

# **Théorie de la spéculation**

## **Louis Bachelier, 1900**

*Article résumé*

Alexis VO

Université Paris-Saclay  
École polytechnique

19 juin 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
1.1	Contexte historique . . . . .	4
1.2	Présentation de Louis Bachelier . . . . .	4
1.3	Objectifs de l'article . . . . .	4
1.4	Principales contributions de la thèse . . . . .	4
<b>2</b>	<b>La Bourse et ses mécanismes au XIX<sup>e</sup> siècle</b>	<b>5</b>
2.1	Les opérations de Bourse . . . . .	5
2.2	Opérations fermes et opérations à prime . . . . .	5
2.3	Reports, coupons et cours de compensation . . . . .	5
2.4	Cours vrai et cours équivalent . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Modélisation mathématique des opérations</b>	<b>6</b>
3.1	Achat, vente et prime . . . . .	6
3.2	Options et stellage . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Probabilités dans les opérations financières</b>	<b>7</b>
4.1	Probabilités mathématiques et spéculatives . . . . .	7
4.2	Espérance mathématique et équité du marché . . . . .	8
4.3	Avantage mathématique . . . . .	9
<b>5</b>	<b>La dynamique des cours</b>	<b>11</b>
5.1	Loi de probabilité des cours . . . . .	11
5.2	Équation de diffusion (équation de Fourier) . . . . .	11
5.3	Solution gaussienne . . . . .	11
5.4	Écart-type et espérance en fonction du temps . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Applications aux options et primes</b>	<b>11</b>
6.1	Prime simple : calcul et probabilité de réussite . . . . .	11
6.2	Écart probable et valeur attendue . . . . .	11
6.3	Double prime et loi des écarts . . . . .	11
6.4	Formule intégrale et interprétations . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Vision moderne du modèle de Bachelier</b>	<b>11</b>
7.1	Comparaison avec le modèle de Black-Scholes . . . . .	11
7.2	Limites du modèle de Bachelier . . . . .	11
7.3	Malentendus et critiques . . . . .	11
<b>8</b>	<b>Héritage et influence</b>	<b>11</b>
8.1	Pourquoi Bachelier fut ignoré . . . . .	11
8.2	Réhabilitation au XX <sup>e</sup> siècle . . . . .	11
8.3	Impact sur la finance quantitative moderne . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>
9.1	Synthèse mathématique . . . . .	11
9.2	Apports théoriques et historiques . . . . .	11
9.3	Perspectives actuelles . . . . .	11

**Annexes****11****Résumé**

En 1900, Louis Bachelier soutient une thèse qui donnera par la suite les bases d'une approche probabiliste des marchés financiers : *La théorie de la spéculation*. Je vous propose dans cet article un résumé après une lecture approfondie de ce texte fondateur. Il s'inscrit dans le cadre de mon stage ayant pour sujet principal le *Modèle de Cox Ross Rubinstein*. Nous évoquerons les idées de ce mathématicien novateur dans leur contexte historique, en analysant ses modèles mathématiques, et en mettant en lumière leur influence sur la finance moderne. Enfin, nous présenterons les concepts de cours vrai, de prime, d'option et d'équation de la diffusion à travers la modélisation proposée par Bachelier.

# 1 Introduction générale

## 1.1 Contexte historique

Au tournant du XX<sup>e</sup> siècle, les marchés financiers comme la *Bourse de Paris*, connaissent une forte expansion. Les opérations de spéculation y sont nombreuses, mais leur analyse reste essentiellement empirique et intuitive. À cette époque, la probabilité est encore principalement appliquée aux jeux de hasard. Nul ne l’imagine l’appliquer aux mouvements financiers, considérés encore comme trop chaotiques.

C’est dans ce contexte que Louis Bachelier, jeune mathématicien français, propose en 1900 une thèse intitulée *Théorie de la spéculation*. Il modélise mathématiquement les fluctuations boursières en utilisant le calcul des probabilités. Il devient alors le fondateur des mathématiques financières.

