Асланов Алишер (amaslanov@edu.hse.ru), Шатская Лиза (eishatskaya@edu.hse.ru)

Аннотация

В данной работе изучаются основные понятия и концепты топологии и математической музыкальной теории. Рассматривается классический тоннец Эйлера, а также его вариация – тоннец на септаккордах. Последний исследуется более подробно, вычисляются его топологические характеристики.

Ключевые слова: топология, математическая музыкальная теория, тоннец, гомологии.

# Содержание

# 1 Основные термины и определения

## 1.1 Теория музыки

*Нота* – это элемент группы $\mathbb{Z}_{12}$. Для их записи мы будем использовать стандартные обозначения: $A$, $A\sharp(B\flat)$, $B$, $C$, $C\sharp(D\flat)$, $D$, $D\sharp(E\flat)$, $E$, $F$, $F\sharp(G\flat)$, $G$, $G\sharp(A\flat)$. Удобно изображать ноты в виде точек на окружности:

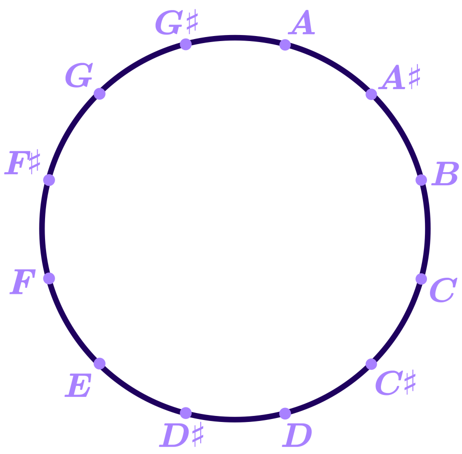


Рис. 1: Нотный круг

*Интервал* – это расстояние между двумя нотами. Интервал между соседними нотами называется *полутоном*.

*Минорными трезвучиями* называются трехэлементные подмножества $\mathbb{Z}_{12}$, интервалы между элементами которых составляют 3, 4 и 5 полутонов по часовой стрелке (в терминах нотного круга). У *мажорных трезвучий* интервалы по часовой стрелке равны 4, 3 и 5.

*Септаккорд* – это четырёхэлементное подмножество $\mathbb{Z}_{12}$ с определенными интервалами. Мы будем рассматривать только самые распространенные септаккорды, они имеют интервалы 4, 3, 3, 2 (*малый мажорный*); 3, 4, 3, 2 (*малый минорный*) и 3, 3, 4, 2 (*малый уменьшенный*) полутонов по часовой стрелке.

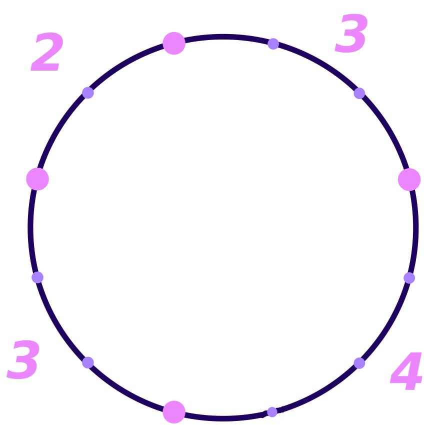


Рис. 2: Малый минорный септаккорд

## 1.2 Топология

Пусть $X$ – некоторое множество. Система $\mathcal{T}$ его подмножеств называется *топологией* на $X$, если

(1) Объединение произвольного набора множеств, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$;

(2) Пересечение конечного набора множеств, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$;

(3) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*. Множества, принадлежащие $\mathcal{T}$, называются *открытыми множествами*.

В данном тексте под топологическим пространством мы будем понимать просто некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $X$ и $Y$ – два топологических пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно, а также $f$ и $f^{-1}$ непрерывны. $X$ и $Y$ *гомеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм. Обозначение: $X \cong Y$.

Топологическое пространство $X$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует непрерывная кривая с концами в $x_1$ и $x_2$, целиком лежащая в $X$. Далее будем говорить просто «*связное*».

*Компонента связности* топологического пространства $X$ – это максимальное по включению связное подмножество $X$.

Два непрерывных отображения $f, g : X \to Y$ между топологическими пространствами называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$, такое что $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$. Обозначение: $f \sim g$. Отображение $F$ называется *гомотопией* между $f$ и $g$.

Два топологических пространства $X$ и $Y$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существует пара непрерывных отображений $h : X \to Y$, $k : Y \to X$, такая что композиция $h \circ k : Y \to Y$ гомотопна тождественному отображению $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$, и композиция $k \circ h : X \to X$ гомотопна $\mathrm{id}_X : X \to X$. Обозначение: $X \simeq Y$.

Топологическое пространство $X$ называется *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно пространству, состоящему из одной точки: $X \simeq \mathrm{pt}$.

*Симплициальным комплексом* на конечном множестве $M$ называется совокупность $K \subset 2^M$ подмножеств множества $M$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $\varnothing \in K$;

(2) $I \in K, J \subset I \implies J \in K$.

Элементы множества $M$ называются *вершинами* симплициального комплекса $K$, а элементы $I \in K$ – его *симплексами*. Если $i \in I$, то говорят, что $i$ есть вершина симплекса $I$. Множество вершин $M$ мы будем иногда обозначать $V(K)$. *Размерностью симплекса* $I$ ($\dim I$) называется число $|I| - 1$. А *Размерность симплициального комплекса* $K$ определяется как $\max\limits_{I \in K} \dim I$.

Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $e_1, \ldots, e_m$ – базис пространства $\mathbb{R}^m$. Положим $\Delta_I = \mathrm{conv}(\{e_i \mid i \in I\})$ – симплекс (в геометрическом смысле), натянутый на базисные векторы, соответствующие индексам из $I$. Множество $|K| = \bigcup\limits_{I \in K} \Delta_I \subset \mathbb{R}^m$ называется *(стандартной) геометрической реализацией* симплициального комплекса $K$.

Симплекс $I \in K$ называется *максимальным (по включению)*, если не существует такого симплекса $J \in K$, что выполняется строгое включение $I \subset J$.

Пусть $l \geq 0$ – целое число. Симплициальный комплекс $K^{(l)} := \{I \in K \mid \dim I \leq l\}$ называется *$l$-мерным остовом* комплекса $K$.

Пусть $I \in K$. *Звездой* симплекса $I$ в комплексе $K$ называется симплициальный комплекс $\mathrm{star}_K I := \{J \subseteq M \mid J \cup I \in K\}$. *Линком* симплекса $I$ в комплексе $K$ называется комплекс $\mathrm{link}_K I := \{J \subseteq M \setminus I \mid J \sqcup I \in K\}$.

*Триангуляцией* топологического пространства $X$ называется такой симплициальный комплекс $K$, что $|K| \cong X$.

*$n$-мерным тором* называется топологическое пространство $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = (S^1)^n$, где $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ – единичная окружность.

*Эйлерова характеристика* симплициального комплекса $K$ размерности $n$ – это величина

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j,$$

где $f_j$ – это число $j$-мерных симплексов в $K$.

## 1.3 Математическая музыкальная теория

*Классический треугольный тоннец* – это симплициальный комплекс, вершинами которого являются ноты, а максимальными симплексами – треугольники, построенные на всевозможных мажорных и минорных трезвучиях.

Пусть $d_1, \ldots, d_k$ – набор натуральных чисел, такой что $d_1 + \ldots + d_k = m$. *Обобщенный тоннец* $Tonn^{m,k}(d_1, \ldots, d_k)$ – это симплициальный комплекс на множестве $[m]$, максимальные симплексы которого имеют вид

$$\{x,\ x + d_{\sigma(1)},\ x + d_{\sigma(1)} + d_{\sigma(2)}, \ldots,\ x + d_{\sigma(1)} + \ldots + d_{\sigma(k-1)} \mid x \in \mathbb{Z}_m,\ \sigma \in \Sigma_k\},$$

где $\Sigma_k$ – множество перестановок на $k$ элементах, и все сложения выполняются по модулю $m$. [2]

*Тоннец на септаккордах* – это симплициальный комплекс $Tonn^{12,4}(2, 3, 3, 4)$, т.е. его максимальные симплексы построены на нотах, образующих септаккорды.

# 2 Введение

Известно, что несмотря на то, что математика – точная наука, а музыка – вид искусства, между ними много общего. Эту взаимосвязь изучает *математическая музыкальная теория*. Данный проект посвящен изучению некоторых вопросов из этой области.

Рассматриваемая тема является актуальной – по ней, на данный момент, сравнительно немного публикаций, имеются открытые вопросы и задачи, которые нужно решить.

Оказывается, что музыкальные произведения можно представлять в виде геометрических и топологических объектов. Мы будем заниматься исследованием таких представлений и анализировать их с точки зрения топологии.

## 2.1 Цель проекта

Описать и исследовать тоннец, построенный на септаккордах. Вычислить некоторые его топологические характеристики, такие как числа Бетти (см. далее).

## 2.2 Задачи

Свои задачи я разделил на две группы: теория и практика.
<u>Теория:</u>

- Изучить основы топологии по [1];
- Изучить основы математической музыкальной теории.

<u>Практика:</u>

- Описать тоннец на септаккордах на языке `python` и использовать библиотеку `simplicial` для его анализа.

# 3 Обзор и сравнительный анализ источников

## 3.1 Обзор теории по топологии

*Топология* – наука, изучающая свойства пространств, остающиеся неизменными при непрерывных деформациях. В отличие от геометрии, в топологии не рассматриваются метрические свойства объектов (расстояние между точками и т.п.). Классический пример одинаковых с точки зрения топологии объектов – тор (проще говоря, бублик) и кружка [3].

Базовые понятия топологии – *топологическое пространство*, *гомеоморфизм* и *гомотопическая эквивалентность*. Для наших целей будет достаточно иметь общее представление об этих понятиях и геометрическую интуицию, не вдаваясь при этом в глубокие технические подробности.

В общем случае, одинаковыми считаются гомеоморфные топологические пространства. Неформально, можно понимать гомеоморфизм как возможность деформации одного множества в другое, при этом можно как угодно растягивать его, но не рвать, не резать и не склеивать. Некоторые важные примеры, связанные с понятием гомеоморфизма:

- Два отрезка $X = [0,1] \cup [2,3]$ не гомеоморфны трем отрезкам $Y = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$, поскольку у них разное число компонент связности.

- Кривая не гомеоморфна кругу, поскольку у них различные размерности.

