

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials

Dinàmica de Gasos i Transferència de Calor i Massa

Pràctica de mètodes numèrics: A Two-dimensional Transient Conduction Problem

Grup 11

Autor:

Leon Delgado, Alexis

Professor:

Pérez Segarra, Carlos David

Índex

1 Descripció del cas i plantejament de la metodologia de resolució amb organigrama de l'algoritme de càlcul	3
1.1 Definició del problema	3
1.1.1 Condicions de contorn	3
1.2 Resolució del problema	4
1.2.1 Hipòtesis de treball	4
1.2.2 Discretització temporal i espacial	4
1.2.3 Equacions de discretització	6
1.2.4 Resolució numèrica de les equacions	10
1.3 Algorisme global de càlcul	11
2 Estudis realitzats per verificar que el codi està lliure d'errors	12
2.1 Comparació amb solucions	12
2.1.1 Solució numèrica	12
2.2 Verificació de balanços globals	13
3 Resultats d'estudis de tipus numèric	15
3.1 Influència del factor δ , el <i>time-step</i> i la densitat de nodes	15
3.1.1 Sensibilitat del factor de convergència	15
3.1.2 Sensibilitat de l'increment de temps	16
3.1.3 Sensibilitat de la densitat de nodes	16
3.1.4 Factors òptims	17
3.2 Factors de relaxació	17
4 Resultats d'estudis de tipus físic	19
4.1 Influència de condicions de contorn	19
4.1.1 Sensibilitat del flux de calor \dot{q}_{flow}	19
4.2 Diferents tipus de material	21
4.2.1 Conductivitat tèrmica	21
5 Resultats	25
5.1 Evolució temporal del mapa de temperatures	25
5.2 Evolució temporal de les temperatures als punts A i B	28
6 Conclusions	30
Annexos	32
Annex 1: Codi Matlab principal	32
Annex 2: Funció Matlab de la conductivitat mitjana harmònica	39

1 Descripció del cas i plantejament de la metodologia de resolució amb organigrama de l'algoritme de càlcul

1.1 Definició del problema

El problema a tractar es compon d'una barra d'elevada llargària i formada per 4 tipus de materials diferents (M_1 , M_2 , M_3 i M_4). La distribució d'aquests s'il·lustra a continuació:

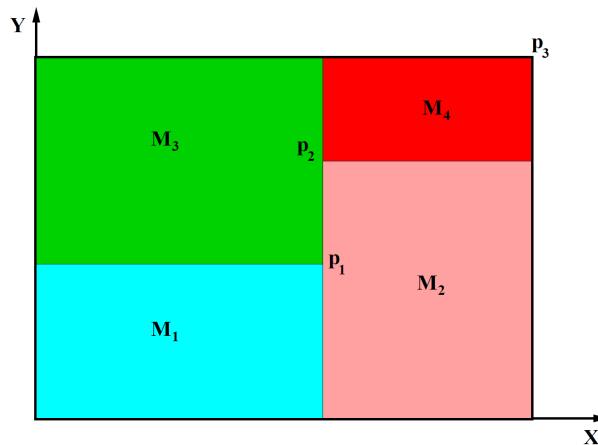


Figura 1: Esquema de la secció i materials respectius a estudiar.

En quant a les coordenades dels punts que defineixen la geometria de la secció, aquestes s'indiquen a la següent taula:

Punt	x [m]	y [m]
p_1	0.50	0.40
p_2	0.50	0.70
p_3	1.10	0.80

Taula 1: Coordenades del problema

Pel que fa a les propietats físiques del problema, aquestes s'especifiquen a continuació:

Material	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kgK]	k [W/mK]
M_1	1500.00	750.00	170.00
M_2	1600.00	770.00	140.00
M_3	1900.00	810.00	200.00
M_4	2500.00	930.00	140.00

Taula 2: Propietats físiques

1.1.1 Condicions de contorn

En quant a la interacció dels costats de la barra, cal esmentar que cadascun d'aquests disposa de diferents condicions de contorn, les quals es resumeixen en la següent taula:

Paret	Condició de contorn
Inferior	Isoterm a $T = 23.00^\circ\text{C}$
Superior	$Q_{flow} = 60.00 \text{ W/m}$ uniforme i direcció y negativa
Esquerra	En contacte amb un fluid a $T_g = 33.00^\circ\text{C}$ i $\alpha = 9.00 \text{ W/m}^2\text{K}$
Dreta	Temperatura uniforme $T = 8.00 + 0.005t^\circ\text{C}$

Taula 3: Condicions de contorn específiques

1.2 Resolució del problema

1.2.1 Hipòtesis de treball

1. Flux bidimensional
2. Estudi transitori
3. Propietats físiques constants
4. No presència de fonts internes
5. Paret dreta i inferior adiabàtiques
6. No hi ha efectes de radiació
7. Discretització en nodes centrats

1.2.2 Discretització temporal i espacial

El domini temporal es distribuirà de forma uniforme d'acord amb els següents aspectes:

- $t_{inicial} = 0 \text{ s}$
- $t_{final} = 10000 \text{ s}$
- $\Delta t = 1 \text{ s}$

Pel que fa al domini espacial, s'emprarà una discretització uniforme del mateix alhora que nodes centrats. Donada la naturalesa tetramaterial i bidimensional de la secció, la definició del número de volums de control N_x i N_y requereix la diferenciació de tres regions en direcció y i dos en direcció x, tot per tal d'assegurar la coincidència de tots els volums de control que conformen la malla. Per aquest motiu, N_{x1} i N_{x2} definiran la quantitat de volums de control del materials 1 i 3, i 2 i 4, respectivament. Altrament, N_{y1} , N_{y2} i N_{y3} fixaran dita quantitat en la direcció y. Per tant, es complirien les següents relacions:

$$N_x = N_{x1} + N_{x2}$$

$$N_y = N_{y1} + N_{y2} + N_{y3}$$

A continuació, es mostra una il·lustració de la discretització espacial de la secció.

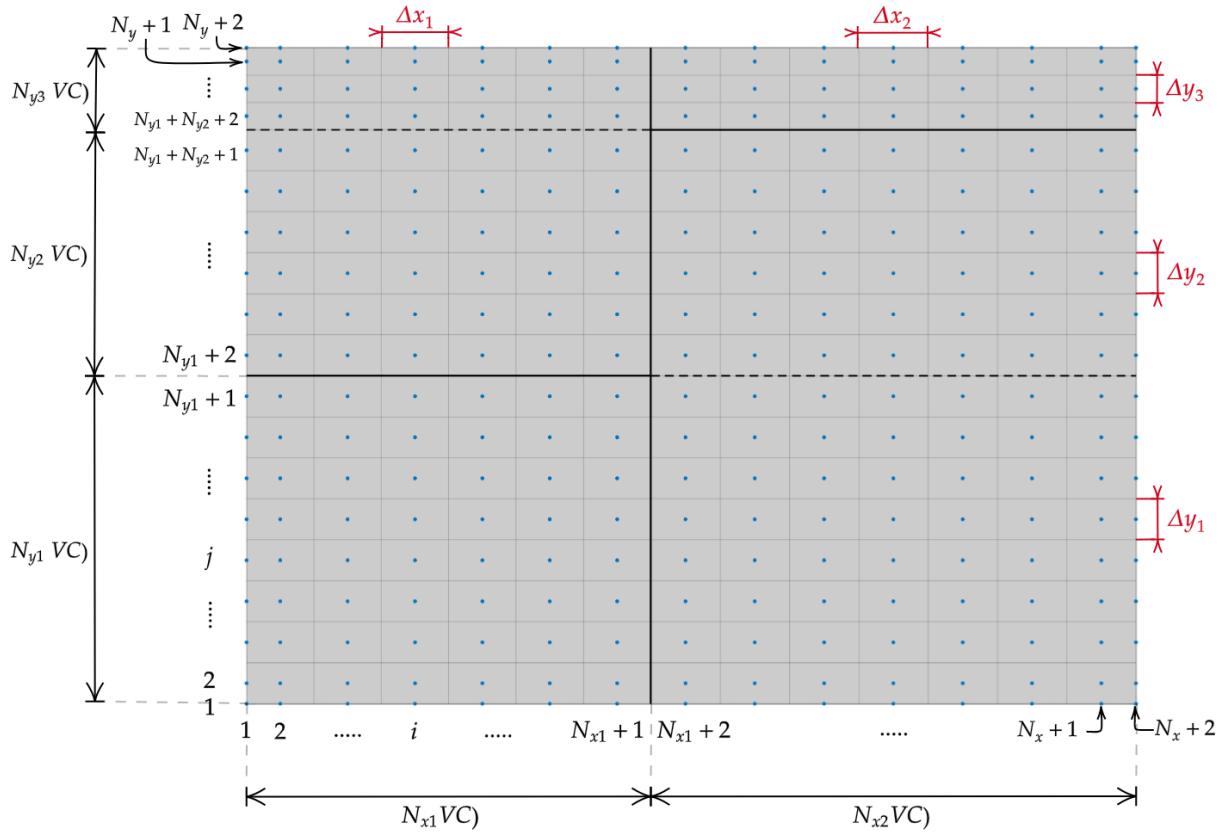


Figura 2: Esquema de la discretització espacial emprada amb un número de volums de control merament il·lustratiu.

Cal destacar que, d'acord amb la discretització amb nodes centrats emprada, és evident que existirà presència de nodes als contorns de la secció. Tot i així, cal destacar que els nodes de les cantonades no es calcularan.

Pel que a les cares que defineixen els volums de control respecta, la posició d'aquestes es regeix per la següent expressió en direcció x:

$$x_{CV}[i] = 0 ; \quad i = 1$$

$$x_{CV}[i] = (i - 2)\Delta x_1 ; \quad i = 2 \text{ a } N_{x1} + 2$$

$$x_{CV}[i] = x_{CV}[N_{x1} + 2] + (i - N_{x1} - 2)\Delta x_2 ; \quad i = N_{x1} + 3 \text{ a } N_x + 2$$

En quant a la direcció y s'obté que:

$$y_{CV}[j] = 0 ; \quad j = 1$$

$$y_{CV}[j] = (j - 2)\Delta y_1 ; \quad j = 2 \text{ a } N_{y1} + 2$$

$$y_{CV}[j] = y_{CV}[N_{y1} + 2] + (j - N_{y1} - 2)\Delta y_2 ; \quad j = N_{y1} + 3 \text{ a } N_{y1} + N_{y2} + 2$$

$$y_{CV}[j] = y_{CV}[N_{y1} + N_{y2} + 2] + (j - N_{y1} - N_{y2} - 2)\Delta y_3 ; \quad j = N_{y1} + N_{y2} + 3 \text{ a } N_y + 2$$

on els diferencials de longitud de cada volum de control són tal que:

$$\Delta x_1 = \frac{x_{p1}}{N_{x1}}$$

$$\Delta x_2 = \frac{x_{p3} - x_{p1}}{N_{x2}}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_{p1}}{N_{y1}}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_{p2} - y_{p1}}{N_{y2}}$$

$$\Delta y_3 = \frac{y_{p3} - y_{p2}}{N_{y3}}$$

Finalment, la ubicació dels nodes es situa al centre de cada volum de control, de manera que l'equació que determina les seves coordenades en x són:

$$\begin{aligned} x_P[i] &= 0 ; \quad i = 1 \\ x_P[i] &= x_{CV}[i] + \frac{\Delta x_1}{2} ; \quad i = 2 \text{ a } N_{x1} + 1 \\ x_P[i] &= x_{CV}[i] + \frac{\Delta x_2}{2} ; \quad i = N_{x1} + 2 \text{ a } N_x + 1 \\ x_P[i] &= x_{p3} ; \quad i = N_x + 2 \end{aligned}$$

Pel que fa a la direcció y:

$$\begin{aligned} y_P[j] &= 0 ; \quad j = 1 \\ y_P[j] &= y_{CV}[j] + \frac{\Delta y_1}{2} ; \quad j = 2 \text{ a } N_{y1} + 1 \\ y_P[j] &= y_{CV}[j] + \frac{\Delta y_2}{2} ; \quad j = N_{y1} + 2 \text{ a } N_{y1} + N_{y2} + 1 \\ y_P[j] &= y_{CV}[j] + \frac{\Delta y_3}{2} ; \quad j = N_{y1} + N_{y2} + 2 \text{ a } N_y + 1 \\ y_P[j] &= y_{p3} ; \quad j = N_y + 2 \end{aligned}$$

1.2.3 Equacions de discretització

Donat el caràcter transitori del problema, es parteix del 1r Principi de la Termodinàmica:

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{V_P} u \rho dV = \dot{Q}$$

$$\rho_P V_P \bar{C}_{pP} \frac{T_P^{n+1} - T_P^n}{\Delta t} = \beta \sum \dot{Q}_P^{n+1} + (1 - \beta) \sum \dot{Q}_P^n$$

Inicialment, s'emprarà un mètode numèric implícit ($\beta = 1$) donada la seva estabilitat per tot tipus de time-step i la simplicitat de les. És així que, en aquest cas, l'equació general de la solució transitòria és:

$$\rho_P V_P \bar{C}_{pP} \frac{T_P^{n+1} - T_P^n}{\Delta t} = \sum \dot{Q}_P^{n+1}$$

Així mateix, l'equació de discretització de tot node segueix la següent estructura:

$$a_P T_P^{n+1} = a_W T_W^{n+1} + a_E T_E^{n+1} + a_S T_S^{n+1} + a_N T_N^{n+1} + b_P \quad (1)$$

Nodes interns ($i = 2$ a $N_x + 1$, $j = 2$ a $N_y + 1$)

Lògicament, qualsevol node intern disposa de contribució de les calor per conducció a cadascuna de les seves cares, de manera que l'esquema resultant del volum de control es mostra a continuació:

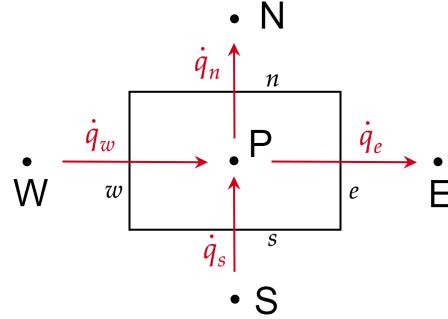


Figura 3: Esquema del balanç de calor als nodes interns.

