

# Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

## *Journal de bord*

Alexis VO

Université Paris-Saclay  
École polytechnique

13 juin 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Jour 1, développement d'un outil de gestion de portefeuille avec options</b>	<b>4</b>
1.1	Objectifs de la journée . . . . .	4
1.2	Architecture du projet . . . . .	4
1.3	Exemples Modules implémentés . . . . .	5
1.3.1	options.py . . . . .	5
1.3.2	option_factory.py . . . . .	5
1.3.3	binomial_model.py . . . . .	5
1.4	À suivre... . . . .	5
1.5	Conclusion . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Jour 2, CRR et Black-Scholes</b>	<b>6</b>
2.1	Objectifs de la journée . . . . .	6
2.2	Travail réalisé . . . . .	6
2.3	À suivre... . . . .	6
2.4	Conclusion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Jour 3, rédaction d'un cours sur le modèle CRR</b>	<b>7</b>
3.1	Objectifs de la journée . . . . .	7
3.2	Contenu abordé . . . . .	7
3.2.1	Arbres binomiaux . . . . .	7
3.2.2	Théorème d'évaluation neutre au risque . . . . .	7
3.2.3	Portefeuille répliquant . . . . .	7
3.2.4	Taux sans risque . . . . .	7
3.2.5	Rédaction d'un commentaire d'interprétation d'un prix de call . . .	7
3.2.6	Position courte . . . . .	7
3.3	À suivre... . . . .	8
3.4	Conclusion . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Jour 4, fin du cours sur le modèle CRR</b>	<b>9</b>
4.1	Objectifs de la journée . . . . .	9
4.2	Contenu abordé . . . . .	9
4.3	À suivre... . . . .	10
4.4	Conclusion . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Jour 5, Implémentation du portefeuille</b>	<b>11</b>
5.1	Objectifs de la journée . . . . .	11
5.2	Travail réalisé . . . . .	11
5.3	À suivre... . . . .	11
5.4	Conclusion . . . . .	11

<b>6</b>	<b>Jour 6, Préparation entretien</b>	<b>12</b>
6.1	Objectifs de la journée . . . . .	12
6.2	Notions abordées . . . . .	12
6.3	Questions de recherche à discuter . . . . .	12
6.4	À suivre... . . . .	13
6.5	Conclusion . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Jour 7, Entretien et séminaire (digression)</b>	<b>14</b>
7.1	Objectifs de la journée . . . . .	14
7.2	Contenu de la journée . . . . .	14
7.3	À suivre... . . . .	14
7.4	Conclusion . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Jour 8, Implémentations</b>	<b>15</b>
8.1	Objectifs de la journée . . . . .	15
8.2	Débogage du modèle binomial . . . . .	15
8.3	Correction des tests du portefeuille . . . . .	15
8.4	À suivre... . . . .	15
8.5	Conclusion . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Jour 9, Implémentations</b>	<b>17</b>
9.1	Objectifs de la journée . . . . .	17
9.2	... . . . .	17
9.3	À suivre... . . . .	17
9.4	Conclusion . . . . .	17
<b>10</b>	<b>Jour N, ...</b>	<b>18</b>
10.1	Objectifs de la journée . . . . .	18
10.2	... . . . .	18
10.3	À suivre... . . . .	18
10.4	Conclusion . . . . .	18

# 1 Jour 1, développement d'un outil de gestion de portefeuille avec options

La matinée a été consacrée à :

- la compréhension du modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR).
- la mise en place d'une structure de projet.

L'après-midi a été consacrée à :

- la création d'une application interactive avec Streamlit.
- l'implémentation de la valorisation des options européennes et américaines.

La préparation du stage a permis de poser les bases nécessaires pour débiter efficacement.