- Отрезок не гомеоморфен окружности. Интуитивное обоснование: если вычесть из отрезка любую его точку (кроме концов), то получившееся множество перестанет быть связным. При выкидывании же любой точки из окружности, она, очевидно, останется связным множеством.

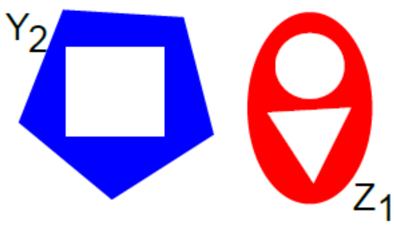


Рис. 3: Еще один пример не гомеоморфных пространств из [1]

- $Y_2 \ncong Z_1$. Неформально, у $Y_2$ одна дырка, а у $Z_1$ их две. Подсчет числа дырок топологического пространства будет формализован позже.

Эти примеры дают нам несколько инвариантов гомеоморфизма.

Теперь перейдем к более слабому понятию гомотопической эквивалентности топологических пространств. Для начала докажем несколько простых утверждений.

Утверждение 1. Гомотопность является отношением эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из $X$ в $Y$.

*Доказательство.* Рефлексивность: $f \sim f$. В качестве гомотопии можно взять $F(x,t) = f(x)$, она удовлетворяет всем требованиям;

Симметричность: $f \sim g \implies g \sim f$. Если $F(x,t)$ – гомотопия из $f$ в $g$, то отображение $G(x,t) = F(x, 1-t)$ будет гомотопией из $g$ в $f$, поскольку оно непрерывно и $G(x,0) = g(x)$ и $G(x,1) = f(x)$;

Транзитивность: $f \sim g, g \sim h \implies f \sim h$. Пусть $F$ – гомотопия между $f$ и $g$, и $G$ – гомотопия между $g$ и $h$. Рассмотрим отображение

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ G(x,2t-1), & t \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}.$$

Видно, что $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$. Во всех точках $t \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ $H$ непрерывно в силу непрерывности $F$ и $G$. В точке $t = \frac{1}{2}$ при фиксированном $x$ имеем $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-} H(x,t) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-} F(x,2t) = F(x,1) = H(x,\frac{1}{2}) = g(x) = G(x,0) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+} G(x,2t-1) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+} H(x,t)$, также из непрерывности $F$ и $G \implies H$ непрерывно $\implies f \sim h$. $\square$

Утверждение 2. Пусть $f, g : X \to Y$ гомотопны и $h : Y \to Z$, $k : Z \to X$ – непрерывные отображения. Тогда $h \circ f \sim h \circ g$ и $f \circ k \sim g \circ k$.

*Доказательство.* Если $F(x,t)$ – гомотопия между $f$ и $g$, то отображения $h(F(x,t))$ и $F(k(x),t)$ будут гомотопиями между $h \circ f$ и $h \circ g$ и между $f \circ k$ и $g \circ k$ соответственно. $\square$

Утверждение 3. Гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве всех топологических пространств.

*Доказательство.* Рефлексивность $X \simeq X$ очевидна: отображения $h = k = \mathrm{id}_X$ удовлетворяют определению;

Симметричность: $X \simeq Y \implies Y \simeq X$. Если $h : X \to Y$ и $k : Y \to X$ – отображения, удовлетворяющие определению гомотопической эквивалентности $X \simeq Y$, то $h' = k$ и $k' = h$ будут таковыми для $Y \simeq X$;

Транзитивность: пусть $X \simeq Y$ (за счет отображений $h$ и $k$) и $Y \simeq Z$ (за счет $h'$ и $k'$). Тогда отображения $h'' = h' \circ h$ и $k'' = k \circ k'$ удовлетворяют определению гомотопической эквивалентности $X \simeq Z$. В самом деле, они непрерывны, как композиции непрерывных, и $h'' \circ k'' = h' \circ \underbrace{h \circ k}_{\sim \mathrm{id}_Y} \circ k' \sim \{\text{по утв. 2}\} \sim h' \circ k' \sim \mathrm{id}_Z$. Гомотопность $k'' \circ h'' \sim \mathrm{id}_X$ вытекает из тех же соображений. $\square$

Неформально, можно понимать гомотопическую эквивалентность как гомеоморфизм с возможностью уточнения/утолщения топологического пространства. Таким образом, размерность пространства не будет инвариантом гомотопической эквивалентности, как это было для гомеоморфизма.

Частный случай гомотопической эквивалентности – стягиваемость. Приведем несколько примеров из [1]: выпуклые множества стягиваемы, окружность не стягиваема. Связность – необходимое условие для стягиваемости.

Утверждение 4. Графы-деревья стягиваемы.

*Доказательство.* Докажем индукцией по глубине дерева $n$ (максимальное расстояние от корня до листа). При $n = 0$ наш граф уже точка. При $n = 1$ имеем граф-звезду. Стягивая каждое ребро по-отдельности к корню дерева, получим точку.

Далее, пусть утверждение доказано для всех $n \le k$, докажем для $n = k+1$. Заметим, что все поддеревья с корнями в вершинах, смежных с корнем исходного дерева, имеют глубину, как минимум на единицу меньшую $n \implies$ применимо предположение индукции. Стягивая все поддеревья исходного дерева, попадаем в случай $n = 1$. $\square$

Теперь перейдем к симплициальным комплексам. Именно с этими объектами мы будем производить все вычисления. Для начала отметим, что симплициальный комплекс размерности $\le 1$ – это простой граф. Таким образом, можно понимать симплициальный комплекс как многомерное обобщение графа.