El balanç de calor entrants i sortints és tal que:

$$\begin{aligned} \sum \dot{Q}^{n+1} &= \dot{Q}_w^{n+1} - \dot{Q}_e^{n+1} + \dot{Q}_s^{n+1} - \dot{Q}_n^{n+1} = \\ &= k_w \frac{T_W^{n+1} - T_P^{n+1}}{d_{PW}} S_w - k_e \frac{T_P^{n+1} - T_E^{n+1}}{d_{PE}} S_e + k_s \frac{T_S^{n+1} - T_P^{n+1}}{d_{PS}} S_s - k_n \frac{T_P^{n+1} - T_N^{n+1}}{d_{PN}} S_n \end{aligned}$$

Cal destacar que donada la presència de diversos materials, és necessari l'ús de la mitjana harmònica per avaluar la conductivitat tèrmica en certes cares que es trobin entre dos materials diferents. A l'hora de programar, s'ha implementat una funció anomenada "conductivitat_mitja_harmonica" per tal de facilitar el procés de càlcul. D'aquesta manera, prenen un node I genèric i una cara i genèrica situada entre dit node i el node P , s'obté que fent ús de la mitjana harmònica la conductivitat k_i és:

$$k_i = \frac{d_{PI}}{\frac{d_{Pi}}{k_p} + \frac{d_{iI}}{k_I}} ; \quad \text{on: } i = w, e, s, n$$

Concretament, l'ús d'aquesta mitjana harmònica en funció de cara i node es defineix en la següent taula, on s'indiquen els materials entre els quals es situa la cara per la qual s'ha de calcular la mitja harmònica, i l'interval $[i][j]$ corresponent:

Cara	Materials que intervenen	Interval corresponent
k_n	1 i 3	$i = 2$ a $N_{x1} + 1$, $j = N_{y1} + 1$
	2 i 4	$i = N_{x1} + 2$ a $N_x + 1$, $j = N_{y1} + N_{y2} + 1$
k_s	1 i 3	$i = 2$ a $N_{x1} + 1$, $j = N_{y1} + 2$
	2 i 4	$i = N_{x1} + 2$ a $N_x + 1$, $j = N_{y1} + N_{y2} + 2$
k_e	1 i 2	$i = N_{x1} + 1$, $j = 2$ a $N_{y1} + 1$
	2 i 3	$i = N_{x1} + 1$, $j = N_{y1} + 2$ a $N_{y1} + N_{y2} + 1$
	3 i 4	$i = N_{x1} + 1$, $j = N_{y1} + N_{y2} + 2$ a $N_y + 1$
k_w	1 i 2	$i = N_{x1} + 2$, $j = 2$ a $N_y + 1$
	2 i 3	$i = N_{x1} + 2$, $j = N_{y1} + 2$ a $N_{y1} + N_{y2} + 1$
	3 i 4	$i = N_{x1} + 2$, $j = N_{y1} + N_{y2} + 2$ a $N_y + 1$

Taula 4: Conductivitats que requereixen l'ús de mitjana harmònica

Per la resta de nodes, les conductivitats tèrmiques són les corresponents al material en el que es situa la cara a estudiar.

Pel que fa als coeficients de discretització, un cop emprada l'equació (1) s'obtenen les següents expressions:

$$a_W = \frac{k_w}{d_{PW}} S_w ; \quad a_E = \frac{k_e}{d_{PE}} S_e ; \quad a_S = \frac{k_s}{d_{PS}} S_s ; \quad a_N = \frac{k_n}{d_{PN}} S_n$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + \rho_P V_P \bar{C}_{pP} \frac{1}{\Delta t}$$

$$b_P = \rho_P V_P \bar{C}_{pP} \frac{1}{\Delta t} T_P^n$$

Nodes del contorn esquerre ($i = 1, j = 2$ a $N_y + 1$)

L'esquema del volum de control dels presents nodes és el següent:

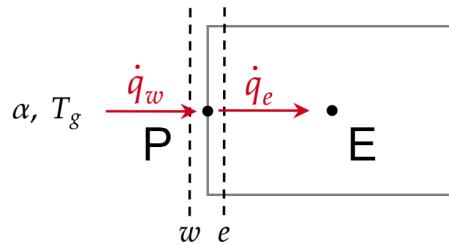


Figura 4: Esquema del balanç de calor als nodes del contorn esquerre.

Evidentment, els únics fluxos de calor que existeixen són el degut a la convecció per la cara *west*, \dot{Q}_w , i l'ocasionat per la conducció a través de la cara *east*, \dot{Q}_e . A més, donat que el volum de control és diferencial el volum és per tant nul, de manera que el terme d'acumulació d'energia és també zero. Per tant, les expressions dels mencionats calor són tal que:

$$\sum \dot{Q}^{n+1} = \dot{Q}_w^{n+1} - \dot{Q}_e^{n+1} = \alpha(T_g - T_P^{n+1})S_w - k_e \frac{T_P^{n+1} - T_E^{n+1}}{d_{PE}} S_e$$

$$a_N = a_S = a_W = 0$$

$$a_E = \frac{k_e}{d_{PE}} S_e$$

$$a_P = a_E + \alpha S_w$$

$$b_P = \alpha T_g S_w$$

Nodes del contorn dret ($i = N_x + 2, j = 2$ a $N_y + 1$)

En aquest cas, es coneix que la temperatura de la paret dreta de la secció es regeix per la llei transitòria de temperatures indicada a les condicions de contorn. Per tant, la temperatura del node P és independent de qualsevol node contigu.

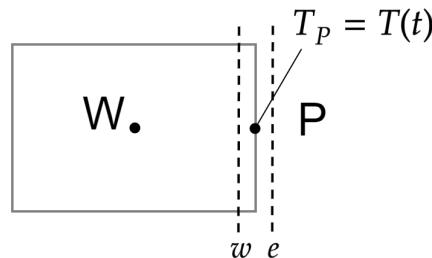


Figura 5: Esquema del balanç de calor als nodes del contorn dret.

Dita temperatura es determina mitjançant l'expressió següent:

$$T_P^{n+1} = 8,00 + 0,005(t^n + \Delta t)$$

Així mateix, els coeficients de discretització disposen dels valors mostrats a continuació:

$$a_N = a_S = a_W = a_E = 0$$

$$a_P = 1$$

$$b_P = 8,00 + 0,005(t^n + \Delta t)$$

Nodes del contorn inferior ($i = 2$ a $N_x + 1$), $j = 1$

Pel present interval es disposa d'una regió isotèrmica i, per tant, invariant en el temps, de manera que no existeix la presència de cap flux de calor a través del volum de control.

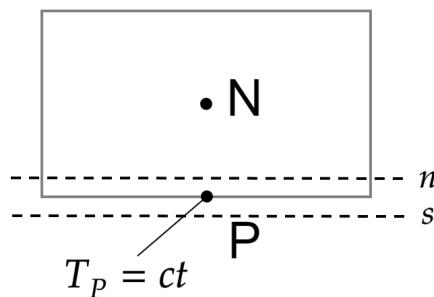


Figura 6: Esquema del balanç de calors als nodes del contorn inferior.

En conseqüència, els coeficients resultants són tal que:

$$a_N = a_S = a_W = a_E = 0$$

$$a_P = 1$$

$$b_P = T_{bottom} = 23,00$$

Nodes del contorn superior ($i = 2$ a $N_x + 1$), $j = N_y + 2$

En aquest cas existeix la presència d'un flux de calor entrant. L'esquema del volum de control dels presents nodes és el següent:

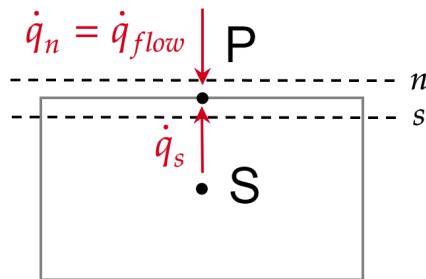


Figura 7: Esquema del balanç de calors als nodes del contorn superior.

El balanç de calor és tal que:

$$\sum \dot{Q}^{n+1} = \dot{Q}_s^{n+1} + \dot{Q}_n^{n+1} = k_s \frac{T_S^{n+1} - T_P^{n+1}}{d_{PS}} S_s + \dot{q}_{flow} S_n$$

Per tant, els coeficient de discretització resulten en:

$$a_N = a_E = a_W = 0$$

$$a_S = \frac{k_s}{d_{PS}} S_s$$

$$a_P = a_S$$

$$b_P = \dot{q}_{flow} S_n$$

1.2.4 Resolució numèrica de les equacions

Donat la discretització 2D que presenta el problema, la utilització d'un mètode de resolució punt a punt implicaria una inversió de temps de càlcul considerable. És per aquest motiu que s'ha optat per fer ús de l'anomenat mètode *line-by-line*. Aquest, que combina la resolució Gauss-Seidel amb la TDMA, consisteix en la resolució simultània d'un conjunt de nodes, ja sigui pertanyents a una mateixa fila o columna. En aquest cas, l'opció escollida és realitzar un escombrat vertical passant de fila en fila, tal i com s'indica a l'esquema:

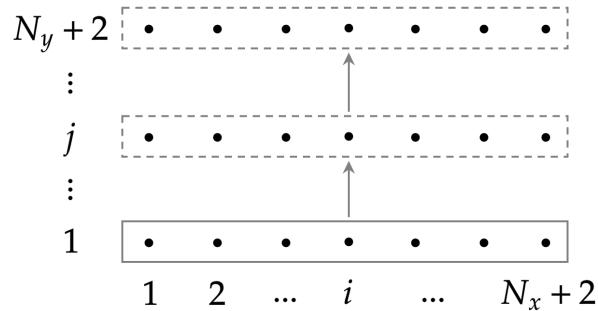


Figura 8: Esquema il·lustratiu del procés de resolució *line-by-line*.

En aquest cas, l'equació general de discretització és:

$$a_P T_P^{n+1} = a_W T_W^{n+1} + a_E T_E^{n+1} + b_P, \text{ line-by-line}$$

Per tant, el nou coeficient $b_P, \text{ line-by-line}$ ha d'incloure les contribucions nord i sud, de manera que:

$$b_P, \text{ line-by-line}[i][j] = b_P[i][j] + a_N[i][j] \cdot T^{n+1}[i][j+1] + a_S[i][j] \cdot T^{n+1}[i][j+1]$$

Tot seguit s'indiquen les expressions utilitzades per dur a terme el càlcul dels termes P i Q propis del TDMA:

$$P[i][j] = \frac{a_E[i][j]}{a_P[i][j] - a_W[i][j] \cdot P[i-1][j]}$$

$$Q[i][j] = \frac{b_P, \text{ line-by-line}[i][j] + a_W[i][j] \cdot Q[i-1][j]}{a_P[i][j] - a_W[i][j] \cdot P[i-1][j]}$$

Cal destacar que al codi s'imposen els condicionals necessaris segons el node a tractar.

A continuació, el càlcul de la temperatura resultaria en:

$$T^{n+1}[i][j] = P[i][j] \cdot T^{n+1}[i+1][j] + Q[i][j]$$

1.3 Algorisme global de càlcul

1. Entrada de dades

- 1.1. Dades físiques: mapa inicial de temperatures, geometria, materials, condicions de contorn
- 1.2. Dades numèriques: malla ($N_{x1}, N_{x2}, N_{y1}, N_{y2}, N_{y3}$), time step (Δt), criteri de convergència (δ), tipus d'esquema numèric β , factor de relaxació fr

2. Càlculs previs

- Generació de la malla: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, x_P[i][j], y_P[i][j], x_{CV}[i][j], y_{CV}[i][j]$
- Geometria: $S_n[i][j], S_s[i][j], S_e[i][j], S_w[i][j], V_P[i][j]$

3. Mapa inicial de temperatures Per $t^n = 0 \rightarrow T^n[i][j] = T_{inicial}$

4. Càlcul de les temperatures a l'instant $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

- 4.1. Estimació del camp de temperatures: $T^{n+1*}[i][j] = T^n[i][j]$
- 4.2. Avaluació dels coeficients de discretització: $a_E, a_W, a_N, a_S, a_P, b_P$ en cada node $[i][j]$
- 4.3. Resolució del sistema d'equacions:

$$a_P[i][j]T_P^{n+1} = a_W[i][j]T_W^{n+1} + a_E[i][j]T_E^{n+1} + a_S[i][j]T_S^{n+1} + a_N[i][j]T_N^{n+1} + b_P[i][j]$$

Ús del mètode *line-by-line*, que combina *G-S* i *TDMA* pel cas de transferència de calor en 2D

4.4. És $\max|T^{n+1*}[i][j] - T^{n+1}[i][j]| < \delta$?

