



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

**Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa**



Laboratori d'Enginyeria Acústica i Mecànica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Vehicle circulant sobre un paviment rugós

Mecànica II - Oscil·lacions i Vibracions

Iván Sermanoukian Molina

Alexis León Delgado

Yi Qiang Ji Zhang

Felipe Gallardo

Jordi Sancho Ticó

Alex Martínez de Francisco

Santiago Villarroya Calavia

Lois Meira López

Álvaro Sánchez del Río

Pau Romeu Llordella

Paco Sanz

Data d'entrega20 Gener 2020

InstructorDr. Behshad Noori

Índex

1	Introducció	3
2	Descripció del model	3
2.1	Diagrama de Sòlid Lliure	4
2.2	Càlcul de les matrius M , K i C	4
3	Modes propis i freqüències naturals	7
4	Estudi amb aproximació modal	9
5	Matriu d'estat i vectors i valors propis complexos	11
6	Matriu de receptàncies $[H]$	13
7	Càlculs amb una linealització del model de força de contacte	15
7.1	Força de contacte expressada en forma lineal	16
8	Càlculs amb un model no-lineal de la força de contacte	20
9	Conclusions	23
10	Bibliografia	24
11	Annexos	25
11.1	Codi MATLAB	25

1 Introducció

En aquest projecte es demana estudiar el comportament dinàmic d'un model simplificat d'una aeronau a l'hora de rodar (estat estacionari) quan aquesta es troba circulant de forma estacionaria sobre la pista. La rugositat de la pista és el principal agent excitador que es considerarà en aquest projecte.

L'eina que s'empra per realitzar l'estudi serà el programari MatLab.

2 Descripció del model

El model de vehicle que es proposa es pot observar a la Figura 1. Aquest model es construeix mitjançant una massa ($m_f; J_f$) que representa el fuselatge, amb els seus dos graus de llibertat propis i moviment vertical) i tres engranatges d'aterratge $m_w^{(i)}$, connectats entre ells mitjançant unes molles $k_{ps}^{(i)}$ amb alguns esmorteïments viscosos $c_{ps}^{(i)}$.

Com també es pot veure a la Figura 1, les distàncies entre aquests engranatges d'aterratge es defineixen com $d_w^{(ij)}$, sent i i j dos diferents sistemes. La posició del centre de gravetat (CG) de m_f està desplaçat cap a la part dreta de l'eix vertical del sistema $m_w^{(2)}$ una distància de valor a .

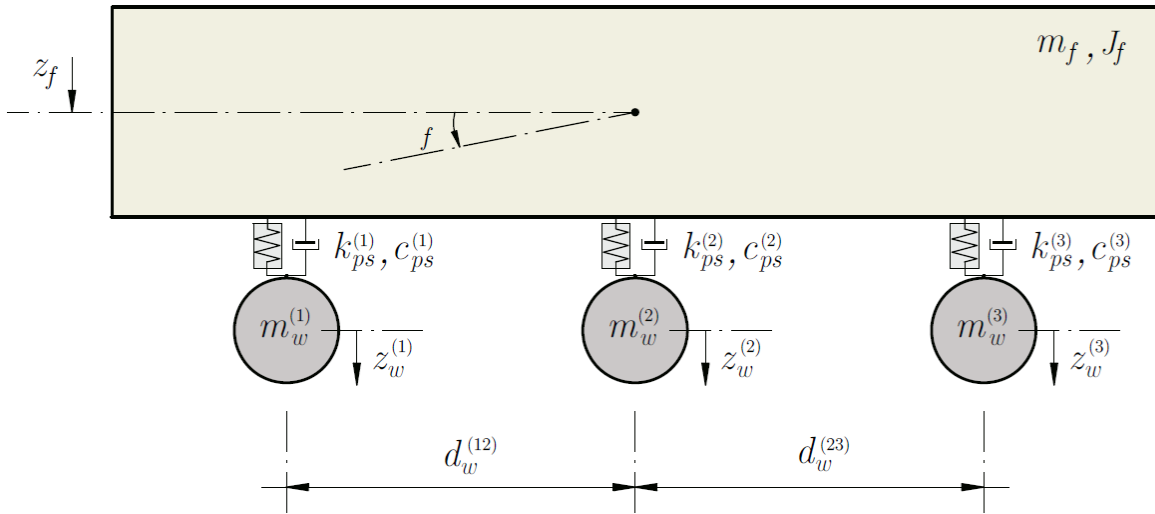


Figura 1: Model dinàmic de l'aeronau

Es consideren altres *tres graus de llibertat*, sent aquests els moviments verticals de les rodes. Per tant, això Serà un sistema de **5 DoF**, amb les seves matrius 5×5 de massa $[M]$, amortiment $[C]$ i rigidesa $[K]$.

Es considerarà la velocitat del vehicle com una v constant, que es desplaça per una rodalia amb una rugositat $er(x)$, on x és la direcció longitudinal en què avança el vehicle. A més a més, es té en compte el fet que la forma del pneumàtic no serà exactament suau i tindrà unes imperfeccions sobre la circumferència exacta del radi de la roda. Aquesta imperfecció es denotarà per $ew(x)$. La força de contacte entre la roda i el paviment

s'assumirà sempre en direcció vertical on el sentit passarà pel centre de la roda. La força de contacte es definirà per $f = k_c \cdot \delta_r^{(3/2)}$, on k_c és la rigidesa del contacte i el δ_r és la deformació de la roda considerant un paviment absolutament rígid llis.

Es treballarà bidimensionalment i per tant, a efectes pràctics, les dues rodes de la suspensió es consideraran una de sola. Per obtenir les matrius corresponents, cal prèviament realitzar el diagrama de cos lliure (Free Body Diagram).

2.1 Diagrama de Sòlid Lliure

El primer pas en l'estudi és l'anàlisi de cada sòlid i estudiar-ne les forces que hi actuen sobre cadascun dels sòlids per separat. S'aplicarà la *Segona Llei de Newton* per definir el sumatori de forces en l'equilibri estàtic (SEP). Assumint que $z_f > \varphi_f \cdot d$, on d representa totes les distàncies relacionades amb els moments del sistema; obtenim les següents equacions de moviment (EoM) per a tots els graus de llibertat (DoF), que corresponen a Eqs.

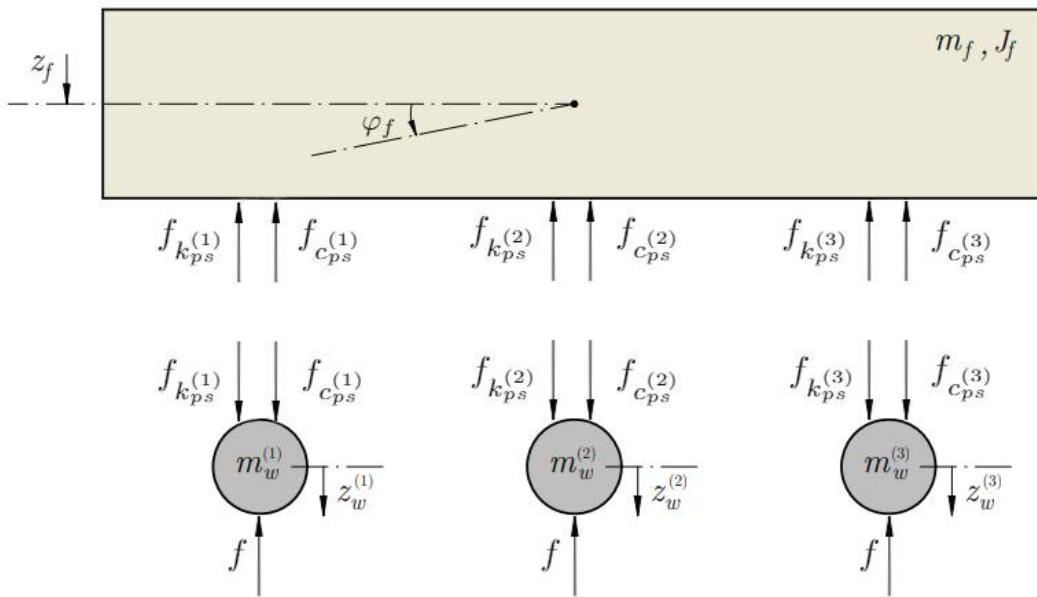


Figura 2: Diagrama de Sòlid lliure del components del model simplificat de l'aeronau

2.2 Càlcul de les matrius M, K i C

Aplicant la *segona llei de Newton* per la massa del fuselatge m_f , i les 3 masses del tren de d'aterratge s'obtenen les següents expressions:

- Massa del fuselatge m_f

$$\begin{aligned}
 m_f \cdot \ddot{z}_f = & -k_{ps}^{(1)} [z_f - z_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] - c_{ps}^{(1)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\dot{\varphi}_f] - k_{ps}^{(2)} [z_f - z_w^{(2)} + a\varphi_f] \\
 & - c_{ps}^{(2)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(2)} + a\dot{\varphi}_f] - k_{ps}^{(3)} [z_f - z_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] - c_{ps}^{(3)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\dot{\varphi}_f] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_f \cdot \ddot{\varphi}_f = & - \left[k_{ps}^{(1)} [z_f - z_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] + c_{ps}^{(1)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\dot{\varphi}_f] \right] (d_w^{(12)} + a) - \left[k_{ps}^{(2)} [z_f - z_w^{(2)} + a\varphi_f] \right. \\
 & \left. + c_{ps}^{(2)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(2)} + a\dot{\varphi}_f] \right] a + \left[k_{ps}^{(3)} [z_f - z_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] + c_{ps}^{(3)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\dot{\varphi}_f] \right] (d_w^{(23)} - a) \quad (2)
 \end{aligned}$$

- Massa 1 del tren d'aterratge $m_w^{(1)}$

$$m_w^{(1)} \cdot \ddot{z}_w^{(1)} = k_{ps}^{(1)} [z_f - z_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] + c_{ps}^{(1)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\dot{\varphi}_f] - f \quad (3)$$

- Massa 2 del tren d'aterratge $m_w^{(2)}$

$$m_w^{(2)} \cdot \ddot{z}_w^{(2)} = k_{ps}^{(2)} [z_f - z_w^{(2)} + a\varphi_f] + c_{ps}^{(2)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(2)} + a\dot{\varphi}_f] - f \quad (4)$$

- Massa 3 del tren d'aterratge $m_w^{(3)}$

$$m_w^{(3)} \cdot \ddot{z}_w^{(3)} = k_{ps}^{(3)} [z_f - z_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] + c_{ps}^{(3)} [\dot{z}_f - \dot{z}_w^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\dot{\varphi}_f] - f \quad (5)$$

Cal esmentar que per aquest primer apartat, no es considera la força f , corresponent a la exercida pel paviment sobre les rodes.