Графы удобно представлять себе в виде картинок. Точно так же можно сопоставить абстрактному симплициальному комплексу топологическое пространство. Это пространство (*геометрическая реализация* симплициального комплекса $|K|$) определяется аналогично геометрической реализации графа: симплекс на двух вершинах представляется в виде отрезка, на трёх – в виде треугольника, на четырёх – в виде тетраэдра и т.д. $n$-мерному симплексу будет соответствовать $n$-мерный тетраэдр (геометрический симплекс).

Утверждение 5. Пространство $|K|$ компактно.

*Доказательство.* Вспомним, что $|K| = \bigcup\limits_{I \in K} \Delta_I$. Ограниченность очевидна: каждое из объединяемых множеств $\Delta_I$ есть выпуклая оболочка конечного набора точек – ограниченное множество. Также понятно, что для всякого симплекса $I \in K$ множество $\{e_i \mid i \in I\}$ содержит все свои предельные точки, т.е. замкнуто. Как известно, выпуклая оболочка замкнутого множества замкнута, и объединение замкнутых множеств также замкнуто. Таким образом, $|K|$ ограничено и замкнуто, т.е. является компактом. $\square$

Заметим, что симплициальный комплекс однозначно определяется своими максимальными симплексами, поскольку все остальные будут подмножествами максимальных. С точки зрения вычислительной сложности, такой подход, разумеется, более оптимален, чем хранение всех симплексов.

Приведем некоторые примеры симплициальных комплексов из [1]:

- Полный симплициальный комплекс на множестве вершин $M$ $\Delta_M$ (содержит все подмножества $M$) называется *симплексом* на множестве $M$. Геометрически, это действительно симплекс размерности $|M| - 1$;
- Комплекс $\partial\Delta_M = 2^M \backslash \{M\}$ называется *границей симплекса* на множестве $M$. Стандартная геометрическая реализация $\partial\Delta_M$ действительно будет содержать все гиперграни $(|M|-1)$-мерного симплекса, т.е. являться его границей;
- Пусть $K$ – некоторый симплициальный комплекс. Звезду симплекса $I$ $\mathrm{star}_K I$ можно понимать как его «окрестность», т.е. он сам + прилегающие к нему симплексы;
- А линк симплекса $I$ $\mathrm{link}_K I$ можно представлять как «горизонт», который виден из него.

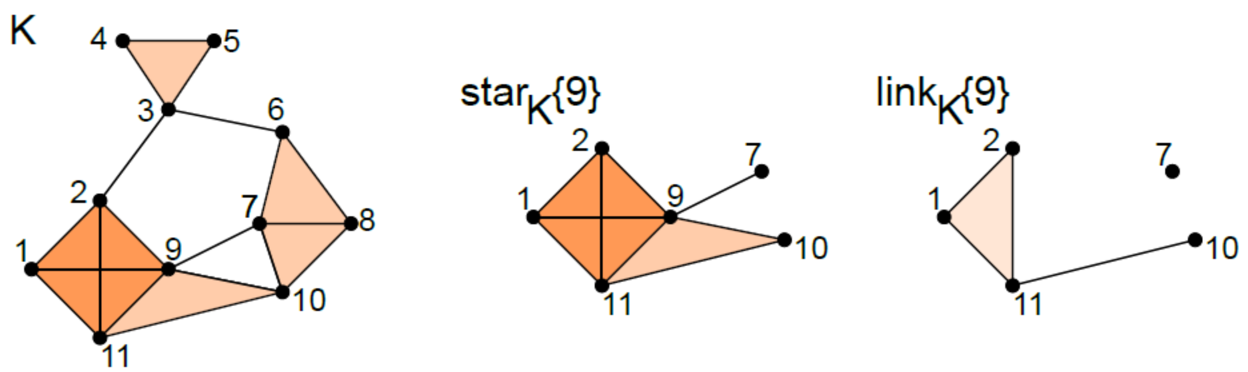


Рис. 4: Пример симплициального комплекса, звезды и линка из [1]

Далее мы будем рассматривать *гомологии* симплициальных комплексов. Неформально говоря, речь идет о подсчете числа «дырок» определенной размерности в комплексе. Эти числа, называемые *числами Бетти*, являются топологическим (и гомотопическим) инвариантом (т.е. одинаковы для гомеоморфных и гомотопически эквивалентных пространств), что играет для нас важную роль.

Для начала определим 1-мерные гомологии и, соотвественно, первое число Бетти. Интуитивно, одномерная дырка – это пустая область в комплексе, окруженная ребрами, на которую при этом не натянут симплекс большей размерности. Формализуем это при помощи подсчета циклов в графе.