## 1.1 Objectifs de la journée

Créer une application interactive pour :

- Valoriser des options européennes et américaines
- Simuler la réplication dynamique
- Intégrer une interface utilisateur avec Streamlit

## 1.2 Architecture du projet

Paradigme de développement : **Programmation Orientée Objet**.

```
portfolio-pricing-system/  
|-- app.py  
|-- main.py  
|-- core/  
|   |-- options.py  
|   |-- option_factory.py  
|-- models/  
|   |-- binomial_model.py  
|   |-- black_scholes.py  
|-- portfolio/  
|   |-- hedging.py  
|   |-- portfolio.py  
|   |-- replication.py  
|-- tests/  
|   |-- test_binomial_model.py  
|-- utils/  
|   |-- visualization.py
```

## 1.3 Exemples Modules implémentés

### 1.3.1 options.py

Contient les classes pour les différentes options :

- `Option`, classe de base
- `EuropeanCallOption`, `EuropeanPutOption`
- `AmericanCallOption`, `AmericanPutOption`

Chaque classe hérite d'`Option` et implémente `payoff()` ainsi que le flag `is_american`.

### 1.3.2 option\_factory.py

Implémente un `OptionFactory` qui permet d'instancier dynamiquement des options à partir d'un nom chaîne de caractères, comme `european_call`.

### 1.3.3 binomial\_model.py

Contient la fonction `binomial_option_pricing` :

- Construction de l'arbre des prix
- Backward induction pour valoriser l'option
- Prise en compte de l'exercice anticipé pour les options américaines

## 1.4 À suivre...

- Intégration de la visualisation du portefeuille (`matplotlib` ou `plotly`)
- Affichage de l'arbre binomial ou de la stratégie de couverture
- Élargissement à un portefeuille multi-options
- Ajout d'un module d'export PDF ou Excel
- etc...

## 1.5 Conclusion

L'application est en place. L'architecture modulaire permettra une extension facile vers d'autres modèles de valorisation et vers une gestion de portefeuille plus complète.

## 2 Jour 2, CRR et Black-Scholes

La journée a été consacrée à la lecture des premiers chapitres du polycopié *Martingales pour la finance* et à la mise en place du TP1.1 - *Le modèle de CRR*.

### 2.1 Objectifs de la journée

- Lecture du polycopié *Martingales pour la finance*.
- Faire le TP1.1 - *Le modèle de CRR*.
- Continuer le développement de l'application interactive.

### 2.2 Travail réalisé

- Compréhension des concepts mathématiques tels que  $u_n, d_n, h_n, q$ , etc.
- Implémentation en Python des fonctions :
  - `Sn` pour les prix possibles de l'actif à une date donnée.
  - `Payoff` pour le profil de gain d'un call européen à maturité.
  - `Calln` pour le prix d'une option via l'évaluation backward.
  - `Deltan` pour le vecteur de couverture delta à chaque étape.
- Étude de la convergence : tracé de l'écart relatif entre CRR et Black-Scholes pour différents  $n$ .
- Rédaction d'un résumé en  $\text{\LaTeX}$  avec explications mathématiques, intuition des formules, et comparaison entre les deux modèles.

### 2.3 À suivre...

- Étendre l'étude à d'autres types d'options (put européen, option asiatique...).
- Intégrer une étude numérique de sensibilité aux paramètres  $\sigma, r, T$  (analyses dites « greeks »).
- Ajouter des cas pratiques et graphiques interactifs pour illustrer le comportement de la couverture dynamique.

### 2.4 Conclusion

Durant cette deuxième journée, j'ai pu implémenter l'intégralité du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. J'ai également pu vérifier sa cohérence avec la formule continue de Black-Scholes. La compréhension de la couverture dynamique - *delta hedging* - a été approfondie, et les outils numériques sont désormais en place pour explorer des cas plus complexes. Le lien entre les modèles discrets et continus a été mis en évidence à travers l'étude de la convergence.

## 3 Jour 3, rédaction d'un cours sur le modèle CRR

### 3.1 Objectifs de la journée

- Développer une stratégie de couverture dynamique.
- Poursuivre l'intégration de la visualisation des résultats.
- Rédaction d'un cours sur le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

### 3.2 Contenu abordé

#### 3.2.1 Arbres binomiaux

- Arbre à un pas : valeurs numériques illustrant un actif pouvant monter ou baisser, avec calcul du prix d'un call.
- Arbre symbolique généré avec TikZ : noeuds représentant  $S_0$ ,  $S_u$ ,  $S_d$ , puis généralisation à  $t = n$ .
- Arbre centré sur les valeurs de l'option :  $V_0$ ,  $V_u$ ,  $V_d$ , flèches annotées par  $q$  et  $1 - q$ .