## 1.2 Présentation de Louis Bachelier

Louis Bachelier (1870–1946) est un mathématicien français formé à la Sorbonne. Sa thèse est novatrice à bien des égards : elle est la première à proposer une modélisation stochastique du marché financier. Bien qu’initialement peu reconnue, son œuvre sera redécouverte au XX<sup>e</sup> siècle, notamment par les économistes et mathématiciens anglo-saxons.

Il est aujourd’hui considéré comme un précurseur de la finance quantitative et un pionnier du mouvement brownien en mathématiques.

## 1.3 Objectifs de l’article

Le présent article propose un résumé d’une lecture active de la thèse de Bachelier (66 pages). Il vise tout d’abord à présenter les idées clés de la *Théorie de la spéculation* dans un langage accessible aux étudiants de licence. Nous y expliquerons notamment les modèles mathématiques introduits (cours vrai, loi de probabilité, diffusion, etc.) et nous conclurons par les liens entre les intuitions de Bachelier et les développements ultérieurs en finance moderne.

## 1.4 Principales contributions de la thèse

Dans sa thèse, Bachelier introduit plusieurs concepts fondamentaux. Il modélise dans un premier temps les variations de cours comme un phénomène aléatoire, posant les bases du mouvement brownien avant même Einstein ! Il établit ensuite une loi de probabilité pour les fluctuations de marché, inspirée de la loi normale de Gauss. D’autre part, il formalise des notions toujours utilisées aujourd’hui comme le cours « vrai », les primes, et les options. Enfin, il énonce que dans un marché équilibré, l’espérance mathématique du spéculateur est nulle, anticipant ainsi le très important *principe d’absence d’arbitrage*.

Ces apports font de sa thèse un texte visionnaire, fondateur de la finance moderne, bien avant l’avènement de modèles comme celui de Black-Scholes par exemple.

## 2 La Bourse et ses mécanismes au XIX<sup>e</sup> siècle

### 2.1 Les opérations de Bourse

Dans les premières pages de sa thèse, Bachelier commence par rappeler les différents types d'opérations que l'on rencontre à la Bourse de Paris, structurées principalement autour des *opérations à terme* :

- Les *opérations fermes* : engagements irrévocables d'achat ou de vente à une date future ;
- Les *opérations à prime* : options donnant le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre.

Il note que ces opérations peuvent se combiner de manière très variée, notamment dans le cas de primes multiples. Cette structuration montre que le marché de l'époque n'est pas seulement un lieu de transaction comptant i.e. un lieu où le règlement ne s'effectue pas seulement à l'achat, mais aussi un lieu de spéculation sur l'évolution future des cours.

### 2.2 Opérations fermes et opérations à prime

Les opérations fermes s'apparentent à des ventes classiques, mais décalées dans le temps. À la liquidation – qui a lieu en fin de mois – seule la différence de cours est réglée. Le *cours de compensation* est alors utilisé pour solder les positions. Par exemple, un achat ferme donne un gain si le prix de vente est supérieur au prix d'achat, et une perte dans le cas contraire.

Quant aux opérations à prime, elles ressemblent aux options actuelles :

- L'acheteur de la prime paie un montant fixe (la prime) pour bénéficier d'un gain potentiel en cas de hausse (prime à la hausse) ou de baisse (prime à la baisse).
- Sa perte est limitée à la prime versée, tandis que son gain est théoriquement illimité.
- Le vendeur de prime, à l'inverse, perçoit une prime fixe mais s'expose à une perte potentielle importante.

C'est typiquement ce que l'on appelle aujourd'hui les options d'achat et de vente (call/put). Bachelier illustre ces opérations par des représentations géométriques (p. 25–26), où l'on peut observer les bénéfices en fonction des cours. Nous détaillerons cela dans la section suivante.

### 2.3 Reports, coupons et cours de compensation

Le *report* est une opération financière qui permet à un acheteur à terme de prolonger sa position au mois suivant. Il paie alors un intérêt au vendeur, sauf cas exceptionnel où cet intérêt est négatif, appelé *déport*.