El sistema d'equacions resultant es pot escriure en forma matricial de la següent manera:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (6)$$

Les matrius de massa, rigidesa i esmorteïment obtingudes han estat, respectivament:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_w^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_w^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_w^{(3)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{ps}^{(1)} + c_{ps}^{(2)} + c_{ps}^{(3)} & c_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) + c_{ps}^{(2)}a - c_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & -c_{ps}^{(1)} & -c_{ps}^{(2)} & -c_{ps}^{(3)} \\ c_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) + c_{ps}^{(2)}a - c_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & c_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a)^2 + c_{ps}^{(2)}a^2 + c_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a)^2 & -c_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) & -c_{ps}^{(2)}a & c_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) \\ -c_{ps}^{(1)} & -c_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) & c_{ps}^{(1)} & 0 & 0 \\ -c_{ps}^{(2)} & -c_{ps}^{(2)}a & 0 & c_{ps}^{(2)} & 0 \\ -c_{ps}^{(3)} & c_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & 0 & 0 & c_{ps}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{ps}^{(1)} + k_{ps}^{(2)} + k_{ps}^{(3)} & k_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) + k_{ps}^{(2)}a - k_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & -k_{ps}^{(1)} & -k_{ps}^{(2)} & -k_{ps}^{(3)} \\ k_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) + k_{ps}^{(2)}a - k_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & k_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a)^2 + k_{ps}^{(2)}a^2 + k_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a)^2 & -k_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) & -k_{ps}^{(2)}a & k_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) \\ -k_{ps}^{(1)} & -k_{ps}^{(1)}(d_w^{(12)} + a) & k_{ps}^{(1)} & 0 & 0 \\ -k_{ps}^{(2)} & -k_{ps}^{(2)}a & 0 & k_{ps}^{(2)} & 0 \\ -k_{ps}^{(3)} & k_{ps}^{(3)}(d_w^{(23)} - a) & 0 & 0 & k_{ps}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Substituint les equacions trobades per els valors corresponents:

$$[M] = \begin{bmatrix} 25000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 24000 & -4500 & -8000 & -9000 & -7000 \\ -4500 & 344250 & -24000 & -13500 & 42000 \\ -8000 & -24000 & 8000 & 0 & 0 \\ -9000 & -13500 & 0 & 9000 & 0 \\ -7000 & 42000 & 0 & 0 & 7000 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 993000 & 42000 & -350000 & -380000 & -263000 \\ 42000 & 13473000 & -1050000 & -570000 & 1578000 \\ -350000 & -1050000 & 350000 & 0 & 0 \\ -380000 & -570000 & 0 & 380000 & 0 \\ -263000 & 1578000 & 0 & 0 & 263000 \end{bmatrix} \quad (12)$$

3 Modes propis i freqüències naturals

Per calcular les freqüències naturals f_n i els modes propis *Mode Shapes* no s'han de considerar les contribucions de la matriud d'amortiment ni de les forces externes ja que les freqüències naturals es determinen exclusivament per la massa i la rigidesa del sistema.

Consegüentment, el nostre *EOM* en la seva forma matricial es redueix a

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

Considerant que tots els graus de llibertat es mouen amb la mateixa freqüència w i la mateixa amplitud

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

amb la qual cosa, la *EOM* queda reduïda a

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

$$\left(-\omega^2[M] + [K]\right) A \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$[K] - \omega^2[M] = 0$$

Però considerant que el determinant ha de ser nul, tenim un problema de **vectors propis**.

$$(V, D) = eig(K, M)$$

Executant l'*script* anterior obtenim els vectors propis (*mode shapes*) i els (*valors propis*). Les freqüències naturals f_n del sistema que s'han obtingut són:

$$[f_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10.1664 \\ 10.5523 \\ 10.9901 \end{bmatrix}$$

En el cas dels *Mode Shapes*, la matriu resultant és la següent:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} -0.0059 & 0.0023 & 0.0003 & -0.0003 & 0.0004 \\ -0.0006 & -0.0015 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0076 & -0.0021 & -0.0006 & 0.1114 & -0.0054 \\ -0.0067 & 0.0001 & 0.0010 & -0.0058 & -0.1114 \\ -0.0024 & 0.0111 & -0.1235 & -0.0007 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

A partir d'aquesta matriu normalitzem amb el primer valor de cada columna.

$$[\Psi_{norm}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.0988 & -0.6332 & -0.3762 & 0.1956 & 0.0951 \\ 1.2965 & -0.8997 & -1.9090 & -331.4874 & -14.2969 \\ 1.1483 & 0.0501 & 3.0903 & 17.3532 & -296.2485 \\ 0.4069 & 4.7995 & -386.0692 & 2.0114 & -2.4056 \end{bmatrix}$$

La matriu anterior correspon als modes propis del sistema si en forma de columna mentre que les files indiquen el comportament de cada grau de llibertat seguint l'ordre (Z_f , Φ_f , \ddot{Z}_w^1 , \ddot{Z}_w^2 , \ddot{Z}_w^3). Abans d'explicar res sobre les formes modals, cal fer notar que la segona coordenada de cada representa una rotació, en radians, a diferència dels altres dos graus de llibertat que representen desplaçaments, en metres. Això implica que la comparació d'amplituds associades als diferents graus de llibertat en un determinat mode propi no sigui directa. En aquest cas, cal tenir en compte la distància corresponent per a transformar l'amplitud de rotació en amplitud de desplaçament comparable als altres graus de llibertat

- Mode 1: En aquest mode, els moviments de les rodes 1 i 2 son molt similars juntament amb el moviment vertical del fuselatge. El tren d'aterratge 3 té un terç de significança respecte les anteriors. Així, el vehicle i les rodes es mouen en fase. La rotació té un ordre de magnitud similar al moviment del vehicle que va en contra-fase amb la 3 roda i en fase amb les altres.
- Mode 2: En aquest mode, el moviment més significatiu és el del tren d'aterratge 3. El fuselatge té el mateix ordre de magnitud que la roda 1 però es mouen en contrafase. La rotació en aquest cas també és significativa i es mou en contrafase amb el fuselatge. El tren d'aterratge 2 és menyspreable.

- Mode 3: En aquest mode, únicament es rellevant el moviment del tren d'aterratge 3, que es molt significatiu.
- Mode 4: En aquest mode, el tren d'aterratge 1 és el més rellevant amb dos ordres de magnitud per sobre de l'efecte del tren número 2, el qual a la vegada és un o dos ordres de magnitud superior als altres, que considerem menyspreables.
- Mode 5: En aquest mode, el tren d'aterratge 2 és el més rellevant amb dos ordres de magnitud per sobre de l'efecte del tren d'aterratge 1. Els altres dispositius no són significatius.

4 Estudi amb aproximació modal

L'equació de moviment d'aquesta aeronau 6 es pot reescriure de manera que $[X]$ es pot reemplaçar per $[\Phi][Q]$, on $[Q]$ és el vector de coordenades modal.

Així doncs, aplicant aquesta transformació a cadascuna de les matrius de massa, amortiment i rigidesa s'obté

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [C][\Phi]\{\dot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{F\}$$

Si es multiplica ambdós membres per $[\Phi]^T$ s'obté l'equació 13

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{q}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T\{F\} \quad (13)$$

Efectivament, els nous termes que multipliquen les respostes modals $\{q\}$ representen les matrius de massa, amortiment i rigidesa de l'estat modal.

Si apliquem l'equació 13 a les matrius de massa $[M]$, amortiment $[C]$ i rigidesa $[K]$ s'arriba a les matrius modals següents:

$$[\tilde{M}] = [\Phi]^T[M][\Phi]$$

$$[\tilde{C}] = [\Phi]^T[C][\Phi]$$

$$[\tilde{K}] = [\Phi]^T[K][\Phi]$$

Tanmateix, en el cas de la matriu d'amortiment modal C , per poder continuar usant el mètode modal cal que la matriu d'amortiment sigui diagonal. És per aquest motiu que s'anomena **aproximació modal** ja que és un mètode en què es negligeixen els possibles efectes dissipatius i pèrdues d'energia del sistema. El mètode recomanat (directe o modal) dependrà de l'estudi que es vol realitzar. El mètode directe és més senzill i ràpid que el mètode modal per pocs graus de llibertat. Nogensmenys, el mètode modal pretén anar un pas més enllà i permet distingir quines són les freqüències de més energia i com interaccionen el conjunt de graus de llibertat entre ells.

