

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA**



**Informe de laboratorio 1: Métodos Numéricos**

Integrante: Alexis Quintana  
Curso: Algoritmos Numéricos  
Sección: L-1  
Profesor: Óscar Rojas Díaz

28 de Julio de 2020

# Tabla de contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	1
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
<b>3. Métodos para ecuaciones no lineales</b>	<b>4</b>
3.1. Resultados . . . . .	6
3.2. Análisis de resultados . . . . .	9
<b>4. Método de Newton para varias variables</b>	<b>10</b>
4.1. Resultados . . . . .	10
4.2. Análisis de resultados . . . . .	11
<b>5. Métodos de solución para sistemas de ecuaciones</b>	<b>13</b>
5.1. Resultados . . . . .	14
5.2. Análisis de resultados . . . . .	14
<b>6. Conclusiones</b>	<b>16</b>
6.1. Funciones no lineales . . . . .	16
6.2. Newton para varias variables . . . . .	16
6.3. Sistemas de ecuaciones . . . . .	16

## Índice de figuras

1.	Gráfica de la función no lineal de $f_1(x)$ . . . . .	5
2.	Gráfica de la función no lineal de $f_2(x)$ . . . . .	5
3.	Gráfica de la función no lineal de $f_3(x)$ . . . . .	6
4.	Gráfica de la función no lineal de $f_1(x)$ . . . . .	7
5.	Gráfica de la función no lineal de $f_2(x)$ . . . . .	7
6.	Gráfica de la función no lineal de $f_3(x)$ . . . . .	8
7.	Comportamiento de error Newton multivariable . . . . .	11

# Índice de cuadros

1.	Resultados $f_1(x)$ . . . . .	8
2.	Resultados $f_2(x)$ . . . . .	8
3.	Resultados $f_3(x)$ . . . . .	9
4.	Resultados Newton multivariable. . . . .	10
5.	Resultados de la implementación de métodos iterativos y directos. . . . .	14

# 1. Introducción

Las matemáticas son una gran herramienta para analizar situaciones del mundo real, pero a menudo en dicho análisis es posible encontrar problemas, que deben ser resueltos por un procedimiento o métodos numérico.

No todos los métodos obtienen resultados en igual tiempo, así como también, la cantidad de pasos, y la precisión de las soluciones entregadas varían, ya que existen diferencias en como proceden para llegar a un resultado. Es por esto que, se hace necesario estudiar los distintos métodos numéricos, con el fin de identificar, el método más adecuado para cierto problema. Entendiendo como más adecuado o mejor, a aquel procedimiento, que en base a su capacidad de resolver un problema, tiene un mayor estándar de eficiencia, y eficacia.

Por ello el presente informe tendrá como principal objetivo el estudio, de algunos métodos numéricos sobre funciones no lineales y sistemas de ecuaciones, para poder compararlos en base a su eficiencia y eficacia.

En el capítulo 3 se presentara el estudio de alguno de los métodos, que dan soluciones a ecuaciones no lineales. Para el capítulo 4 se presentara el estudio del método de Newton para varias variables. Por último el capítulo 5 presentara el estudio de algunos métodos para sistemas de ecuaciones, viendo métodos tanto iterativos, como métodos directos.

## 1.1. Objetivos

Estudiar distintos métodos numéricos, los cuales son utilizados para resolver distintos tipos de problemas matemáticos, como lo son las ecuaciones no lineales, y sistemas de ecuaciones.