Рассмотрим симплициальный комплекс $K$. Будем работать с его одномерным остовом $\Gamma = K^{(1)}$, т.е. уберём все треугольники и симплексы бóльших размерностей. Определим векторное пространство $C_1(K;\mathbb{Z}_2)$ над полем $\mathbb{Z}_2$ как линейную оболочку $\langle e_1,\ldots,e_s\rangle$, где $\{e_i\}$ – это ребра графа $\Gamma$. Получили пространство всевозможных подмножеств множества ребер нашего графа. Оно называется *пространством одномерных цепей* комплекса $K$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Его элементы будут иметь вид

$$\sigma = \varepsilon_{e_1}e_1 + \ldots + \varepsilon_{e_s}e_s, \quad \varepsilon_{e_i} \in \mathbb{Z}_2.$$

Теперь в пространстве $C_1(K;\mathbb{Z}_2)$ выделим подпространство $Z_1(K;\mathbb{Z}_2)$ *одномерных алгебраических циклов*. Назовем цепь $\sigma$ *циклом*, если для любой вершины нашего графа количество смежных с ней ребер из подмножества, задаваемого $\sigma$, четно. Формально это условие можно записать так:

$$\forall v \in V(\Gamma) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ v\in e_i}}^{s} \varepsilon_{e_i} = 0 \pmod 2.$$

Получили однородную систему линейных уравнений на коэффициенты $\sigma$. Как известно из курса линейной алгебры, множество решений ОСЛУ задает линейное подпространство. Размерность этого подпространства $\dim Z_1(K;\mathbb{Z}_2)$ называется *первым числом Бетти графа* $\Gamma$ и обозначается как $\beta_1(\Gamma)$.

Отметим, что согласно определению цикла, данному выше, пустой цикл $\sigma = 0$ и объединения непересекающихся циклов также будут являться циклами, что не совсем соотвествует стандартному определению (поэтому наши циклы мы называем алгебраическими). Однако, нам это не мешает, поскольку мы интересуемся только базисными циклами и размерностями соответствующих подпространств.

Усложним задачу: перейдем от одномерного остова $K^{(1)}$ к самому симплициальному комплексу $K$. Тогда возникает необходимость исключать из рассмотрения циклы, содержащиеся в симплексах большей размерности. Для этого определим *пространство одномерных границ* симплициального комплекса $K$:

$$B_1(K;\mathbb{Z}_2) := \langle \partial I \mid I \in K,\ \dim I = 2\rangle.$$

Поскольку граница любого двумерного симплекса (треугольника) является циклом, то $B_1(K;\mathbb{Z}_2)$ будет подпространством в $Z_1(K;\mathbb{Z}_2)$. Значит, можно рассмотреть фактор-пространство

$$H_1(K;\mathbb{Z}_2) = Z_1(K;\mathbb{Z}_2)/B_1(K;\mathbb{Z}_2),$$

которое и будет называться *пространством одномерных гомологий* симплициального комплекса $K$. Размерность этого пространства $\dim H_1(K;\mathbb{Z}_2) = \dim Z_1(K;\mathbb{Z}_2) - \dim B_1(K;\mathbb{Z}_2)$ есть *первое число Бетти* симплициального комплекса $K$ ($\beta_1(K)$).

Приведем пару примеров:

- Одномерные гомологии симплициального комплекса, изображенного на Рис. 4, порождаются циклами (2-3-6-7-9-2) и (9-7-10-9), соотвественно, $\beta_1(K) = 2$;
- У границы тетраэдра $\partial\Delta_3$ все циклы покрыты треугольниками, поэтому $H_1(\partial\Delta_3;\mathbb{Z}_2) = 0$ и $\beta_1(\partial\Delta_3) = 0$.

Странно было бы ограничиваться рассмотрением только одномерных дырок. Понятия пространства цепей, циклов и границ можно обобщить на произвольную размерность ([1], с. 24-28). Соотвественно, любому симплициальному комплексу можно поставить в соответствие последовательность чисел Бетти $\{\beta_j(K)\}_{j=0}^{\infty}$. *$j$-е число Бетти* комплекса $K$ – это количество $j$-мерных дырок в нём. При этом $\beta_0(K)$ – это число компонент связности $K$.

Заметим, что для всякого симплициального комплекса $K$ последовательность чисел Бетти рано или поздно стабилизируется к нулю. Это объясняется простым наблюдением: в симплициальном комплексе не может быть дырок, размерность которых больше $\dim K$.

Далее естественным образом возникает ситуация, когда симплициальный комплекс не статичен, а изменяется с течением времени. В таком случае интересно изучать так называемые *устойчивые гомологии*, т.е. дырки, которые «долго живут» при изменении нашего комплекса. Однако в данном тексте более подробно мы их рассматривать не будем.

## 3.2 Обзор математической музыкальной теории

*Тоннец* (англ. Tonnetz), впервые описанный Леонардом Эйлером в 1739 году, – центральный объект нашего рассмотрения. Заметим, что классический треугольный тоннец является частным случаем обобщенного тоннеца ($Tonn^{12,3}(3,4,5)$). Наше определение эквивалентно определению через перестановки, поскольку мы определяли минорные и мажорные трезвучия в терминах нотного круга, стало быть, соответствующие наборы интервалов (3-4-5, 4-3-5) заданы с точностью до циклического сдвига. Поэтому, фиксируя одно из расстояний (например, 5), легко убедиться, что пробегаются все возможные перестановки.

Треугольный тоннец можно представлять себе как плоскость, разбитую на треугольники, где их вершинами являются ноты. При этом, если треугольник «смотрит» вверх (согласно Рис. 5), то соответствующее трезвучие является минорным, иначе – мажорным.