Si:

- No \rightarrow S'imposa $T^{n+1*}[i][j] = T^{n+1}[i][j]$ i es torna al pas 4.2
- Sí \rightarrow S'avança al pas 5

5. Nou Δt ?

- Sí \rightarrow S'imposa $T^n[i][j] = T^{n+1}[i][j]$ i $t^n = t^{n+1}$ i es torna al pas 4
- No \rightarrow S'avança al pas 6

6. Càlculs finals i impressió de resultats

7. Fi

2 Estudis realitzats per verificar que el codi està lliure d'errors

2.1 Comparació amb solucions

2.1.1 Solució numèrica

Partint del mapa de temperatures per l'instant 5000s que proporciona l'enunciat del projecte, es procedeix a portar a terme una comparació entre aquest i l'obtingut fent ús de Matlab per tal de verificar la validesa dels resultats. A continuació s'adjunten ambdós gràfics, tant el de referència com el calculat.

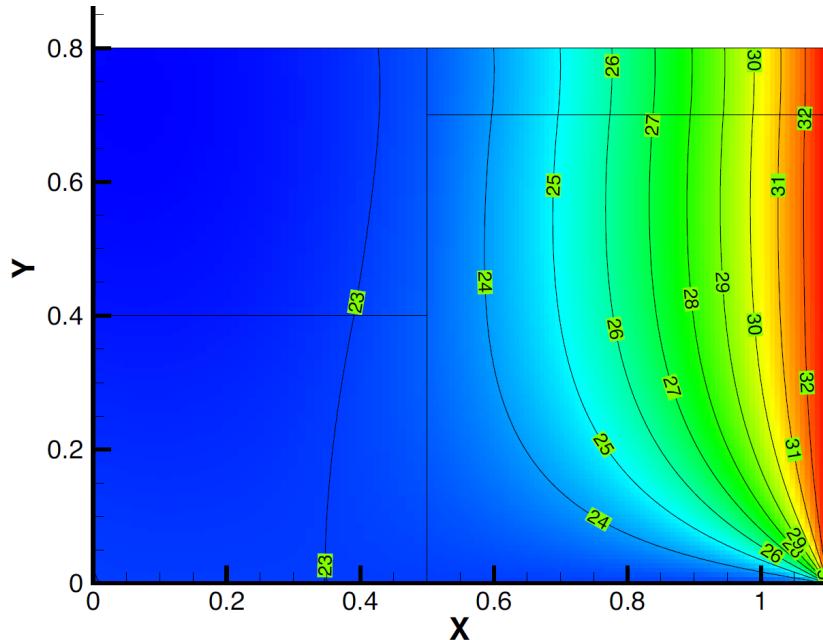


Figura 9: Solució numèrica de referència per l'instant $t = 5000\text{s}$

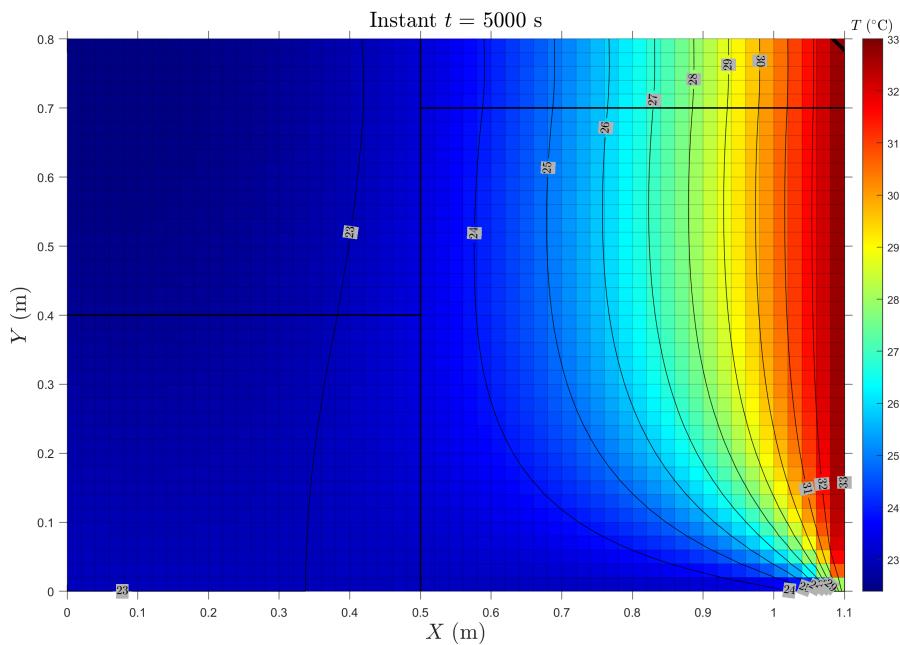


Figura 10: Mapa de temperatures obtingut per l'instant $t = 5000\text{s}$

Tal i com es pot observar, a simple vista la distribució de temperatures és pràcticament idèntica al cas de referència. Si s'analitzen amb més detall el valor de les temperatures fent ús de les isotermes, es determina que totes elles són similars, partint de la isoterna de temperatura mínima de 23°C ubicada verticalment als materials 1 i 3, fins a arribar a la isoterna de temperatura màxima, corresponent a 33°C i situada a la paret del contorn dret. Addicionalment, es pot comprovar com tant la forma, quantitat i ubicació de les isotermes és, en efecte, idèntica a la observada en el cas numèric de referència. Tenint en compte aquests aspectes, es pot confirmar la validesa dels resultats obtinguts i, per tant, del codi programat.

2.2 Verificació de balanços globals

Una altra opció que possibilita la verificació del codi és la realització de balanços globals d'energia a cadascun dels nodes dels volums de control de la secció discretitzada. Donat que es tracta d'un problema transitori, s'ha de complir que el sumatori de calorés és equivalent al terme acumulatiu d'energia, tal que la diferència d'energia és:

$$\Delta \dot{E} = \rho_P V_P \bar{C}_{pP} \frac{T_P^{n+1} - T_P^n}{\Delta t} - \sum \dot{Q}_P^{n+1} = 0 \quad ; \text{ on: } \sum \dot{Q}_P^{n+1} = \dot{Q}_{abs}^{n+1} - \dot{Q}_{ced}^{n+1}$$

A continuació s'analitzen els valors obtinguts d'aquesta diferència pels volums de control de cada tipus de node. Cal d'estacar que únicament s'ha estudiat l'instant corresponent a 5000 s per tal de reduir el temps de càlcul.

En aquest cas, s'ha fet ús dels coeficients de discretització ja determinats per facilitar el procés de càlcul de les calorés.

Nodes interns ($i = 2$ a $N_x + 1$, $j = 2$ a $N_y + 1$)

El balanç de calorés entrants i sortints és tal que:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{abs}^{n+1} &= \dot{Q}_w^{n+1} + \dot{Q}_s^{n+1} = a_W(T_W^{n+1} - T_P^{n+1}) + a_S(T_S^{n+1} - T_P^{n+1}) \\ \dot{Q}_{ced}^{n+1} &= \dot{Q}_e^{n+1} + \dot{Q}_n^{n+1} = a_E(T_P^{n+1} - T_E^{n+1}) + a_N(T_P^{n+1} - T_N^{n+1}) \end{aligned}$$

Atenent als valors de $\Delta \dot{E}$ obtinguts mitjançant Matlab per la variable anomenada "diferencia_conservacio_energia", aquests es situen en un rang de $10^{-5} \sim 10^{-11}$ W. Per aquest motiu, es corrobora la validesa dels resultats corresponents als nodes interns.

Nodes del contorn esquerre ($i = 1$, $j = 2$ a $N_y + 1$)

El balanç de calorés entrants i sortints és tal que:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{abs}^{n+1} &= \dot{Q}_w^{n+1} = \alpha S_w (T_g - T_P^{n+1}) \\ \dot{Q}_{ced}^{n+1} &= \dot{Q}_e^{n+1} = a_E(T_P^{n+1} - T_E^{n+1}) \end{aligned}$$

Novament, consultant la primera fila de la variable "diferencia_conservacio_energia" s'observen uns valors de $\Delta \dot{E}$ d'aproximadament $10^{-13} \sim 10^{-14}$ W. Així mateix, la conservació de l'energia es compleix.

Nodes del contorn dret ($i = N_x + 2$, $j = 2$ a $N_y + 1$)

En aquest cas, considerant que la paret EAST és adiabàtica, el calor \dot{q}_e^{n+1} ha de ser nul. Per tant, donat que el volum de control és diferencial ($V_P = 0$) el terme d'acumulació d'energia ha de ser també zero. Conseqüentment, l'únic calor que entra al volum de control, el \dot{q}_w^{n+1} , ha de ser nul per tal de complir la conservació d'energia. És així que el balanç de calorés entrants i sortints és:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{abs}^{n+1} &= 0 \\ \dot{Q}_{ced}^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, el valor de la diferència d'energia $\Delta \dot{E}$ és zero.

Nodes del contorn inferior ($i = 2$ a $N_x + 1$), $j = 1$

D'igual manera que pels nodes del contorn dret, aquí succeeix el mateix però amb els calorss \dot{q}_s^{n+1} i \dot{q}_n^{n+1} . Així mateix, els calor absorbit i cedit són:

$$\dot{Q}_{abs}^{n+1} = 0$$

$$\dot{Q}_{ced}^{n+1} = 0$$

Nodes del contorn superior ($i = 2$ a $N_x + 1$), $j = N_y + 2$

Finalment, en els volums de control dels nodes superiors existeix la presència d'un flux de calor entrant, per tant els corresponents balanços de calor absorbit i cedit són:

$$\dot{Q}_{abs}^{n+1} = \dot{Q}_n^{n+1} + \dot{Q}_s^{n+1} = \dot{Q}_{flow} S_n + a_S (T_S^{n+1} - T_P^{n+1})$$

$$\dot{Q}_{ced}^{n+1} = 0$$

Consultant la columna dreta de la variable "diferencia_conservacio_energia", s'observen uns valors de $\Delta \dot{E}$ que ronden els $10^{-12} \sim 10^{-14}$ W, el que verifica la validesa dels resultats obtinguts.

3 Resultats d'estudis de tipus numèric

Amb la finalitat d'analitzar l'efecte de la variació de diferents factors numèrics com són el factor de convergència, l'increment de temps, la densitat de malla i el factor de relaxació, es porta a terme un estudi de l'evolució de la temperatura en dos punts de referència. En aquest cas, s'empren els punts proposats per l'enunci del projecte, que són:

- Punt A: $(x, y) = (0.65, 0.56)$ m
- Punt B: $(x, y) = (0.74, 0.72)$ m

En quant a l'instant de temps analitzat, s'ha seleccionat el corresponent a 5000 s donat el relatiu caràcter de règim permanent que s'assoleix en instants més avançats com ho és aquest, en contraposició de la fase inicial més transitòria que induceix una major presència de fluctuacions als resultats obtinguts.

Pel que fa a les dades numèriques emprades com a base, es destaca que s'ha fet ús dels següents factors:

- Factor de convergència: $\delta = 10^{-7}$
- Time-step: $\Delta t = 1$ s
- Densitat de nodes = 50 $\frac{\text{node}}{\text{m}}$
- Factor de relaxació: $fr = 1$

A més, s'ha decidit utilitzar un esquema numèric implícit ($\beta = 1$), és a dir, basant la resolució de les temperatures en les temperatures de l'instant posterior.

3.1 Influència del factor δ , el *time-step* i la densitat de nodes

3.1.1 Sensibilitat del factor de convergència

S'ha realitzat un estudi de l'efecte que té la variació del factor de convergència, de manera que els resultats obtinguts s'adjunten a la següent taula:

δ	$T_{\text{punt A}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu A (%)	$T_{\text{punt B}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu B (%)
10^{-2}	24,2667	1,298	25,2304	1,126
10^{-3}	24,5598	0,106	25,4947	0,091
10^{-4}	24,5829	0,012	25,5151	0,011
10^{-5}	24,5857	0,001	25,5176	0,001
10^{-6}	24,5859	0,000	25,5178	0,000
10^{-7}	24,5859	0,000 (cas base)	25,5178	0,000 (cas base)
10^{-8}	24,5859	0,000	25,5178	0,000
10^{-9}	24,5859	0,000 (referència)	25,5178	0,000 (referència)

Taula 5: Evolució de l'error relatiu en termes de temperatura pels punts A i B segons el factor de convergència emprat

A simple vista, no es visualitza cap diferència apreciable entre els errors obtinguts pel punt A en comparació amb els corresponents a B. Pel que fa als menors valors del factor de convergència de la taula, s'observa que l'error relatiu respecte el cas de referència de $\delta = 10^{-9}$ és considerable pel cas de $\delta = 10^{-2}$ amb un valor superior a un 1%, mentre que el $\sim 0,1\%$ obtingut per $\delta = 10^{-3}$ pels punts A i B ja pren un valor més acceptable.

És precisament a partir de $\delta \leq 10^{-4}$ que es determinen uns errors pràcticament nuls, no obstant, aquests venen acompanyats d'uns majors temps de computació. Com es pot observar, l'error corresponent al valor de

$\delta = 10^{-7}$ emprat com a cas base és pràcticament inexistent en comparació amb el mínim valor del factor de convergència utilitzat, de $\delta = 10^{-9}$. Per tant, és evident que el valor inicialment emprat és extremadament precís, a més, essent així per ambdós punts estudiats A i B. Addicionalment, el temps requerit per calcular el mapa de temperatures al complet per tots els nodes i fins els 5000 s ha estat de 40 s. En contraposició, el corresponent al mínim factor de convergència s'ha situat en els 50 s.