Sur les valeurs à revenu fixe comme la rente 3 % de l'époque, les acheteurs perçoivent des *coupons trimestriels*, ce qui crée une asymétrie. D'une part l'acheteur touche les coupons mais paie le report. D'autre part, le vendeur touche le report mais doit verser les coupons.

Bachelier note que cette situation peut générer un avantage pour certaines positions à long terme, comme les *rentes reportables*, où l'achat et le report prolongé sont utilisés pour capter le rendement du coupon.

Le *cours de compensation* est le prix de référence utilisé lors de la liquidation pour évaluer les gains ou pertes. Il est crucial dans la détermination des résultats des opérations à terme.

## 2.4 Cours vrai et cours équivalent

Louis Bachelier introduit la notion essentielle de *cours vrai*. Selon lui, le cours coté sur le marché n'est pas nécessairement le plus juste. Il propose de corriger ce cours en tenant compte des intérêts liés aux coupons à venir, des effets du report, et de la date de liquidation.

Il définit alors des *cours équivalents* comme des prix futurs attendus, ajustés pour refléter la position dans le mois. Par exemple, une rente de 100 francs avec un coupon attendu fera logiquement monter le cours de 0,25 franc par mois.

La *courbe des cours vrais* est présentée comme une fonction linéaire entre deux liquidations. Cette courbe est centrale pour déterminer la *valeur actualisée* des positions.

Enfin, le mathématicien insiste sur l'importance de cette correction car elle permet de calculer des espérances mathématiques équitables. C'est la base de son raisonnement probabiliste.

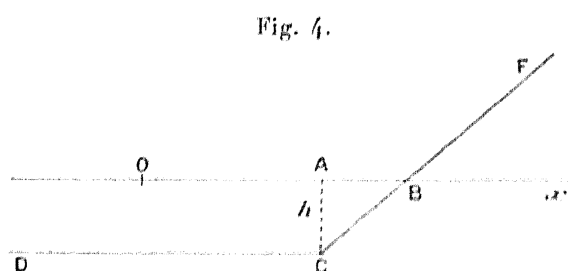
Au terme de cette première partie, nous avons posé les bases de la thèse de Bachelier. Un marché organisé autour d'opérations structurées, une dynamique temporelle claire, et l'introduction d'un point de vue mathématique du comportement des cours. Dans la suite, Bachelier utilise ces outils pour bâtir un modèle probabiliste rigoureux de la spéculation.

## 3 Modélisation mathématique des opérations

### 3.1 Achat, vente et prime

Comme évoqué précédemment, les *primes* sont l'ancêtre direct des options. Elles sont modélisées comme une combinaison asymétrique d'exposition au risque. L'*achat à prime* donne un bénéfice croissant au-delà d'un certain seuil i.e. le *pied de la prime*, mais limite la perte à la prime versée. La représentation graphique est une droite horizontale (perte fixe) en dessous du seuil, et une pente +1 au-dessus.

La figure proposée par Bachelier (fig. 4, p. 30) illustre cela : une *ligne brisée* dont le point de rupture correspond au seuil de rentabilité.



Inversement, une *vente à prime* est représentée par une droite brisée en pente négative au-delà du seuil, et plate (gain constant) en dessous. Le vendeur gagne la prime si le marché ne dépasse pas un certain niveau, mais perd au-delà.

Bachelier insiste sur le fait que les marchés à prime permettent de *limiter les pertes*, ce qui les rend attractifs pour certains spéculateurs. Mais cela a un coût ! L'espérance mathématique de la prime est construite de manière à maintenir une neutralité statistique. Il revient sur ce principe plus loin dans sa thèse.

## 3.2 Options et stellage

En complément des opérations simples, le mathématicien introduit (p. 31) ce qu'il appelle des *options* (au sens moderne du terme), c'est-à-dire des instruments hybrides entre le ferme et la prime.