#### 3.2.2 Théorème d'évaluation neutre au risque

- Explication de la formule  $V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_u + (1-q)V_d)$ .
- Définition et intuition derrière la probabilité neutre au risque :  $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ .
- Illustration graphique via TikZ centrée sur la valeur de l'option.

#### 3.2.3 Portefeuille répliquant

Début d'intuition graphique recherchée : représenter comment une combinaison d'actif sans risque (bond) et d'actif risqué permet de reproduire le payoff d'une option.

#### 3.2.4 Taux sans risque

Clarification : le taux  $r$  représente le rendement d'un actif sans risque, typiquement un *bond*.

#### 3.2.5 Rédaction d'un commentaire d'interprétation d'un prix de call

#### 3.2.6 Position courte

- Définition simple : vendre un actif qu'on ne détient pas, en espérant le racheter plus bas.
- Risques, fonctionnement, et illustration avec un exemple clair.

### 3.3 À suivre...

- Construire un portefeuille répliquant dans un modèle binomial à un pas.
- Étendre les arbres binomiaux à plusieurs périodes ( $n$  étapes).
- Implémenter les calculs de prix d'options selon le modèle CRR dans l'application interactives déjà prêtes (Streamlit).
- Étudier les notions de delta hedging et le lien avec la réplication.
- Approfondir le lien entre absence d'arbitrage et probabilités neutres au risque.

### 3.4 Conclusion

Cette troisième journée a permis de consolider les pour comprendre le modèle de CRR et les instruments dérivés simples comme le call européen (que j'ai donc mieux compris). Les exemples chiffrés et arbres binomiaux ont facilité l'appropriation de ces concepts. Les prochaines étapes visent à étendre ce cadre à plusieurs périodes et à mettre en œuvre les outils numériques nécessaires à une simulation complète (avec Streamlit par exemple).



## 4 Jour 4, fin du cours sur le modèle CRR

### 4.1 Objectifs de la journée

- Comprendre comment construire un portefeuille répliquant pour évaluer un produit dérivé.
- Introduire la stratégie de couverture (hedging) via la réplication.
- Définir la probabilité neutre au risque et comprendre son rôle.
- Relier la notion de  $\Delta$ -hedging à la dérivée du prix de l'option.

### 4.2 Contenu abordé

#### Modèle binomial à une période

- L'actif risqué vaut  $S_0$  aujourd'hui.
- Il peut évoluer vers  $S_0u$  (hausse) ou  $S_0d$  (baisse) à la prochaine période.
- Il existe un actif sans risque avec un taux  $r$ .

#### Portefeuille répliquant

- On construit un portefeuille de  $\Delta$  actions et  $B$  obligations.
- Objectif : faire en sorte que ce portefeuille reproduise les gains du produit dérivé dans les deux cas futurs.
- Valeur initiale :  $V_0 = \Delta S_0 + B$ .
- Valeur finale en cas de hausse :  $V_u = \Delta S_0u + B(1 + r)$ .
- Valeur finale en cas de baisse :  $V_d = \Delta S_0d + B(1 + r)$ .

#### Résolution du système

On résout les deux équations :

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_0(u - d)}, \quad B = \frac{uV_d - dV_u}{(1 + r)(u - d)}$$

#### Lien avec la couverture

- Cette stratégie est appelée **stratégie de couverture**.
- On annule le risque de marché en prenant une position opposée à celle de l'option.
- $\Delta$  est appelé **delta** car il représente la dérivée du prix de l'option par rapport au sous-jacent.
- Cela fonde la notion de **delta-hedging**.

## Probabilité neutre au risque

$$q = \frac{(1+r) - d}{u - d}, \quad 1 - q = \frac{u - (1+r)}{u - d}$$

## Formule de valorisation

On obtient finalement :

$$V_0 = \frac{1}{1+r} (q \cdot V_u + (1-q) \cdot V_d)$$

Ce qui correspond à la valeur actualisée de l'espérance du produit dérivé sous la probabilité neutre au risque.