En el cas que la matriu $[\tilde{C}]$ sigui diagonal, ens trobem amb una **anàlisi modal**.

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108.5997 & 0.0889 & 0.1015 \\ 0 & 0 & 0.0889 & 100.4884 & 0.1905 \\ 0 & 0 & 0.1015 & 0.1905 & 112.9249 \end{bmatrix}$$

En el nostre cas es pot observar que els termes fora de la diagonal son suficientment petits, amb dos ordres de magnitud per sota, com per a poder-los negligir.

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108.5997 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100.4884 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112.9249 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4080.2905 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4395.9446 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4768.3212 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5 Matriu d'estat i vectors i valors propis complexes

Es volen obtenir les matrius d'estat per a aconseguir els *complex modes*, aquests modes són necessaris per estudiar el moviment lliure d'un sistema *NDOF* amb esmorteïment. La matriu d'estat s'obté de la següent manera:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

La matriu d'estat resultant és tal que:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -39.72 & -1.68 & 14 & 15.2 & 10.52 & -0.96 & 0.18 & 0.32 & 0.36 & 0.28 \\ -0.105 & -33.6825 & 2.625 & 1.425 & -3.945 & 0.0113 & -0.8606 & 0.06 & 0.0338 & -0.105 \\ 4375 & 13125 & -4375 & 0 & 0 & 100 & 300 & -100 & 0 & 0 \\ 4750 & 7125 & 0 & -4750 & 0 & 112.5 & 168.75 & 0 & -112.5 & 0 \\ 4046.154 & -24276.923 & 0 & 0 & -4046.154 & 107.692 & -646.154 & 0 & 0 & -107.692 \end{bmatrix}$$

Tot seguit, es mostra el vector de valors propis obtingut, és a dir, les freqüències naturals.

$$[f_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4510 + 1.2149i \\ 0.4510 - 1.2149i \\ 0.3993 + 1.2608i \\ 0.3993 - 1.2608i \\ 0.3483 + 1.2234i \\ 0.3483 - 1.2234i \\ (6.5391 + 6.5391i)10^{-5} \\ (6.5391 - 6.5391i)10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es pot veure que les freqüències naturals són nombres complexos, això és acceptable per a aquest mètode de resolució, també cal destacar que aquestes freqüències són 5 freqüències amb els seus conjugats.

A continuació es mostren les freqüències naturals de forma polar:

$$[f_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2959 \angle 69.6339^\circ \\ 1.2959 \angle -69.6339^\circ \\ 1.3225 \angle 72.4268^\circ \\ 1.3225 \angle -72.4268^\circ \\ 1.272 \angle 74.1084^\circ \\ 1.272 \angle -74.1084^\circ \\ 9.2477 \cdot 10^{-5} \angle 45^\circ \\ 9.2477 \cdot 10^{-5} \angle -45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalment, els vectors propis¹ o *Mode Shapes* del sistema resulten en:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8501 & 0.8501 & 0.9998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0500 & 0.0500 & 0 \\ 1.0000 & -0.0113i & -0.0113+0.0098i & -0.0004-0.0001i & -0.0004+0.0001i & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 1.000 \\ 0.9999 & 0.0004+0.0002i & 0.0004-0.0002i & -0.0117-0.0079i & -0.0117+0.0079i & -0.0001i & 0.0001i & 0 & 0.9251 & 0.9251 & 0.9999 \\ 0.9993 & 0 & 0 & 0.0001-0.0002i & 0.0001+0.0002i & 0.0132+0.0081i & 0.0132-0.0081i & 0.5503 & 0.5503 & 0.9993 \\ 0 & -0.0031 & -0.0031 & -0.0032 & -0.0032 & 0.0025 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0006 & -0.0006 & -0.0003 & -0.0003 & -0.0010 & -0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9939+0.0061i & 0.9939-0.0061i & 0.0269-0.0084i & 0.0269+0.0084i & 0.0010-0.0010i & 0.0010+0.0010i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0329+0.0084i & -0.0329-0.0084i & 0.9793-0.0207i & 0.9793+0.0207i & -0.0003+0.0096i & -0.0003-0.0096i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0018-0.0020i & 0.0018+0.0020i & -0.0007+0.0135i & -0.0007-0.0135i & -0.9973+0.0027i & -0.9973-0.0027i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal i com es pot observar, en aquest cas s'obtenen 10 *Mode Shapes* amb les seves freqüències naturals corresponents, doblant així el número de 5 *Mode Shapes* i 5 freqüències obtingudes pel cas tractat a l'apartat anterior. A més, s'observa que en aquest cas s'han obtingut tant vectors propis com valors propis complexos, que impliquen la presència de moviments subesmorteïts o subcrítics ($\xi < 1$); en contraposició als valors reals tractats a la secció anterior, sinònim de moviments d'oscil·lació sobrecrítics ($\xi > 1$). Com es pot observar, els *eigenvalues* complexos pel cas de la matriu $[A]$ van associats per parelles conjugades.

¹Donat el gran tamany de la matriu $[f_n]$ i amb la finalitat de permetre la seva correcta visualització, s'han aproximat a 0 els valors més petits que $1e-5$. Per veure els valors exactes, consultar el codi Matlab

6 Matriu de receptàncies $[H]$

Seguidament, tractem de calcular la matriu de receptàncies $[H]$ i observem com les components d'aquesta matriu depenen del valor de la velocitat angular de la força que estigui excitant el sistema. D'aquesta manera la matriu de receptàncies es defineix de la següent manera:

$$[H] = (-\omega^2[M] + i[C]\omega + [K])^{-1}$$

Si calculem el valor de cada un de les components de aquesta matriu de receptàncies en funció de ω som capaços de obtenir el gràfic que es mostra en la següent imatge en el que cada subgràfic representa cada un dels elements de la matriu de receptància corresponent a la seva posició en dita matriu.

Gràfica matricial de cada component H_{ij} en domini freqüencial

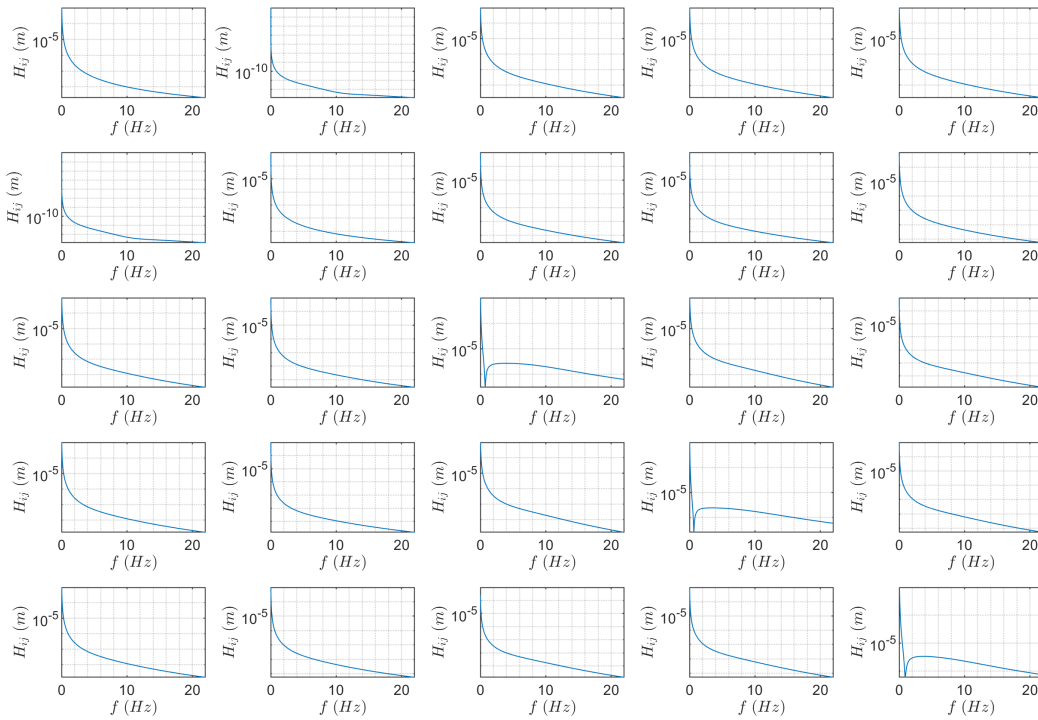


Figura 3: Gràfic de cada component de la matriu de receptàncies

En la matriu de receptàncies d'un sistema de N graus de llibertat, en aquest cas de 5 graus de llibertat, es poden distingir clarament dues "zones" d'estudi on el sistema respondrà de diferents maneres.

Diferenciem llavors entre els elements de la diagonal de la matriu i els elements que es troben fora de la diagonal. Pel que respecta al gràfic que hem representat en la figura anterior, els 5 subgràfics que es troben en la diagonal corresponen a cada un dels 5 elements de la diagonal de les respectives matrius de receptàncies obtingudes per a cada valor de ω ($H_{11}(\omega)$, $H_{22}(\omega)$, $H_{33}(\omega)$, $H_{44}(\omega)$, $H_{55}(\omega)$). Com a primera conclusió podem

afirmar com pel fet de què les tres rodes corresponents als tres darrers graus de llibertat del sistema responen de manera gairebé idèntica donat que, excepte per un lleuger desfasament que hi ha entre les rodes, com a causa de les propietats del sistema, totes tres estan exposades de la mateixa manera a l'excitació .