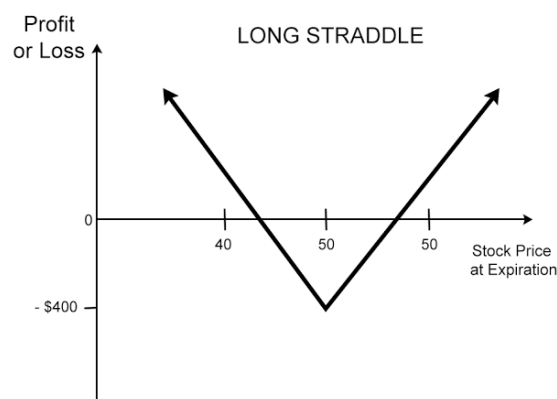
Il donne l'exemple d'une *option du double* : une position qui donne droit à deux unités de gain en cas de hausse, mais seulement à une unité de perte en cas de baisse. On parle aujourd'hui d'option asymétrique. De telles structures permettent de moduler le profil de risque selon les anticipations.

De plus, il décrit le *stellage* – ou *double prime* – constitué d'une prime à la hausse combinée avec une prime à la baisse. On l'interprète aujourd'hui comme une *stratégie de tunnel*, appelée *straddle*.

Ce montage donne :

- un gain si le cours s'éloigne significativement du cours d'exercice i.e. volatilité grande,
- une perte limitée à la somme des deux primes si le cours reste stable.

Le stellage est donc une *stratégie directionnellement neutre*, qui mise uniquement sur l'ampleur des mouvements, et non leur sens.



Au terme de cette seconde partie, nous avons compris que cette modélisation des opérations financières est l'un des apports majeurs de Bachelier. Elle permet de visualiser les profils de gains et pertes associés à chaque type d'opération, et prépare le terrain à une analyse probabiliste des stratégies, développée dans les sections suivantes.

## 4 Probabilités dans les opérations financières

### 4.1 Probabilités mathématiques et spéculatives

Le mathématicien précurseur distingue deux types de probabilités dans le contexte des opérations financières :

- Les *probabilités mathématiques* sont déterminées *a priori*, sur la base d’hypothèses de symétrie ou de lois connues. Elles sont typiques des jeux de hasard et permettent une modélisation probabiliste rigoureuse.
- Les *probabilités spéculatives*, quant à elles, traduisent les anticipations subjectives des agents économiques sur l’évolution future des cours. Ces probabilités sont liées à des jugements personnels basés sur des facteurs économiques, politiques ou psychologiques.

Bien que les variations des cours soient imprévisibles, on peut à un instant donné leur associer une *loi de probabilité* décrivant l’état statistique du marché. Dans sa thèse, Bachelier postule que le marché dans son ensemble est *neutre* : il n’anticipe ni la hausse ni la baisse. Cela se traduit mathématiquement par la symétrie de la loi de probabilité autour d’un *cours vrai*.

Ainsi, on peut écrire que la densité de probabilité  $p(x)$  représentant la probabilité que le cours relatif soit égal à  $x$  (c’est-à-dire l’écart entre le cours effectif et le cours vrai) satisfait :

$$p(x) = p(-x)$$

On verra dans la section suivante que cette loi est modélisée par une densité normale centrée, solution de l’équation de la chaleur.

## 4.2 Espérance mathématique et équité du marché

L’espérance mathématique joue un rôle fondamental dans l’évaluation des jeux de hasard et des opérations financières. Elle est définie comme le produit du gain possible par la probabilité de ce gain. Un jeu est dit *équitable* lorsque son espérance est nulle.

« L’espérance mathématique du spéculateur est nulle. » p. 34

Ce principe de neutralité permet de garantir que, selon la loi de probabilité admise par le marché à un instant donné, aucune opération n’offre un avantage certain. Ainsi, même une stratégie conditionnelle – par exemple, vendre dès que le cours dépasse un certain seuil – a une espérance nulle au regard du marché.

