Problema 1:

Como asignamos: $\begin{cases} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z \\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 \end{cases}$

y Como

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} N & M & K & G & N & N & E & C & T & I & P & J & \cancel{X} & T & L & T & E & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 13 & 12 & 10 & 6 & 13 & 13 & 4 & 2 & 19 & 8 & 15 & 9 & 23 & 19 & 11 & 19 & 4 & 2 \end{array}$$

"sabemos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 0 & 11 & 6 & 20 & 13 & 0 & 18 & 2 & 14 & 13 & 9 & 4 & 19 & 20 & 17 & 0 & 18 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & L & G & U & N & A & S & C & O & N & J & E & T & U & R & A & S \end{array}$$

entonces si consideramos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz de descifrado, tenemos que.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 13a + 12b \equiv 0 \pmod{26} \\ 13c + 12d \equiv 11 \pmod{26} \end{array}$$

por lo tanto $13a + 12b \equiv 0 \pmod{13}$ y $13a + 12b \equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow$ $12b \equiv 0 \pmod{13}$ y $13a \equiv 0 \pmod 2$

pues $13 \equiv 0 \pmod{13}$ y $12 \equiv 0 \pmod 2$

Así $b \equiv 0 \pmod{13}$ y $a \equiv 0 \pmod 2$, es decir

$b \in \{0, 13\}$ y a es par $(a \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\})$

De igual manera como $13c + 12d \equiv 11 \pmod{26}$ entonces

$13c + 12d \equiv 11 \pmod{13}$ y $13c + 12d \equiv 11 \pmod 2$, así

$12d \equiv 11 \pmod{13}$ y $13c \equiv 11 \pmod 2$

$\Rightarrow$ $(-1)(12)d \equiv (-1)(11) \pmod{13}$ y $13c \equiv c \equiv 11 \pmod 2$

$\Rightarrow$ $(-12)d \equiv d \equiv -11 \equiv 2 \pmod{13}$ y $c \equiv 1 \pmod 2$

es decir $d \in \{2, 15\}$ y c es impar $(c \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25\})$

De igual manera $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así $13a + 13b \equiv 13 \pmod{26}$ y $13c + 13d \equiv 0 \pmod{26}$

$\Rightarrow$ $13a + 13b \equiv 13 \pmod 2$ y $13c + 13d \equiv 0 \pmod 2$

así $13(a+b) \equiv 13 \pmod 2$ y $13(c+d) \equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow$ $a + b \equiv 1 \pmod 2$ y $c + d \equiv 0 \pmod 2$

es decir a y b son de distinta paridad y c y d son de la misma paridad. Por lo tanto como a es par entonces b es impar y como $b \in \{0, 13\}$, entonces $\underline{\underline{b = 13}}$. De igual manera como c es impar, entonces d es impar y como $d \in \{2, 15\}$ entonces $\underline{\underline{d = 15}}$.

Ahora como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{matrix} 10a + 6b \equiv 6 \pmod{26} \\ 10c + 6d \equiv 20 \pmod{26} \end{matrix}$

Así como $10a + 6b \equiv 6 \pmod{26}$ entonces:

$$10a + 6b \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow 5a + 3b \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 5a + 3(13) \equiv 5a \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 5a \equiv 3 \pmod{13}$$

así: $5(5a) \equiv 25a \equiv 12a \equiv 5(3) \equiv 15 \equiv 2 \pmod{13}$

$$\Rightarrow 12a \equiv 2 \pmod{13} \Rightarrow (-1)12a \equiv (-1)(2) \pmod{13}$$

$$\Rightarrow -12a \equiv a \equiv -2 \equiv 11 \pmod{13} \quad \text{así } a \in \{11, 24\}$$

pero a es par por lo tanto $\underline{\underline{a = 24}}$

De igual manera como $10c + 6d \equiv 20 \bmod 26$

$$\Rightarrow 5c + 3d \equiv 10 \pmod{13} \Rightarrow 5c + 3(15) \equiv 10 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 5c + 3(15) \equiv 5c + 3(2) \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 5c \equiv 10 - 6 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 8(5c) \equiv 40c \equiv 40c - 39c \equiv c \equiv 8(4) \equiv 32 \equiv 32 - 26 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow c \equiv 6 \pmod{13} \quad \text{y así } c \in \{6, 19\} \text{ y } c \text{ es impar}$$

por lo tant $\underline{\underline{c = 19}}$. Así la matriz de descifrado es $\underline{\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ 19 & 15 \end{pmatrix}}$ y su inversa es $\begin{pmatrix} 15 & -13 \\ -19 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}$ la matriz de cifrado.

Texto en claro del problema 3

ALGUNAS CONJETURAS CLASICAS DE LA TEORIA DE NUMEROS HABIAN SIDO REFRACTARIAS A LOS ESFUERZOS DE VARIAS GENERACIONES DE MATEMATICOS AL AXIOMATIZAR LAS MATEMATICAS DESDE LA TEORIA DE CONJUNTOS SURGIERON NUEVOS PROBLEMAS SE TRATABA DE VARIAS PROPOSICIONES CUYA VALIDEZ SE CUESTIONABA EL AXIOMA DE ELECCION DADA UNA FAMILIA DE CONJUNTOS NO VACIOS ES POSIBLE FORMAR UN CONJUNTO TOMANDO UN ELEMENTO DE CADA UNO DE ELLOS EQUIVALENTE AL TEOREMA DE ZERMELO TODO CONJUNTO PUEDE SER BIEN ORDENADO LA HIPOTESIS DEL CONTINUO DE CANTOR TODO SUBCONJUNTO INFINITO DER ES NUMERABLE TIENE EL CARDINAL DE NO TIENE LA POTENCIA DEL CONTINUO EL CARDINAL DERDE DONDE SE DEDUCE NO HABER NINGUNA CARDINALIDAD INTERMEDIA ENTRE LAS DEN Y DER EL TEOREMA DE GODEL PRUEBA QUE EN TODO SISTEMA AXIOMATICO QUE CONTENGA LA AXIOMATICA DEL NUMERO NATURAL PUEDEN FORMULARSE INFINITAS PROPOSICIONES QUE SON INDECIDIBLES ES DECIR QUE SI EL SISTEMA ES CONSISTENTE SIGUE SIENDOLO TANTO SI LE ANADIMOS UNA DE ESAS PROPOSICIONES COMO SI LE ANADIMOS SU NEGACION GODEL PROBO QUE LA HIPOTESIS DEL CONTINUO ES CONSISTENTE CON LA AXIOMATICA CONJUNTISTA COHEN PROBO QUE TAMBIEN LO ES SU NEGACION AL IGUAL QUE EL AXIOMA DE ELECCION SE TRATA DE UNA PROPOSICIN INDECIDIBLE PARA TRABAJAR CON ELLAS SE PROPONE INCORPORARLAS A DICHO SISTEMA DE AXIOMAS.