D'altra banda tenim els gràfics corresponents als elements de la receptància fora de la diagonal. Aquests elements ens donen una idea de com estan essent afectats els diferents graus de llibertat del sistema en funció d'excitacions aplicades sobre algun dels altres graus de llibertat. Una de les propietats principals de les matrius de receptàncies és que aquesta és simètrica, fet que ho podem corroborar comprovant com efectivament els gràfics oposats i separats entre ells pels de la diagonal, seguint la simetria d'una suposada matriu 5x5, són idèntics entre ells de manera que en tot moment i per a qualsevol valor de w la matriu de receptàncies del sistema és simètrica.

Com que la matriu de receptància depèn de la freqüència w llavors disposem una dependència amb el Matlab tal que:

```
1 H_function = @(w) inv(-w^2*M_Modal_matrix + 1i*w*C_Modal_matrix + K_Modal_matrix);
```

Això es pot trobar trobar en la línia 77 del codi [11.1](#)

7 Càlculs amb una linealització del model de força de contacte

En aquest apartat s'introdueix la força d'excitació al sistema. Es tracta d'una linealització al voltant de la càrrega estàtica, per tant, no es tenen en compte ni les velocitats ni les acceleracions. Les equacions resultants són les següents:

- Massa del fuselatge m_f

$$m_f \cdot g = -k_{ps}^{(1)} [z_f - \delta_r^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] - k_{ps}^{(2)} [z_f - \delta_r^{(2)} + a\varphi_f] - k_{ps}^{(3)} [z_f - \delta_r^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] \quad (14)$$

$$0 = -k_{ps}^{(1)} [z_f - \delta_r^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] (d_w^{(12)} + a) - k_{ps}^{(2)} [z_f - \delta_r^{(2)} + a\varphi_f] a + k_{ps}^{(3)} [z_f - \delta_r^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] (d_w^{(23)} - a) \quad (15)$$

- Massa 1 del tren d'aterratge $m_w^{(1)}$

$$m_w^{(1)} \cdot g = k_{ps}^{(1)} [z_f - \delta_r^{(1)} + (d_w^{(12)} + a)\varphi_f] - k_c (\delta_r^{(1)})^{3/2} \quad (16)$$

- Massa 2 del tren d'aterratge $m_w^{(2)}$

$$m_w^{(2)} \cdot g = k_{ps}^{(2)} [z_f - \delta_r^{(2)} + a\varphi_f] - k_c (\delta_r^{(2)})^{3/2} \quad (17)$$

- Massa 3 del tren d'aterratge $m_w^{(3)}$

$$m_w^{(3)} \cdot g = k_{ps}^{(3)} [z_f - \delta_r^{(3)} - (d_w^{(23)} - a)\varphi_f] - k_c (\delta_r^{(3)})^{3/2} \quad (18)$$

Es resol el sistema anterior i s'arriba a la posició d'equilibri estàtic de cada grau de llibertat:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{f,s} = 0.2484 \text{ m} \\ \varphi_{f,s} = -0.0007 \text{ rad} \\ \delta_s^{(1)} = 0.0028 \text{ m} \\ \delta_s^{(2)} = 0.0030 \text{ m} \\ \delta_s^{(3)} = 0.0024 \text{ m} \end{array} \right. \quad (19)$$

7.1 Força de contacte expressada en forma lineal

Del plantejament del problema és conegut que la força de contacte entre les rodes i el paviment té la següent forma, essent k_c la rigidesa de contacte i δ_r la deformació:

$$f = k_c \delta_r^{3/2} \quad (20)$$

Atès que les rodes es troben separades una determinada distància entre si, la deformació que veuran en un mateix instant serà diferent:

$$f^{(1)} = k_c (\delta_r^{(1)})^{3/2} \quad f^{(2)} = k_c (\delta_r^{(2)})^{3/2} \quad f^{(3)} = k_c (\delta_r^{(3)})^{3/2} \quad (21)$$

Aprofitant la deformació en equilibri estàtic (δ_s), és interessant linealitzar la força de contacte en funció d'aquest valor utilitzant un desenvolupament en sèrie de Taylor de dos termes:

$$f^{(i)} = k_c (\delta_s^{(i)})^{3/2} + \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(i)})^{1/2} (\delta_r^{(i)} - \delta_s^{(i)}) \quad (22)$$

Ara la força ja depèn linealment de la rugositat $\delta_r^{(i)}$, que al seu torn és superposició de la rugositat del paviment $\varepsilon_r^{(i)}$ i del desplaçament vertical de les rodes $z_w^{(i)}$:

$$\delta_r^{(i)} - \delta_s^{(i)} = \varepsilon_r^{(i)} + z_w^{(i)} \quad (23)$$

Substituint en l'expressió de la força linealitzada s'obté:

$$f^{(i)} = k_c (\delta_s^{(i)})^{3/2} + \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(i)})^{1/2} \varepsilon_r^{(i)} + \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(i)})^{1/2} z_w^{(i)} \quad (24)$$

S'assumeix una rugositat de la roda nul·la i una rugositat del paviment sinusoidal que, si es coneix la distància de separació de les rodes resultarà:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(1)} = A_r \sin(k_x v t) \\ \varepsilon_r^{(2)} = A_r \sin(k_x v t + k_x d_w^{(12)}) \\ \varepsilon_r^{(3)} = A_r \sin(k_x v t + k_x d_w^{(12)} + k_x d_w^{(23)}) \end{cases} \quad (25)$$

On A_r representa la rugositat màxima del paviment. Gràcies a la linealització de la força és possible separar-la i dividir-la en dos termes, mentre que el terme que es únicament dependent de $\delta_s^{(i)}$ no té rellevància en el estudi freqüencial del moviment respecte el equilibri. El terme dependent de $z_w^{(i)}$ és suma a la matriu de rigidesa per obtenir el model lineal i el dependent de $\varepsilon_r^{(i)}$ formarà el vector de forces.

$$[K'] = [K] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(1)})^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(2)})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} k_c (\delta_s^{(3)})^{1/2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(1)})^{1/2}\varepsilon_r^{(1)} \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(2)})^{1/2}\varepsilon_r^{(2)} \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(3)})^{1/2}\varepsilon_r^{(3)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ara el següent pas es tracta de passar el sistema a domini freqüencial, on la freqüència d'excitació serà $w_e = vk_x$. El sistema en qüestió és el següent:

$$(-(vk_x)^2[M] + i(vk_x)[C] + [K'])[\tilde{X}] = [\tilde{F}] \quad [\tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(1)})^{1/2} \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(2)})^{1/2}e^{ik_x d_w^{(12)}} \\ -\frac{3}{2}k_c(\delta_s^{(3)})^{1/2}e^{ik_x(d_w^{(12)} + d_w^{(23)})} \end{bmatrix} \quad (28)$$

S'ha suposat $A_r = 1$ per posteriorment aplicar superposició ($[\tilde{X}]$, i totes las $Z_w^{(i)}$, son directament proporcionals a $E_r^{(i)}$). Per assegurar que les rodes sempre estan en contacte amb la pista hem de imposar la condició de que la força de contacte sigui sempre positiva, és a dir:

$$k_c\delta_r^{3/2} > 0 \quad (29)$$

Substituint el valor de δ_r s'arriba a:

$$\varepsilon_r^{(i)} + z_w^{(i)} + \delta_s^{(i)} > 0 \quad (30)$$

D'aquesta forma, és possible iterar el sistema per successius valors de k_x i trobar la seva relació amb A_r , on s'observa el seu valor mínim i la seva k_x associada.

$$A_r^{(i)}(k_x) > \left| \frac{-\delta_s^{(i)}}{(E_r^{(i)} + Z_w^{(i)})} \right| \quad (31)$$

Per cada roda i disposem de les següents expressions, entre les quals es tria el valor de $A_r(i)$ més gran per garantir el contacte entre les tres rodes.

$$A_r^{(1)}(k_x) > \left| \frac{-\delta_s^{(1)}}{1 + Z_w^{(1)}} \right| \quad A_r^{(2)}(k_x) > \left| \frac{-\delta_s^{(2)}}{e^{ik_x d_w^{(12)}} + Z_w^{(2)}} \right| \quad A_r^{(3)}(k_x) > \left| \frac{-\delta_s^{(3)}}{e^{ik_x(d_w^{(12)} + d_w^{(23)})} + Z_w^{(3)}} \right| \quad (32)$$

A continuació es mostra el resultat de la iteració:

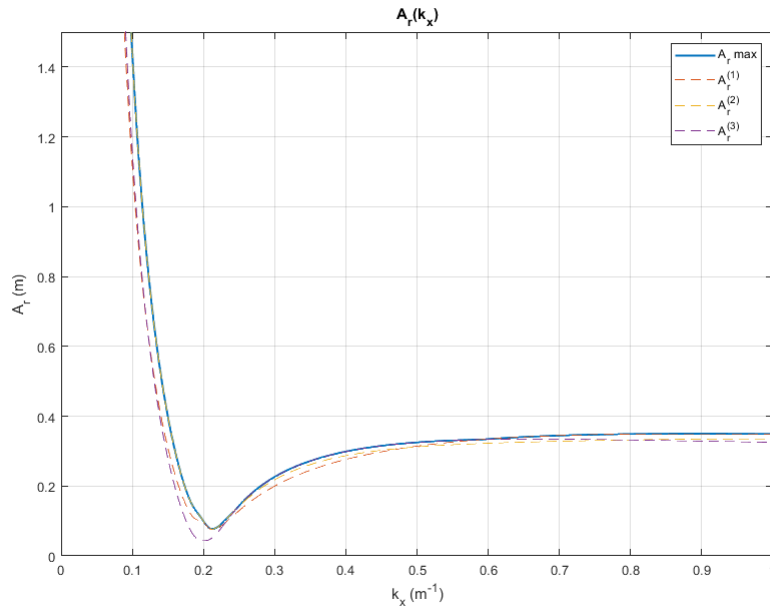


Figura 4: Amplitud de rugositat del paviment màxima

D'aquesta manera s'ha determinat el valor de A_r més petit possible, que és de 77 mm i s'ha obtingut amb una k_x de 0.213 m^{-1} .

