

# Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

## *Journal de bord*

Alexis VO

Université Paris-Saclay  
École polytechnique

6 juin 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Jour 1, développement d'un outil de gestion de portefeuille avec options</b>	<b>3</b>
1.1	Objectifs de la journée . . . . .	3
1.2	Architecture du projet . . . . .	3
1.3	Exemples Modules implémentés . . . . .	4
1.3.1	options.py . . . . .	4
1.3.2	option_factory.py . . . . .	4
1.3.3	binomial_model.py . . . . .	4
1.4	À suivre... . . . .	4
1.5	Conclusion . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Jour 2, CRR et Black-Scholes</b>	<b>5</b>
2.1	Objectifs de la journée . . . . .	5
2.2	Travail réalisé . . . . .	5
2.3	À suivre... . . . .	5
2.4	Conclusion . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Jour 3, rédaction d'un cours sur le modèle CRR</b>	<b>6</b>
3.1	Objectifs de la journée . . . . .	6
3.2	Contenu abordé . . . . .	6
3.2.1	Arbres binomiaux . . . . .	6
3.2.2	Théorème d'évaluation neutre au risque . . . . .	6
3.2.3	Portefeuille répliquant . . . . .	6
3.2.4	Taux sans risque . . . . .	6
3.2.5	Rédaction d'un commentaire d'interprétation d'un prix de call . . .	6
3.2.6	Position courte . . . . .	6
3.3	À suivre... . . . .	7
3.4	Conclusion . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Jour N, ...</b>	<b>8</b>
4.1	Objectifs de la journée . . . . .	8
4.2	... . . . .	8
4.3	À suivre... . . . .	8
4.4	Conclusion . . . . .	8

# 1 Jour 1, développement d'un outil de gestion de portefeuille avec options

La matinée a été consacrée à :

- la compréhension du modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR).
- la mise en place d'une structure de projet.

L'après-midi a été consacrée à :

- la création d'une application interactive avec Streamlit.
- l'implémentation de la valorisation des options européennes et américaines.

La préparation du stage a permis de poser les bases nécessaires pour débiter efficacement.

## 1.1 Objectifs de la journée

Créer une application interactive pour :

- Valoriser des options européennes et américaines
- Simuler la réplication dynamique
- Intégrer une interface utilisateur avec Streamlit

## 1.2 Architecture du projet

Paradigme de développement : **Programmation Orientée Objet**.

```
portfolio-pricing-system/  
|-- app.py  
|-- main.py  
|-- core/  
|   |-- options.py  
|   |-- option_factory.py  
|-- models/  
|   |-- binomial_model.py  
|   |-- black_scholes.py  
|-- portfolio/  
|   |-- hedging.py  
|   |-- portfolio.py  
|   |-- replication.py  
|-- tests/  
|   |-- test_binomial_model.py  
|-- utils/  
|   |-- visualization.py
```

## 1.3 Exemples Modules implémentés

### 1.3.1 options.py

Contient les classes pour les différentes options :

- `Option`, classe de base
- `EuropeanCallOption`, `EuropeanPutOption`
- `AmericanCallOption`, `AmericanPutOption`

Chaque classe hérite d'`Option` et implémente `payoff()` ainsi que le flag `is_american`.

### 1.3.2 option\_factory.py

Implémente un `OptionFactory` qui permet d'instancier dynamiquement des options à partir d'un nom chaîne de caractères, comme `european_call`.

### 1.3.3 binomial\_model.py

Contient la fonction `binomial_option_pricing` :

- Construction de l'arbre des prix
- Backward induction pour valoriser l'option
- Prise en compte de l'exercice anticipé pour les options américaines

## 1.4 À suivre...

- Intégration de la visualisation du portefeuille (`matplotlib` ou `plotly`)
- Affichage de l'arbre binomial ou de la stratégie de couverture
- Élargissement à un portefeuille multi-options
- Ajout d'un module d'export PDF ou Excel
- etc...

## 1.5 Conclusion

L'application est en place. L'architecture modulaire permettra une extension facile vers d'autres modèles de valorisation et vers une gestion de portefeuille plus complète.

## 2 Jour 2, CRR et Black-Scholes

La journée a été consacrée à la lecture des premiers chapitres du polycopié *Martingales pour la finance* et à la mise en place du TP1.1 - *Le modèle de CRR*.