## 2. Marco teórico

- **Ecuación no lineal:** Corresponden a ecuaciones en las que alguna de sus incógnitas que forman parte de la ecuación no son de primer grado, en este tipo de ecuaciones es común encontrar polinomios de grado mayor a 1, raíces, logaritmos, exponenciales, entre otros.
- **Método de Bisección:** Método iterativo que busca la raíz de una ecuación dividiendo el intervalo de estudio de la ecuación en dos, y seleccionando como nuevo intervalo, al subintervalo que contenga la raíz. Suponiendo que se tiene un intervalo  $[a, b]$  los subintervalos que usara para la nueva iteración es  $[a, m]$  o  $[m, b]$ , en donde  $m$  es de la forma:  $m = a + \frac{b-a}{2}$
- **Método de punto fijo:** En este método, lo que se busca es volver a escribir la ecuación  $f(x) = 0$  en la forma  $x = g(x)$ , logrando así escribir  $f(x) = x - g(x)$ , requiriendo así solo un punto inicial, sus iteraciones son de la siguiente forma:  $x_{i+1} = g(x_i)$
- **Método de la secante:** Simplificación del método de Newton-Raphson, en donde en lugar de utilizar la derivada de la función, se aproxima a la solución mediante recta secante a la curva, cuya es aproximadamente iguala la derivada en el punto inicial. Para este método se requiere de dos puntos de la función para generar la recta. sus iteraciones se producen con el siguiente calculo:  $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x)$
- **Método regula falsi:** Método que combina los métodos de la bisección con secante, basado en trazar una recta que une los extremos de un intervalo dado, considerando que la solución esta cerca de uno de los extremos. requiere de dos puntos iniciales ( $[a, b]$ ), y en el calculo de un punto interior ( $c$ ) de dicho intervalo, mediante la aplicación de la siguiente formula:  $c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$
- **Métodos iterativos:** Métodos que tratan de resolver progresivamente, y mediante aproximaciones sucesivas a la solución.
- **Métodos directos:** Los métodos que encontramos aquí son factorizaciones de  $A$ , con las cuales a través de sustituciones podemos obtener la solución. Se ocupa para resolver

sistemas de ecuaciones  $Ax = b$ , en donde siendo  $A$ ,  $x$ ,  $b$  matrices.

### 3. Métodos para ecuaciones no lineales

Para este capítulo se trabajaran los siguientes métodos de soluciones para ecuaciones no lineales:

- método de bisección.
- método de punto fijo.
- método de secante.
- método de regula falsi.

Para ello se poseen las siguientes funciones no lineales, las cuales serán analizadas con los métodos ya mencionados.

$$f_1(x) = x - 2^{-x} \tag{1}$$

$$f_2(x) = e^{-x} - x^2 + 3x - 2 \tag{2}$$

$$f_3(x) = x^3 - 7x^2 + 14\text{sen}(2\pi x) - 6 \tag{3}$$

Para realizar este análisis, se considero una tolerancia de error de  $10^{10}$ , en donde los algoritmos detendrán su funcionamiento, una vez que su resultando tenga un valor menor o igual a la tolerancia ya mencionada.

Bajo el contexto de que la raíz se debe encontrar en el intervalo inicial seleccionado, se escogen intervalos según los respectivos gráficos que se muestran a continuación.