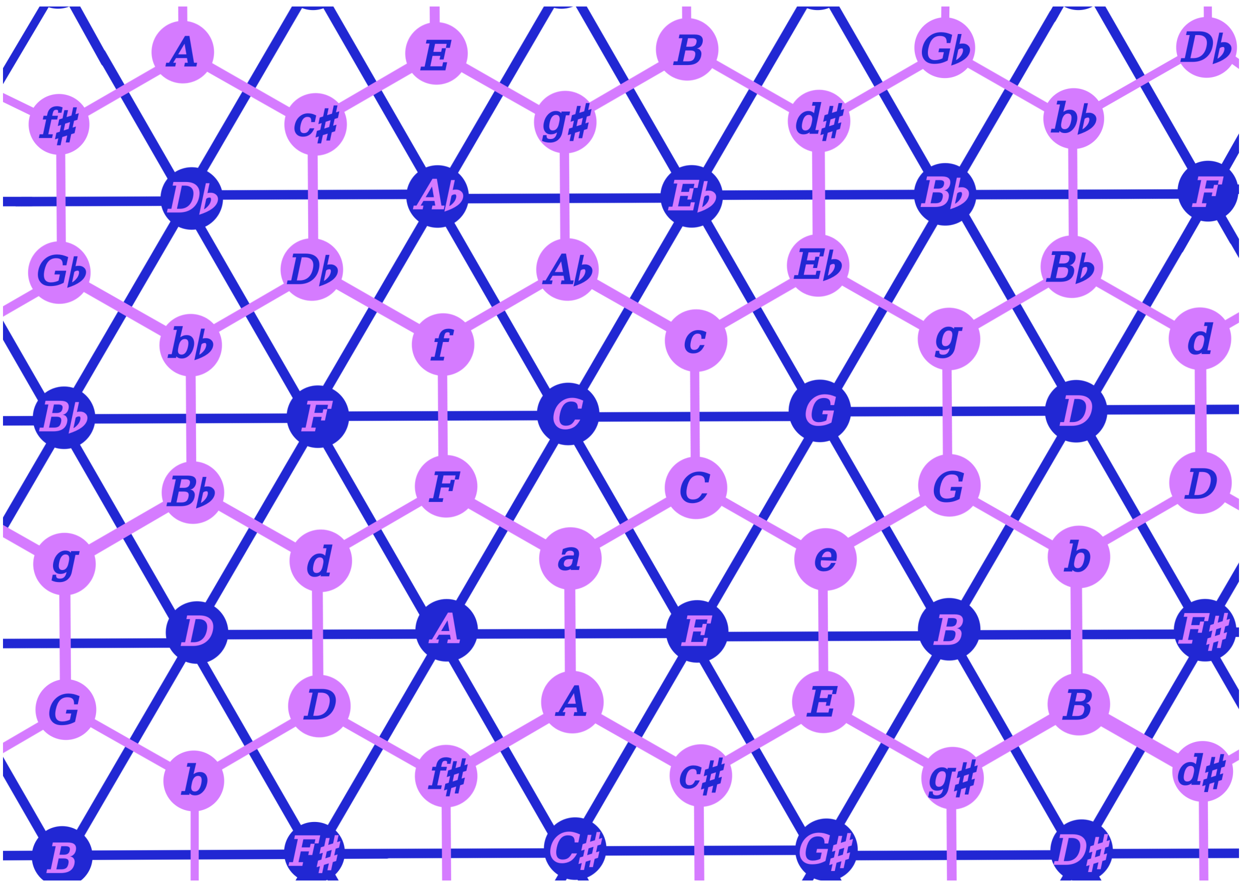


Рис. 5: Две разновидности тоннеца

Это свойство вытекает из определения трезвучия и построения тоннеца. В самом деле, если зафиксировать произвольную ноту $X$, то ноты, смежные с ней будут определяться однозначно (Рис. 6).

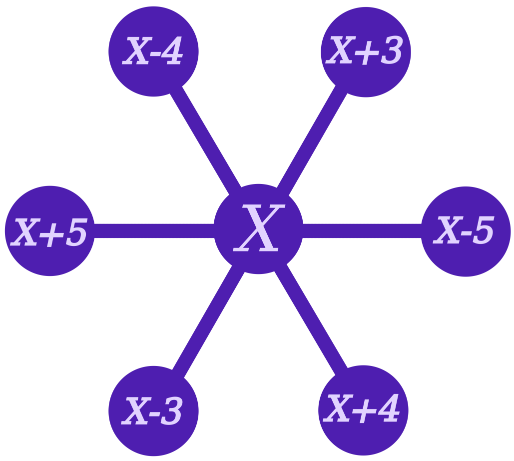


Рис. 6: Вычисление смежных с данной вершин в треугольном тоннеце

Подробнее этот момент освещен в отчете моей коллеги, Лизы Шатской.

Другая разновидность тоннеца – *шестиугольный тоннец*. Вершинами здесь являются трезвучия. Две вершины соединены ребром, если соответствующие трезвучия различаются ровно в одной ноте. Трезвучия, образующие шестиугольник, имеют ровно один общий звук.

Как видно из Рис. 5, между треугольным и шестиугольным тоннецами есть взаимно однозначное соответствие.

Теперь докажем одно из классических утверждений математической теории музыки. Оказывается, что классический треугольный тоннец – это ни что иное, как триангуляция двумерного тора.

Утверждение 6. $|Tonn^{12,3}(3,4,5)| \cong T^2$.