### 2.1 Objectifs de la journée

- Lecture du polycopié *Martingales pour la finance*.
- Faire le TP1.1 - *Le modèle de CRR*.
- Continuer le développement de l'application interactive.

### 2.2 Travail réalisé

- Compréhension des concepts mathématiques tels que  $u_n, d_n, h_n, q$ , etc.
- Implémentation en Python des fonctions :
  - `Sn` pour les prix possibles de l'actif à une date donnée.
  - `Payoff` pour le profil de gain d'un call européen à maturité.
  - `Calln` pour le prix d'une option via l'évaluation backward.
  - `Deltan` pour le vecteur de couverture delta à chaque étape.
- Étude de la convergence : tracé de l'écart relatif entre CRR et Black-Scholes pour différents  $n$ .
- Rédaction d'un résumé en  $\text{\LaTeX}$  avec explications mathématiques, intuition des formules, et comparaison entre les deux modèles.

### 2.3 À suivre...

- Étendre l'étude à d'autres types d'options (put européen, option asiatique...).
- Intégrer une étude numérique de sensibilité aux paramètres  $\sigma, r, T$  (analyses dites « greeks »).
- Ajouter des cas pratiques et graphiques interactifs pour illustrer le comportement de la couverture dynamique.

### 2.4 Conclusion

Durant cette deuxième journée, j'ai pu implémenter l'intégralité du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. J'ai également pu vérifier sa cohérence avec la formule continue de Black-Scholes. La compréhension de la couverture dynamique - *delta hedging* - a été approfondie, et les outils numériques sont désormais en place pour explorer des cas plus complexes. Le lien entre les modèles discrets et continus a été mis en évidence à travers l'étude de la convergence.

## 3 Jour 3, rédaction d'un cours sur le modèle CRR

### 3.1 Objectifs de la journée

- Développer une stratégie de couverture dynamique.
- Poursuivre l'intégration de la visualisation des résultats.
- Rédaction d'un cours sur le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

### 3.2 Contenu abordé

#### 3.2.1 Arbres binomiaux

- Arbre à un pas : valeurs numériques illustrant un actif pouvant monter ou baisser, avec calcul du prix d'un call.
- Arbre symbolique généré avec TikZ : noeuds représentant  $S_0$ ,  $S_u$ ,  $S_d$ , puis généralisation à  $t = n$ .
- Arbre centré sur les valeurs de l'option :  $V_0$ ,  $V_u$ ,  $V_d$ , flèches annotées par  $q$  et  $1 - q$ .

#### 3.2.2 Théorème d'évaluation neutre au risque

- Explication de la formule  $V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_u + (1-q)V_d)$ .
- Définition et intuition derrière la probabilité neutre au risque :  $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ .
- Illustration graphique via TikZ centrée sur la valeur de l'option.

#### 3.2.3 Portefeuille répliquant

Début d'intuition graphique recherchée : représenter comment une combinaison d'actif sans risque (bond) et d'actif risqué permet de reproduire le payoff d'une option.

#### 3.2.4 Taux sans risque

Clarification : le taux  $r$  représente le rendement d'un actif sans risque, typiquement un *bond*.

#### 3.2.5 Rédaction d'un commentaire d'interprétation d'un prix de call

#### 3.2.6 Position courte

- Définition simple : vendre un actif qu'on ne détient pas, en espérant le racheter plus bas.
- Risques, fonctionnement, et illustration avec un exemple clair.

### 3.3 À suivre...

- Construire un portefeuille répliquant dans un modèle binomial à un pas.
- Étendre les arbres binomiaux à plusieurs périodes ( $n$  étapes).
- Implémenter les calculs de prix d'options selon le modèle CRR dans l'application interactives déjà prêtes (Streamlit).
- Étudier les notions de delta hedging et le lien avec la réplication.
- Approfondir le lien entre absence d'arbitrage et probabilités neutres au risque.

### 3.4 Conclusion

Cette troisième journée a permis de consolider les pour comprendre le modèle de CRR et les instruments dérivés simples comme le call européen (que j'ai donc mieux compris). Les exemples chiffrés et arbres binomiaux ont facilité l'appropriation de ces concepts. Les prochaines étapes visent à étendre ce cadre à plusieurs périodes et à mettre en œuvre les outils numériques nécessaires à une simulation complète (avec Streamlit par exemple).

## **4 Jour N, ...**

### **4.1 Objectifs de la journée**

— ...

### **4.2 ...**

### **4.3 À suivre...**

### **4.4 Conclusion**