Министерство цифрового развития, связи и
массовых коммуникаций Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
по дисциплине «**Моделирование**»

Выполнил:
студент гр. ИС-142
«__» мая 2025 г. ____________ /Наумов А.А./

Проверил:
преподаватель
«__» мая 2025 г. ____________ /Уженцева А.В./

Оценка « ________»

Новосибирск 2025

ВВЕДЕНИЕ

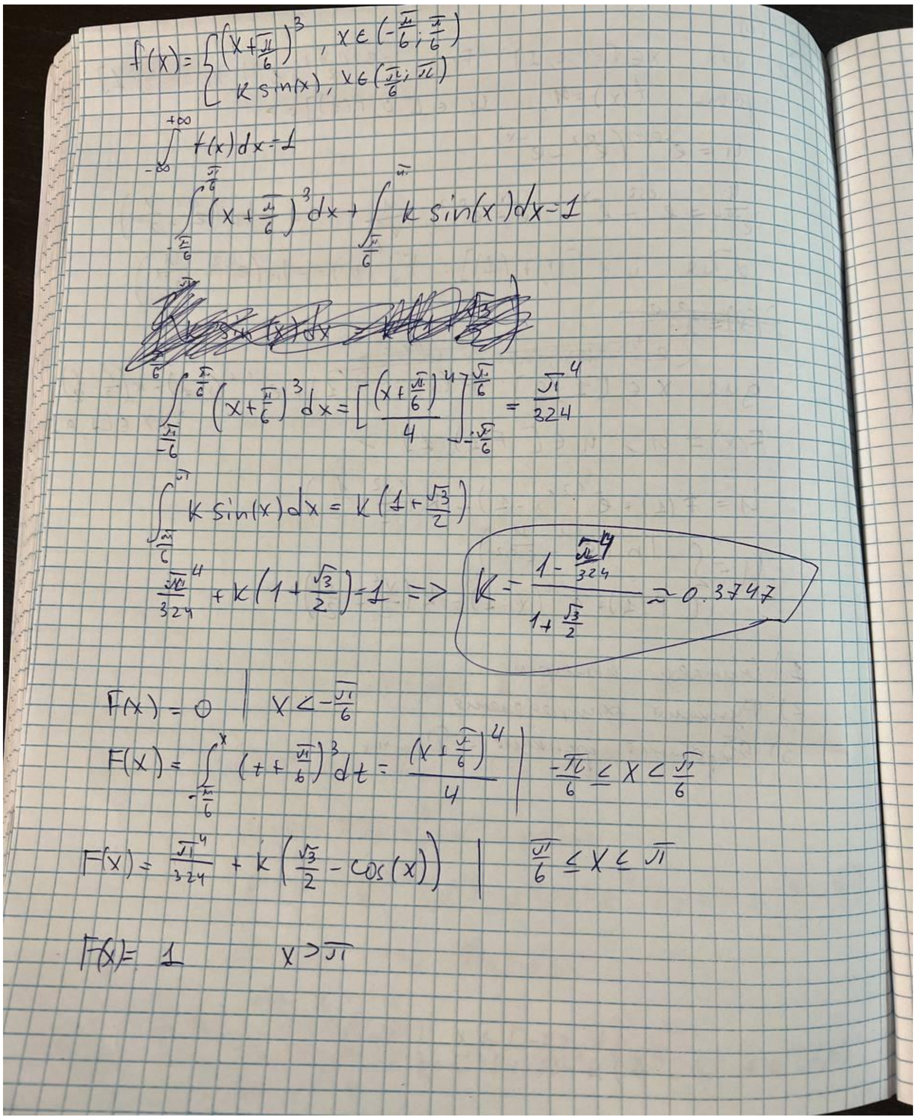
В данной работе рассматривалась задача моделирования случайной величины с заданной функцией плотности распределения f(x). Цель работы заключалась в нахождении функции распределения F(x), определении коэффициента k, необходимого для построении обратной функции генерации случайных величин и визуализации результатов с помощью гистограммы и графика плотности распределения.

Функция плотности распределения f(x) задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi/6)^3, & \text{при } x \in (-\pi/6, \pi/6); \\ k\,\sin(x), & \text{при } x \in (\pi/6, \pi). \end{cases}$$

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Математические вычисления:



$$f(x) = \begin{cases} \left(x+\frac{\pi}{6}\right)^3, & x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \\ k\sin(x), & x \in \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(x+\frac{\pi}{6}\right)^3 dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} k\sin(x)dx = 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(x+\frac{\pi}{6}\right)^3 dx = \left[\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^4}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^4}{324}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} k\sin(x)dx = k\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