Bachelier propose également une modélisation quantitative de cette idée : la fonction de densité de probabilité  $p(x, t)$ , représentant la probabilité que le cours atteigne une valeur  $x$  au temps  $t$ , est donnée par la loi normale centrée réduite :

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

où  $t$  désigne le temps écoulé depuis un instant initial, et  $x$  l’écart au cours vrai. Cette loi satisfait l’équation de diffusion :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Ce formalisme permet de passer d’un raisonnement spéculatif subjectif à une modélisation mathématique des fluctuations boursières. Même si chaque agent agit sur la base de croyances individuelles, le comportement global du marché peut être décrit par une loi de probabilité objective et continue.



**Longue remarque :** il peut sembler paradoxal, voire absurde, de modéliser par des outils mathématiques ce qui relève des croyances subjectives de chaque agent économique. En effet, chaque spéculateur agit en fonction d'informations incomplètes, de jugements personnels et d'intuitions, si bien que prévoir l'avenir des cours semble hors de portée du calcul. C'est aussi une réflexion que je me suis faite. Cependant, la puissance de ces outils mathématiques ne réside pas dans la prédiction d'un cours futur déterminé, mais dans la description statistique du *comportement global* du marché. De la même manière qu'en physique statistique on modélise l'agitation thermique de milliards de particules sans connaître leurs trajectoires individuelles, on peut modéliser l'ensemble des anticipations des agents comme un phénomène aléatoire régulier. On utilise d'ailleurs une équation venant de la physique, celle de la chaleur ! Cette régularité émerge lorsque l'on considère non pas un agent isolé, mais une population d'agents ayant des opinions divergentes qui s'équilibrent en moyenne. C'est ce principe qui justifie l'usage d'une densité de probabilité centrée sur un cours "neutre" (le cours vrai), et qui donne sens à une approche probabiliste des marchés.

### 4.3 Avantage mathématique

Bachelier introduit l'idée d'*avantage mathématique* pour quantifier la valeur d'un jeu, même lorsque celui-ci n'est pas équitable. Il définit cet avantage comme le rapport entre l'espérance positive et la somme des espérances positive et négative :

$$\text{Avantage mathématique} = \frac{\text{espérance positive}}{\text{espérance positive} + \text{espérance négative}}$$

Cette notion complète celle d'espérance mathématique en évaluant l'asymétrie du jeu : un jeu équitable a un avantage de  $1/2$ , tandis qu'un jeu déséquilibré voit son avantage se rapprocher de 0 ou de 1 selon le sens du déséquilibre.

Enfin, le mathématicien illustre l'égalité des espérances au moyen d'un raisonnement fondé sur les *cours vrais*, qui corrigent les biais liés aux coupons ou aux reports. Par exemple :

« Les espérances mathématiques de l'acheteur et du vendeur sont nulles quand le report est de 2% ; [...] si l'on considère ces cours vrais, on peut dire que les espérances mathématiques [...] sont nulles. » (p. 34)

Cela justifie, mathématiquement, l'hypothèse de neutralité du marché : même les stratégies fondées sur des options ou des primes sont équitables si on les évalue correctement.



## 5 La dynamique des cours

### 5.1 Loi de probabilité des cours

### 5.2 Équation de diffusion (équation de Fourier)

### 5.3 Solution gaussienne

### 5.4 Écart-type et espérance en fonction du temps

## 6 Applications aux options et primes

### 6.1 Prime simple : calcul et probabilité de réussite

### 6.2 Écart probable et valeur attendue

### 6.3 Double prime et loi des écarts

### 6.4 Formule intégrale et interprétations

## 7 Vision moderne du modèle de Bachelier

### 7.1 Comparaison avec le modèle de Black-Scholes

### 7.2 Limites du modèle de Bachelier

### 7.3 Malentendus et critiques

## 8 Héritage et influence

### 8.1 Pourquoi Bachelier fut ignoré

### 8.2 Réhabilitation au XX<sup>e</sup> siècle

### 8.3 Impact sur la finance quantitative moderne

## 9 Conclusion

### 9.1 Synthèse mathématique

### 9.2 Apports théoriques et historiques

### 9.3 Perspectives actuelles

## Annexes

### A. Reproduction de figures de la thèse

### B. Détails de formules mathématiques

### C. Références bibliographiques

### D. Glossaire des termes techniques