Une introduction aux variables aléatoires

Résumé

Alexis VO

Université Paris-Saclay

École polytechnique

June 23, 2025

1 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Une **variable aléatoire** (abrégée VA) est une façon de modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'une valeur numérique. Elle associe à chaque issue possible d'une expérience un nombre réel.

Exemple (discret)

Lancer un dé à 6 faces : on peut modéliser le résultat par une variable aléatoire X telle que $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Il existe deux grandes familles de variables aléatoires : **discrètes et continues**.

2. Variable aléatoire discrète

Une VA discrète prend un nombre **fini ou dénombrable** de valeurs. Elle est définie par une **loi de probabilité** qui associe une probabilité à chaque valeur.

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x_i) \quad \text{avec} \quad \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1}$$

2 Variable aléatoire continue

Une VA continue peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle de réels (par exemple $[0, +\infty[$, ou $\mathbb{R}$).

Définition

Une variable aléatoire X est **continue** s'il existe une fonction $p(x)$, appelée *densité de probabilité*, telle que pour tout intervalle $[a, b]$:

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)\, dx}$$

et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1}$$

Remarques :

- Contrairement au cas discret, on n'a jamais $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Pour toute valeur précise, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- Ce qui est probable, ce n'est pas une valeur exacte, mais un **intervalle**.

4. Exemple classique : la loi normale

La densité de la loi normale centrée réduite est :

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

- Elle est symétrique par rapport à 0.
- Elle est très utilisée pour modéliser des phénomènes naturels, physiques ou économiques (par exemple les fluctuations boursières chez Bachelier).

5. Résumé

Résumé

Une variable aléatoire continue :

- prend ses valeurs dans un intervalle de réels ;
- est modélisée par une **densité de probabilité** $p(x)$;
- permet de calculer les probabilités via une **intégrale** ;
- vérifie toujours $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour toute valeur fixe x.