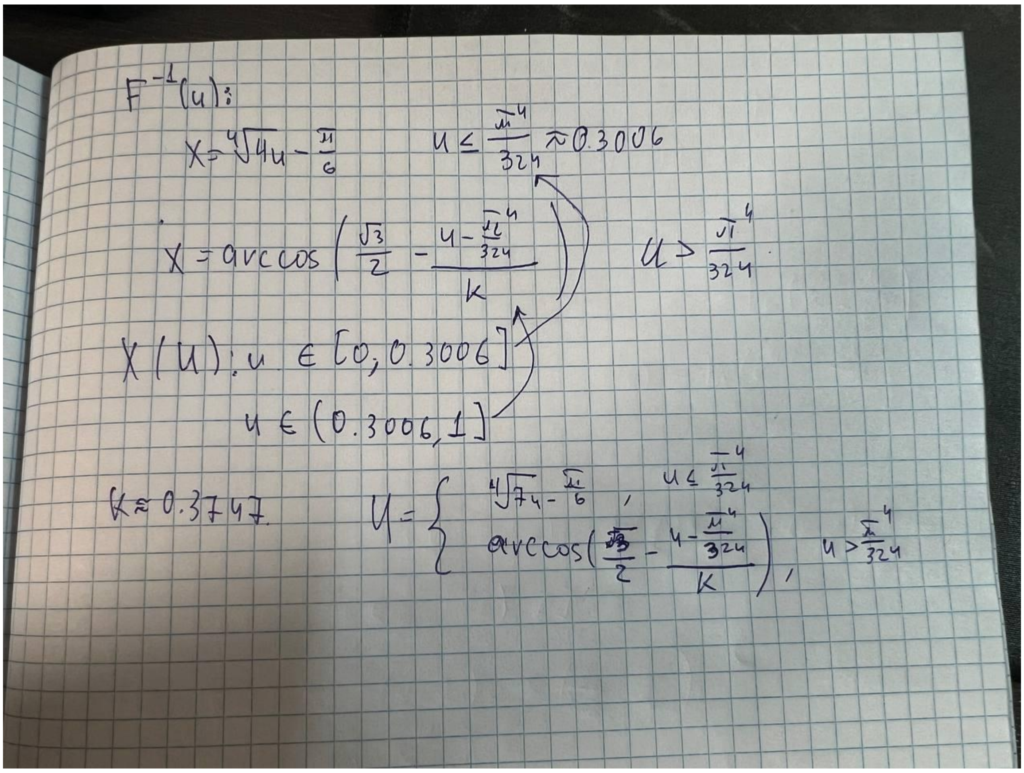
$$\frac{\pi^4}{324} + k\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{1-\frac{\pi^4}{324}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0.3747$$

$$F(x) = 0 \quad \Big| \quad x < -\frac{\pi}{6}$$

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{x} \left(t+\frac{\pi}{6}\right)^3 dt = \frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^4}{4} \quad \Big| \quad -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$$

$$F(x) = \frac{\pi^4}{324} + k\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(x)\right) \quad \Big| \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \pi$$

$$F(x) = 1 \qquad x > \pi$$



$F^{-1}(u)$:

$x = \sqrt[4]{4u} - \frac{\pi}{6} \qquad u \le \frac{\pi^4}{324} \approx 0.3006$

$x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u - \frac{\pi^4}{324}}{k}\right) \qquad u > \frac{\pi^4}{324}$

$X(U)$: $u \in [0; 0.3006]$

$u \in (0.3006, 1]$

$k \approx 0.3747$

$$U = \begin{cases} \sqrt[4]{4u} - \frac{\pi}{6}, & u \le \frac{\pi^4}{324} \\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{u - \frac{\pi^4}{324}}{k}\right), & u > \frac{\pi^4}{324} \end{cases}$$

Найдена обратная функция X(U) ((Fx)^-1).