Ara es procedeix a calcular els valors RMS d'acceleració de vibració per cada grau de llibertat del sistema, així com el valor RMS de les forces de contacte roda-pista, tots aquests valors trobats per A_r i k_x .

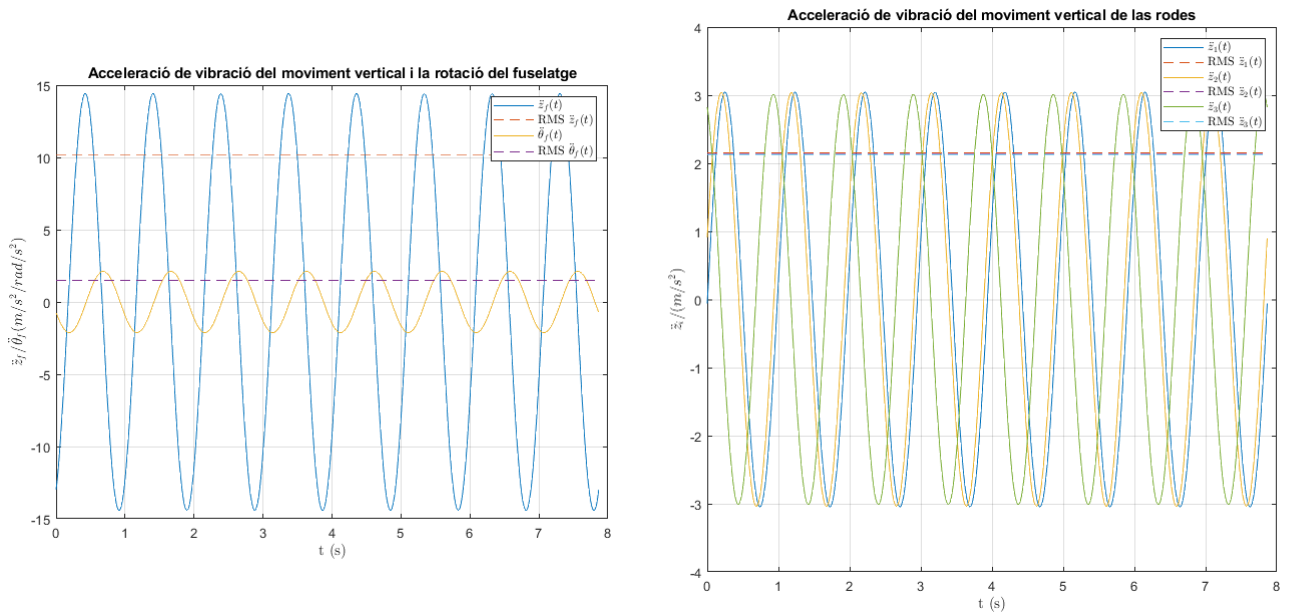


Figura 5: Acceleració de vibració i RMS

Sobre aquests resultats es poden realitzar certes observacions. En primer lloc, en quant a la resposta del fuselatge, per poder comparar el comportament dels dos graus de llibertat s'ha de tenir en compte que s'hi haurà de passar l'acceleració angular a acceleració lineal mitjançant la distància del punt d'avaluar al centre de gravetat del fuselatge. Si per exemple, s'escull la distància $(dw^{(23)} - a)$, distància del centre a la tercera roda, es pot observar que l'acceleració vertical del fuselatge i l'acceleració vertical deguda a la rotació són d'un ordre molt similars.

Els resultats d'amplitud d'acceleració a les rodes són molt similars a cada una de elles, mentre que destaca el desfasament que presenten. S'observa una fase més semblant entre les rodes 1 i 2 al trobar-se aquestes a una distància més propera.

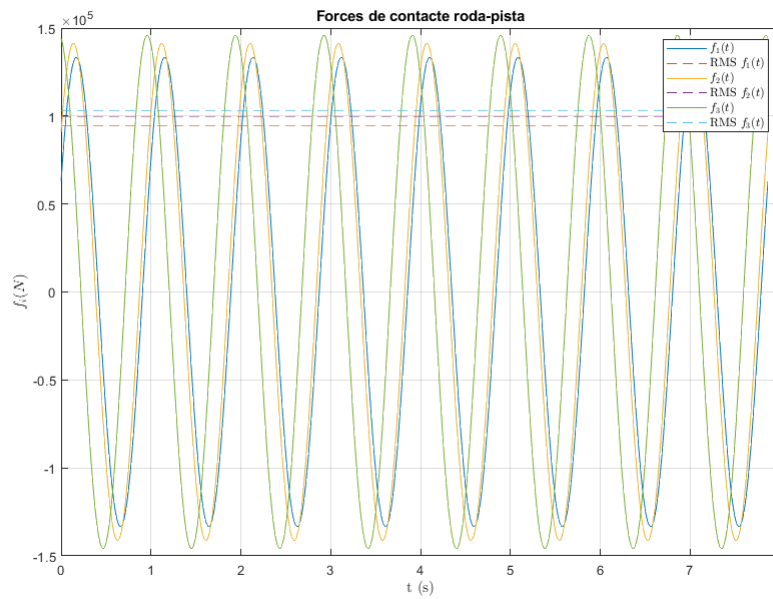


Figura 6: Forces de contacte i RMS

Sobre el desfasament amb les forces de contacte, a la representació temporal apareix un cas molt similar. La força que actua a la roda 3 es troba desfasada d'una manera més notable respecte les rodes 1 i 2.

8 Càlculs amb un model no-lineal de la força de contacte

En aquest cas, es requereixen els mateixos resultats que a l'apartat anterior però utilitzant el model real, sense realitzar la linealització. És a dir, la força de rugositat amb què es treballarà mantindrà la forma original:

$$f^{(i)} = k_c(\epsilon^{(i)} + z_w^{(i)})^{3/2} \quad (33)$$

Per resoldre aquest sistema d'equacions no-lineal cal utilitzar el càlcul numèric. MatLab permet realitzar aquest tipus d'operacions de manera relativament senzilla amb la Toolbox *SymbolicMath*.

D'aquesta manera, mitjançant la funció *odeToVectorField()* es converteixen les 5 equacions no lineals d'ordre més gran que 1 a el doble d'equacions de primer ordre. S'obtenen 5 equacions en què les variables són les posicions i 5 més en què són les velocitats. Això és un procediment per simplificar el problema ja que a nosaltres només ens interessa la posició. Tot i així, al integrar numèricament i definir les condicions inicials de les equacions, caldrà imposar velocitat inicial nul·la.

A continuació, aquesta funció simbòlica s'ha de convertir a un conjunt d'equacions numèriques de manera que puguin ser resoltes numèricament. S'utilitza la funció *matlabFunction()* per convertir de format *sym* a numèric. Finalment, la funció que resol les deu EDO de primer ordre obtingudes és *ode45()*. Al codi es pot veure com només s'aprofiten les respostes 1, 3, 5, 7 i 9 d'aquesta EDO, les corresponents a les posicions.

Un cop trobades les posicions, el primer que es demana és trobar la màxima amplitud que té la rugositat. És a dir, trobar novament A_r resolent, ara, un sistema d'equacions no lineals. Malauradament, no hem aconseguit calcular la nova A_r ni la nova Kx , de manera que s'ha optat per utilitzar els valors obtinguts pel cas lineal. A l'hora d'analitzar els resultats obtinguts, s'haurà de tenir en compte aquest fet.