Es conclou que, per tant, que el valor òptim atenent tant a precisió com a velocitat de computació seria $\delta_{\text{opt}} = 10^{-5}$, el qual ofereix un error del 0,001% i un reduït temps de computació de 30 s.

3.1.2 Sensibilitat de l'increment de temps

Pel que fa a la variació del *time-step*, el resultats obtinguts són els següents:

Δt	$T_{\text{punt A}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu A (%)	$T_{\text{punt B}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu B (%)
0, 1	24,5862	0, 000 (referència)	25,5180	0, 000 (referència)
0, 5	24,5861	0, 000	25,5179	0, 000
1	24,5859	0, 001 (cas base)	25,5178	0, 001 (cas base)
5	24,5848	0, 006	25,5167	0, 005
10	24,5834	0, 011	25,5153	0, 011
25	24,5791	0, 029	25,5112	0, 027
50	24,5720	0, 058	25,5044	0, 053
100	24,5577	0, 116	25,4906	0, 107
250	24,5141	0, 293	25,4487	0, 272
500	24,4403	0, 593	25,3779	0, 549
1000	24,2914	1, 199	25,2366	1, 103

Taula 6: Evolució de l'error relatiu en termes de temperatura pels punts A i B segons l'increment de temps emprat

S'observa que els primers quatre valors de Δt ofereixen errors pràcticament nuls tant pel punt A com pel B, no obstant, el temps de computació es força elevat, sobretot per $\Delta t = 0, 1$ amb un temps de càlcul de 3 minuts per determinar totes les temperatures de la malla i per tots els instants de temps. En comparació, el valor de *time-step* base emprat només requereix de 42s.

Pel que fa als increments de temps de $\Delta t = \{10, 25, 50\}$, aquest també disposen d'una considerable precisió donat el reduït error relatiu, que es situa per sota del 0,1%. Addicionalment, els temps de computació continuen millorant, essent de 11s per l'últim dels tres valors. A partir d'aquí, la utilització de valors tal que $\Delta t \geq 100$ porta associada l'obtenció d'errors que comencen a ser considerables i pròxims al 1%. És per aquest motiu que no és massa recomanable emprar aquests increments de temps encara que ofereixin temps de computació molt reduïts.

Per tant, el *time-step* òptim en quant a precisió i velocitat es refereix podria ser el cas base emprat, de $\Delta t = 1$ s, encara que altres valors com $\Delta t = 10$ s són també força competitius.

3.1.3 Sensibilitat de la densitat de nodes

Finalment, s'analitza la influència de la densitat de la malla sobre la precisió dels resultats obtinguts. Les dades obtingudes són tal que:

Densitat de nodes ($\frac{\text{node}}{\text{m}}$)	$T_{\text{punt A}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu A (%)	$T_{\text{punt B}} (\text{ }^{\circ}\text{C})$	Error relatiu B (%)
20	24,5859	0,076	25,3069	0,828
25	24,4844	0,337	25,5182	0,000
30	24,5859	0,076	25,6456	0,499
35	24,6576	0,368	25,5573	0,153
40	24,5874	0,082	25,4885	0,117
50	24,5859	0,076 (cas base)	25,5178	0,002 (cas base)
60	24,5879	0,084	25,5335	0,060
75	24,6215	0,221	25,5186	0,001
100	24,5874	0,082	25,5178	0,002
125	24,5672	0,000 (referència)	25,5183	0,000 (referència)

Taula 7: Evolució de l'error relatiu en termes de temperatura pels punts A i B segons la densitat de nodes emprada

Inspeccionant la taula, s'observa a simple vista que encara que existeix certa tendència a disminuir l'error a mesura que s'incrementa la densitat de nodes, es visualitzen certes irregularitats pels valors que no són múltiples de 10, sobretot pel punt A. Aquest fet pot resultar en l'obtenció de certs decimals indesitjats en les coordenades nodals de la malla que indueixin un error addicional.

No obstant, a grans trets es determina que el valor base emprat de 50 nodes/m ofereix un error inferior al 0,1% pel punt A i pràcticament nul pel punt B, aspectes que el fan un valor de densitat bastant sólid. Un altre valor que pot resultar competitiu és el de 125 nodes/m, però el seu temps de calcul associat sobrepassa els 10 minuts, fet que el fa poc pràctic. Si s'analitza la precisió per densitats inferiors a 50 nodes/m s'observa que encara que existeixen alguns candidats amb errors molt reduïts en el punt A, en el punt B disposen d'un error considerable, i viceversa.

Com a conclusió, en termes de precisió i velocitat el valor de densitat de nodes més idoni és el emprat pel cas base, és a dir, 50 nodes/m.

3.1.4 Factors òptims

Tenint en compte els estudis realitzats, es considera que els millors valor a emprar per obtenir bones prestacions en quant a velocitat i precisió són:

δ	Δt (s)	Densitat de nodes (nodes/m)
10^{-5}	1	50

Taula 8: Valors òptims

Tot i així, de cara a posteriors càlculs es seguiran utilitzant els valors base donada la lleugerament major precisió que ofereixen.

3.2 Factors de relaxació

El factor de relaxació és un terme que possibilita l'increment de la velocitat de convergència, encara que s'ha de ser caut en el seu ús donat que pot resultar en l'obtenció de temps de convergència considerablement elevats. A continuació es mostren els valors analitzats.

Factor de relaxació	Iteracions
0, 5	30
0, 6	24
0, 7	22
0, 8	21
0, 9	21
1	20 (cas base)
1, 1	20
1, 2	20
1, 3	20
1, 33	19
1, 36	20
1, 4	22
1, 5	29
1, 6	38

Taula 9: Evolució del número d'iteracions segons el factor de relaxació emprat

Tal i com es pot observar, valors del factor de relaxació inferiors a 0,7 i superiors a 1,36 resulten en un dràstic increment del número d'iteracions requerides per un instant de temps, en aquest cas l'analitzat és el ja mencionat $t = 5000$ s. Si s'inspeccionen els valors centrals, es determina que el requeriment de 20 iteracions és força comú, inclòs pel cas base emprat de $fr = 1$. Tot i així, existeix la possibilitat d'obtenir el mínim d'iteracions possibles amb $fr = 1,33$. No obstant cal destacar que aquest és el valor òptim per les dades numèriques base emprades.

4 Resultats d'estudis de tipus físic

4.1 Influència de condicions de contorn

4.1.1 Sensibilitat del flux de calor \dot{q}_{flow}

Per tal d'avaluar l'efecte que té la modificació del valor del flux de calor al mapa de temperatures de la secció, es realitzen simulacions amb els valors: $\dot{q}_{flow} = \{-10000, -1000, -60, 60, 1000, 10000\}$ W/m, on la dada de referència és la corresponent a 60 W/m. Els mapes obtinguts es mostren a continuació:

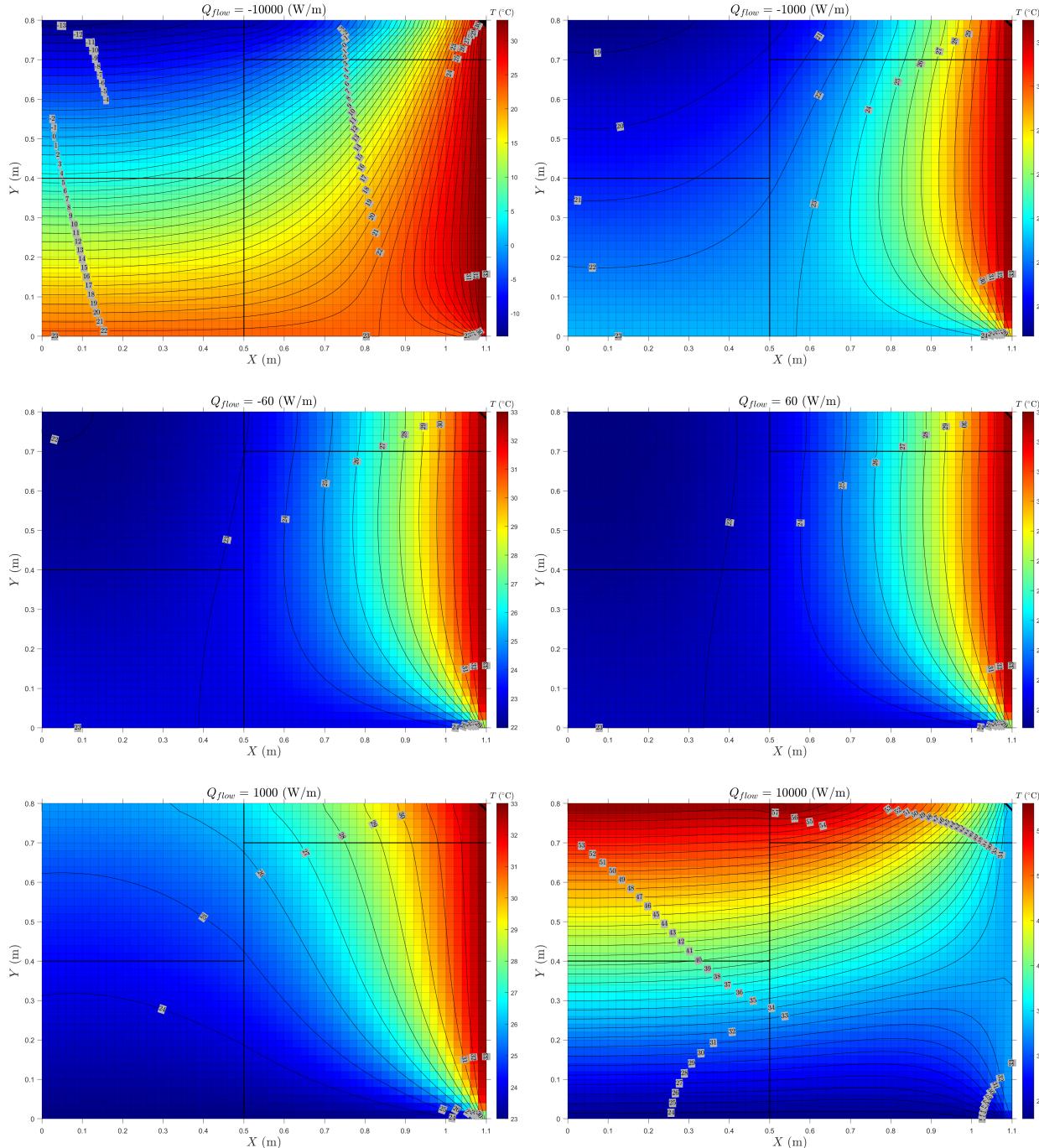


Figura 11: Gràfiques comparatives per diversos valors de \dot{q}_{flow} .

Atenent al primer cas, s'observa com la presència d'un flux de calor negatiu, és a dir en la direcció y positiva, implica la reducció de les temperatures mínima, situant-se entorn -13°C a la cantonada superior esquerra. Aquest valor suposa una dràstica reducció del 157% respecte els aproximadament 23°C mínims obtinguts pel cas original de $\dot{q}_{flow} = 60 \text{ W/m}$. Evidentment, a causa d'aquesta baixa temperatura mínima, s'observa un major gradient de temperatures donada l'abundant presència d'isotermes al gràfic, resultant així en zones contrastades d'elevades temperatures als extrems dret i inferior, en contraposició a les reduïdes temperatures dels contorns superior i esquerre. Termodinàmicament es pot argumentar que el fet d'existir una gran extracció de calor a la zona superior provoca aquesta zona considerablement freda.

Pel que fa al segon cas corresponent a $\dot{q}_{flow} = -1000 \text{ W/m}$, la temperatura mínima de 19°C experimenta una menor reducció respecte el cas original, essent així del 17%. En consonància amb aquest fet, el gradient de temperatures entre aquesta zona freda situada a la cantonada superior esquerra i la regió calenta del contorn dret és considerablement reduït.

En quant al tercer gràfic es refereix, es visualitza que la presència d'un flux de $\dot{q}_{flow} = -60 \text{ W/m}$ no induceix diferències apreciables respecte el cas original, resultant d'aquesta manera en una distribució de temperatures pràcticament idèntica i amb una lleugerament inferior temperatura mínima d'entorn 22°C , únicament un 4% inferior a l'obtinguda originalment. És així que es conclou que la sensibilitat del mapa de temperatures al flux de calor escollit és relativament baixa, requerint-se d'aquesta manera variacions significatives del mencionat flux per obtenir diferències apreciables en quant a temperatures es refereix.

En referència al gràfic corresponent a $\dot{q}_{flow} = 1000 \text{ W/m}$, es determina que la utilització d'un elevat flux de calor en la direcció y positiva resulta en la modificació de la distribució de les temperatures especialment en la zona superior i dreta. No obstant, aquest flux resulta insuficient per arribar a modificar la temperatura màxima respecte el cas original, de manera que es manté als 33°C per la regió del contorn dret. Tot i així, s'observa una evident tendència a incrementar el valor de les temperatures del contorn superior i un desplaçament de les isotermes, que adopten una distribució més horitzontal especialment per la zona esquerra en comparació amb el caràcter vertical observat en el cas original.

Finalment, la presència d'un encara més elevat flux de calor, en aquest cas de $\dot{q}_{flow} = 10000 \text{ W/m}$, implica l'ara sí increment de la temperatura màxima de la secció, situant-se entorn els 57°C pel contorn superior, el que suposa un augment del 73% respecte els 33°C màxims originals del contorn dret. De igual manera que pel primer cas analitzat, s'observa una alta densitat d'isotermes per l'elevat gradient tèrmic existent. A més, aquestes adopten majoritàriament inclinacions quasi horizontals donat que el gradient de temperatura predominant és en la direcció vertical, mentre que existeix una distribució relativament uniforme de temperatures en la direcció x.