*Доказательство.* Интуитивно, идея простая. Поскольку мы работаем в $\mathbb{Z}_{12}$, то при изображении нашего тоннеца на плоскости (как на Рис. 5), вершины будут повторяться. Таким образом, останется один уникальный фрагмент, бесконечно много раз повторяющийся во все стороны:

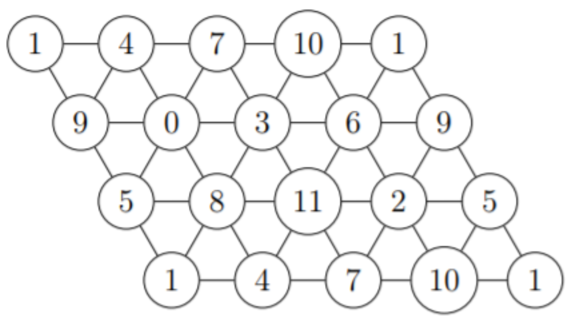


Рис. 7: Уникальная часть тоннеца $Tonn^{12,3}(3,4,5)$, приведенная в [2]

Здесь важно заметить, что вершины, обозначенные одинаковыми числами, совпадают. Поэтому можно «свернуть» этот параллелограмм сперва в цилиндр, склеивая верхние и нижние вершины, а затем в тор, склеивая боковые вершины. При этом, важно обратить внимание на то, что такие операции не нарушают гомеоморфность, поскольку сливаем мы именно изначально совпадающие вершины.

Формализуем эту идею. Без склеивания наш тоннец представляет из себя просто плоскость $\mathbb{R}^2$. Склеивание вершин можно реализовать с помощью факторизации. Рассмотрим решетку $A \subset \mathbb{R}^2$, состоящую из всех вершин с, например, номером 0. Не ограничивая общности, считаем, что все эти вершины имеют целочисленные координаты. Тогда, как известно из курса алгебры, имеет место изоморфизм $A \cong \mathbb{Z}^2$. $A$, очевидно, образует нормальную подгруппу в $\mathbb{R}^2$, стало быть, можно рассмотреть факторгруппу $\mathbb{R}^2/A$. Таким образом,

$$|Tonn^{12,3}(3,4,5)| \cong \mathbb{R}^2/A \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \cong \{\text{как известно из того же курса алгебры, } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1\} \cong (S^1)^2 = T^2. \quad \square$$

Отметим, что в статье [2] доказан более общий факт. Если для набора натуральных чисел $\{d_i\}_{i=1}^k$, такого что $d_1 + \ldots + d_k = m$ выполнено условие

$$\forall I, J \in 2^{[m]} \sum_{i\in I} d_i = \sum_{j\in J} d_j \implies I = J \tag{1}$$

и $\gcd(d_1, \ldots, d_k) = 1$, то обобщенный тоннец $Tonn^{m,k}(d_1, \ldots, d_k)$ будет триангуляцией $(k-1)$-мерного тора $T^{k-1}$.

Однако не для каждого набора интервалов будет выполняться условие (1). Например, если $d_1 = d_2 = 1$ и $d_3 = s$, то $d_1 + d_3 = s + 1 = d_2 + d_3$, но $\{1,3\} \neq \{2,3\}$. Поэтому, чтобы понять, что из себя представляет $Tonn^{s+2,3}(1,1,s)$, нужно проводить дополнительное исследование. В данном случае, это не очень сложно: заметим, что в зависимости от четности $s$ наш тоннец будет принимать один из следующих видов:

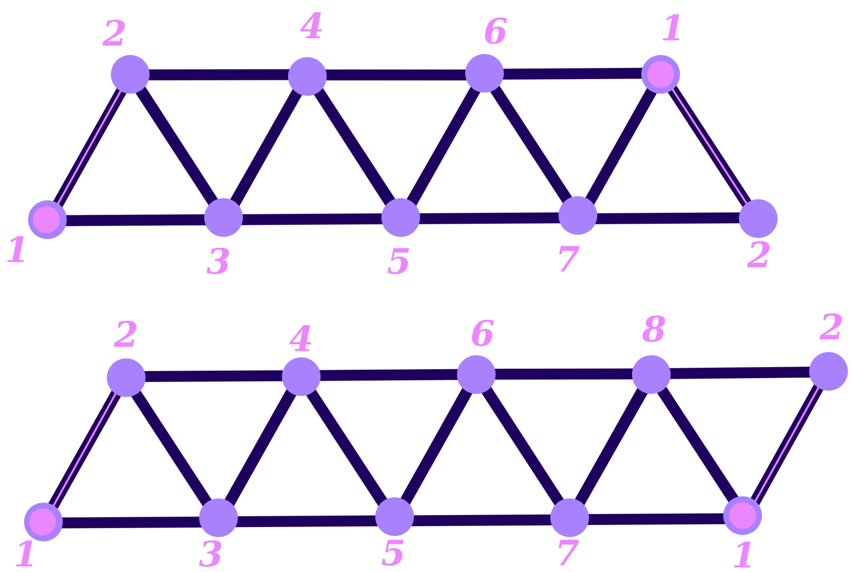


Рис. 8: Две разновидности геометрической реализации тоннеца $Tonn^{s+2,3}(1,1,s)$

И легко видеть, что в случае четного $s$ данный тоннец будет триангуляцией цилиндра без оснований, а в случае нечетного $s$ – триангуляцией *ленты Мёбиуса*.

