;b]} |x(t)| = \max_{t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} |\sin 2t - t| \Rightarrow \varphi'(t) = 2\cos 2t - 1$$

$2\cos 2t - 1 = 0$

$\cos 2t = \frac{1}{2}$

$2t = \pm\frac{\pi}{3}$

$t_0 = \pm\frac{\pi}{6} \in [a;b]$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$\cancel{\varphi(t_0) = \varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}}$

$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$

$\|x\|_C = \frac{\pi}{2}$.

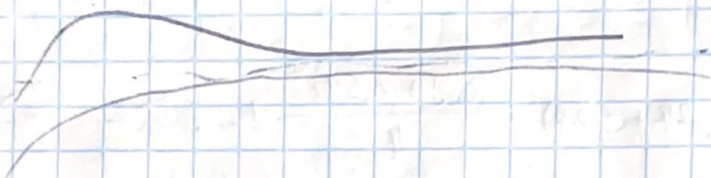
ПЗ 21

$$X = \left\{\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\|X\|_{\ell^\infty} = \sup_{1\le k<\infty}|X_k| = \sup_{1\le k<\infty}\left|\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{2}\right| \overset{(k\to\infty)}{=} \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left(\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{2}\right)' = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{k-(k+1)}{k^2} = \frac{-1}{k^2+k}$$

$k \in [1;+\infty)$: Производная отрицательная (функция постоянно убывает), на бесконечности $\to 0$, модуль функции возрастает.



ПЗ 22

$$x=\left\{\frac{1}{k}\left(\sin k+\cos\frac{k}{2}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\|x\|_{\ell^2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\sin k+\cos\frac{k}{2}\right)^2}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k+2\sin k\cos\frac{k}{2}+\cos^2\frac{k}{2}}{k^2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin^2 k+2\sin k\cdot\cos\frac{k}{2}+\cos^2\frac{k}{2}}{k^2}=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\sin k+\cos\frac{k}{2}\right)^2}{k^2}=\left(\sin 1+\cos\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(\sin 2+\cos 1)^2}{4}+\ldots=$$

$$=(0{,}84+0{,}88)^2+\frac{(0{,}9+0{,}54)^2}{4}+\ldots>1\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\notin B_1(0)$ в пространстве ℓ^2.

ПЗ 23

$$x=\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\dots\right),\quad y=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\dots\right)$$

$$x_k=\frac{1}{k!},\quad y_k=\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$(x,y)_{\ell^2}=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}=-e^{-1}=\underline{-\frac{1}{e}}$$

$$e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\dots\Rightarrow e^{-1}=1+\frac{-1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$-e^{-1}=-1+1-\frac{1}{2!}+\dots=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\Rightarrow\dots\frac{(-1)^k}{(k+1)!}$$

Ответ: $-\frac{1}{e}$.