4.2 Diferents tipus de material

De cara a analitzar la influència dels materials sobre els resultats de la simulació, es procedeix a analitzar la sensibilitat del mapa de temperatures vers canvis en variables físiques com és la conductivitat tèrmica.

4.2.1 Conductivitat tèrmica

Per tal de poder analitzar de forma independent els efectes de la variació de la conductivitat de cada material per separat, s'han portat a terme 2 tances de simulacions. A cadascuna s'ha variat únicament la conductivitat d'un material, mentre que les de la resta s'han mantingut constants en el seu valor original. Els valors emprats han estat tal que: $k_i = \{1, 10, 1000, 10000\} \text{ W/mK}$. Cal destacar que només s'ha estudiat la variació de la conductivitat en els materials 1 i 2 donat que els fenòmens a observar son similars, essent així innecessari l'anàlisi per tots els materials.

Sensibilitat a la conductivitat k_1

A continuació s'adjunten els mapes de temperatures corresponents a la variació de la conductivitat del material 1 pels valors prèviament mencionats.

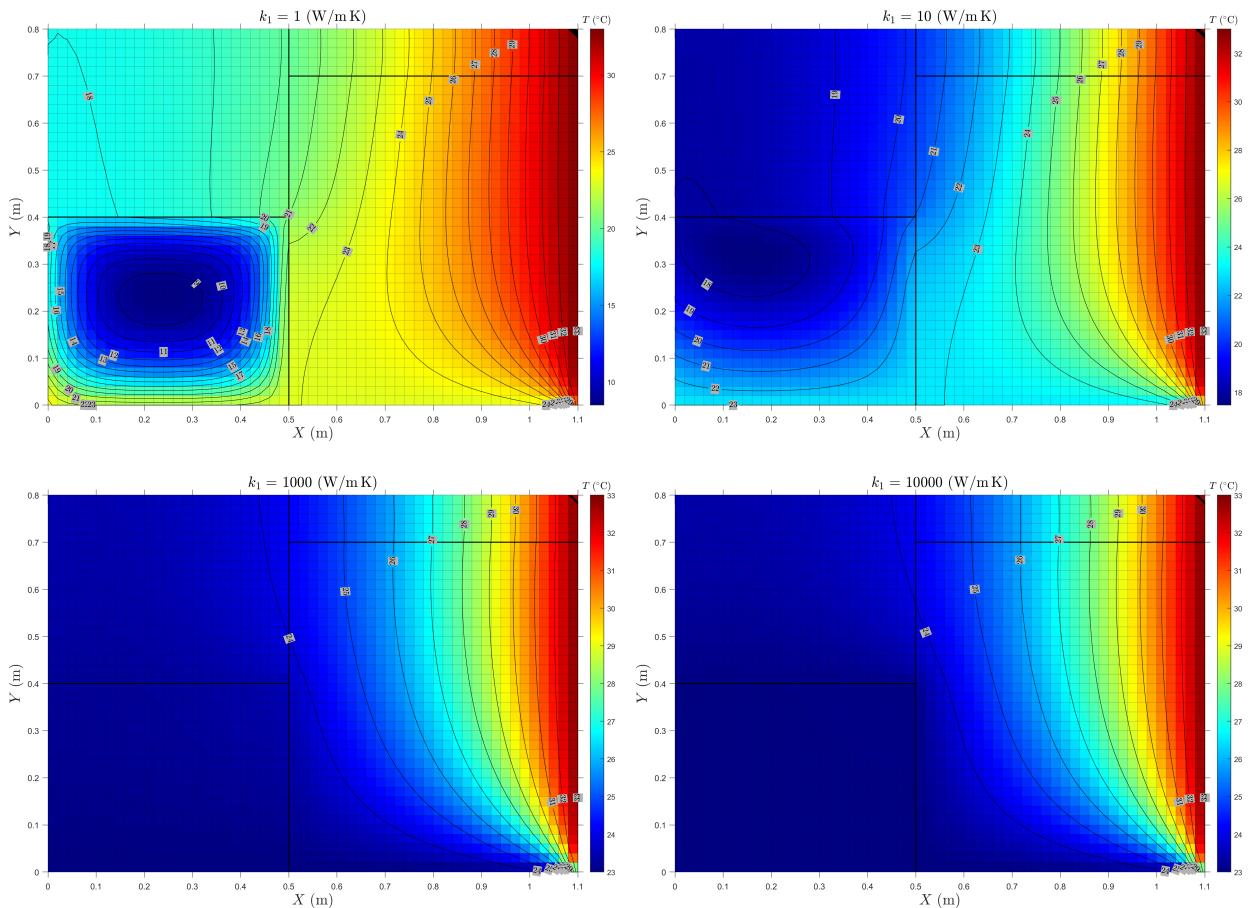


Figura 12: Gràfiques comparatives per diversos valors de k_1 .

En primera instància, s'observa que una conductivitat considerablement baixa com és 1 W/mK pel primer gràfic implica una gran resistència tèrmica per part del material 1. Aquest fet provoca que la variació de temperatura en aquesta zona sigui pràcticament inexistent respecte els instants inicials de la simulació. D'acord amb això, la temperatura dels nodes del material 1 es situen entorn els 9°C per la zona del seu centroide, un 61% inferior als 23°C d'aquesta zona pel valor de $k_1 = 170 \text{ W/mK}$ original. Tenint en compte

que el mapa inicial de temperatures es situava en els 8°C, es corrobora que la reduïda conductivitat provoca una gran similitud entre les temperatures centrals del material 1 en comparació amb els instants inicials. A més, a mesura que s'incrementa radialment la distància al mencionat centreide es tendeix a temperatures properes a 20°C donada la influència tèrmica dels materials col·lindants. Concretament, la zona que es veu més afectada pel canvi de temperatures al material 1 és el material 2, els nodes del qual veuen reduïda la seva temperatura en 4°C respecte els 23°C predominants del cas original.

Si s'estudia el segon gràfic, corresponent a una major conductivitat de 10 W/mK, s'obté que en aquest cas existeix un gradient de temperatures molt menys accentuat al material 1, essent la seva temperatura mínima entorn els 18°C, i en aquest cas desplaçada positivament en la direcció y respecte del seu centreide. Aquest fet es pot deure a la major influència que tenen les temperatures dels materials que rodejen al material 1 donada la seva ara menor resistència tèrmica, fet que facilita la seva variació tèrmica.

En quant al tercer gràfic es refereix, s'empra una conductivitat de 1000 W/mK, valor considerablement superior a l'original de $k_1 = 170$ W/mK. Inspeccionant la zona del material 1 es determina que, efectivament, una elevada conductivitat implica que el canvi de temperatures al material sigui relativament fàcil donada la baixa resistència tèrmica. És per aquest motiu que aquesta regió disposa d'unes temperatures força uniformes i situant-se així entorn els 23 ~ 24°C, producte de la influència tèrmica de la paret inferior també a 23°C constants.

Finalment, l'última figura corresponent a una molt elevada conductivitat, concretament de 10000 W/mK, disposa d'un mapa de temperatures pràcticament idèntic al cas prèviament tractat. Les úniques petites diferències observables són l'obtenció de temperatures del material 1 subtilment més properes a 23°C donat el més fosc blau en comparació amb la figura anterior, a més d'una petita deformació i desplaçament cap a la dreta de la isoterma corresponent a 24°C del material 2. La causa d'aquest comportament és la influència del fred material 1 sobre els materials del voltant, el que provoca que aquests últims vegin lleugerament incrementat el seu gradient tèrmic i, per tant, desplaçades les seves isotermes.

Sensibilitat a la conductivitat k_2

De forma anàloga a l'anàlisi del comportament tèrmic de la secció vers variacions de k_1 , ara s'estudia l'efecte de la variació de la conductivitat tèrmica del material 2. Tot seguit es mostren els mapes de temperatures corresponents als 4 valors de conductivitat analitzats.

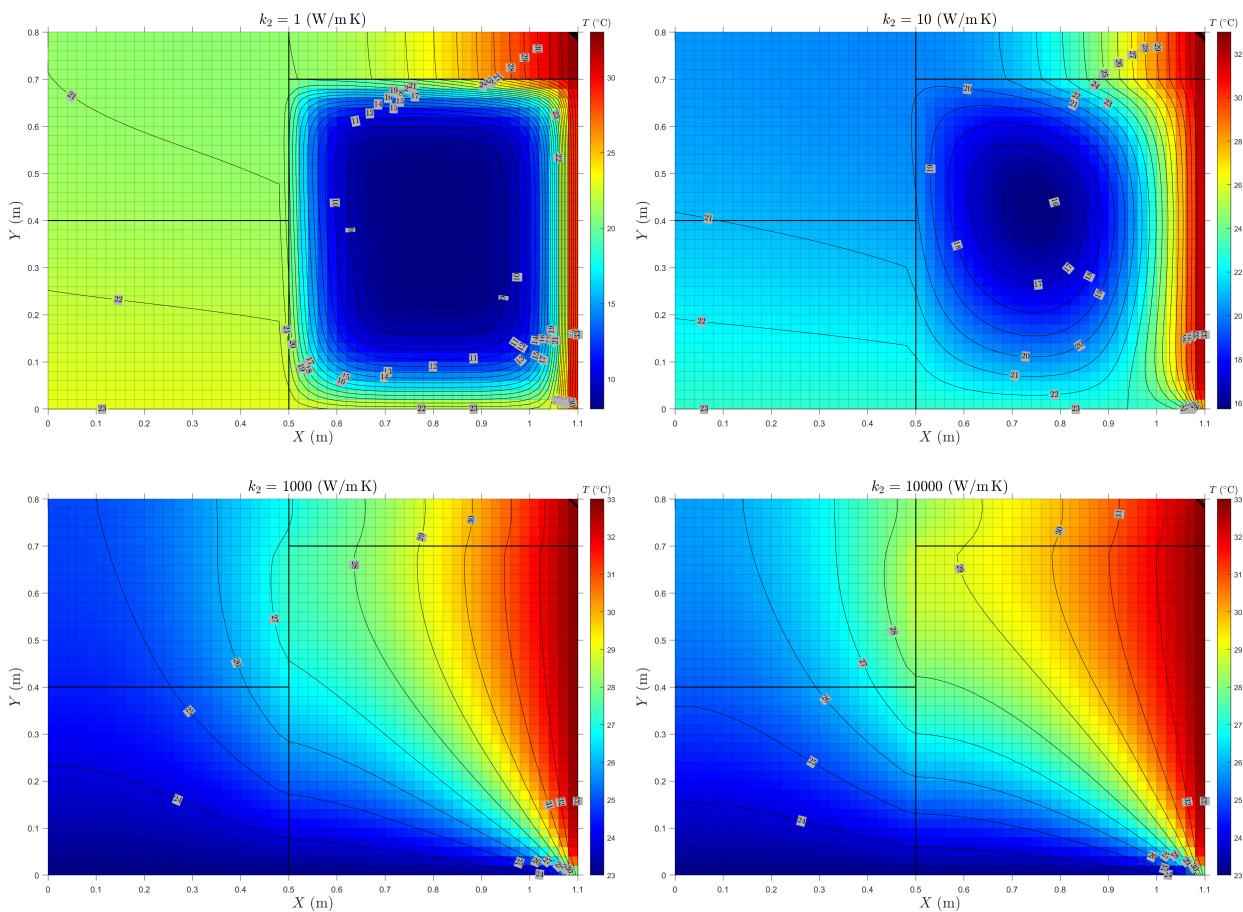


Figura 13: Gràfiques comparatives per diversos valors de k_2 .

En aquest cas, la menor conductivitat estudiada de 1 W/mK mostrada a la primera figura posa de manifest un comportament similar a l'observat en la variació de k_1 . Pel que fa a la temperatura del centroide del material 2, el seu valor és d'aproximadament $8 \sim 9^\circ\text{C}$, temperatura novament pràcticament idèntica als valors del mapa de temperatures inicials a 8°C donada l'elevada resistència tèrmica del material 2. Específicament, el centroide ha experimentat una reducció del 67% en la seva temperatura respecte el cas original de $k_2 = 140 \text{ W/mK}$, on dita temperatura es situava entorn els $26 \sim 27^\circ\text{C}$.

No obstant, en el present estudi del material 2 es visualitza un major gradient de temperatures especialment accentuat a la part dreta de dit material, bàsicament degut per la presència de la paret dreta a 33°C . Cal destacar que l'ús d'una malla amb major densitat de nodes hagués facilitat l'obtenció de valors de temperatures amb transicions més suaus, encara que la densitat actualment emprada és suficient per realitzar l'estudi desitjat.

En referència a la segona gràfica, on es fa ús d'una conductivitat lleugerament major de $k_2 = 10 \text{ W/mK}$, s'observa que el material 2 es veu més fàcilment influenciat tèrmicament pels seus voltants, resultant així en un menor gradient tèrmic i en una major temperatura mínima, en aquest cas de 16°C i desplaçada respecte el seu centroide cap a la cantonada superior esquerra donat l'efecte de la calenta paret dreta. Cal destacar que els materials 1 i 3 no veuen modificada pràcticament la seva temperatura respecte el gràfic anterior, essent així les seves temperatures de 22°C i 21°C , respectivament.

