

# Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Alexis VO

CMAP - École polytechnique

11 juin 2025

# Plan

- 1 Contexte
- 2 Modèle CRR
- 3 Travail réalisé
- 4 Perspectives
- 5 Questions

- Comprendre le modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour la valorisation d'options.
- Implémenter un modèle de gestion de portefeuille en Python.
- Étudier la couverture dynamique (delta hedging).
- Vers le modèle de Black-Scholes ?
- ...

# Hypothèses

- Marché frictionless<sup>1</sup>, sans arbitrage.
- Le prix suit un processus binomial :

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} uS_t & \text{avec probabilité } p \\ dS_t & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

- Probabilité neutre au risque :

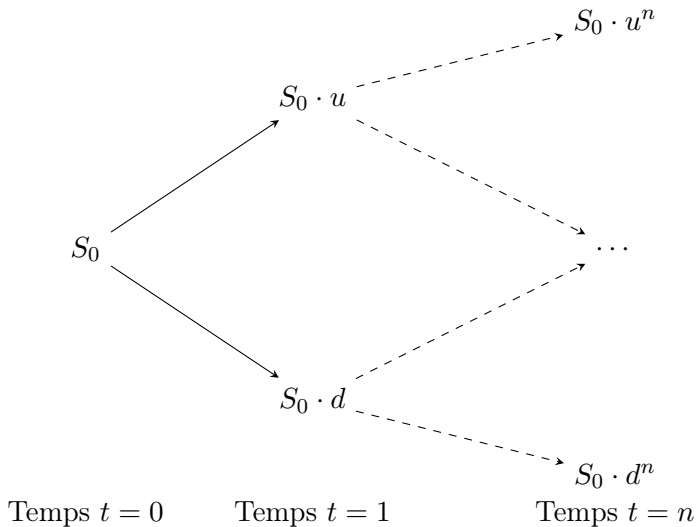
$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d}$$

- L'espérance du rendement de l'actif sous-jacent est égale au taux sans risque :

$$E \left[ \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \right] = r$$

---

1. sans coûts à l'achat/vente/détention



La valeur initiale  $V_0$  d'un produit dérivé est donné par le

## Théorème d'évaluation des actifs

$$V_0 = \frac{1}{1+r} (q \cdot V_u + (1-q) \cdot V_d)$$

où  $q$  est la probabilité neutre au risque,  $V_u$  (resp.  $V_d$ ) la valeur haussière (resp. à la baissière).

TODO

Formule par backward induction

$$C_0 = e^{-r\Delta t} (pC_u + (1 - p)C_d)$$

- Application à une option européenne en bout d'arbre.
- Cas d'une option américaine : vérification de l'exercice anticipé à chaque noeud.

- TODO
- Construction automatique de l'arbre binomial.
- Calcul des prix des options européennes (call/put).
- Visualisation interactive (matplotlib, plotly).
- Comparaison CRR vs Black-Scholes.



- TODO
- Graphe : arbre de prix
- Courbe : valeur de l'option selon la maturité
- Tableau : comparaison CRR / Black-Scholes

- Intégration des dividendes
- Couverture dynamique (delta hedging)
- Extension à un portefeuille multi-actifs
- Interface utilisateur (Streamlit)

- Convergences et limites : existe-t-il des bornes d'erreur précises sur l'approximation du prix d'option via CRR en fonction du nombre de pas ?
- Choix de  $u$  et  $d$  : y a-t-il des variantes du modèle CRR qui modifient ces facteurs pour mieux refléter des comportements du marché réel ?
- Applications : dans quelles situations le modèle CRR reste-t-il encore très pertinent pour la pratique financière ?
- Demander d'autres ressources telles que TD/TP
- Ressources, articles, ouvrages recommandés pour approfondir ?