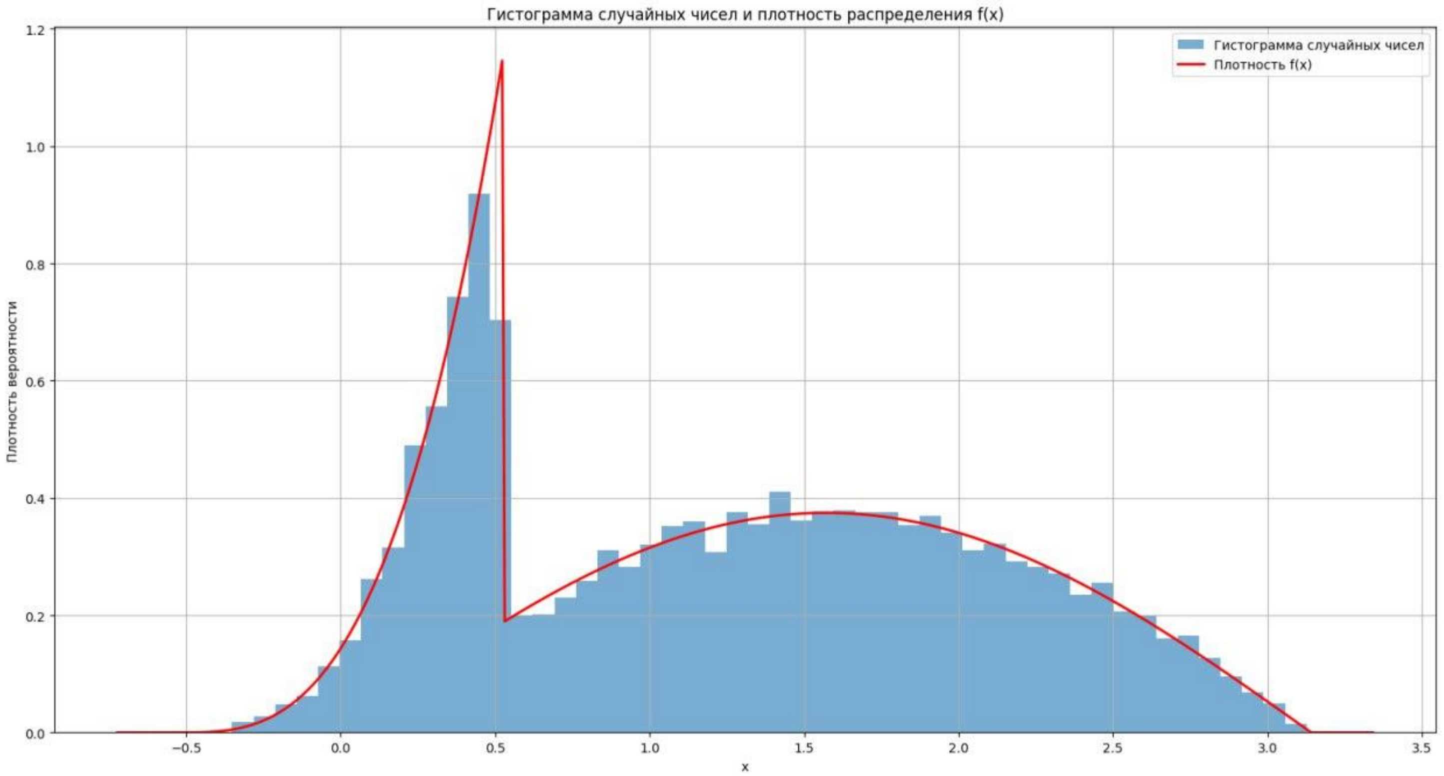
Для реализации алгоритма была написана программа на Python, которая наглядно показывает гистограмму сгенерированных данных и исходную плотность F(X).

Программный код

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Коэффициент k
k = 0.3747


# Функция обратного преобразования
def inverse_transform(u):
    pi_6 = np.pi / 6
    threshold = (np.pi ** 4) / 324  # 0.3006

    if u <= threshold:
        return (4 * u) ** (1 / 4) - pi_6
    else:
        return np.arccos((np.sqrt(3) / 2) - (u - threshold) / k)


# Генерация случайных чисел
N = 10000  # Количество выборок
random_numbers = np.random.uniform(0, 1, N)
samples = np.array([inverse_transform(u) for u in random_numbers])


# Функция плотности f(x)
```

```
def f_x(x):
    if -np.pi/6 <= x < np.pi/6:
        return (x + np.pi/6) ** 3
    elif np.pi/6 <= x <= np.pi:
        return k * np.sin(x)
    return 0

# Создаем точки для f(x)
x_vals = np.linspace(-np.pi/6 - 0.2, np.pi + 0.2, 500)
y_vals = np.array([f_x(x) for x in x_vals])

# Построение гистограммы и графика плотности
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.hist(samples, bins=50, density=True, alpha=0.6, label="Гистограмма случайных чисел")
plt.plot(x_vals, y_vals, 'r', label="Плотность f(x)", linewidth=2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("Плотность вероятности")
plt.legend()
plt.title("Гистограмма случайных чисел и плотность распределения f(x)")
plt.grid()
plt.show()
```

Гистограмма сгенерированных данных хорошо повторяет график исходной плотности распределения f(x), что подтверждает корректность работы алгоритма.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были выполнены следующие этапы:

1. Найден коэффициент k для функции плотности распределения f(x).

2. Построена функция распределения F(x) и обратная функция для генерации случайных величин.

3. Реализован алгоритм на языке Python для генерации случайных величин и визуализации результатов.

Результаты работы подтвердили, что метод обратной функции корректно моделирует случайные величины с заданной плотностью распределения. Гистограмма сгенерированных данных совпадает с графиком исходной плотности, что свидетельствует о правильности выполнения всех этапов работы.