### 4.3 À suivre...

- Développer la convergence du modèle binomial vers le modèle de Black-Scholes.

### 4.4 Conclusion

- Le modèle CRR permet d'évaluer les options sans arbitrage par réplication.
- Le portefeuille répliquant constitue une stratégie de couverture efficace.
- La notion de  $\Delta$ -hedging est centrale en gestion du risque.
- La probabilité neutre au risque offre un cadre probabiliste puissant pour la valorisation.

## 5 Jour 5, Implémentation du portefeuille

### 5.1 Objectifs de la journée

- Implémenter un système de gestion de portefeuille (portefeuille multi-options)
- Intégrer une stratégie de couverture (delta hedging) au sein du portefeuille
- Ajouter des tests unitaires pour valider le bon fonctionnement des composants

### 5.2 Travail réalisé

- Création du fichier `portfolio.py` pour gérer un ensemble de positions sur options.
- Implémentation du fichier `hedging.py` pour calculer les deltas et recommander une couverture.
- Résolution d'un bug lié à l'attribut `pricing_model` manquant dans le portefeuille.
- Écriture de tests unitaires

### 5.3 À suivre...

- Ajouter des scénarios dynamiques simulant l'évolution du marché (trajectoire du spot)
- Implémenter une stratégie de rebalancement du hedge à chaque pas de temps
- Intégrer les frais de transaction dans la stratégie de couverture
- Optimiser la visualisation avec des animations ou des courbes interactives

### 5.4 Conclusion

La journée a permis d'implémenter les bases d'un système cohérent de valorisation de portefeuille avec couverture delta.

## 6 Jour 6, Préparation entretien

### 6.1 Objectifs de la journée

- Notion de probabilité risque-neutre.
- Question de la volatilité constante.
- Convergence du modèle CRR vers Black-Scholes.
- Préparer l'entretien avec le tuteur.

### 6.2 Notions abordées

- **Marché frictionless** : absence de coûts de transaction, liquidité parfaite, absence de contraintes sur les ventes à découvert.
- **Probabilité risque-neutre** :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

utilisée pour valoriser les actifs en actualisant les espérances sous une mesure fictive où le taux de croissance est le taux sans risque  $r$ .

- **Volatilité constante** : dans le modèle CRR, les facteurs  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  et  $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$  impliquent une volatilité constante au cours du temps.
- **Convergence** : le modèle binomial converge en loi vers un mouvement brownien géométrique :

$$\ln S_T \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

- **Formules d'actualisation** :

$$C_0 = e^{-r\Delta t} \cdot (pC_u + (1-p)C_d) \quad (\text{formule continue})$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \cdot (qV_u + (1-q)V_d) \quad (\text{formule discrète})$$

- **Approches du modèle binomial** :
  - *Forward tree* : construction de l'arbre des prix.
  - *Backward induction* : valorisation des options par récurrence à rebours à partir des valeurs terminales.

### 6.3 Questions de recherche à discuter

- Peut-on adapter le modèle CRR à une volatilité non constante ?
- Quelle est la vitesse de convergence vers le modèle de Black-Scholes ?
- Que deviennent les stratégies de couverture delta sous contraintes réelles ?
- Comment le modèle s'étend-il à plusieurs actifs ou à des options exotiques ?

## 6.4 À suivre...

- Étudier en détail la couverture dynamique dans CRR.
- Implémenter le modèle en Python pour simuler la convergence.
- Lire sur les extensions multipériodes ou multinodales du modèle binomial et surtout la convergence vers Black-Scholes.

## 6.5 Conclusion

La journée a permis de bien clarifier les fondements du modèle CRR, d'approfondir les bases théoriques de la valorisation des options par arbitrage, et d'identifier plusieurs directions de recherche intéressantes. La compréhension de la probabilité risque-neutre et de la convergence vers Black-Scholes est maintenant plus claire. Des travaux de modélisation numérique sont prévus pour approfondir.