Pel valor d' A_r més petit possible es demana calcular la mitjana quadràtica (RMS) i l'acceleració de vibració tant del moviment vertical de les rodes i el fuselatge com la rotació d'aquest últim. A continuació es mostra l'obtenció d'aquestes amb els gràfics següents:

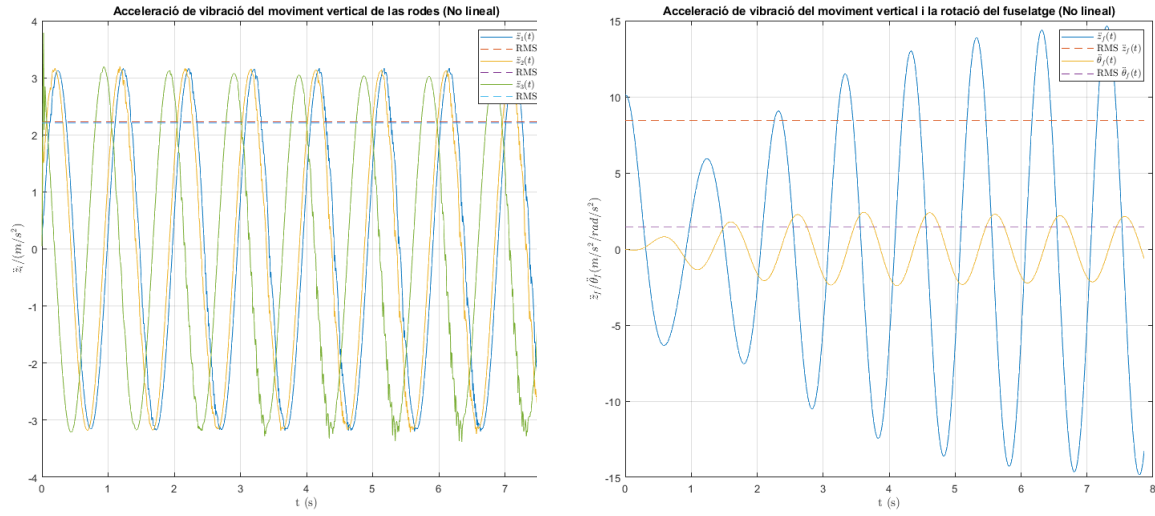


Figura 7: Acceleració de vibració i RMS (No lineal)

Tot i que el comportament és semblant a primera vista, hi ha diferències força significatives que no es poden donar per alt a l'hora de comparar. Tot i així, es pot observar que el valor dels RMS obtinguts a aquestes gràfiques s'aproximen bastant als obtinguts en el cas lineal.

A continuació es mostra la representació de les forces de contacte i entre el terra i les rodes. Com es pot observar el resultat no és massa satisfactori.

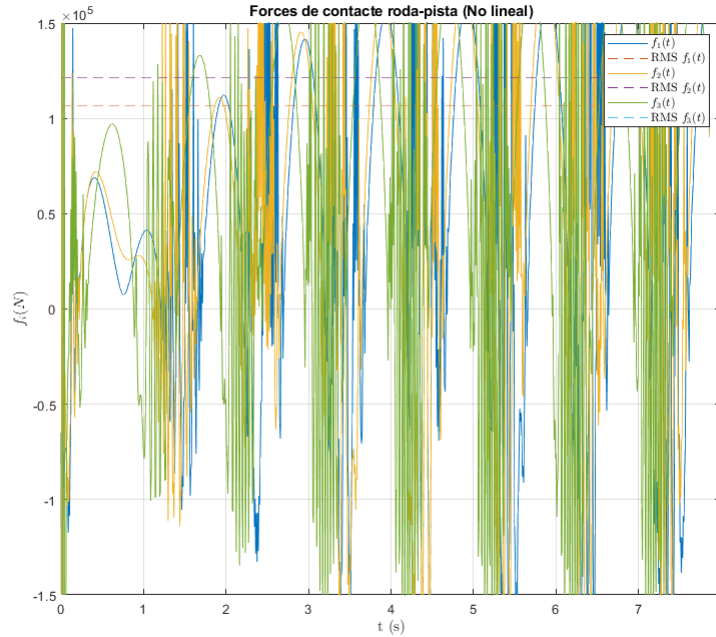


Figura 8: Forces de contacte i RMS (No lineal)

Com es pot observar, aquesta representació temporal de la força de contacte presenta un caràcter òbviament no lineal, amb una fase transitòria inicial, per posteriorment tendir a una estacionaria. Es pot veure que aquest resultat no és satisfactori, degut a que no vam poder trobar les matrius $[K]$, $[A]$ i s'han utilitzat les obtingudes a l'apartat anterior, donat un resultat inexacte amb el *solver* d'EDOS. Tot i així la majoria de l'error només es pot veure a les forces de contacte, per tant es pot considerar un èxit parcial.

9 Conclusions

En resum, en el transcurs d'aquest projecte hem pogut analitzar en detall l'estudi de vibracions complet d'un model d'aeronau simplificat. El primer pas en l'estudi de qualsevol sistema dinàmic és l'estudi del diagrama de sòlid lliure del sistema. Analitzant cadascuna de les masses que intervenen en funció dels graus de llibertat. Seguidament, un cop determinades les forces que actuen sobre cada objecte es procedeix a calcular les matrius de massa, esmorteïment i rigidesa del sistema en conjunt. Aquest fet permetrà extreure'n els modes propis del sistema, les quals són intrínsecs al sistema i només depenen de les matrius de massa i rigidesa. Paral·lelament, també permet obtenir les freqüències naturals del sistema.

Els dos primers modes corresponien al desplaçament vertical i capcineig de l'aeronau mentre que els tres següents que corresponen als moviments verticals del tren d'aterratge. És interessant destacar el fet que les dues freqüències naturals són nul·les, amb la qual cosa es tracta d'uns modes de sòlid rígida. Donat que tots els modes propis de sòlid rígida són modes degenerats entre sí (com s'ha comentat, tenen tots ells una freqüència natural nul·la associada), existeixen infinites combinacions lineals vàlides entre els vectors propis que els defineixen.

L'anàlisi modal és una eina que ajudarà a entendre quins són les contribucions més importants dels modes propis als diferents graus de llibertat. És important mencionar que en aquest apartat s'ha agafat una aproximació modal tenint en compte que la matriu C no és exactament diagonal però l'ordre de magnitud dels termes de fora de la diagonal són 2 – 3 vegades menor. Així doncs, tot i que l'anàlisi modal és una aproximació, el mètode directe és més exacte i per a pocs graus de llibertat és realment útil.

La matriu d'estat $[A]$ ens permet estudiar el moviment lliure d'un sistema NDOF amb esmorteïment. En aquest cas, els vectors propis i valors propis obtinguts són complexos, la qual cosa implica la presència de moviments subesmorteïts.

En quant a la receptància del sistema, aquesta és una matriu simètrica ja que depèn només de les matrius de massa i rigidesa i la freqüència d'excitació. En efecte, la Figura 3 es distingeix com les receptàncies de corresponents a les 3 rodes del tren d'aterratges no presenten molta diferència. Aquesta matriu de receptància és funció de la w i s'expressa la seva corba per a cada component.

La segona part d'aquest projecte, un cop coneguts els resultats anteriors, el següent pas és introduir l'excitació de la base al sistema. No obstant, amb l'objectiu de model més senzill, es realitzarà una linealització al voltant del punt d'equilibri. Ergo, és necessari la inclusió de la força de gravetat per trobar els punts d'equilibri. Per resoldre-ho s'usa l'expansió de la sèrie d'expansió de Taylor a primer ordre. Seguidament, és fàcil extreure'n la força de contacte en forma lineal que posteriorment es transformarà a domini freqüencial.

Finalment, l'últim apartat del projecte requereix el mateix anàlisi de l'apartat anterior sense fer-ne ús de la linealització. Per aquest motiu es recorre a l'ús de *solvers* per solucionar numèricament i trobar les posicions d'equilibri. El pas posterior és anàleg a l'anterior.

10 Bibliografia

- [1] Guió Pràctica Aïllament de vibracions. https://atenea.upc.edu/pluginfile.php/3010497/mod_resource/content/1/Guio_practica_Aillament_Vibracions_2019.pdf
- [2] Matlab. Mathworks. <https://mathworks.com>
- [3] Signal Processing Presentation. <https://atenea.upc.edu/mod/resource/view.php?id=2122201>

11 Annexos

11.1 Codi MATLAB

```

1 %% NDOF PROJECT CODE
2
3 clear all; clc; close all;
4
5 % Paràmetres mecànics i geomètrics
6 mf = 2.5e4; % [kg]
7 mw1 = 80; % [kg]
8 mw2 = 80; % [kg]
9 mw3 = 65; % [kg]
10 Jf = 4e5; % [kg*m^2]
11 kps1 = 3.5e5; % [N/m]
12 kps2 = 3.8e5; % [N/m]
13 kps3 = 2.63e5; % [N/m]
14 cps1 = 8e3; % [Ns/m]
15 cps2 = 9e3; % [Ns/m]
16 cps3 = 7e3; % [Ns/m]
17 dw12 = 1.5; % [m]
18 dw23 = 7.5; % [m]
19 a = 1.5; % [m]
20 kc = 5.8e8; % [N/m^(3/2)]
21
22 %% 1. Matrius de Massa, Esmorteïment i Rigidesa
23 M_matrix = diag([mf,Jf,mw1,mw2,mw3]);
24 C_matrix = [cps1+cps2+cps3 cps1*(dw12+a)+cps2*a-cps3*(dw23-a) -cps1 -cps2 -cps3;
25             cps1*(dw12+a)+cps2*a-cps3*(dw23-a) cps1*(dw12+a)^2+cps2*a^2+cps3*(dw23-a)^2 ...
26             ↪ -cps1*(dw12+a) -cps2*a cps3*(dw23-a);
27             -cps1 -cps1*(dw12+a) cps1 0 0;
28             -cps2 -cps2*a 0 cps2 0;
29             -cps3 cps3*(dw23-a) 0 0 cps3];
30 K_matrix = [kps1+kps2+kps3 kps1*(dw12+a)+kps2*a-kps3*(dw23-a) -kps1 -kps2 -kps3;
31             kps1*(dw12+a)+kps2*a-kps3*(dw23-a) kps1*(dw12+a)^2+kps2*a^2+kps3*(dw23-a)^2 ...
32             ↪ -kps1*(dw12+a) -kps2*a kps3*(dw23-a);
33             -kps1 -kps1*(dw12+a) kps1 0 0;
34             -kps2 -kps2*a 0 kps2 0;
35             -kps3 kps3*(dw23-a) 0 0 kps3];
36
37 % Es comprova la simetria
38 M_matrix_symmetry = issymmetric(M_matrix);
39 C_matrix_symmetry = issymmetric(C_matrix);
40 K_matrix_symmetry = issymmetric(K_matrix);
41
42 % Graus de llibertat
43 N = length(M_matrix);
44
45 % Es mostren les matrius
46 display(M_matrix);
47 display(C_matrix);