En el tercer mapa de temperatures es duu a terme el corresponent estudi per una conductivitat de $k_2 = 1000 \text{ W/mK}$ major a l'original. Com es pot observar, l'elevada conductivitat tèrmica del material 2 provoca una més fàcil transferència de calor per conducció, fet que implica que les temperatures de dit material es vegin més influenciades per les condicions tèrmiques col·lindants. En aquest cas es fa evident el clar efecte de la paret dreta a 33°C .

En última instància, el quart gràfic referent a l'estudi d'una encara major conductivitat de $k_2 = 10000 \text{ W/mK}$ presenta un comportament extremadament similar a l'analitzat pel cas anterior. La distribució de temperatures és pràcticament idèntica i l'únic canvi apreciable és la deformació i desplaçament de les isotermes cap a l'esquerra, especialment les contingudes en el rang $25 - 29^\circ\text{C}$. Lògicament, aquest fet és degut a l'elevada temperatura de la paret dreta, que conjuntament amb una superior conductivitat del material 2 provoca una més fàcil transferència de calor per conducció que resulta també en la modificació de l'estat tèrmic dels voltants.

5 Resultats

Amb l'objectiu d'analitzar de forma general el comportament tèrmic dels nodes de la secció segons l'evolució temporal es porten a terme dos estudis.

5.1 Evolució temporal del mapa de temperatures

Aquest primer anàlisi consisteix en l'avaluació dels mapes de temperatures per 10 instants diferents, corresponents als valors temporals: $t = \{1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000\}$ s. En la pàgina següent s'adjunten els gràfics respectius.

A Two-dimensional Transient Conduction Problem

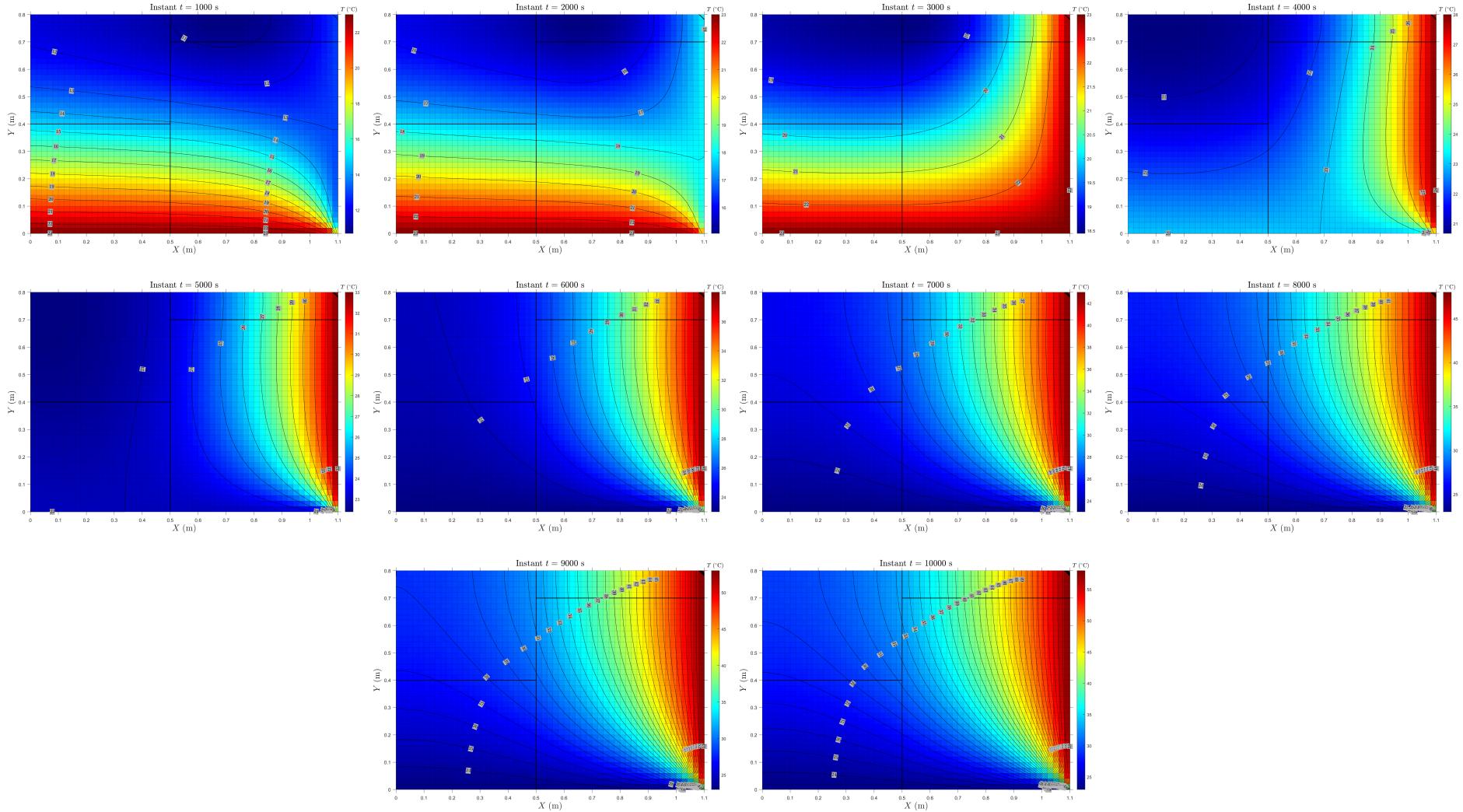


Figura 14: Mapa de temperatures per diversos instants temporals.

Instant $t = 1000$ s

Pel que fa a l'instant $t = 1000$ s, s'observa que les temperatures mínima i màxima es situen entorn els 11°C i 23°C , respectivament. Mentre que els valors màxims s'ubiquen a la paret isoterma inferior de la secció, els mínims es troben a la regió del material 4, que es el que disposa d'una menor conductivitat tèrmica junt amb el material 2. Aquest fet provoca que posseeixi una major dificultat per variar la seva temperatura respecte l'estat tèrmic inicial de 8°C , resultant així en la mencionada temperatura mínima per aquest instant.

Addicionalment, es visualitza que la paret dreta, de temperatura uniforme de 13°C en aquest instant, provoca la presència d'un elevat gradient tèrmic a la cantonada inferior dreta, en contraposició amb la major temperatura de la paret inferior. Altrament, la paret esquerra dotada de convecció amb $T_g = 33^{\circ}\text{C}$ comença a modificar les temperatures de la regió esquerra de la secció, resultant així en una lleugera deformació de les isotermes del material 3, que es el que disposa de major conductivitat tèrmica i per tant és el més fàcilment influenciable tèrmicament.

Instant $t = 2000$ s

De forma breu, el mapa de temperatures en $t = 2000$ s és força similar al de l'instant analitzat anteriorment. No obstant, es comença a observar l'efecte tèrmic de la paret esquerra amb convecció i, especialment, de la paret dreta isoterma, que en aquest cas veu incrementada la seva temperatura fins els 18°C . Aquest fet resulta, per tant, en una lleugera reducció dels gradients tèrmics presents a la zona inferior donada la menor quantitat d'isotermes, i també en l'increment de la temperatura mínima fins els $15 \sim 16^{\circ}\text{C}$ ubicada al material 4.

Instant $t = 3000$ s

En aquest moment la paret dreta passa a disposar de la temperatura màxima (23°C) de la secció junt amb la paret inferior. Simultàniament, la temperatura mínima s'incrementa de nou fins els 19°C i la seva ubicació es desplaça lleugerament cap a la part superior esquerra, principalment a causa de la influència tèrmica de la calenta paret dreta. Així mateix, es veu reduït el gradient tèrmic entre aquestes dues parets de màxima temperatura i la zona de mínima temperatura, corroborable també per la menor presència d'isotermes.

Instant $t = 4000$ s

En referència a l'instant corresponent a $t = 4000$ s, el quart gràfic mostra un creixement de la temperatura de la paret dreta fins els 28°C , rellevant així a la paret isoterma inferior a una temperatura constant de 23°C considerablement inferior. És així que la zona dels materials 1 i 3 han assolit temperatures força uniformes entorn els $21 \sim 22^{\circ}\text{C}$, principalment per la influència de les regions col·lindants més calentes ja analitzades en l'instant anterior.

Instants $t = 5000, 6000, 7000$ s

A partir dels 5000 s és evident que la secció s'està aproximant a un estat estacionari on la distribució de temperatures roman pràcticament invariable, essent l'única diferència apreciable els canvis de la temperatura màxima a la pared dreta i la seva lleugera influència sobre la zona esquerra de mínima temperatura que abasta els materials 1 i 3. Mentre que la paret dreta passa incrementa la seva temperatura fins els 33, 38 i 48°C corresponentment pels instants $t = 5000, 6000, 7000$ s, les temperatures mínimes es mantenen en 23°C donada la presencia de la paret isoterma inferior (a excepció dels $22 \sim 23^{\circ}\text{C}$ assolits als materials 1 i 3 per $t = 5000$ s).

Si bé és cert que les isotermes es van desplaçant lleugerament cap a l'esquerra a mesura que el temps s'incrementa, fent així que els materials 1 i 3 vegin incrementada la seva temperatura fins els $22 \sim 23$, $23 \sim 24$ i $24 \sim 26^{\circ}\text{C}$, corresponentment pels tres instants ja mencionats.

Instants $t = 8000, 9000, 10000$ s

Finalment, en aquests tres moments temporals es comença a observar un nou fenomen, que es el de l'increment del gradient tèrmic entre la calenta paret dreta i la freda paret inferior. És així que es fa pales el creixement de

la quantitat d'isotermes entre aquestes dues regions, bàsicament degut al continuat increment de temperatura que experimenta la paret dreta. Els seus valors assoleixen els 48, 53 i 58°C corresponentment pels instants $t = 5000, 6000, 7000$ s. Cal destacar que aquest augment implica lògicament una pujada tèrmica dels freds materials 1 i 3, encara que de forma lenta i poc accentuada.

5.2 Evolució temporal de les temperatures als punts A i B

Per tal d'aprofundir a l'anàlisi del comportament tèrmic de la secció, s'estudien concretament els punts A i B proposats per l'enunci del projecte, les coordenades dels quals són:

- Punt A: $(x, y) = (0.65, 0.56)$ m
- Punt B: $(x, y) = (0.74, 0.72)$ m

Al correu s'ajunta la matriu de dades "LEON.mat" que conté la variable "matriu_resultat". En aquesta es pot observar a la primera columna els instants de temps, a la segona les temperatures del punt A i a la tercera les del B, tal i com es demana a l'enunci del projecte.

Tot seguit es mostra l'evolució temporal d'ambdós punts:

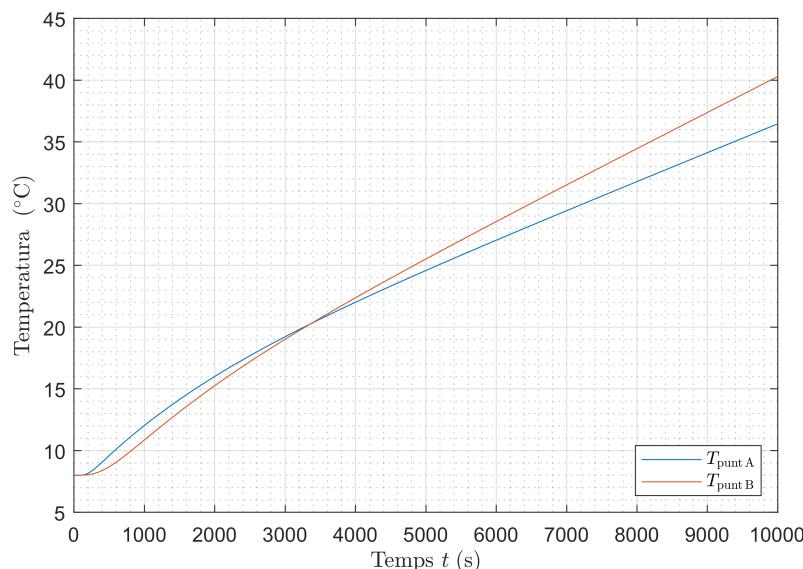


Figura 15: Gràfic comparatiu entre l'evolució temporal de la temperatura als punts A i B.

Tal i com es pot observar, ambdós punts parteixen de la temperatura inicial de 8°C per posteriorment incrementar el seu valor. A partir d'aquí, el punt A adopta valors lleugerament superiors als del punt B fins que a aproximadament uns 3400s ambdues temperatures s'intersequen. D'acord amb la Figura 14 prèviament analitzada, el punt A, que es situa a la part superior del material 2, obté majors valors de temperatures fins dit instant donada la seva major proximitat amb la paret inferior en comparació amb el punt B, situat al material 4. És així que aquesta influència tèrmica de la paret inferior, que disposa de la temperatura màxima de la secció, induceix un gradient de temperatures relativament vertical que afecta en major mesura al punt A.

No obstant, a partir de 3400s, la temperatura del punt B creix per sobre de la del punt A fins a arribar a l'instant final, on les temperatures són 40,30°C i 36,46°C, respectivament. En aquest cas, i novament d'acord amb la Figura 14, es determina que aquesta major temperatura per part del punt B es deu al gran increment de temperatura al llarg del temps que experimenta la paret dreta, situant-se així com a clara temperatura màxima de tota la secció per aquests instants temporals més avançats. Per aquest motiu, donada la ubicació del punt B es fa evident l'efecte tèrmic que rep gràcies a la presència de la mencionada

paret, en comparació amb el punt A, que es troba més allunyat i també disposa de la influència de la freda paret inferior.