## 7 Jour 7, Entretien et séminaire (digression)

### 7.1 Objectifs de la journée

- Entretien avec le tuteur
- Séminaire *Generative Modeling for Finance*.
- Résumer des exposés du séminaire.

### 7.2 Contenu de la journée

- **Exposé 1 : Flow matching**
  - Problème : transformer une loi source  $p$  en une loi cible  $q$  en apprenant une transformation différentiable  $\varphi_\theta$ .
  - Méthode : apprentissage de la densité  $p^\theta$  à partir d'une équation de continuité du type Liouville.
  - Implémentation : modèle de champ de vitesse  $u_t^\theta$  paramétré par un réseau de neurones et intégré numériquement.
- **Exposé 2 : Conditional Flow Matching**
  - Objectif : apprendre un flot conditionné sur l'état final  $x_1$ , pour générer efficacement les dynamiques de transition.
  - Résultat central : les pertes de flow matching marginal et conditionnel ont le même gradient.
  - Perspectives d'application : modélisation de dynamiques de marché conditionnelles en finance quantitative.
- **Travail personnel** : rédaction d'un résumé des deux exposés et compréhension pro-active post-séminaire.

### 7.3 À suivre...

La poursuite de cette étude n'est pas au programme. Nous reviendrons sur les objectifs du stage ayant pour sujet principal le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

### 7.4 Conclusion

Journée dense et riche en contenu théorique. Les exposés ont permis de découvrir une approche moderne du transport de mesures, basée sur l'apprentissage de champs de vitesse via des équations différentielles. La rédaction du résumé a facilité l'appropriation des concepts.

## 8 Jour 8, Implémentations

### 8.1 Objectifs de la journée

- Déboguer les erreurs du modèle binomial pour le pricing d'options européennes et américaines.
- Corriger et faire passer les tests unitaires dans `test_binomial.py` et `test_portfolio.py`.
- S'assurer que les options soient correctement valorisées dans un portefeuille en utilisant une structure flexible.

### 8.2 Débogage du modèle binomial

J'ai rencontré une série d'erreurs `TypeError` dues à un champ `spot` non défini dans les objets d'options passés à la fonction `binomial_option_pricing`. Ces erreurs ont été corrigées en modifiant la fonction pour extraire systématiquement les paramètres depuis l'objet `option` :

- `spot = option.spot`
- `strike = option.strike`

Cela a permis de rendre la fonction indépendante du passage d'arguments externes incohérents ou manquants.

### 8.3 Correction des tests du portefeuille

Dans le fichier `test_portfolio.py`, deux erreurs bloquaient les tests :

- `TypeError` lié à un argument `spot_dict` manquant.
- `KeyError: 'UNKNOWN'` provoqué par un attribut `asset_name` non renseigné dans les options.

J'ai corrigé ces erreurs en spécifiant explicitement `asset_name = "AAPL"` ou `"TSLA"` dans les objets `EuropeanOption` et `AmericanOption`. Passant un `spot_dict` cohérent à toutes les fonctions dépendantes du portefeuille. Tous les tests passent désormais sans erreur.

### 8.4 À suivre...

- Étendre les tests à d'autres types de portefeuilles, y compris des paniers d'options hétérogènes.
- Implémenter une gestion plus robuste des erreurs dans le pricing model (ex. : option non prenable par le modèle).
- Commencer la structuration de l'interface utilisateur (ex : Streamlit).

## 8.5 Conclusion

Aujourd'hui j'ai pu fiabiliser le modèle de valorisation binomiale et assurer son intégration correcte dans le système de portefeuille. Le pipeline de test unitaire est désormais stable pour les cas de base, ce qui constitue un socle solide pour ajouter de nouvelles fonctionnalités dans les jours à venir.



## **9 Jour 9, Implémentations**

### **9.1 Objectifs de la journée**

— ...

### **9.2 ...**

### **9.3 À suivre...**

### **9.4 Conclusion**

## **10 Jour N, ...**

### **10.1 Objectifs de la journée**

— ...

### **10.2 ...**

### **10.3 À suivre...**

### **10.4 Conclusion**