```

```

44 display(K_matrix);
45
46 %% 2. Càlcul de les freqüències naturals (f_n) i els Mode Shapes (Psi)
47 [Psi, Lambda] = eig(K_matrix, M_matrix);
48 Lambda = diag(Lambda);
49 wn = sqrt(Lambda);
50 fn = wn ./ (2*pi);
51 for j=1:N
52     Psi_norm(:,j) = Psi(:,j)/Psi(1,j);
53 end
54 display(Psi);
55 display(fn);
56 display(Psi_norm);
57
58 %% 3. Aproximació a esmorteïment modal
59 % Les matrius han de ser diagonals
60 M_Modal_matrix = diag(diag(Psi.' * M_matrix * Psi));
61 K_Modal_matrix = diag(diag(Psi.' * K_matrix * Psi));
62 C_Modal_matrix_nodiagonal = Psi.' * C_matrix * Psi;
63 % Es comprova que la matriu es pugui aproximar a diagonal
64 display(C_Modal_matrix_nodiagonal);
65 C_Modal_matrix = diag(diag(Psi.' * C_matrix * Psi));
66 display(C_Modal_matrix);
67
68 %% 4. Matriu d'estat A i vectors i valors propis complexos
69 A=[zeros(5) eye(5); -M_matrix\K_matrix -M_matrix\C_matrix];
70 [Psi_A, Lambda_A] = eig(A, eye(10));
71 fn_A = diag(sqrt(Lambda_A)/(2*pi));
72 display(Psi_A);
73 display(fn_A);
74
75 %% 5. Matriu de receptància H
76 % Definició de H en funció de w
77 H_function = @(w) inv(-w^(2)*M_Modal_matrix + 1i*w*C_Modal_matrix + K_Modal_matrix);
78
79 % Es fa un escombrat freqüencial
80 w = linspace(0, 2*max(wn), 1000)';
81 f=w/(2*pi);
82 H = zeros(N, N, length(w)); % Inicialització
83 for j=1:length(w) %Es guarda la matriu H en tres dimensions, on la tercera dimensió és la ...
84     ↪ freqüència
85     H(:, :, j) = ((-w(j)^2*M_matrix + 1i*w(j)*C_matrix + K_matrix)\eye(N, N));
86 end
87 Hmodul=abs(H);
88 figure(1);
89 for i=1:N
90     for j=1:N
91         subplot(N, N, (i-1)*N+j);
92         semilogy(f, squeeze(Hmodul(i, j, :)));
93         ylabel('$H_{ij}\backslash(m)$', 'Interpreter', 'latex');
94         xlabel('$f\backslash(Hz)$', 'Interpreter', 'latex');

```

```

94     ylim([0,1e-3]);
95     grid on
96     grid minor
97     end
98 end
99 sgtitle('Gr`afica matricial de cada component $H_{ij}$ en domini ...
    ↳ freq\`uencial','Interpreter','latex')
100
101 %% 6. Model linealitzat
102 % Problema estàtic. Trobem la posició d'equilibri
103 g = 9.81;
104 equacions_estatica = @(x)[(mf*g +K_matrix(1,1)*x(1) +K_matrix(1,3)*x(3) +K_matrix(1,4)*x(4) ...
    ↳ +K_matrix(1,5)*x(5) +K_matrix(1,2)*x(2));
105     (K_matrix(2,1)*x(1) +K_matrix(2,3)*x(3) +K_matrix(2,4)*x(4) +K_matrix(2,5)*x(5) ...
    ↳ +K_matrix(2,2)*x(2));
106     (mw1*g+K_matrix(3,1)*x(1) +K_matrix(3,3)*x(3) +K_matrix(3,2)*x(2)+kc*x(3)^1.5);
107     (mw2*g+K_matrix(4,1)*x(1) +K_matrix(4,4)*x(4) +K_matrix(4,2)*x(2)+kc*x(4)^1.5);
108     (mw3*g+K_matrix(5,1)*x(1) +K_matrix(5,5)*x(5) +K_matrix(5,2)*x(2)+kc*x(5)^1.5);
109 ];
110 % Solució estàtica mitjançant fsolve, que resol sistemes d'equacions lineals
111 sol_estatica=fsolve(equacions_estatica,zeros(5,1));
112 display(abs(sol_estatica));
113
114 % Nova matriu de rigidesa degut a la linealització i nous modes propis
115 K_lineal=K_matrix+[0 0 0 0 0;
116     0 0 0 0 0;
117     0 0 1.5*kc*sol_estatica(3)^0.5 0 0;
118     0 0 0 1.5*kc*sol_estatica(4)^0.5 0;
119     0 0 0 0 1.5*kc*sol_estatica(5)^0.5];
120 [phi_lineal,lambda_lineal]=eig(K_lineal,M_matrix); % La matriu de massa no variarà
121 f_nat_lineal=sqrt(lambda_lineal)/(2*pi);
122
123 %% Rugositat sinusoidal
124 % Amb el model linealitzat
125 vel=30;
126 kx=0:0.001:1;
127 freq_excitacio=vel*kx/(2*pi);
128 Ar_max=zeros(length(kx),1);
129 Ar1=Ar_max;
130 Ar2=Ar_max;
131 Ar3=Ar_max;
132 for i=1:length(kx)
133     % Forces harmoniques en el domini frequencial i el terra. S'ha de
134     % tenir en compte que cada rugositat de cada roda comporta un
135     % desfasament respecte de les altres
136     F=[0;
137         0;
138         -1.5*kc*sol_estatica(3)^0.5;
139         -1.5*kc*sol_estatica(4)^0.5*exp(1i*dw12*kx(i));
140         -1.5*kc*sol_estatica(5)^0.5*exp(1i*(dw23+dw12)*kx(i))];
141

```

```

142     % Posicions
143     X=(-(kx(i)*vel)^2*M_matrix+1i*(kx(i)*vel)*C_matrix+K_lineal)\F;
144
145     Ar1(i)=abs(-sol_estatica(3)/(1+X(3)));
146     Ar2(i)=abs(-sol_estatica(4)/(exp(1i*dw12*kx(i))+X(4)));
147     Ar3(i)=abs(-sol_estatica(5)/(exp(1i*(dw23+dw12)*kx(i))+X(5)));
148
149     % Amplitud que garanteix el contacte de les tres rodes
150     Ar_max(i) = max([Ar1(i) Ar2(i) Ar3(i)]);
151 end
152
153 % PLOTS
154 figure(2)
155 plot(kx,Ar_max,'LineWidth',1.5)
156 hold on
157 grid on
158 plot(kx,Ar1,'--')
159 plot(kx,Ar2,'--')
160 plot(kx,Ar3,'--')
161 legend('A_r max', 'A_r^{(1)}', 'A_r^{(2)}', 'A_r^{(3)}')
162 ylim([0 1.5])
163 set(gca,'Ytick',0:0.2:1.6)
164 xlabel('k_x (m^{-1})')
165 ylabel('A_r (m)')
166 title('A_r(k_x)')
167
168 % Trobar la kr i la Ar òptimes
169 [Ar_opt, kx_opt]=min(Ar_max);
170 kx_opt=kx(kx_opt);
171
172 % Definició del vector força
173 F=Ar_opt*[0;
174     0;
175     -1.5*kc*sol_estatica(3)^0.5;
176     -1.5*kc*sol_estatica(4)^0.5*exp(1i*dw12*kx_opt);
177     -1.5*kc*sol_estatica(5)^0.5*exp(1i*(dw23+dw12)*kx_opt)];
178
179 % Càlcul de la resposta freqüencial
180 X=(-(kx_opt*vel)^2*M_matrix+1i*(kx_opt*vel)*C_matrix+K_lineal)\F;
181 X_mod = abs(X);
182 t_end = 16*pi/(kx_opt*vel);
183 t = 0:0.001*t_end:t_end;
184
185 % Vector acceleració de cada variable
186 z_f_accL = -(kx_opt*vel)^2*X_mod(1)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(1)));
187 th_f_accL = -(kx_opt*vel)^2*X_mod(2)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(2)));
188 z_1_accL = -(kx_opt*vel)^2*X_mod(3)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(3)));
189 z_2_accL = -(kx_opt*vel)^2*X_mod(4)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(4)));
190 z_3_accL = -(kx_opt*vel)^2*X_mod(5)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(5)));
191
192 f_1_accL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(3))^0.5*(X_mod(3)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(3)))+...