6 Conclusions

La realització d'un codi Matlab capaç de tractar un problema de conducció i convecció 2D i règim transitori com és el present projecte resulta una tasca extremadament interessant i que possibilita una millor comprensió dels conceptes ensenyats a l'assignatura. D'acord amb els resultats obtinguts a la verificació del codi, s'ha constatat que aquest està lliure d'errors i que, per tant, ofereix resultats correctes i precisos.

Addicionalment, s'ha realitzat un estudi de la variació de les condicions de contorn i variables físiques, determinant així l'efecte que causen sobre el mapa de temperatures de la secció. És així que també s'ha analitzat la influència de factors de caràcter numèric, a més d'estudiar la implementació d'un factor de relaxació per optimitzar la velocitat de computació.

Finalment s'ha dut a terme un anàlisi de l'evolució temporal del mencionat mapa, justificant els fenòmens observats i relacionant-ho amb els conceptes termodinàmics apresos.

Referències

- [1] Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), UPC. *A Two-dimensional Transient Conduction Problem*. Terrassa (2020).
- [2] Krishna Prasad, J. S. V. R.; Patil, Parag V.. *Algorithm for Solving Tri-diagonal Finite Volume Discretized Linear Systems*. Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). (2015). ISSN: 1932-9466. <http://pvamu.edu/aam>

Annexos

Annex 1: Codi Matlab principal

```

1 %% A Two-dimensional Transient Conduction Problem. CODI PRINCIPAL
2
3 % Autor: Alexis Leon
4
5 close all; clear; clc;
6 format long;
7
8 %% 1. Entrada de dades
9
10 % 1.1. Dades físiques:
11
12 T_inicial=8; % [°C]
13
14 x_p1=0.50; % [m]
15 y_p1=0.40; % [m]
16 x_p2=0.50; % [m]
17 y_p2=0.70; % [m]
18 x_p3=1.10; % [m]
19 y_p3=0.80; % [m]
20
21 rho_P=[1500.00, 1600.00, 1900.00, 2500.00]; % [kg/m^3]
22 C_p=[750.00, 770.00, 810.00, 930.00]; % [J/(kgK) ]
23 k=[170.00, 140.00, 200.00, 140.00]; % [W/(mK) ]
24 T_bottom=23.00; % [°C]
25 Q_flow=60.00; % [W/m]
26 T_g=33.00; % [°C]
27 alpha=9.00; % [W/(m^2 K) ]
28 T_right=@(temps) 8.00+0.005*temps; % [°C]
29
30 % 1.2. Dades numèriques:
31
32 densitat_node=50;
33
34 N_x1=round(densitat_node*x_p1);
35 N_x2=round(densitat_node*(x_p3-x_p1));
36
37 N_y1=round(densitat_node*y_p1);
38 N_y2=round(densitat_node*(y_p2-y_p1));
39 N_y3=round(densitat_node*(y_p3-y_p2));
40
41 delta_t=1; % [s]
42 t_final=10000; % [s]
43 delta=1e-7;
44 beta=1;
45 fr=1;
46
47 %% 2. Càlculs previs
48
49 % 2.1. Generació de la malla:
50
51 N_x=N_x1+N_x2;
52 N_y=N_y1+N_y2+N_y3;
53 delta_x1=x_p1/N_x1; % [m]
54 delta_x2=(x_p3-x_p1)/N_x2; % [m]
55 delta_y1=y_p1/N_y1; % [m]
56 delta_y2=(y_p2-y_p1)/N_y2; % [m]
57 delta_y3=(y_p3-y_p2)/N_y3; % [m]
58
59 % Coordenades de les cares en x
60 x_CV=zeros(1,N_x+2);
61 for i=2:(N_x+2)
62     if i<=N_x1+2
63         x_CV(i)=(i-2)*delta_x1;

```

A Two-dimensional Transient Conduction Problem

```

64      else
65          x_CV(i)=x_CV(N_x1+2)+(i-N_x1-2)*delta_x2;
66      end
67  end
68
69 % Coordenades de les cares en y
70 y_CV=zeros(1,N_y+2);
71 for j=2:(N_y+2)
72     if j<=N_y1+2
73         y_CV(j)=(j-2)*delta_y1;
74     elseif (j>=N_y1+3) && (j<=N_y1+N_y2+2)
75         y_CV(j)=y_CV(N_y1+2)+(j-N_y1-2)*delta_y2;
76     else
77         y_CV(j)=y_CV(N_y1+N_y2+2)+(j-N_y1-N_y2-2)*delta_y3;
78     end
79 end
80
81 % Coordenades dels nodes en x
82 x_P=zeros(1,N_x+2);
83 for i=2:(N_x+2)
84     if i<=N_x1+1
85         x_P(i)=x_CV(i)+delta_x1/2;
86     elseif i==N_x+2
87         x_P(i)=x_p3;
88     else
89         x_P(i)=x_CV(i)+delta_x2/2;
90     end
91 end
92
93 % Coordenades dels nodes en y
94 y_P=zeros(1,N_y+2);
95 for j=2:(N_y+2)
96     if j<=N_y1+1
97         y_P(j)=y_CV(j)+delta_y1/2;
98     elseif (j>=N_y1+2) && (j<=N_y1+N_y2+1)
99         y_P(j)=y_CV(j)+delta_y2/2;
100    elseif j==N_y+2
101        y_P(j)=y_p3;
102    else
103        y_P(j)=y_CV(j)+delta_y3/2;
104    end
105 end
106
107 % 2.2. Geometria:
108
109 % Superfícies
110 S_w=zeros(N_x+2,N_y+2);
111 S_w(:,2:N_y1+1)=delta_y1; % Es considera una amplada de 1 [m]
112 S_w(:,N_y1+2:N_y1+N_y2+1)=delta_y2;
113 S_w(:,N_y1+N_y2+2:N_y+1)=delta_y3;
114 S_e=S_w;
115
116 S_s=zeros(N_x+2,N_y+2);
117 S_s(2:N_x1+1,:)=delta_x1;
118 S_s(N_x1+2:N_x+1,:)=delta_x2;
119 S_n=S_s;
120
121 % Volums dels volums de control
122 V_P=zeros(N_x+2,N_y+2);
123 V_P(2:N_x1+1,2:N_y1+1)=delta_x1*delta_y1*1; % Es considera una amplada de 1 [m]
124 V_P(2:N_x1+1,N_y1+2:N_y1+N_y2+1)=delta_x1*delta_y2*1;
125 V_P(2:N_x1+1,N_y1+N_y2+2:N_y+1)=delta_x1*delta_y3*1;
126 V_P(N_x1+2:N_x+1,2:N_y1+1)=delta_x2*delta_y1*1;
127 V_P(N_x1+2:N_x+1,N_y1+2:N_y1+N_y2+1)=delta_x2*delta_y2*1;
128 V_P(N_x1+2:N_x+1,N_y1+N_y2+2:N_y+1)=delta_x2*delta_y3*1;
129
130 % Matrius de materials que indiquen el material associat a cada node
131 mat=zeros(N_x+2,N_y+2);
132 mat(1:N_x1+1,1:N_y1+1)=1;
133 mat(1:N_x1+1,N_y1+2:end)=3;

```

A Two-dimensional Transient Conduction Problem

```

134 mat(N_x1+2:end,1:N_y1+N_y2+1)=2;
135 mat(N_x1+2:end,N_y1+N_y2+2:end)=4;
136
137
138 % 2.3. Definició de matrius:
139
140 a_P=zeros(N_x+2,N_y+2);
141 a_W=zeros(N_x+2,N_y+2);
142 a_E=zeros(N_x+2,N_y+2);
143 a_S=zeros(N_x+2,N_y+2);
144 a_N=zeros(N_x+2,N_y+2);
145 b_P=zeros(N_x+2,N_y+2);
146 t=zeros(1,t_final/delta_t+1);
147 T=zeros(N_x+2,N_y+2,length(t));
148 Q_abs=zeros(N_x+2,N_y+2,length(t));
149 Q_ced=zeros(N_x+2,N_y+2,length(t));
150 Q_total_posterior=zeros(N_x+2,N_y+2);
151 terme_acumulatiu=zeros(N_x+2,N_y+2);
152 diferencia_conservacio_energia=zeros(N_x+2,N_y+2);
153
154 %% 3. Mapa inicial de temperatures
155
156 T(:,:,1)=T_inicial*ones(N_x+2,N_y+2);
157
158 %% 4. Càcul de temperatures a t^(n+1)=t^n+delta_t
159
160 tic; % S'inicia el comptador per poder calcular el temps de càcul
161 iteracio=zeros(1,length(t)); % S'inicialitza el comptador d'iteracions
162 for n=1:(length(t)-1) % Inici del for temporal que supleix el punt 5 de l'algorisme
163     t(n+1)=t(n)+delta_t;
164
165 % 4.1. Estimació del camp de temperatures:
166 T_temps_posterior_est=T(:,:,n);
167
168
169 desviacio_max=10; % Inicialització de la desviació màxima per poder entrar al while
170 while desviacio_max>delta % Inici del while per avaluar la convergència
171     iteracio(n)=iteracio(n)+1;
172     T_temps_posterior_est=iteracio.anterior=T_temps_posterior.est; % Es guarda la T del ...
173         % temps posterior estimat dins la variable de T del temps posterior estimat de la ...
174             % iteració anterior
175
176 % 4.2. Avaluació dels coeficients de discretització:
177 for i=1:(N_x+2) % Inici del for de nodes i
178     for j=1:(N_y+2) % Inici del for de nodes j
179         if (i==1) && (j>=2 & j<=N_y+1) % Nodes del contorn esquerre
180             a_S(i,j)=0;
181             a_N(i,j)=0;
182             a_W(i,j)=0;
183             d_PE=x_P(i+1)-x_P(i);
184             a_E(i,j)=k*(mat(i,j))*S_e(i,j)/d_PE;
185             a_P(i,j)=a_E(i,j)+alpha*S_w(i,j);
186             b_P(i,j)=alpha*S_w(i,j)*T_g;
187         elseif (i==N_x+2) && (j>=2 & j<=N_y+1) % Nodes del contorn dret
188             a_S(i,j)=0;
189             a_N(i,j)=0;
190             a_E(i,j)=0;
191             a_W(i,j)=0;
192             a_P(i,j)=1;
193             b_P(i,j)=T_right(t(n+1));
194         elseif (j>=2 & i<=N_x+1) && (j==1) % Nodes del contorn inferior
195             a_S(i,j)=0;
196             a_N(i,j)=0;
197             a_W(i,j)=0;
198             a_E(i,j)=1;
199             b_P(i,j)=T_bottom;
200         elseif (i>=2 & i<=N_x+1) && (j==N_y+2) % Nodes del contorn superior
201             a_N(i,j)=0;
202             a_W(i,j)=0;

```

```

202     a_E(i,j)=0;
203     d_PS=y_P(j)-y_P(j-1);
204     a_S(i,j)=k(mat(i,j))*S_s(i,j)/d_PS;
205     a_P(i,j)=a_S(i,j);
206     b_P(i,j)=Q_flow*S_n(i,j);
207     elseif (i>=2 && i<=N_x+1) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes internos
208         % Cara NORTH:
209         d_PN=y_P(j+1)-y_P(j);
210         if ((i>=2 && i<=N_x1+1) && (j==N_y1+1)) || ((i>=N_x1+2 && i<=N_x+1) && ...
211             (j==N_y1+N_y2+1)) % Nodes amb cara NORTH compartida entre els materials ...
212             1&3 i 2&4
213             k_n=conductivitat_mitja_harmonica('n',d_PN,i,j,x_P,y_P,x_CV,y_CV,k,mat); % ...
214             Es crida a la funció per calcular la mitja harmònica
215         else
216             k_n=k(mat(i,j)); % Si no es tracta de cap cara entre materials, la ...
217             conductivitat és la del propi material
218         end
219         a_N(i,j)=k_n*S_n(i,j)/d_PN;
220
221         % Cara SOUTH:
222         d_PS=y_P(j)-y_P(j-1);
223         if ((i>=2 && i<=N_x1+1) && (j==N_y1+2)) || ((i>=N_x1+2 && i<=N_x+1) && ...
224             (j==N_y1+N_y2+2)) % Nodes amb cara SOUTH compartida entre els materials ...
225             1&3 i 2&4
226             k_s=conductivitat_mitja_harmonica('s',d_PS,i,j,x_P,y_P,x_CV,y_CV,k,mat);
227         else
228             k_s=k(mat(i,j));
229         end
230         a_S(i,j)=k_s*S_s(i,j)/d_PS;
231
232         % Cara EAST:
233         d_PE=x_P(i+1)-x_P(i);
234         if (i==N_x1+1) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes amb cara EAST compartida entre ...
235             els materials 1&2, 2&3 i 3&4
236             k_e=conductivitat_mitja_harmonica('e',d_PE,i,j,x_P,y_P,x_CV,y_CV,k,mat);
237         else
238             k_e=k(mat(i,j));
239         end
240         a_E(i,j)=k_e*S_e(i,j)/d_PE;
241
242         % Cara WEST:
243         d_PW=x_P(i)-x_P(i-1);
244         if (i==N_x1+2) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes amb cara WEST compartida entre ...
245             els materials 1&2, 2&3 i 3&4
246             k_w=conductivitat_mitja_harmonica('w',d_PW,i,j,x_P,y_P,x_CV,y_CV,k,mat);
247         else
248             k_w=k(mat(i,j));
249         end
250         a_W(i,j)=k_w*S_w(i,j)/d_PW;
251
252         % Resta de coeficients respecte P:
253         a_P(i,j)=a_N(i,j)+a_W(i,j)+a_E(i,j)+a_S(i,j)+rho_P(mat(i,j))*V_P(i,j)*C_p(mat(i,j))/delta_t;
254         b_P(i,j)=rho_P(mat(i,j))*V_P(i,j)*C_p(mat(i,j))*T(i,j,n)/delta_t;
255
256     end % Fi del if dels tipus de nodes contorn o internos
257     end % Fi del for de nodes j
258 end % Fi del for de nodes i
259
260 % 4.3. Resolució del sistema d'equacions: line-by-line
261
262 % Inicialització de termes i coeficients
263 P=zeros(N_x+2,N_y+2);
264 Q=zeros(N_x+2,N_y+2);
265 b_P_linebyline=zeros(N_x+2,N_y+2);
266 for j=1:N_y+2 % For que canvia la línia o fila a resoldre
267     % Càcul de P i Q:
268     for i=1:N_x+2 % For que canvia el node de la fila
269         if (i==1 && (j==1||j==N_y+2)) || (i==N_x+2 && (j==1||j==N_y+2))
270             % Si es tracta d'un dels nodes de les cantonades, no es

