

Министерство цифрового развития, связи и
массовых коммуникаций Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
по дисциплине «**Моделирование**»

Выполнил:
студент гр. ИС-142
«__» мая 2025 г.

/Наумов А.А./

Проверил:
преподаватель
«__» мая 2025 г.

/Уженцева А.В./

Оценка « _____ »

Новосибирск 2025

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется влияние параметров на процесс построения случайных деревьев на плоскости. В качестве основных факторов, определяющих структуру графа, рассматриваются:

- Параметр **a**, регулирующий экспоненциальное затухание вероятности соединения вершин.
- Параметр **b**, влияющий на вероятность соединения в зависимости от расстояния по степенному закону.

Целью исследования является анализ того, как изменение этих параметров влияет на плотность связей и характер формирования дерева. Ожидается, что:

- Увеличение параметра **b** приведет к большей децентрализации структуры дерева.
- Увеличение параметра **a** усилит тенденцию к локальным связям, сокращая дальние соединения.

В качестве дополнительного параметра была добавлена “степень вершины”.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

1. Генерация точек

Работа начинается с генерации фиксированного набора из 300 случайных точек на плоскости в диапазоне координат [0, 30). Для обеспечения воспроизводимости результатов используется фиксированный начальный параметр генерации случайных чисел (seed=42). Это позволяет проводить эксперименты с разными параметрами на одном и том же наборе точек, что упрощает сравнение.

2. Вероятностные модели соединения вершин

Для определения вероятности соединения двух вершин в зависимости от расстояния между ними использовались две модели:

- Экспоненциальное затухание - $P(d) = e^{(-a * d^b)}$
- Степенной закон - $P(d) = \min(1, 10 / d^b)$, если $d > 1$, иначе 1

3. Построение случайного дерева

Случайное дерево строилось с использованием рандомизированного алгоритма. Процесс начинается с выбора корневой вершины (вершина с индексом 0). Затем каждая новая вершина j подключается к одной из уже существующих вершин i в дереве на основе следующих шагов:

- **Вероятностное соединение:** для каждой уже подключённой вершины i вычисляется расстояние d до новой вершины j , а затем вероятность $P(d)$

по одной из моделей (экспоненциальной или степенной). Соединение происходит, если случайное число меньше $P(d)$.

- **Ограничения:**
 - Расстояние между вершинами должно находиться в диапазоне от 2 до 40 единиц, чтобы исключить слишком близкие или слишком дальние связи.
 - Параметр `max_degrees` ограничивает максимальное количество связей у вершины. Если степень вершины уже равна `max_degrees`, она не может принимать новые соединения.
- **Резервный вариант:** если вероятностное соединение не удалось (например, из-за ограничений на степень или расстояние), новая вершина соединяется с ближайшей доступной вершиной, у которой ещё не достигнут предел `max_degrees`.

Этот процесс повторяется для всех 300 вершин, формируя итоговое дерево.

4. Визуализация и эксперименты

Для анализа результатов строились графические изображения деревьев с различными комбинациями параметров:

- Для экспоненциальной модели: $a=[0.1, 1.0, 10.0]$, $a=[0.1, 1.0, 10.0]$, $b=[0.5, 1.0, 2.0]$, $b=[0.5, 1.0, 2.0]$, $\text{maxdegrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{max_degrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{maxdegrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{max_degrees}=[3, 5, \text{None}]$.
- Для степенной модели: $b=[0.5, 1.0, 2.0]$, $b=[0.5, 1.0, 2.0]$, $b=[0.5, 1.0, 2.0]$, $\text{maxdegrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{max_degrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{maxdegrees}=[3, 5, \text{None}]$, $\text{max_degrees}=[3, 5, \text{None}]$.

Корневая вершина на графиках выделялась красным цветом. Это позволило визуально оценить влияние параметров на структуру дерева.

5. Выполнение работы

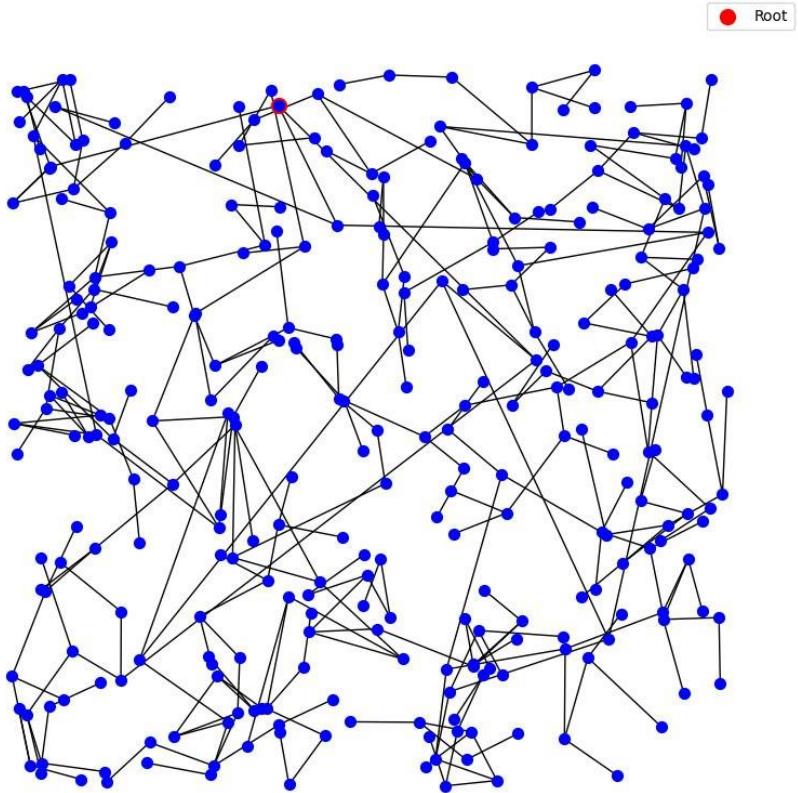
Работа заключалась в следующем:

- Сгенерировать фиксированный набор точек.
- Применить вероятностные модели (экспоненциальную и степенную) для построения случайного дерева.
- Ввести ограничения на расстояние и степень вершин с помощью параметра `max_degrees`.
- Провести эксперименты с различными значениями параметров `aaa`, `bbb` и `max_degrees`, чтобы проанализировать их влияние на структуру дерева, как указано во введении:
 - Увеличение `aaa` усиливает локальные связи.
 - Увеличение `bbb` приводит к большей децентрализации.
 - Ограничение `max_degrees` изменяет разветвлённость дерева.

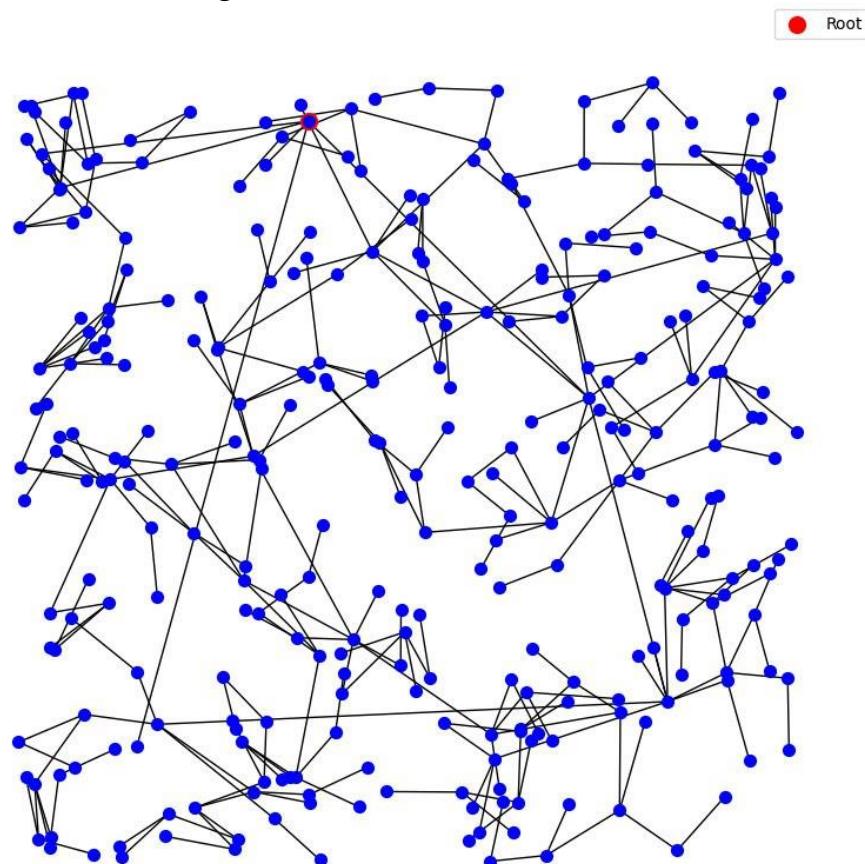
Количество экспериментов:

- exp_a0.1_b0.8_degNone.png
- exp_a0.1_b1.0_deg3.png
- exp_a0.1_b1.0_deg5.png
- exp_a0.1_b1.0_degNone.png
- exp_a0.1_b2.0_deg3.png
- exp_a0.1_b2.0_deg5.png
- exp_a0.1_b2.0_degNone.png
- exp_a1.0_b0.5_deg3.png
- exp_a1.0_b0.5_deg5.png
- exp_a1.0_b0.5_degNone.png
- exp_a1.0_b0.8_deg3.png
- exp_a1.0_b0.8_deg5.png
- exp_a1.0_b0.8_degNone.png
- exp_a1.0_b1.0_deg3.png
- exp_a1.0_b1.0_deg5.png
- exp_a1.0_b1.0_degNone.png
- exp_a1.0_b2.0_deg3.png
- exp_a1.0_b2.0_deg5.png
- exp_a1.0_b2.0_degNone.png
- exp_a10.0_b0.5_deg3.png
- exp_a10.0_b0.5_deg5.png
- exp_a10.0_b0.5_degNone.png
- exp_a10.0_b0.8_deg3.png
- exp_a10.0_b0.8_deg5.png
- exp_a10.0_b0.8_degNone.png
- exp_a10.0_b1.0_deg3.png
- exp_a10.0_b1.0_deg5.png
- exp_a10.0_b1.0_degNone.png
- exp_a10.0_b2.0_deg3.png
- exp_a10.0_b2.0_deg5.png
- exp_a10.0_b2.0_degNone.png
- power_b0.5_deg3.png
- power_b0.5_deg5.png
- power_b0.5_degNone.png
- power_b0.8_deg3.png
- power_b0.8_deg5.png
- power_b0.8_degNone.png
- power_b1.0_deg3.png
- power_b1.0_deg5.png
- power_b1.0_degNone.png
- power_b2.0_deg3.png

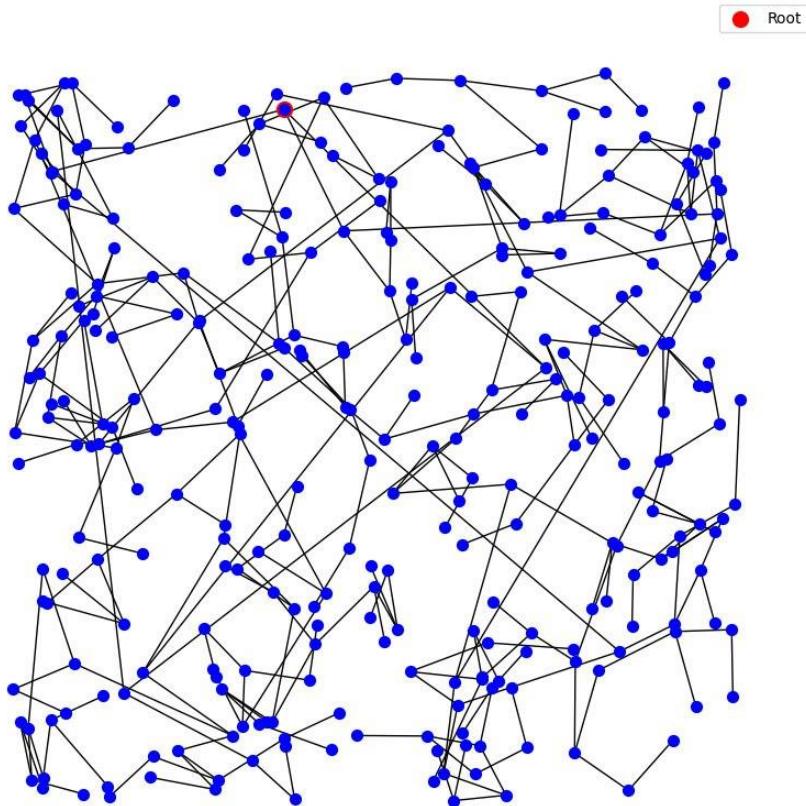
Exp_a0.1_b0.5_deg3:



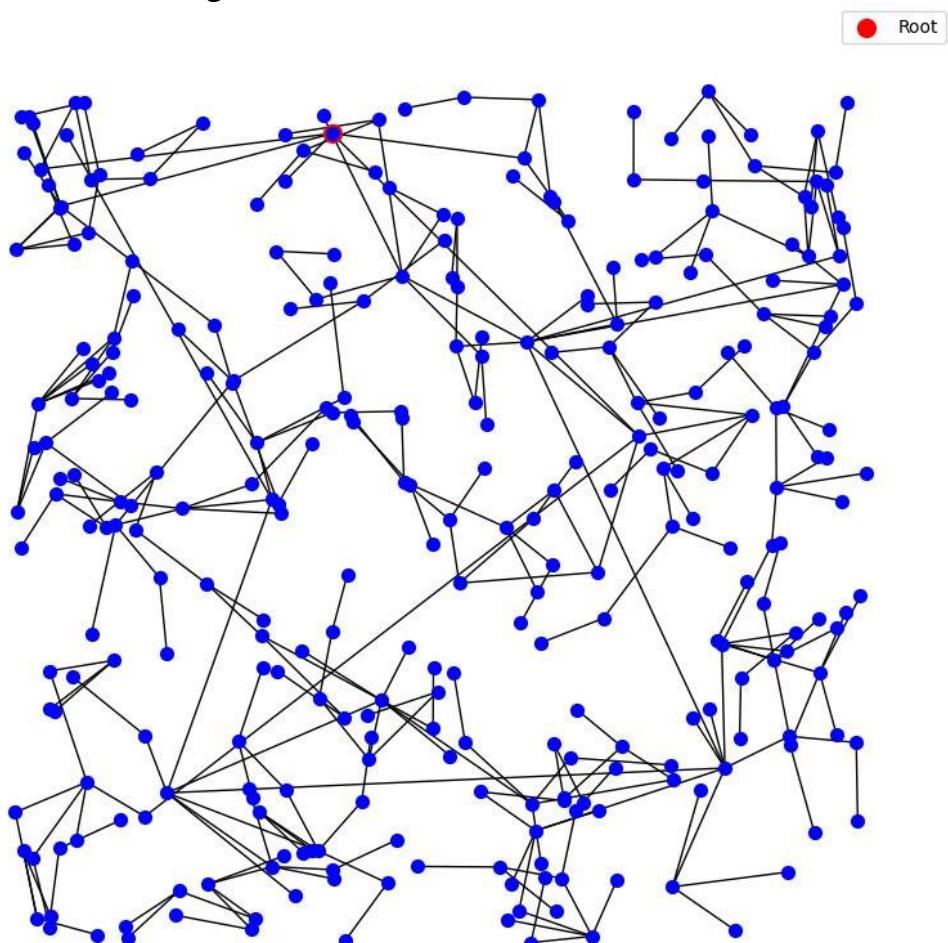
Exp_a0.1_b0.5_degNone:



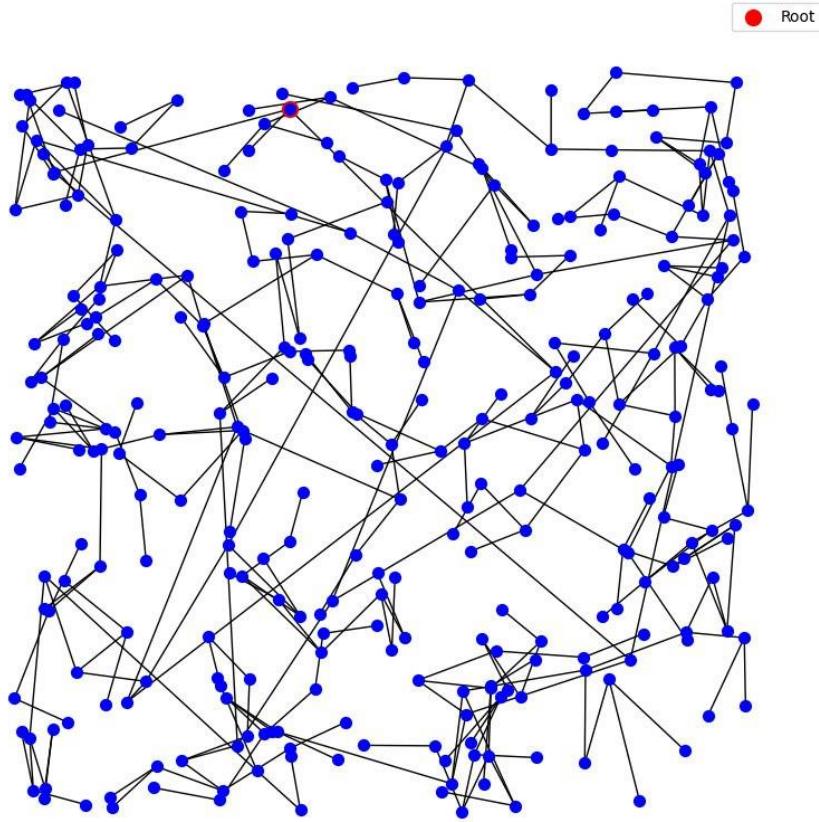
Exp_a0.1_b0.8_deg3:



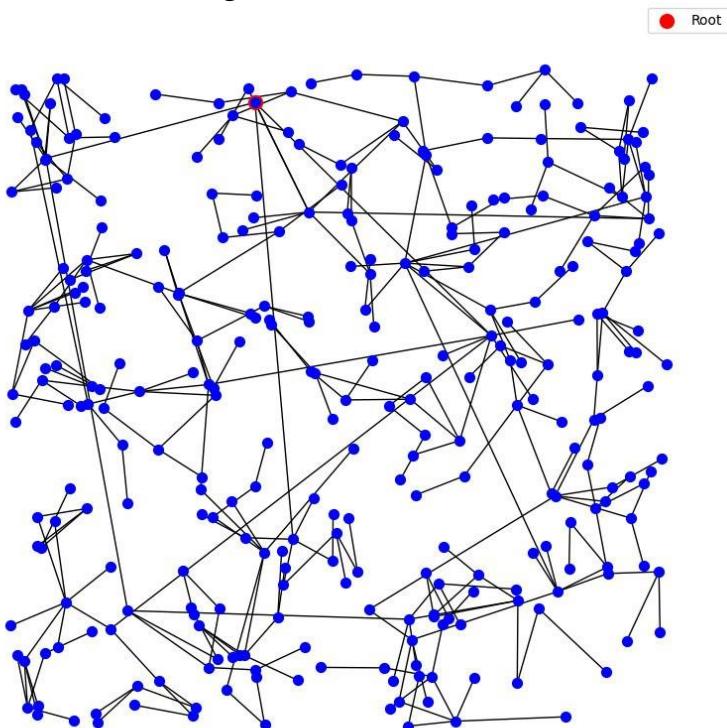
Exp_a0.1_b0.8_degNone:



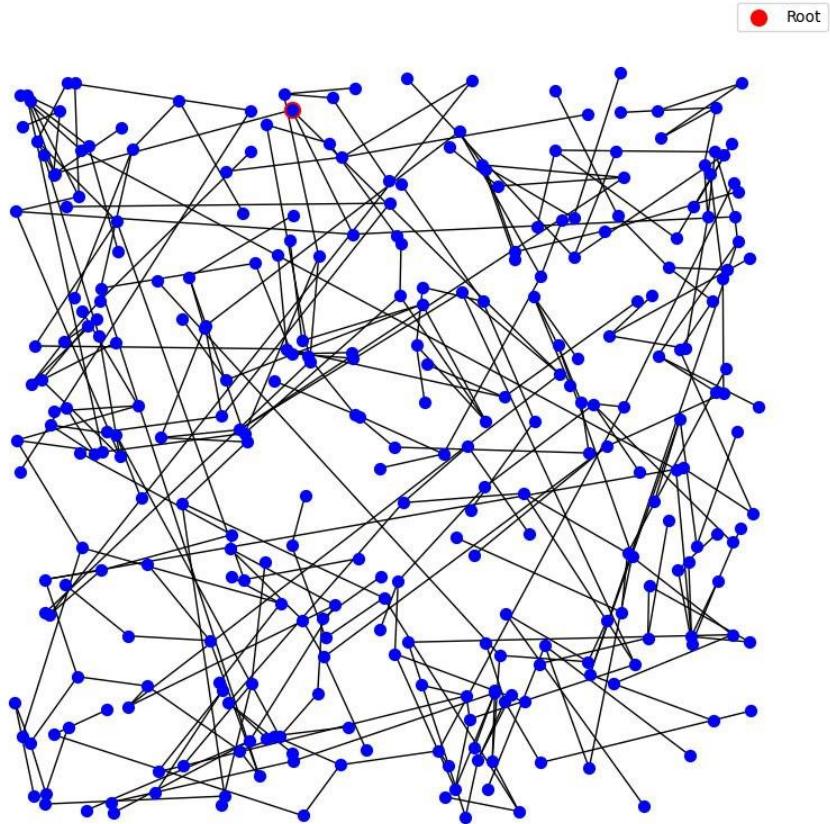
Exp_a0.1_b1.0_deg3:



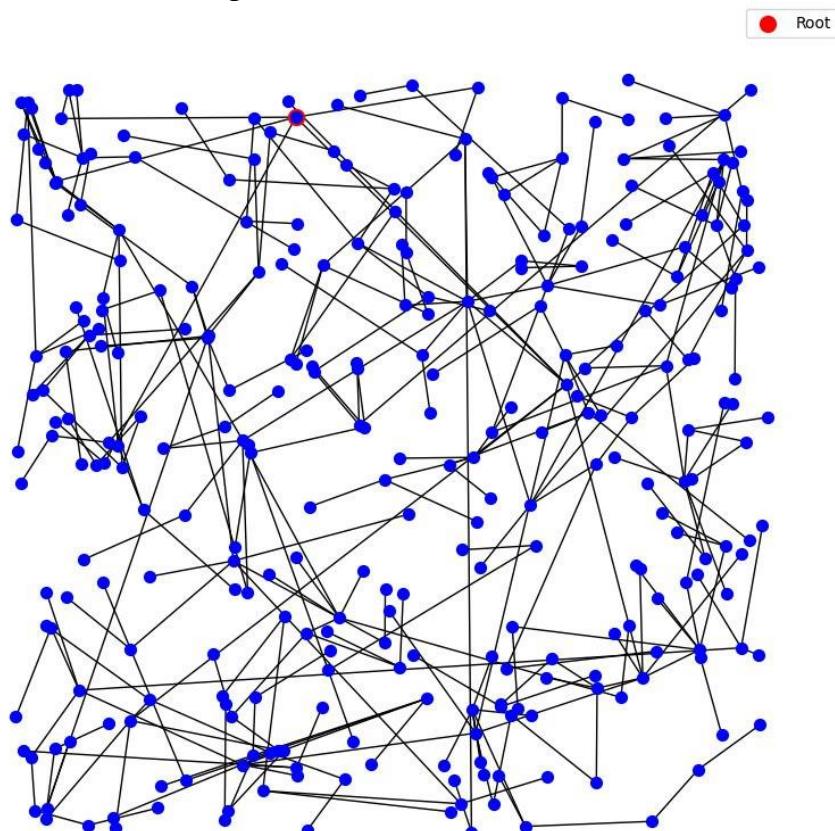
Exp_a0.1_b1.0_degNone:



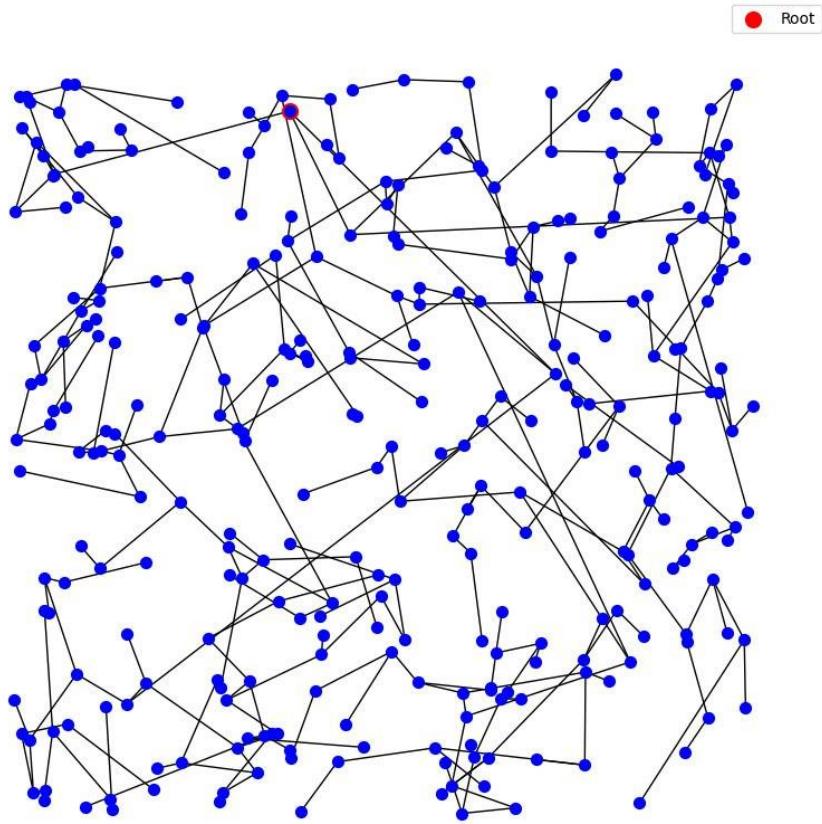
Exp_a1.0 _b0.5_deg3:



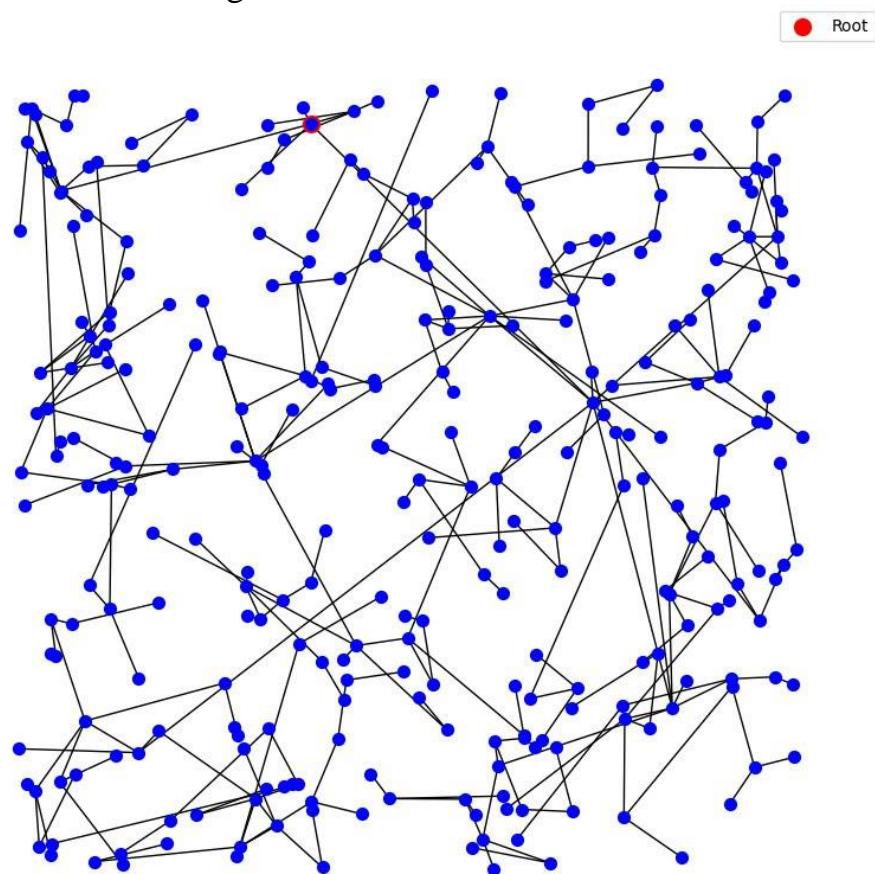
Exp_a1.0 _b0.5_degNone:



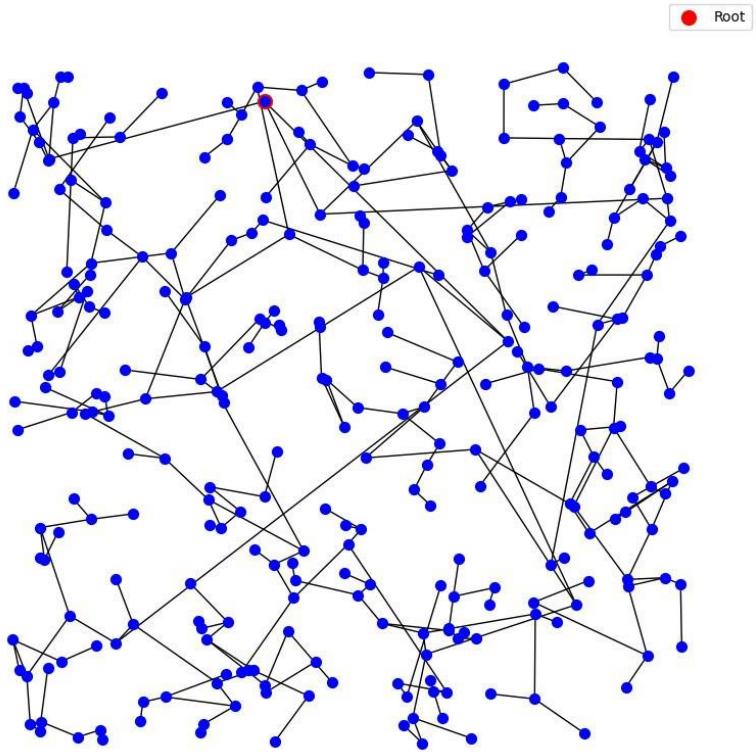
Exp_a1.0 _b0.8_deg3:



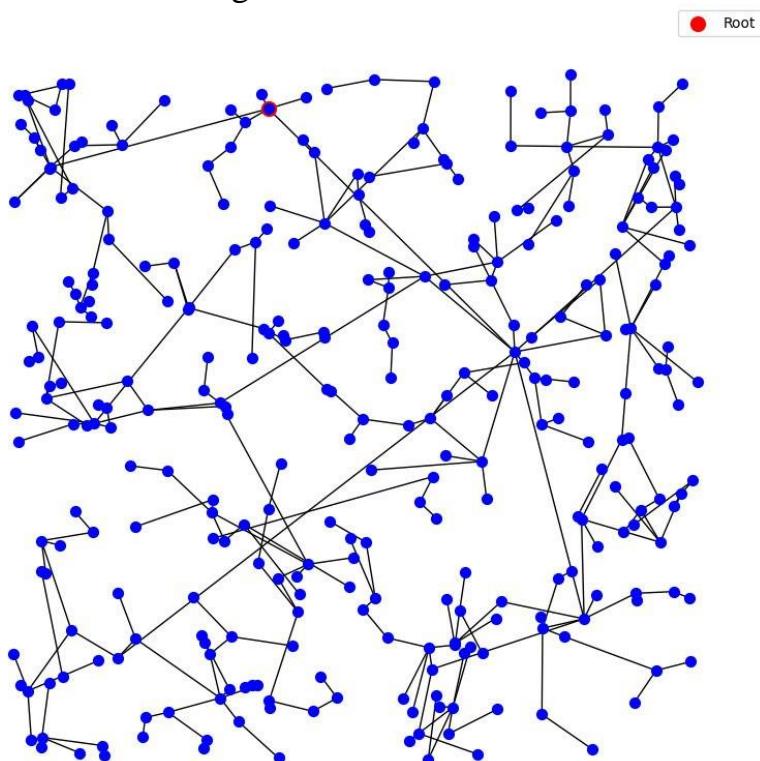
Exp_a1.0 _b0.8_degNone:



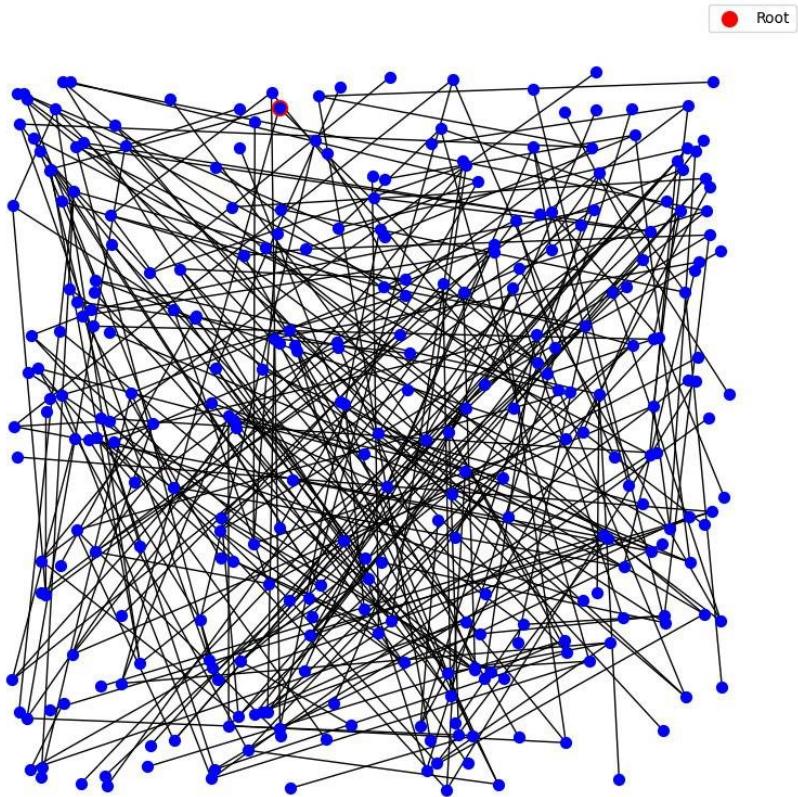
Exp_a1.0 _b1.0_deg3:



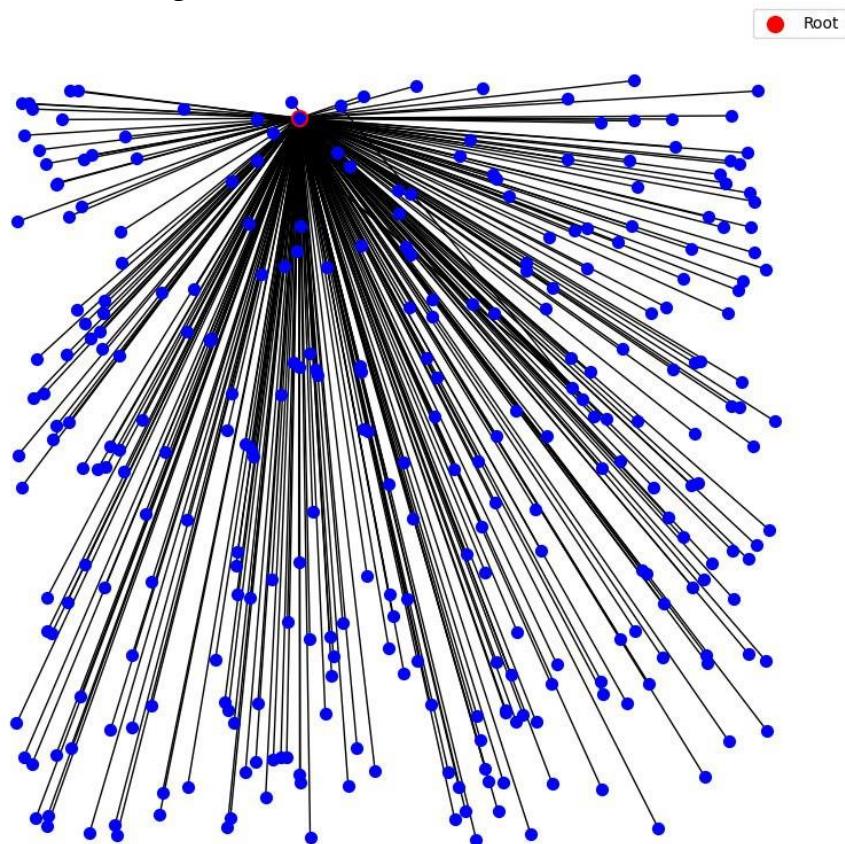
Exp_a1.0 _b1.0_degNone:



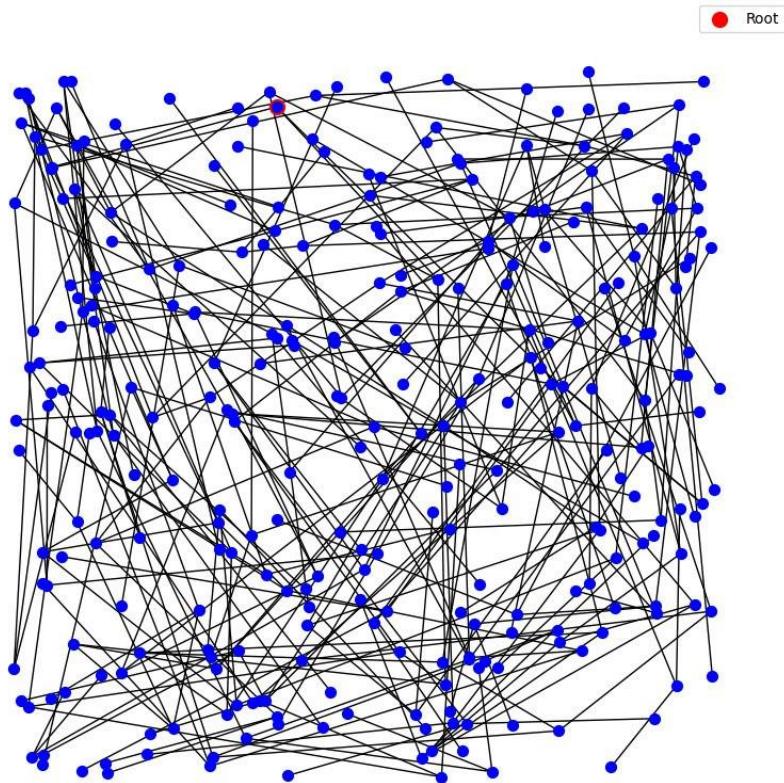
Power_b0.5_deg3:



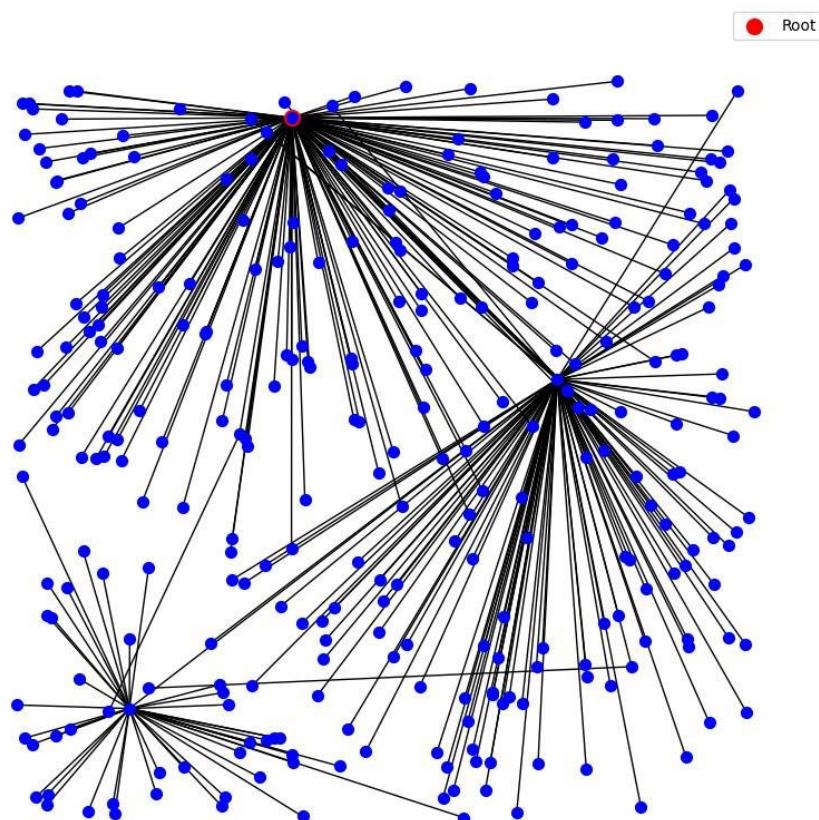
Power_b0.5_degNone:



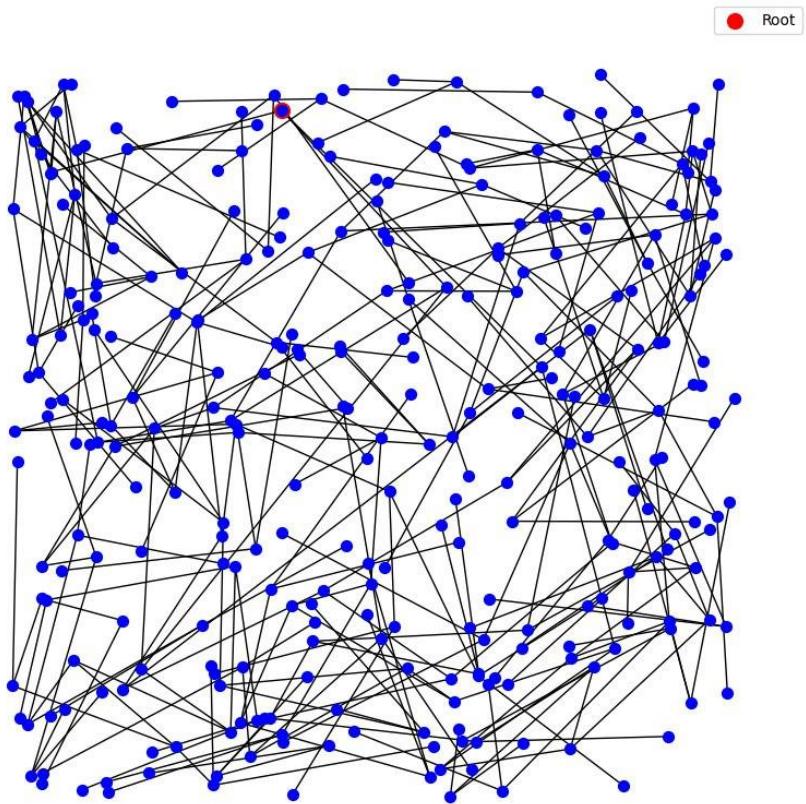
Power_b0.8_deg3:



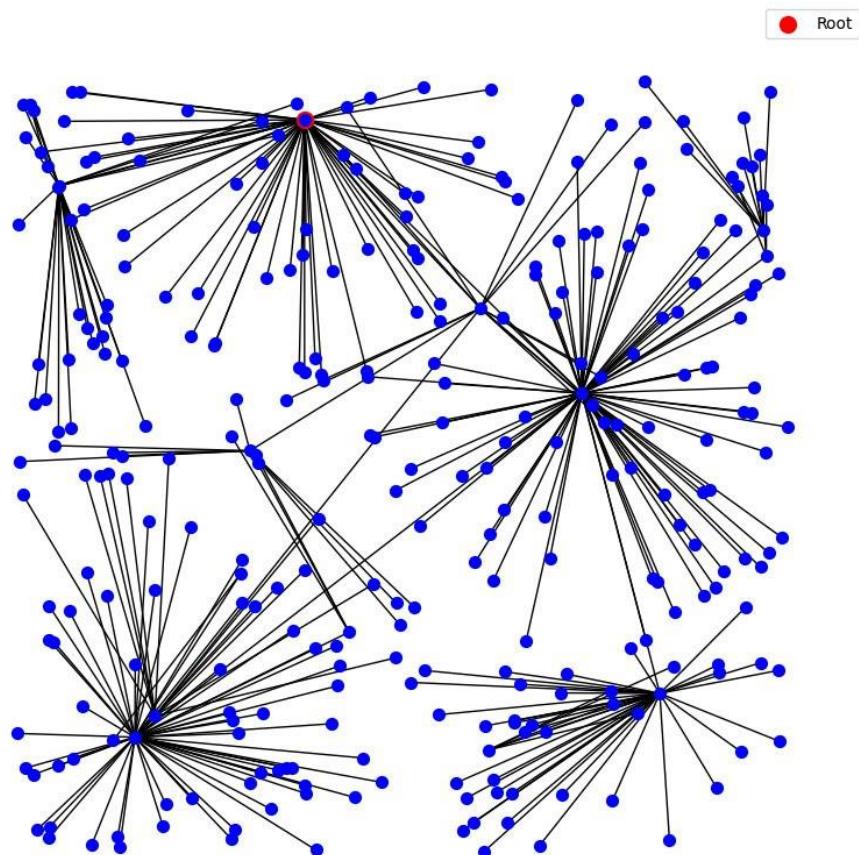
Power_b0.8_degNone:



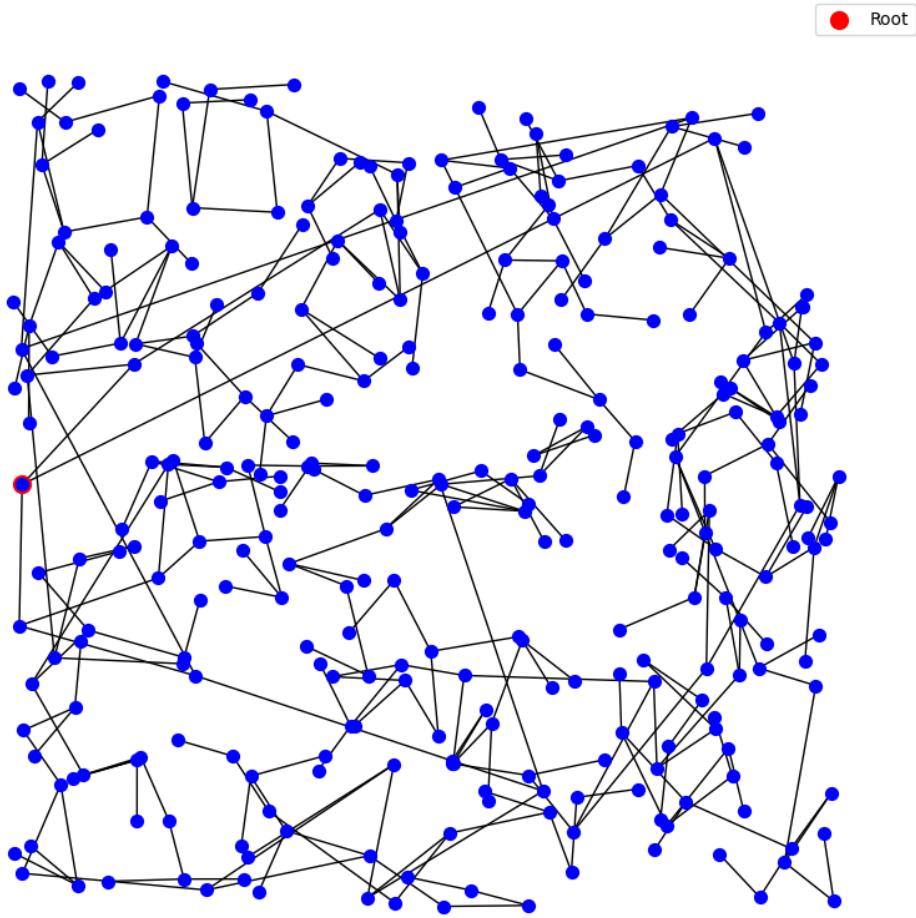
Power_b1.0_deg3:



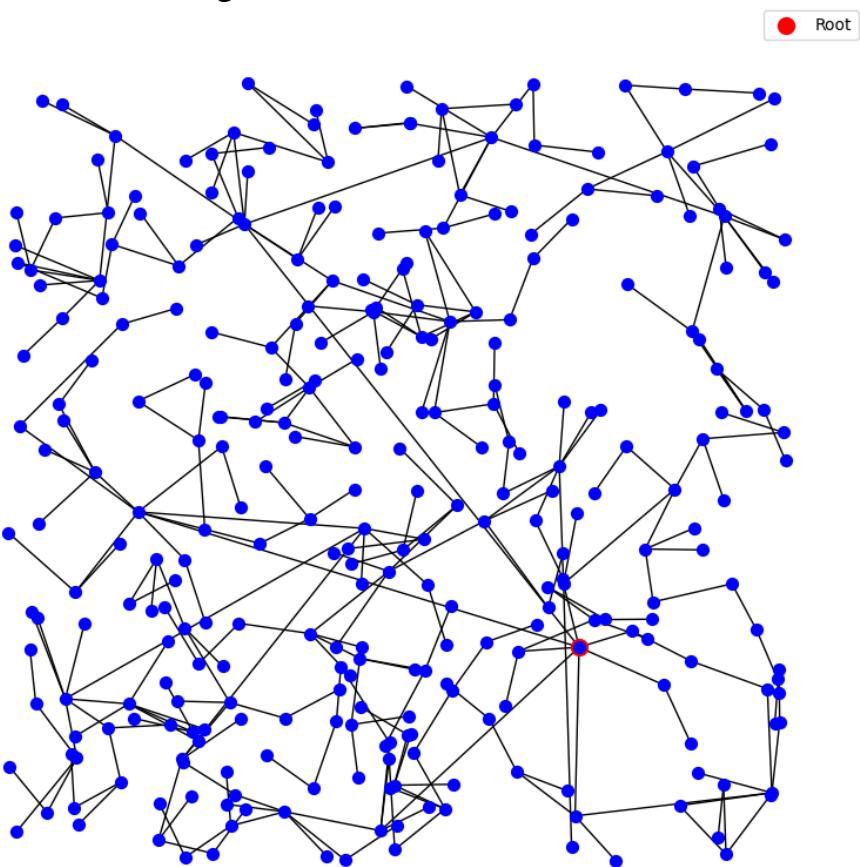
Power_b1.0_degNone:



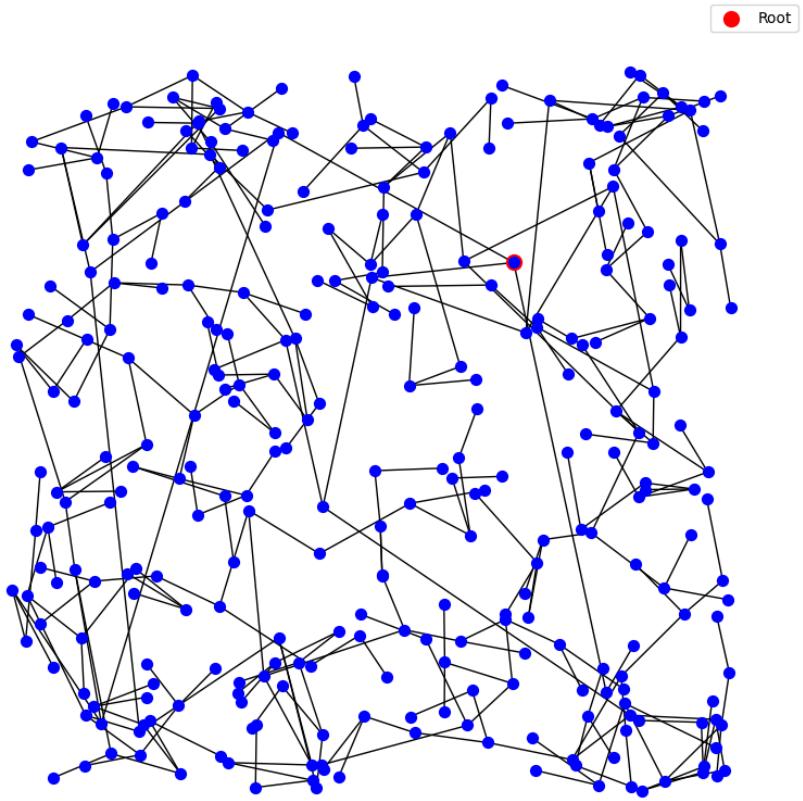
Эксперименты с случайной генерацией изначальных точек:
Exp_a0.1 _b0.2_deg3:



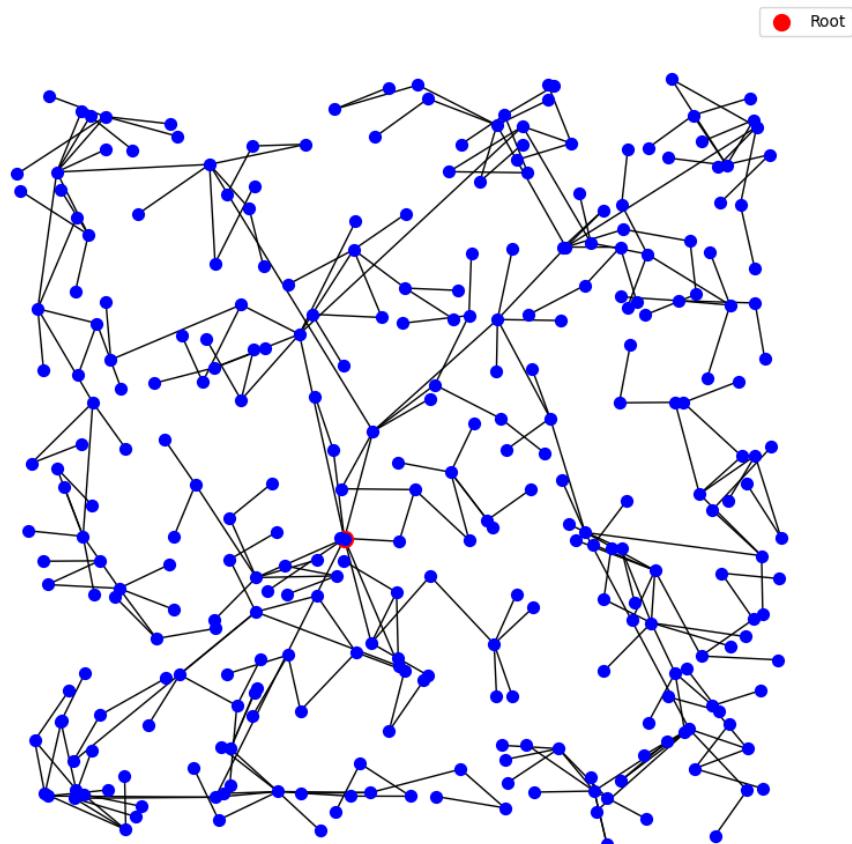
Exp_a0.1 _b0.2_degNone:



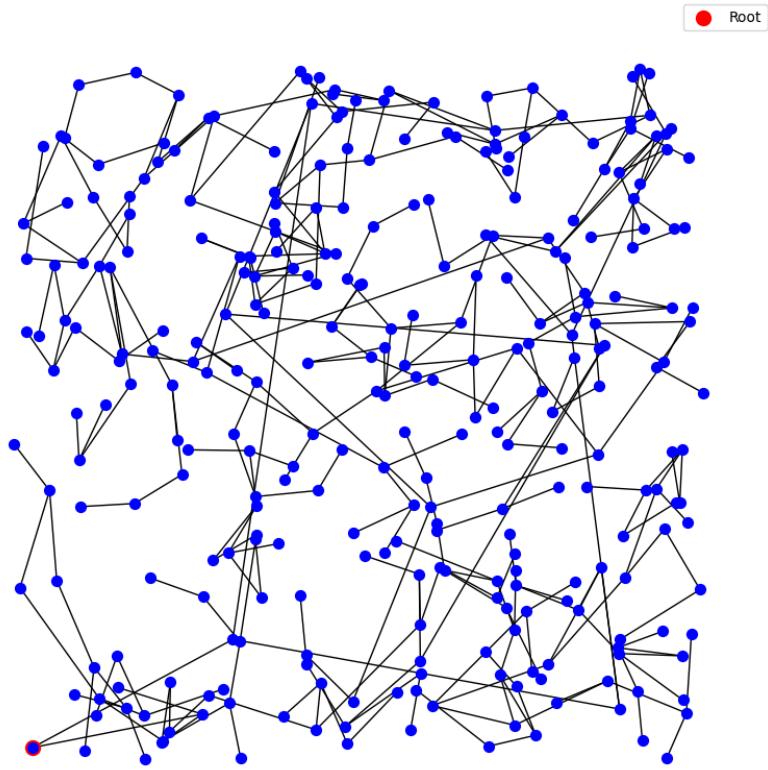
Exp_a0.1 _b0.5_deg3:



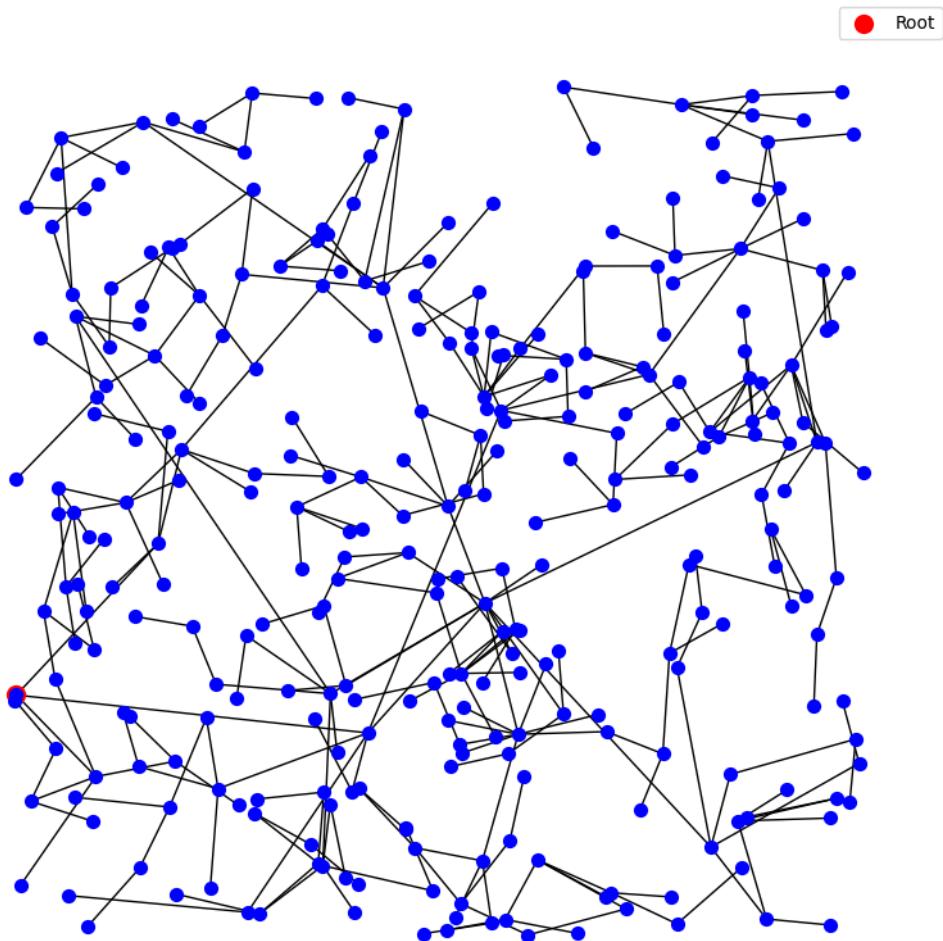
Exp_a0.1 _b0.5_degNone:



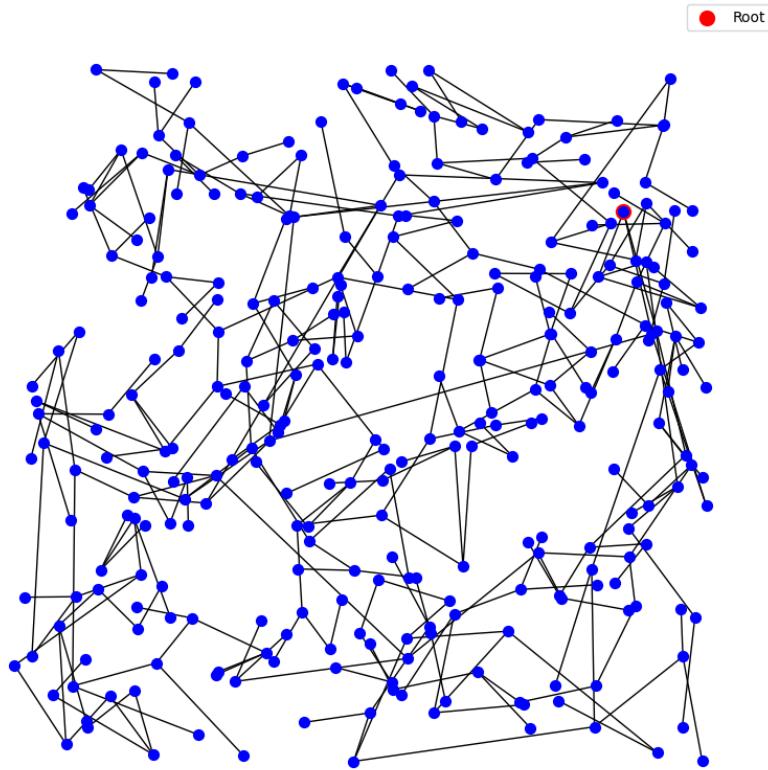
Exp_a0.1 _b1.0_deg3:



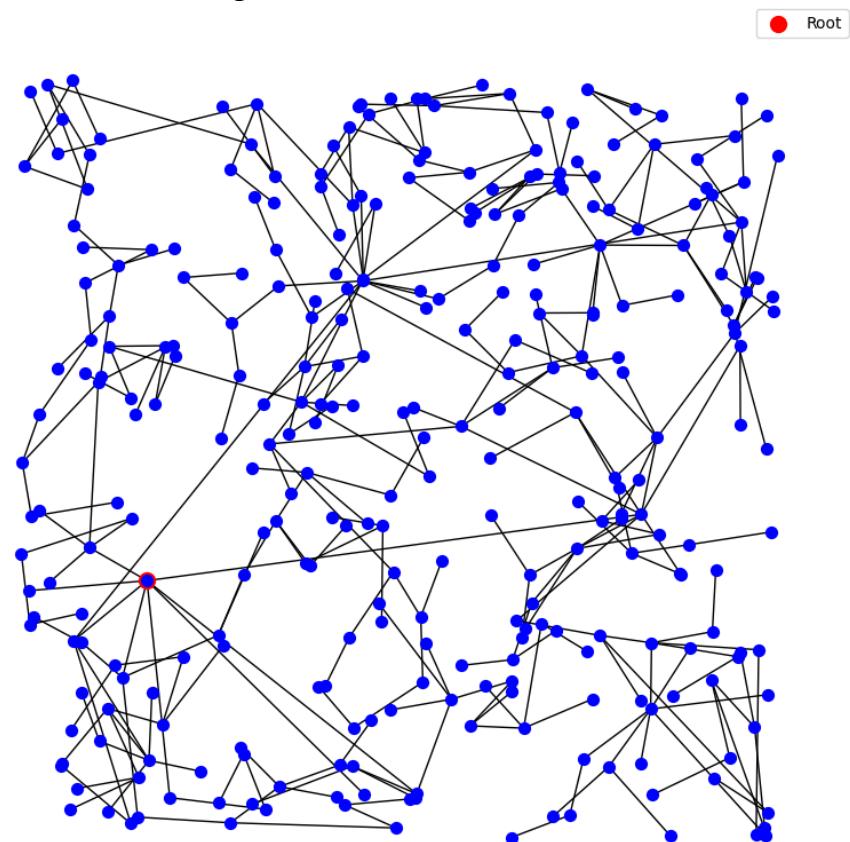
Exp_a0.1 _b1.0_degNone:



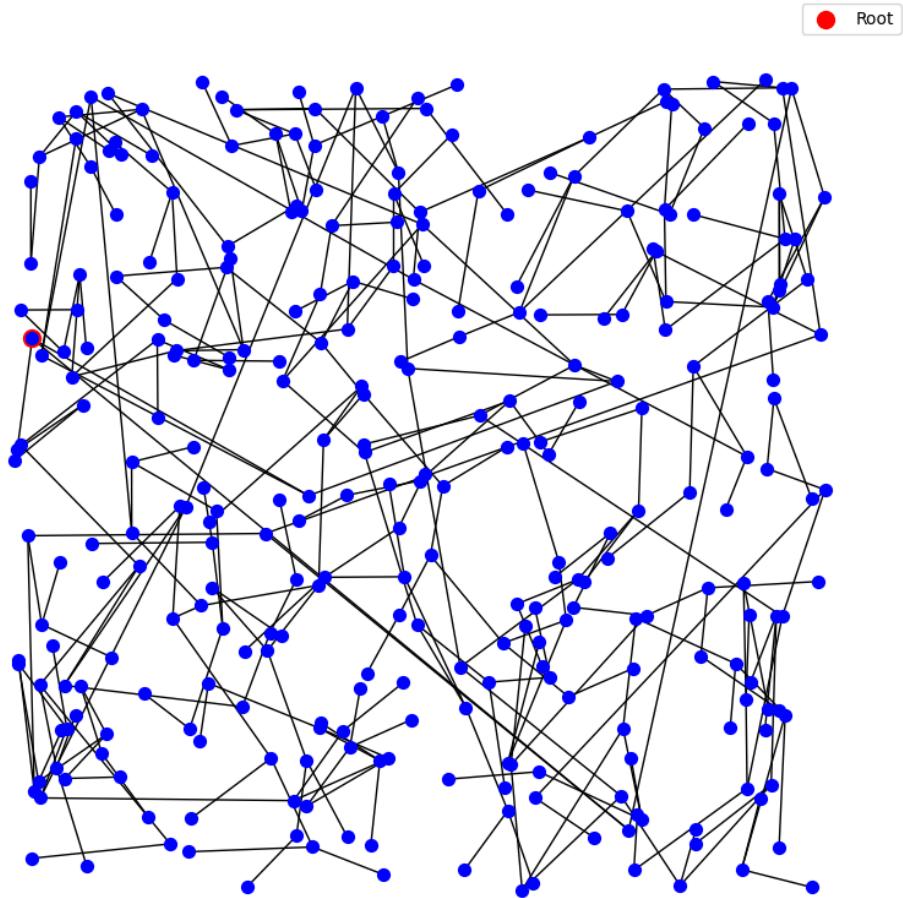
Exp_a0.5 _b0.2_deg3:



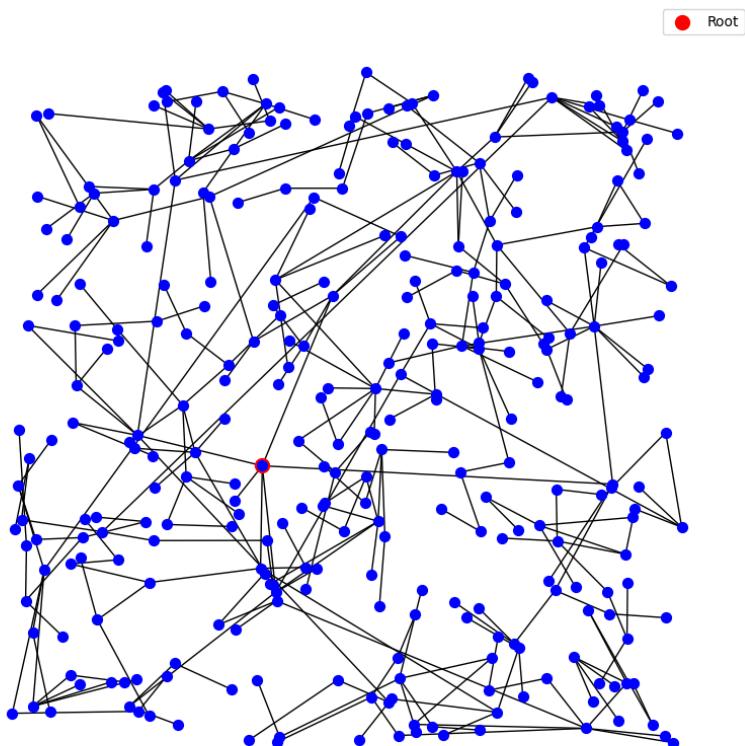
Exp_a0.5 _b0.2_degNone:



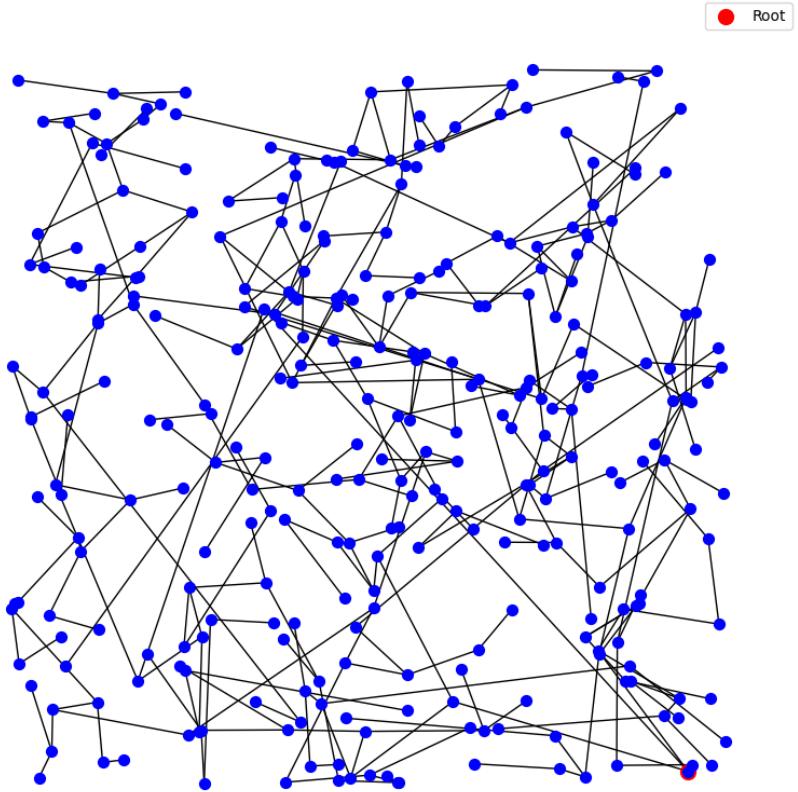
Exp_a0.5 _b0.5_deg3:



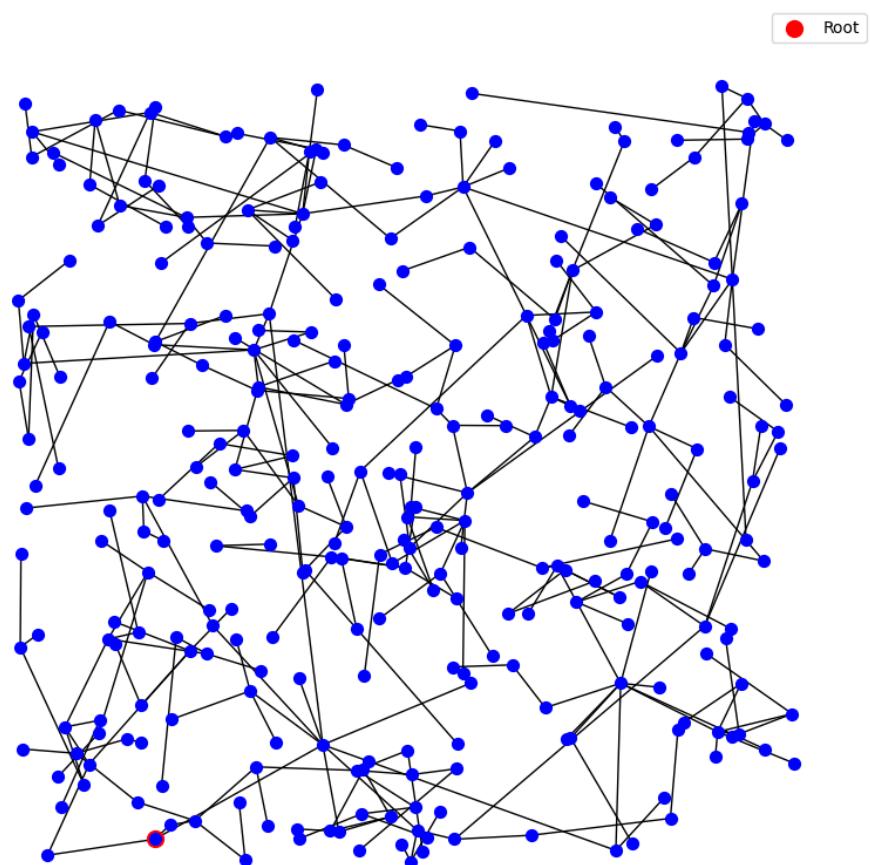
Exp_a0.5 _b0.5_degNone:



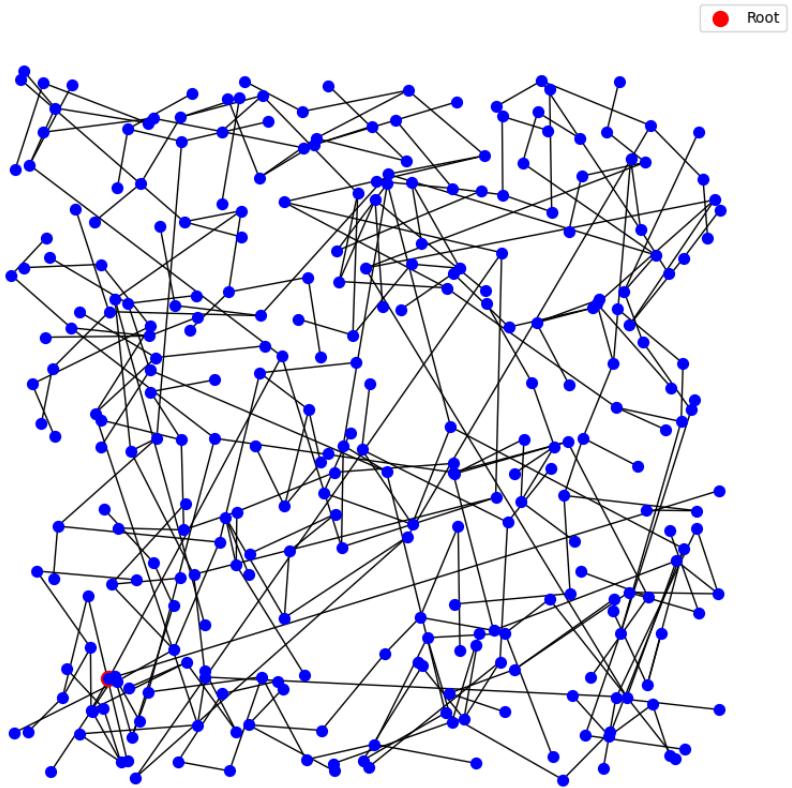
Exp_a0.5 _b1.0_deg3:



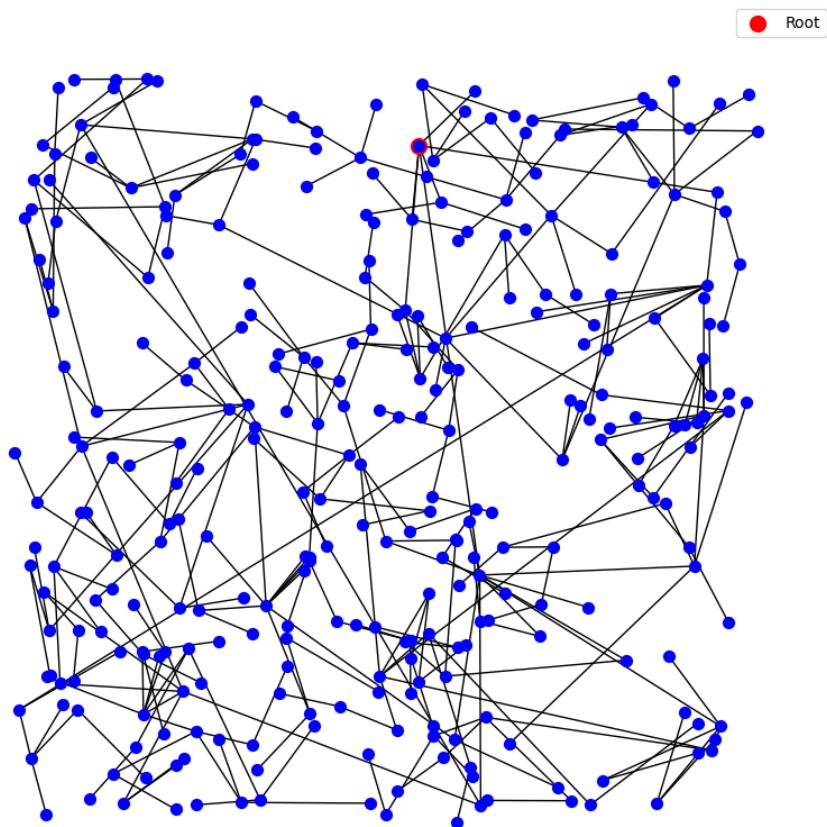
Exp_a0.5 _b1.0_degNone:



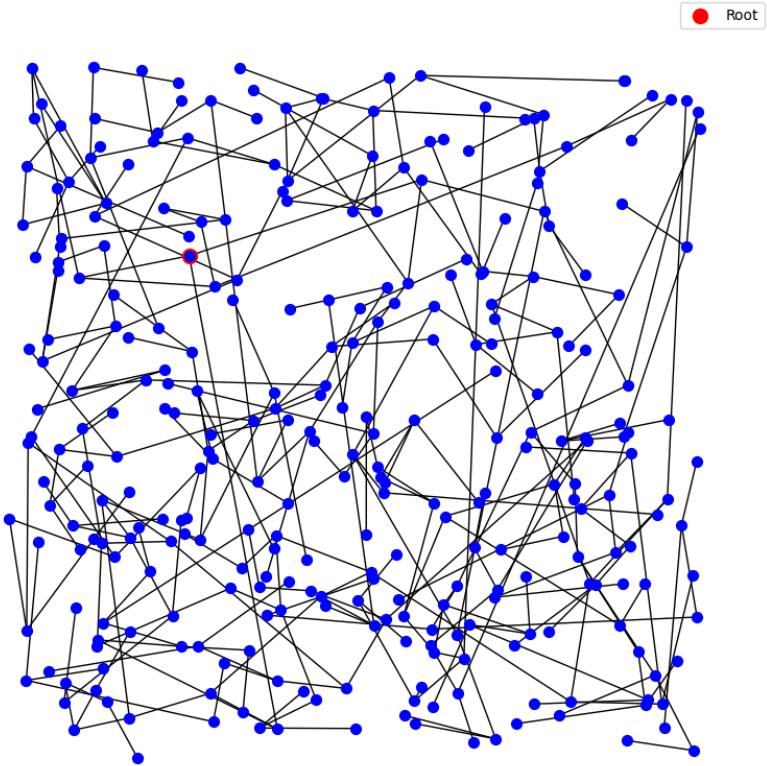
Exp_a1.0 _b0.2_deg3:



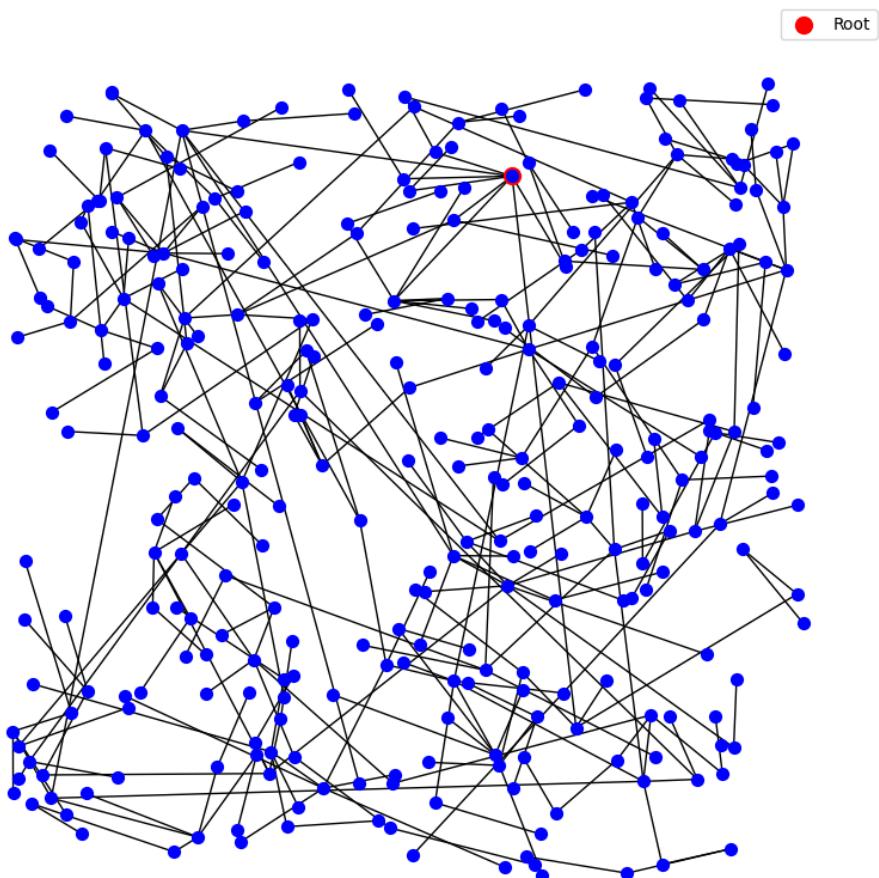
Exp_a1.0 _b0.2_degNone:



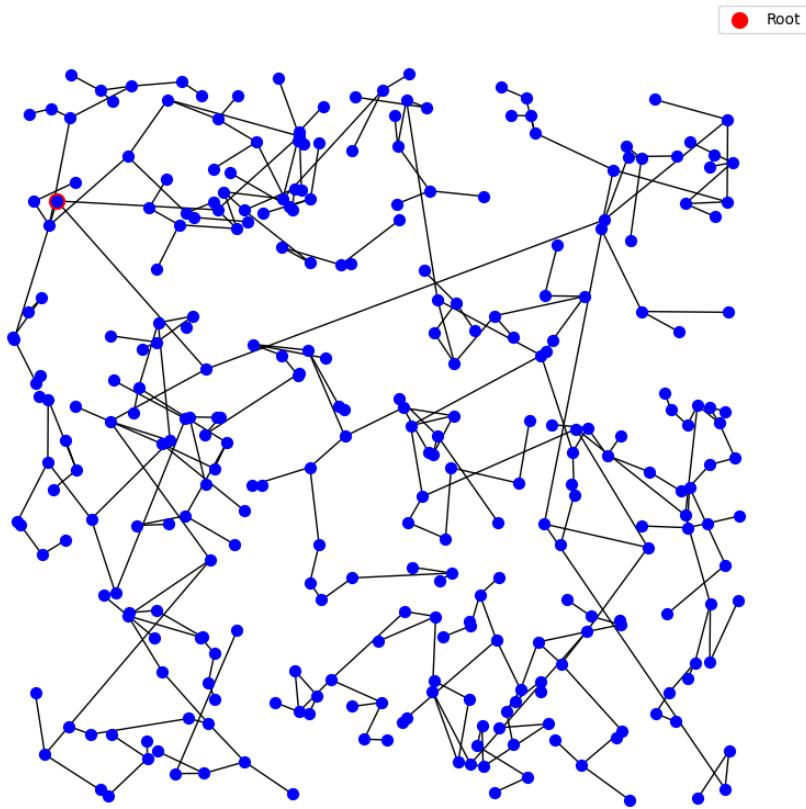
Exp_a1.0 _b0.5_deg3:



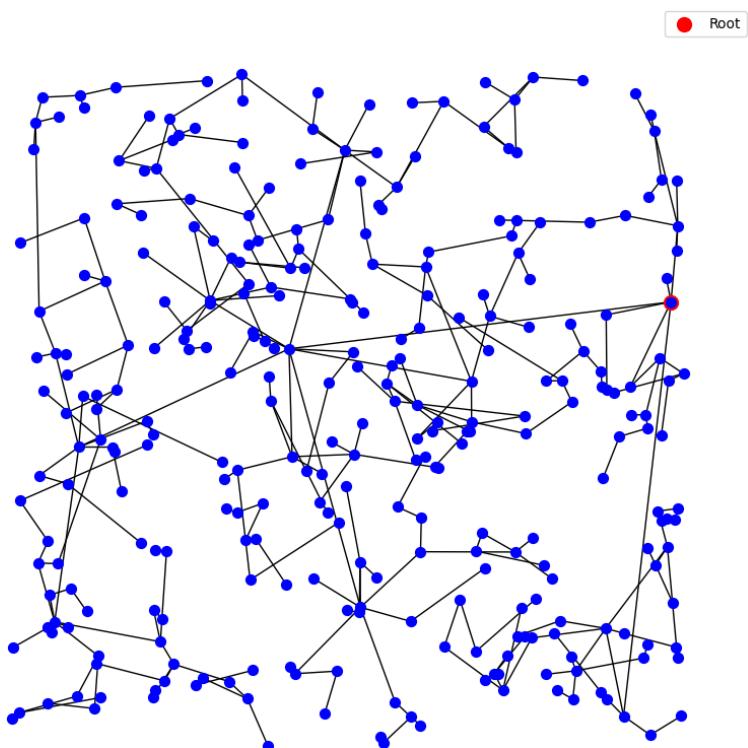
Exp_a1.0 _b0.5_degNone:



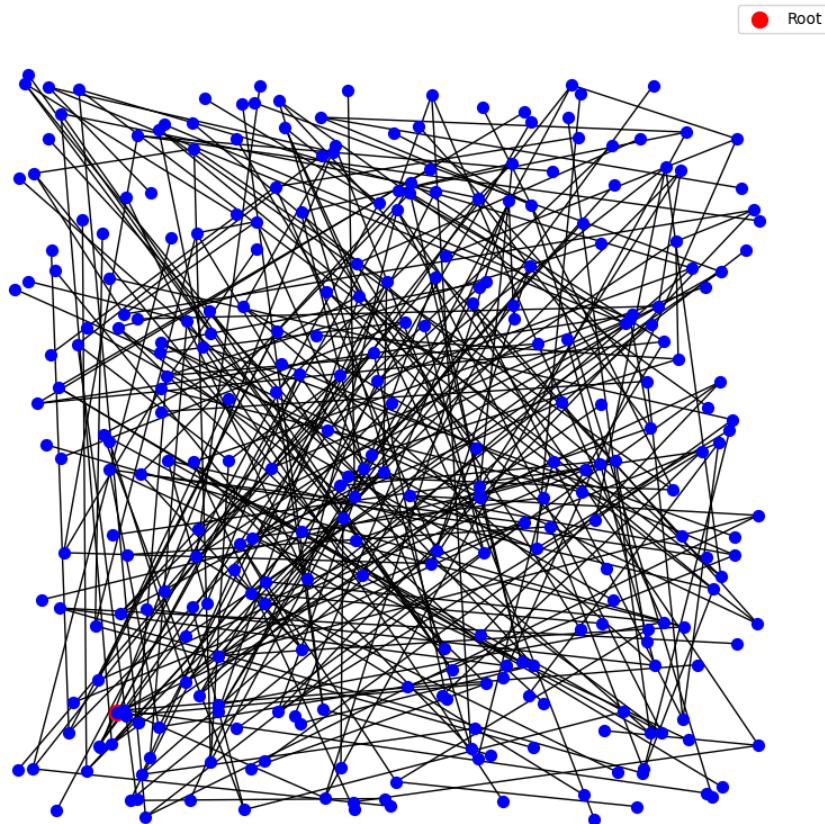
Exp_a1.0 _b1.0_deg3:



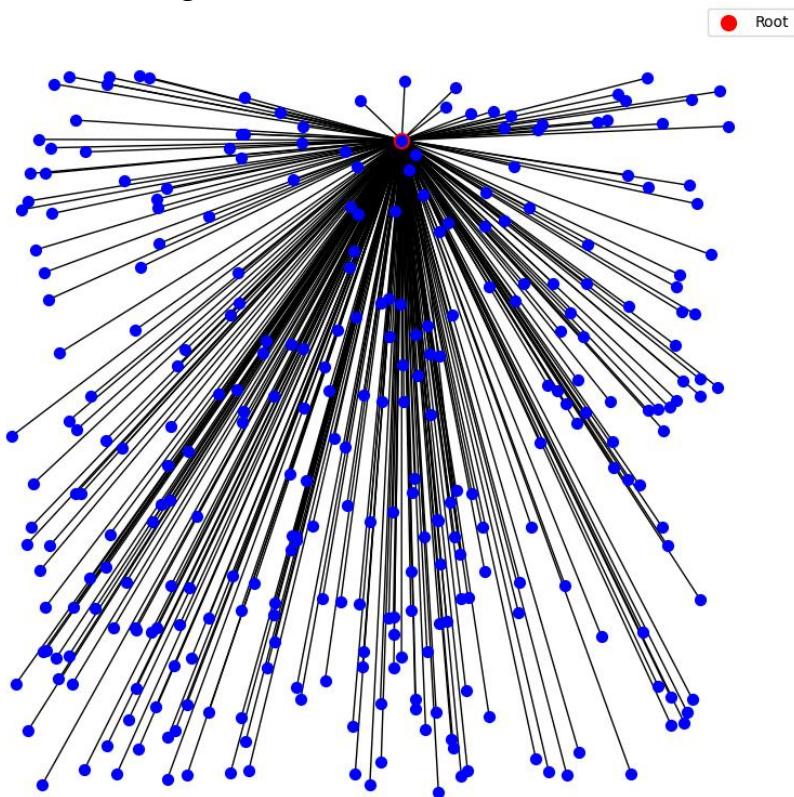
Exp_a1.0 _b1.0_degNone:



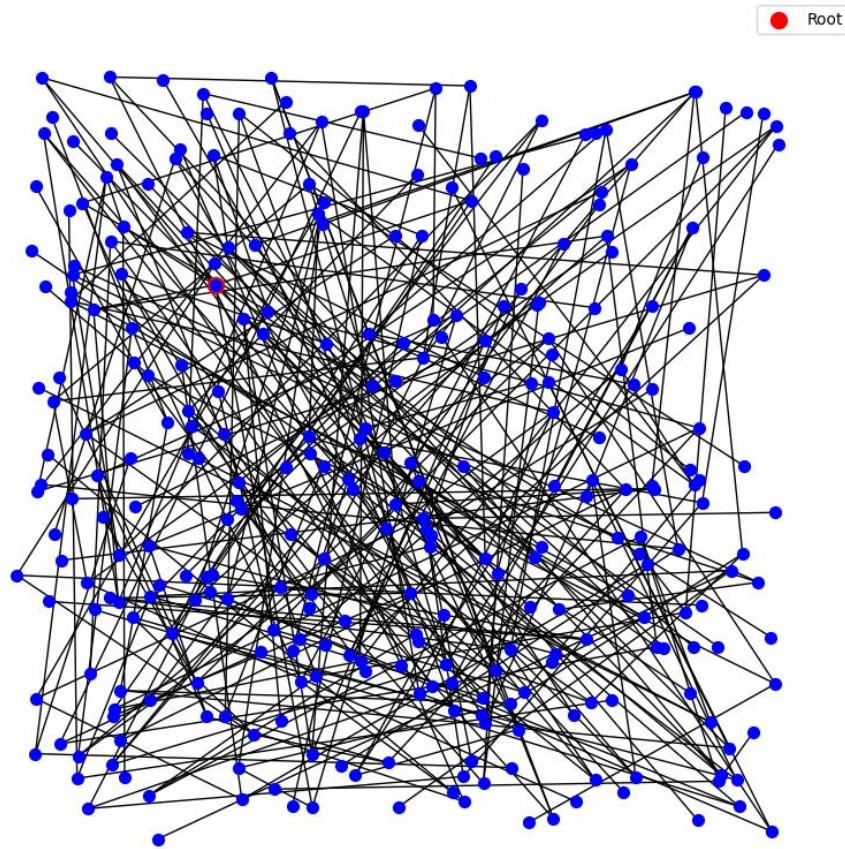
Power_b.0.2_deg3:



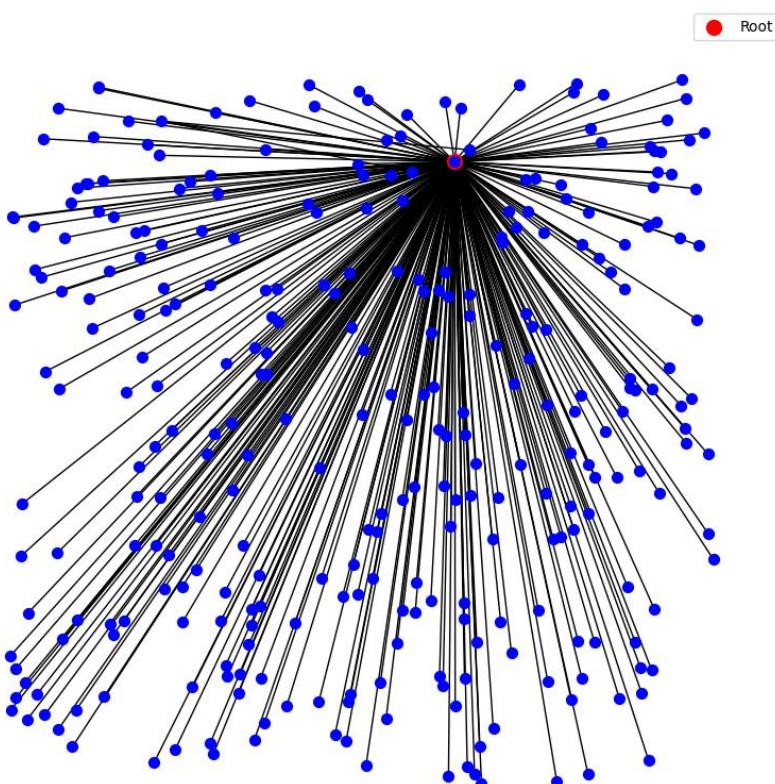
Power_b.0.2_degNone:



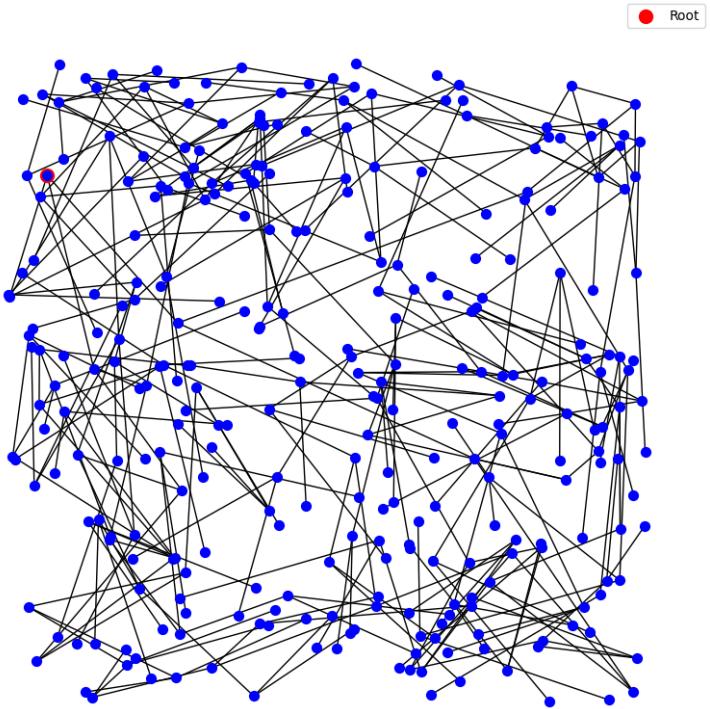
Power_b.0.5_deg3:



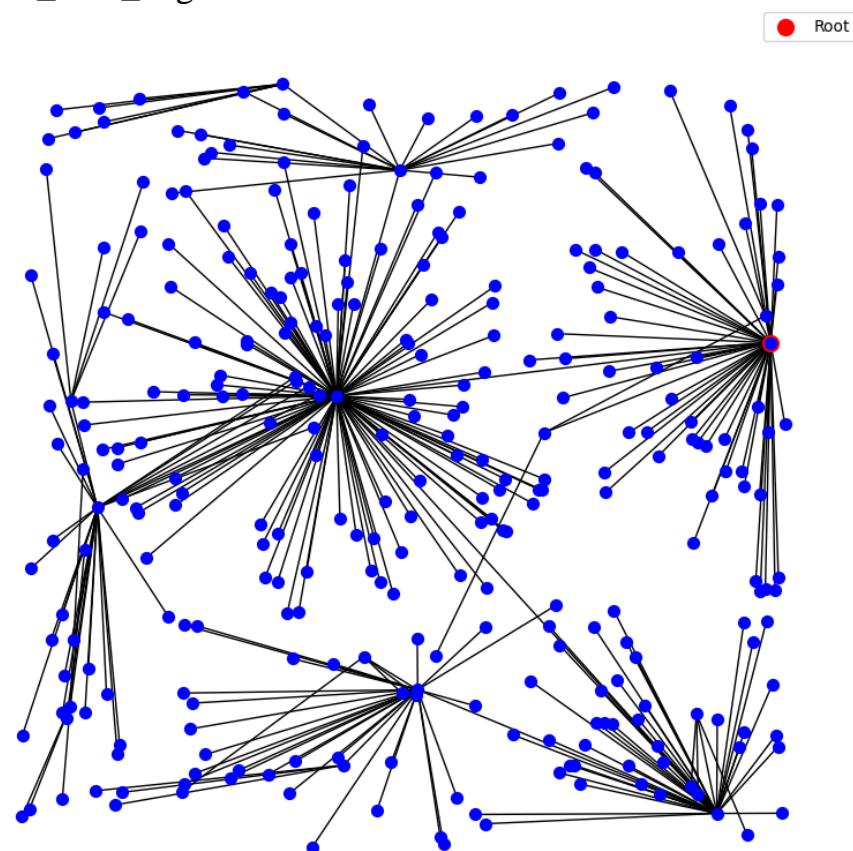
Power_b.0.5_degNone:



Power_b1.0_deg3:



Power_b1.0_degNone:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было проведено исследование влияния параметров a , b и максимальной степени вершин (`max_degrees`) на структуру случайных деревьев, построенных на плоскости. Для анализа использовались две вероятностные модели: экспоненциальное затухание и степенной закон. На основе этих моделей были сгенерированы и визуализированы деревья с различными комбинациями параметров.

Модель с экспоненциальным затуханием:

- Увеличение параметра a усиливало локальные связи, что приводило к формированию более компактных и плотных деревьев.
- Рост параметра b повышал разветвлённость дерева, сохраняя при этом короткие связи между вершинами.

Модель со степенным законом:

- Увеличение параметра b способствовало децентрализации структуры, подавляя длинные связи и увеличивая количество локальных кластеров.

Влияние параметра `max_degrees`:

- При малых значениях (например, 3) дерево приобретало вытянутую, линейную форму.
- При больших значениях или отсутствии ограничений структура становилась более разветвлённой.

Таким образом, исследование подтвердило гипотезы о роли параметров в формировании плотности связей и характера случайных деревьев. Полученные выводы могут служить основой для дальнейших исследований в области случайных графов, моделирования сетей или оптимизации структур данных.

Листинг программы:

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import networkx as nx

def generate_points(num_points, size=10, seed=42):
    """Генерация фиксированного набора точек с заданным seed для воспроизводимости"""

    np.random.seed(seed)

    points = np.random.uniform(0, size, (num_points, 2))
```

```

return points

def prob_exp(d, a, b):
    """Экспоненциальная вероятность:  $P(d) = e^{-a * d^b}$ """
    return np.exp(-a * d**b)

def prob_inverse(d, b):
    """Степенная вероятность:  $P(d) = \min(1, 10 / d^b)$ , если  $d > 1$ , иначе 1"""
    return min(1, 10 / d**b) if d > 1 else 1

def build_random_tree(points, prob_func, params, method, max_degree=None, min_dist=2, max_dist=40):
    """Построение случайного дерева на основе вероятностных функций с ограничениями"""

    n = len(points)
    G = nx.Graph()
    G.add_node(0) # Начинаем с корневой вершины
    connected_nodes = {0}

    for j in range(1, n):
        best_i = None
        max_p = 0

        # Пробуем соединить с существующей вершиной на основе вероятности
        for i in connected_nodes:
            if max_degree and G.degree(i) >= max_degree:
                continue
            d = np.linalg.norm(points[i] - points[j])
            if min_dist <= d <= max_dist:
                p = prob_func(d, *params)
                if p > max_p and np.random.rand() < p:
                    max_p = p
                    best_i = i

        if best_i is not None:
            G.add_edge(best_i, j)
        else:
            # Резервный вариант: соединяем с ближайшей доступной вершиной
            available_nodes = [i for i in connected_nodes if not max_degree or G.degree(i) < max_degree]

```

```

if available_nodes:

    closest = min(available_nodes, key=lambda i: np.linalg.norm(points[i] - points[j]))

    G.add_edge(closest, j)

    connected_nodes.add(j)

```

return G

```

def plot_tree(G, points, title, filename, root=0):

    """Отрисовка дерева с выделением корневой вершины"""

    pos = {i: points[i] for i in range(len(points))}

    plt.figure(figsize=(8, 8))

    nx.draw(G, pos, node_size=50, node_color='blue', with_labels=False)

    # Выделяем корневую вершину

    plt.scatter(points[root, 0], points[root, 1], color='red', s=100, label='Root')

    plt.title(title)

    plt.legend()

    plt.savefig(filename)

    plt.close()

# Параметры

num_points = 300

size = 30

seed = 42

points = generate_points(num_points, size, seed)

# Эксперименты

a_values = [0.1, 1.0, 10.0]

b_values = [0.5, 1.0, 2.0]

max_degrees = [3, 5, None] # None означает отсутствие ограничения

for a in a_values:

    for b in b_values:

        for max_deg in max_degrees:

            # Модель экспоненциального затухания

            G_exp = build_random_tree(points, prob_exp, (a, b), method="exp", max_degree=max_deg)

            title_exp = f'Экспоненциальное затухание: a={a}, b={b}, max_deg={max_deg}'

            filename_exp = f'exp_a{a}_b{b}_deg{max_deg}.png'

```

```
plot_tree(G_exp, points, title_exp, filename_exp)

# Модель степенного закона

G_power = build_random_tree(points, prob_inverse, (b,), method="inverse", max_degree=max_deg)

title_power = f'Степенной закон: b={b}, max_deg={max_deg}'

filename_power = f'power_b{b}_deg{max_deg}.png'

plot_tree(G_power, points, title_power, filename_power)
```