```

```

193 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*t));
194 f_2_accL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(4))~0.5*(X_mod(4)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(4)))+...
195 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*t+dw12*kx_opt));
196 f_3_accL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(5))~0.5*(X_mod(5)*sin(kx_opt*vel*t+angle(X(5)))+...
197 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*t+(dw23+dw12)*kx_opt));
198
199 %Valor rms de cada variable
200 rmszf_accL = rms(z_f_accL);
201 rmsthf_accL = rms(th_f_accL);
202 rmsz1_accL = rms(z_1_accL);
203 rmsz2_accL = rms(z_2_accL);
204 rmsz3_accL = rms(z_3_accL);
205 rmsf1_accL = rms(f_1_accL);
206 rmsf2_accL = rms(f_2_accL);
207 rmsf3_accL = rms(f_3_accL);
208
209 % PLOTS
210 figure(3)
211 plot(t,z_f_accL)
212 hold on
213 plot(t,ones(length(t),1)*rmszf_accL,'--')
214 plot(t,th_f_accL)
215 plot(t,ones(length(t),1)*rmsthf_accL,'--')
216 legend('$\ddot{z}_f(t)$','RMS $\ddot{z}_f(t)$','$\ddot{\theta}_f(t)$','RMS ...
    $\ddot{\theta}_f(t)$','Interpreter','latex')
217 grid on
218 xlabel('t (s)','Interpreter','latex')
219 ylabel('$\ddot{z}_f / \ddot{\theta}_f$ (m/s^2 / rad/s^2)','Interpreter','latex')
220 title('Acceleració de vibració del moviment vertical i la rotació del fuselatge')
221
222 figure(4)
223 plot(t,z_1_accL)
224 hold on
225 plot(t,ones(length(t),1)*rmsz1_accL,'--')
226 plot(t,z_2_accL)
227 plot(t,ones(length(t),1)*rmsz2_accL,'--')
228 plot(t,z_3_accL)
229 plot(t,ones(length(t),1)*rmsz3_accL,'--')
230 legend('$\ddot{z}_1(t)$','RMS $\ddot{z}_1(t)$','$\ddot{z}_2(t)$','RMS ...
    $\ddot{z}_2(t)$','$\ddot{z}_3(t)$','RMS $\ddot{z}_3(t)$','Interpreter','latex')
231 grid on
232 xlabel('t (s)','Interpreter','latex')
233 ylabel('$\ddot{z}_i$ (m/s^2)','Interpreter','latex')
234 title('Acceleració de vibració del moviment vertical de las rodes')
235
236 figure(5)
237 plot(t,f_1_accL)
238 hold on
239 plot(t,ones(length(t),1)*rmsf1_accL,'--')
240 plot(t,f_2_accL)
241 plot(t,ones(length(t),1)*rmsf2_accL,'--')

```

```

242 plot(t,f_3_accL)
243 plot(t,ones(length(t),1)*rmsf3_accL,'--')
244 legend('$f_1(t)$','RMS $f_1(t)$','$f_2(t)$','RMS $f_2(t)$','$f_3(t)$','RMS $f_3(t)$', ...
    ↪ 'Interpreter', 'latex')
245 grid on
246 xlabel('t (s)', 'Interpreter', 'latex')
247 ylabel('$f_i(N)$', 'Interpreter', 'latex')
248 title('Forces de contacte roda-pista')
249
250 %% 7. NO LINEAL
251 % Condicions inicials
252 zf0=sol_estatica(1);
253 angf0=sol_estatica(2);
254 zw10=sol_estatica(3);
255 zw20=sol_estatica(4);
256 zw30=sol_estatica(5);
257 % No hem aconseguit trobar les noves Ar i kx pel cas no lineal, per tant,
258 % considerem els valors obtinguts en el cas lineal de l'apartat 6
259 Armin = Ar_opt; % S'escull la mínima de les màximes
260 kxmin = kx_opt;
261
262 % Declaració de variables per plantejar EDOs
263 variable = sym ('variable', [1 N]);
264 syms zf(t) angf(t) zw1(t) zw2(t) zw3(t);
265 variable(1) = zf;
266 variable(2) = angf;
267 variable(3) = zw1;
268 variable(4) = zw2;
269 variable(5) = zw3;
270
271 % Plantejament de les EDO
272 equacio = sym ('equacio', [1 N]);
273 for i = 1:N
274     EDOi = 0;
275     for j=1:N
276         aM = M_matrix(i,j)*diff(variable(j),t,2); % Segona derivada
277         aC = C_matrix(i,j)*diff(variable(j),t,1); % Primera derivada
278         aK = K_matrix(i,j)*variable(j); % Terme independent
279         EDOi = EDOi + aM + aC + aK;
280     end
281     equacio (i) = EDOi;
282 end
283
284 % S'acaba de complementar les equacions de les rodes amb la força no lineal
285 equacio(3) = equacio(3) + kc*(zw1+Armin*sin(kxmin*vel*t))^(3/2);
286 equacio(4) = equacio(4) + kc*(zw2+Armin*sin(kxmin*(vel*t+dw12)))^(3/2);
287 equacio(5) = equacio(5) + kc*(zw3+Armin*sin(kxmin*(vel*t+dw12+dw23)))^(3/2);
288
289 % Resolució de les EDO
290 [Vector,Var] = odeToVectorField(equacio); % Es converteixen les edos d'ordre superior a primer ...
    ↪ ordre (format sym).
  
```

```

291 % Ara, hi ha el doble de variables, la posició i seva derivada primera.
292 F = matlabFunction (Vector,'vars',{ 't','Y'}); % Es converteix de simbolic (sym) a numeric
293 p = 0:0.001*t_end:t_end;
294 InitialConditions = [zf0 0 angf0 0 zw10 0 zw20 0 zw30 0];
295 solucioEDO = ode45 (F,p,InitialConditions);
296
297 % Vector acceleració de cada variable (s'agafen els imparells ja que són les
298 % posicions, la resta son velocitats)
299 w=vel*kxmin;
300 z_f_accNL = -w^2*real(deval(solucioEDO,p,1));
301 th_f_accNL = -w^2*real(deval(solucioEDO,p,3));
302 z_1_accNL = -w^2*real(deval(solucioEDO,p,5));
303 z_2_accNL = -w^2*real(deval(solucioEDO,p,7));
304 z_3_accNL = -w^2*real(deval(solucioEDO,p,9));
305
306 f_1_accNL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(3))^0.5*(real(deval(solucioEDO,p,5))+...
307 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*p));
308 f_2_accNL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(4))^0.5*(real(deval(solucioEDO,p,7))+...
309 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*p+dw12*kx_opt));
310 f_3_accNL = 1.5*kc*abs(sol_estatica(5))^0.5*(real(deval(solucioEDO,p,9))+...
311 Ar_opt*sin(kx_opt*vel*p+(dw23+dw12)*kx_opt));
312
313 %Valor rms de cada variable
314 rmszf_accNL = rms(z_f_accNL);
315 rmsthf_accNL = rms(th_f_accNL);
316 rmsz1_accNL = rms(z_1_accNL);
317 rmsz2_accNL = rms(z_2_accNL);
318 rmsz3_accNL = rms(z_3_accNL);
319 rmsf1_accNL = rms(f_1_accNL);
320 rmsf2_accNL = rms(f_2_accNL);
321 rmsf3_accNL = rms(f_3_accNL);
322
323 % PLOTS
324 figure(6)
325 plot(p,z_f_accNL)
326 hold on
327 plot(p,ones(length(p),1)*rmszf_accNL,'--')
328 plot(p,th_f_accNL)
329 plot(p,ones(length(p),1)*rmsthf_accNL,'--')
330 legend('$\ddot{z}_f(t)$','RMS $\ddot{z}_f(t)$','$\ddot{\theta}_f(t)$','RMS ...
    ↪ $\ddot{\theta}_f(t)$','Interpreter','latex')
331 grid on
332 xlabel('t (s)','Interpreter','latex')
333 ylabel('$\ddot{z}_f / \ddot{\theta}_f$ (m/s^2 / rad/s^2)','Interpreter','latex')
334 title('Acceleració de vibració del moviment vertical i la rotació del fuselatge (No lineal)')
335
336 figure(7)
337 plot(p,z_1_accNL)
338 hold on
339 plot(p,ones(length(p),1)*rmsz1_accNL,'--')
340 plot(p,z_2_accNL)

```

```

341 plot(p,ones(length(p),1)*rmsz2_accNL,'--')
342 plot(p,z_3_accNL)
343 plot(p,ones(length(p),1)*rmsz3_accNL,'--')
344 legend('$\ddot{z}_1(t)$','RMS $\ddot{z}_1(t)$','$\ddot{z}_2(t)$','RMS ...
      ↪ $\ddot{z}_2(t)$','$\ddot{z}_3(t)$','RMS $\ddot{z}_3(t)$', 'Interpreter', 'latex')
345 grid on
346 xlabel('t (s)', 'Interpreter', 'latex')
347 ylabel('$\ddot{z}_i / (m/s^2)$', 'Interpreter', 'latex')
348 title('Acceleració de vibració del moviment vertical de las rodes (No lineal)')
349
350 figure(8)
351 plot(p,f_1_accNL)
352 hold on
353 plot(p,ones(length(p),1)*rmsf1_accNL,'--')
354 plot(p,f_2_accNL)
355 plot(p,ones(length(p),1)*rmsf2_accNL,'--')
356 plot(p,f_3_accNL)
357 plot(p,ones(length(p),1)*rmsf3_accNL,'--')
358 legend('$f_1(t)$','RMS $f_1(t)$','$f_2(t)$','RMS $f_2(t)$','$f_3(t)$','RMS $f_3(t)$', ...
      ↪ 'Interpreter', 'latex')
359 grid on
360 xlabel('t (s)', 'Interpreter', 'latex')
361 ylabel('$f_i(N)$', 'Interpreter', 'latex')
362 title('Forces de contacte roda-pista (No lineal)')
363 ylim(1e5*[-1.5 1.5])

```