Теперь перейдем к рассмотрению *тоннеца на септаккордах* $Tonn^{12,4}(2,3,3,4)$. Подробно о построении его геометрической реализации написала в своей работе моя коллега, Лиза Шатская. В частности, она доказала, что симплексы геометрической реализации такого тоннеца не замощают собой все пространство, как это было в случае с классическим треугольным тоннецом.

Заметим, что условие (1) для тоннеца на септаккордах также не выполняется, поэтому сходу сложно сказать, с каким топологическим пространством мы имеем дело. Однако нам под силу вычислить некоторые его топологические характеристики, о чем и пойдет речь в следующем разделе.

# 4 Описание вычислительного эксперимента

Нас будут интересовать числа Бетти тоннеца на септаккордах и его эйлерова характеристика. Здесь, конечно, можно попытаться изобрести велосипед и реализовать все алгоритмы вычисления нужных нам характеристик с нуля, но в данной работе мы воспользуемся специальной библиотекой под названием `simplicial` [4], которая предоставляет довольно удобное API для работы с симплициальными комплексами.

Рассмотрим следующую программу:

```
from simplicial import *
from itertools import permutations

n = 12
intervals = [2, 3, 3, 4]
Tonn = SimplicialComplex()
for i in range(n):
    Tonn.addSimplex(id = i)
for x in range(n):
    for sigma in permutations(intervals):
        basis = [
            x,
            (x + sigma[0]) % n,
            (x + sigma[0] + sigma[1]) % n,
            (x + sigma[0] + sigma[1] + sigma[2]) % n
        ]
        try:
            Tonn.addSimplexWithBasis(bs = basis)
            print(basis)
        except Exception:
            pass

print('Euler␣characteristic␣=␣{}'.format(Tonn.eulerCharacteristic()))
print('Betti␣numbers:␣{}'.format(Tonn.bettiNumbers()))
```

В ней мы конструируем тоннец $Tonn^{12,4}(2,3,3,4)$ по его определению через перестановки, используя методы `SimplicialComplex` для создания пустого комплекса, `addSimplex(id = i)` для добавления в комплекс вершины с индексом $i$ и `addSimplexWithBasis` для добавления симплекса на заданном наборе вершин, а также функцию `permutations`, которая генерирует все перестановки элементов заданного списка. Также в программе может возникнуть ситуация, когда очередной добавляемый симплекс уже присутствует в нашем комплексе. Она обрабатывается в блоке `try-except`.

Результат работы данной программы – список всех симплексов (септаккордов) в нашем тоннеце:

[0, 2, 5, 8], [0, 2, 5, 9], [0, 2, 6, 9], [0, 3, 5, 8], [0, 3, 5, 9], [0, 3, 6, 8], [0, 3, 6, 10], [0, 3, 7, 9], [0, 3, 7, 10], [0, 4, 6, 9], [0, 4, 7, 9], [0, 4, 7, 10],

[1, 3, 6, 9], [1, 3, 6, 10], [1, 3, 7, 10], [1, 4, 6, 9], [1, 4, 6, 10], [1, 4, 7, 9], [1, 4, 7, 11], [1, 4, 8, 10], [1, 4, 8, 11], [1, 5, 7, 10], [1, 5, 8, 10], [1, 5, 8, 11],

[2, 4, 7, 10], [2, 4, 7, 11], [2, 4, 8, 11], [2, 5, 7, 10], [2, 5, 7, 11], [2, 5, 8, 10], [2, 5, 9, 11], [2, 6, 8, 11], [2, 6, 9, 11],

[3, 5, 8, 11], [3, 6, 8, 11], [3, 6, 9, 11], а также искомые топологические характеристики – эйлерова характеристика:

$$\chi(Tonn^{12,4}(2,3,3,4)) = \mathbf{6}$$

и последовательность чисел Бетти $\{\beta_j(Tonn^{12,4}(2,3,3,4))\}_{j=0}^{\infty}$:

$$\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots$$

Таким образом, описанный нами симплициальный комплекс является связным, имеет одну одномерную дырку и целых 6 двумерных.

# 5 Заключение

Итак, в данной работе мы описали самые базовые понятия топологии и математической теории музыки, как-то связали их между собой, воспроизвели некоторые имеющиеся результаты, а также получили свой небольшой результат: попытку описания тоннеца на септаккордах через его определенные топологические характеристики.

В заключение, хотелось бы отметить, что область наших исследований на настоящий момент – непаханое поле, имеются большие перспективы для дальнейших исследований. Есть даже гипотеза, что наш тоннец на септаккордах может помочь в решении одной из главных задач в исследуемой области – *задачи жанровой классификации*.

Анализируя различные композиции, хочется научиться как-то различать музыкальные жанры. Обычно, для анализа используется классический треугольный тоннец. Однако, много композиций построены на септаккордах, поэтому есть вероятность, что используя для анализа септаккордный тоннец, можно получить дополнительную информацию, которая поможет лучше классифицировать музыкальные жанры.

# 6 Список источников


[1] А. А. Айзенберг, Методичка по симплициальным комплексам и гомологиям, 2020

[2] Filip D. Jevtić, Rade T. Živaljević, Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map, 2020 / ссылка (дата обращения: 30.05.2021)

[3] Википедия, Топология / ссылка (дата обращения: 30.05.2021)

[4] Simon Dobson, `simplicial`: Simplicial topology in Python, 2017 / ссылка (дата обращения: 30.05.2021)