```

```

264         % realitza cap acció ja que no es calculen
265     else
266         if j==1 % Fila inicial
267             b_P_linebyline(i,j)=b_P(i,j)+a_N(i,j)*T(i,j+1,n+1);
268         elseif j==N_y+2 % Fila final
269             b_P_linebyline(i,j)=b_P(i,j)+a_S(i,j)*T(i,j-1,n+1);
270         else % Resta de files
271             b_P_linebyline(i,j)=b_P(i,j)+a_N(i,j)*T(i,j+1,n+1)+a_S(i,j)*T(i,j-1,n+1);
272         end
273         if i==1 % Node inicial
274             P(i,j)=a_E(i,j)/a_P(i,j);
275             Q(i,j)=b_P_linebyline(i,j)/a_P(i,j);
276         else % Resta de nodes
277             P(i,j)=a_E(i,j)/(a_P(i,j)-a_W(i,j)*P(i-1,j));
278             Q(i,j)=(b_P_linebyline(i,j)+a_W(i,j)*Q(i-1,j))/(a_P(i,j)-a_W(i,j)*P(i-1,j));
279         end
280     end
281 end % Fi del for que canvia el node de la fila
282
283 % Càlcul de T:
284 for i=N_x+2:-1:1 % Es recorren els nodes en ordre invers
285     if i==N_x+2 % Cas de l'últim node
286         T(i,j,n+1)=Q(i,j);
287     else % Resta de nodes
288         T(i,j,n+1)=P(i,j)*T(i+1,j,n+1)+Q(i,j);
289     end
290     % Es guarda la temperatura per després poder avaluar el criteri de
291     % convergència, a més, s'empra un factor de relaxació fr
292     T_temps_posterior_est(i,j)=T_temps_posterior_est_iteracio_anterior(i,j)...
293         +fr*(T(i,j,n+1)-T_temps_posterior_est_iteracio_anterior(i,j));
294 end
295
296 end % Fi del for que canvia la línia o fila a resoldre
297
298
299 % 4.4. Condició de convergència:
300 desviacio_max=max(max(abs(T_temps_posterior_est_iteracio_anterior-T(:,:,n+1))));
301
302 end % Fi del while per avaluar la convergència
303 end % Fi del for temporal
304 elapsedTime=toc; % Es calcula el temps de càlcul
305
306 %% 5. Càlculs finals i impressió de resultats
307
308 % 5.1. Càlcul del balanç de calors:
309
310 instant=5000; % Instant en el que es vol calcular el balanç
311 n=find(abs(t-instant)==min(abs(t-instant))); % Es troba la n corresponent a dit instant
312 for i=1:(N_x+2)
313     for j=1:(N_y+2)
314         if (i==1) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes del contorn esquerre
315             Q_w=alpha*S_w(i,j)*(T_g-T(i,j,n+1));
316             Q_e=a_E(i,j)*(T(i,j,n+1)-T(i+1,j,n+1));
317             Q_abs(i,j,n+1)=Q_w; % Calor absorbit
318             Q_ced(i,j,n+1)=Q_e; % Calor cedit
319         elseif (i==N_x+2) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes del contorn dret
320             Q_abs(i,j,n+1)=0;
321             Q_ced(i,j,n+1)=0;
322         elseif (i>=2 && i<=N_x+1) && (j==1) % Nodes del contorn inferior
323             Q_abs(i,j,n+1)=0;
324             Q_ced(i,j,n+1)=0;
325         elseif (i>=2 && i<=N_x+1) && (j==N_y+2) % Nodes del contorn superior
326             Q_n=Q_flow*S_n(i,j);
327             Q_s=a_S(i,j)*(T(i,j-1,n+1)-T(i,j,n+1));
328             Q_abs(i,j,n+1)=Q_n+Q_s;
329             Q_ced(i,j,n+1)=0;
330         elseif (i>=2 && i<=N_x+1) && (j>=2 && j<=N_y+1) % Nodes interns
331             % Calors:
332             Q_w=a_W(i,j)*(T(i-1,j,n+1)-T(i,j,n+1));
333             Q_e=a_E(i,j)*(T(i,j,n+1)-T(i+1,j,n+1));

```

```

334     Q_s=a_S(i,j)*(T(i,j-1,n+1)-T(i,j,n+1));
335     Q_n=a_N(i,j)*(T(i,j,n+1)-T(i,j+1,n+1));
336     Q_abs(i,j,n+1)=Q_w+Q_s;
337     Q_ced(i,j,n+1)=Q_e+Q_n;
338
339     end % Fi del if del tipus de nodes contorn o interns
340
341     terme_acumulatiu(i,j)=rho_P(mat(i,j))*V_P(i,j)*C_p(mat(i,j))*(T(i,j,n+1)-T(i,j,n))/deltat; ...
342         % Terme acumulatiu de l'energia
343     Q_total_posterior(i,j)=Q_abs(i,j,n+1)-Q_ced(i,j,n+1); % Q total a l'instant n+1
344     diferenciacio_energia(i,j)=terme_acumulatiu(i,j)-Q_total_posterior(i,j); ...
345         % Càlcul de la diferència d'energia
346
347
348 %% 5.2. Obtenció de la temperatura als punts A i B a estudiar:
349
350
351 % Punts A i B
352 x_punt_A=0.65; % [m]
353 y_punt_A=0.56; % [m]
354 x_punt_B=0.74; % [m]
355 y_punt_B=0.72; % [m]
356
357 % Coordenades com a vector
358 x_punts=[x_punt_A x_punt_B];
359 y_punts=[y_punt_A y_punt_B];
360
361 T_punts=zeros(2,length(t));
362 for n=1:(length(t)) % Inici del for temporal
363
364     for p=1:2 % Inici del for que selecciona el punt A o B a calcular
365         for i=1:N_x+1 % Inici del for de nodes i
366             for j=1:N_y+1 % Inici del for de nodes j
367                 if (y_punts(p)<y_CV(j+1) && y_punts(p)>y_CV(j)) % El punt es troba entre la ...
368                     cara SUD i NORD del node [i,j]
369                     if (x_punts(p)<x_CV(i+1) && x_punts(p)>x_CV(i)) % El punt es troba ...
370                         entre la cara WEST i EAST del node [i,j]
371                         T_punts(p,n)=T(i,j,n);
372                     elseif x_punts(p)==x_CV(i) % El punt es troba a la cara WEST del node [i,j]
373                         T_punts(p,n)=1/2*(T(i-1,j,n)+T(i,j,n)); % Es fa la mitjana entre la ...
374                             T del node [i-1,j] i el [i,j]
375                     end
376                 elseif y_punts(p)==y_CV(j) % El punt es troba a la cara SUD del node [i,j]
377                     if (x_punts(p)<x_CV(i+1) && x_punts(p)>x_CV(i)) % El punt es troba ...
378                         entre la cara WEST i EAST del node [i,j]
379                         T_punts(p,n)=1/2*(T(i,j-1,n)+T(i,j,n)); % Es fa la mitjana entre la ...
380                             T del node [i,j-1] i el [i,j]
381                     elseif x_punts(p)==x_CV(i) % El punt es troba a la cara WEST del node [i,j]
382                         T_punts(p,n)=1/4*(T(i-1,j,n)+T(i,j,n)+T(i-1,j-1,n)+T(i,j-1,n)); % ...
383                             Es fa la mitjana entre la T dels nodes [i-1,j], [i,j], [i,j-1] ...
384                             i [i-1,j-1]
385                     end
386                 end
387             end % Fi del for de nodes j
388         end % Fi del for de nodes i
389     end % Fi del for que selecciona el punt A o B a calcular
390
391 end % Fi del for temporal
392 matriu_resultat=[t' T_punts']; % Matriu resultat demanda. Disposa del temps a la primera ...
393         columna i T_A i T_B a la segona i tercera
394
395
396 %% 5.3. Gràfica dels mapes de temperatures:
397
398 [X,Y]=meshgrid(x_CV,y_CV); % Creació de la malla que defineixen els volums de control a ...
399         partir de les coordenades de les cares

```

```

392 %Instants en els quals es volen representar les gràfiques, també es pot escollir un únic ...
393 instant
394 instants_temp=[1000,2000,3000,4000,5000,6000,7000,8000,9000,10000];
395 for index=1:length(instants_temp)
396 n=find(abs(t-instants_temp(index))==min(abs(t-instants_temp(index)))); % Es troba la n ...
397 %correspondent a dit instant
398 T_actual=T(:,:,n); % Es guarda la temperatura del nodes corresponents a dit instant
399 figure(index);
400 set(figure(index), 'Renderer', 'painters', 'Position', [50 50 1000 700])
401
402 % Configuració del eixos:
403 axx = gca;
404 outerpos = axx.OuterPosition;
405 ti = axx.TightInset;
406 left = outerpos(1) + 2.6*ti(1);
407 bottom = outerpos(2) + 2.6*ti(2);
408 axx.width = outerpos(3) - 2.25*ti(1) - 2.25*ti(3);
409 axx.height = outerpos(4) - 3*ti(2) - 3*ti(4);
410 axx.Position = [left bottom axx.width axx.height];
411 colormap jet;
412
413 grafica=pcolor(X,Y,T_actual(:,:,)); % Respresentació del mapa de temperatures
414
415 ax=gca;
416 ax.TickDir = 'out';
417 grafica.EdgeAlpha=0.25;
418
419 xlabel('$x$\backslash;\mathrm{(m)}$', 'interpreter', 'latex', 'Fontsize', 18);
420 ylabel('$Y$\backslash;\mathrm{(m)}$', 'interpreter', 'latex', 'Fontsize', 18);
421 title(['Instant $t=$ ', num2str(instants_temp(index)), ' ...
422 s'], 'interpreter', 'latex', 'Fontsize', 18);
423 xticks([0:0.1:1.1]);
424
425 % Configuració de la barra de temperatures:
426 cbar=colorbar;
427 Tmin=min(T_actual(:,:,end~=0));
428 Tmax=max(max(Tactual(:,:,end)));
429 caxis([Tmin,Tmax]);
430 title(cbar, '$T$\backslash;\mathrm{(^{\circ}C)}$', 'interpreter', 'latex', 'Fontsize', 12);
431 hold on;
432
433 % Línes que defineixen els límits dels materials:
434 line([x_p1,x_p1],[0,y_p3],'Color','k','LineWidth',1.25);
435 line([0,x_p1],[y_p1,y_p1],'Color','k','LineWidth',1.25);
436 line([x_p1,x_p3],[y_p2,y_p2],'Color','k','LineWidth',1.25);
437 hold on;
438
439 % Isotermes:
440 isotermes=round(Tmin):Tmax;
441 [C,isot]=contour(X,Y,T_actual(:,:,),isotermes,'LineColor','k');
442 clabel(C,isot,'Color','k','LabelSpacing',450,'Margin',0.1,'BackgroundColor',[0.7 0.7 ...
443 0.7], 'interpreter', 'latex');
444 end

```

Annex 2: Funció Matlab de la conductivitat mitjana harmònica

```

1 % Funció per calcular la mitjana harmònica
2 function k_i=conductivitat_mitja_harmonica(cara,d_PI,i,j,x_P,y_P,x_CV,y_CV,k,mat)
3
4 if cara=='s' % Cara sud
5 d_Pi=y_P(j)-y_CV(j);
6 d_iI=y_CV(j)-y_P(j-1);
7 k_i=d_PI/(d_Pi/k(mat(i,j))+d_iI/k(mat(i,j-1)));
8 elseif cara=='n' % Cara nord
9 d_Pi=y_CV(j+1)-y_P(j);
10 d_iI=y_P(j+1)-y_CV(j+1);
11 k_i=d_PI/(d_Pi/k(mat(i,j))+d_iI/k(mat(i,j+1)));
12 elseif cara=='w' % Cara west
13 d_Pi=x_P(i)-x_CV(i);
14 d_iI=x_CV(i)-x_P(i-1);
15 k_i=d_PI/(d_Pi/k(mat(i,j))+d_iI/k(mat(i-1,j)));
16 elseif cara=='e' % Cara east
17 d_Pi=x_CV(i+1)-x_P(i);
18 d_iI=x_P(i+1)-x_CV(i+1);
19 k_i=d_PI/(d_Pi/k(mat(i,j))+d_iI/k(mat(i+1,j)));
20 end
21
22 end

```