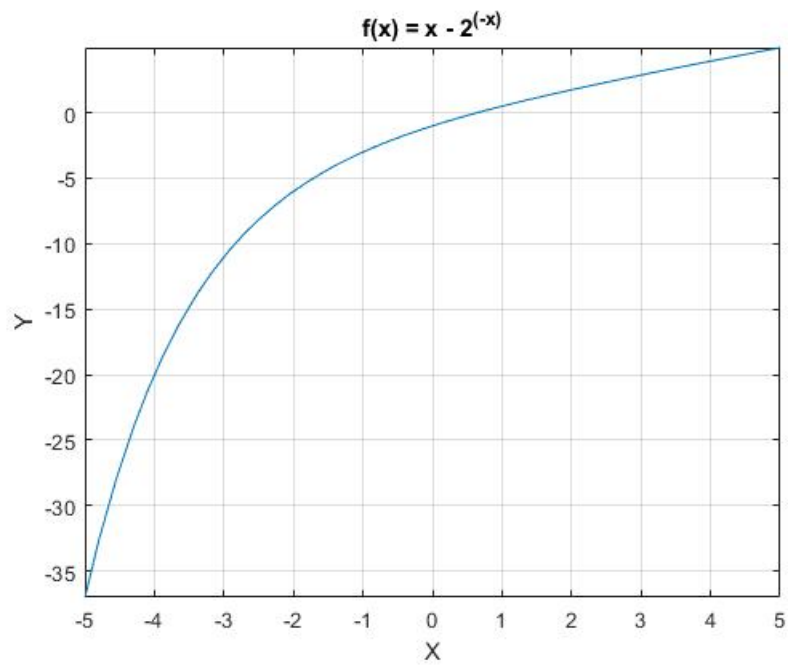


Figura 1: Gráfica de la función no lineal de  $f_1(x)$

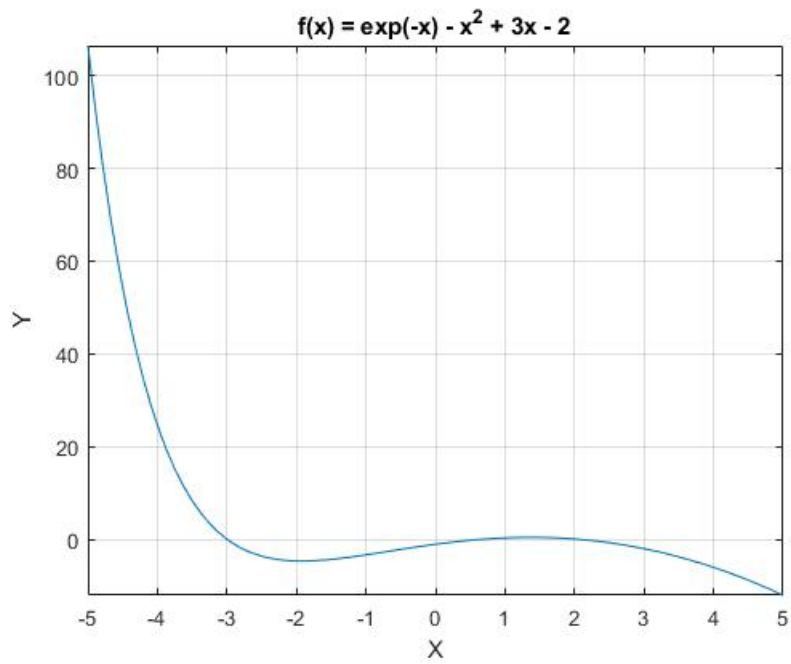


Figura 2: Gráfica de la función no lineal de  $f_2(x)$

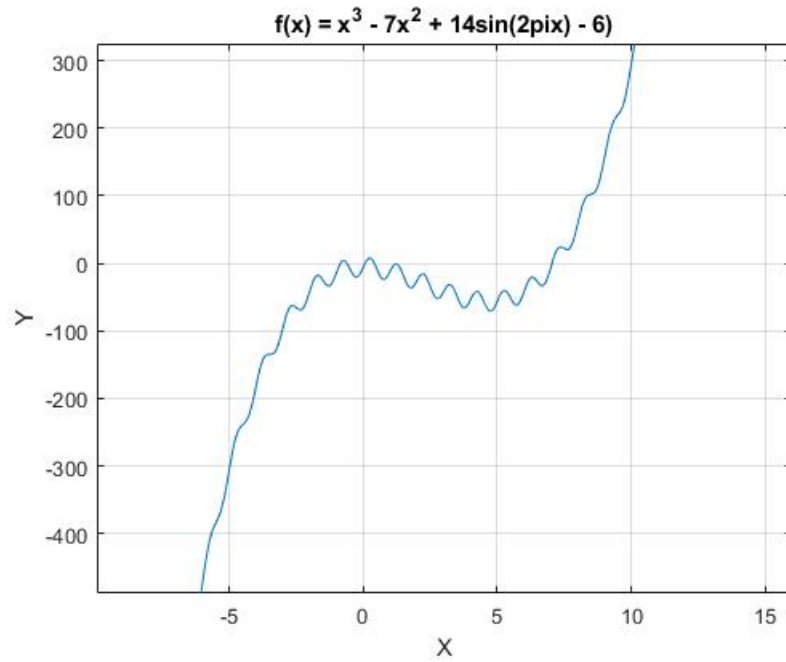


Figura 3: Gráfica de la función no lineal de  $f_3(x)$

Para el primer caso de  $f_1(x)$  (figura 1), se considera un intervalo de  $[-1, 2]$ , para el siguiente caso correspondiente a la función  $f_2(x)$  (figura 2), se considera un intervalo de  $[0, 1]$ , por último para la función  $f_3(x)$  (figura 3), se considero un intervalo de  $[-10, 10]$

### 3.1. Resultados

A continuación se presenta la convergencia de cada función, a la aproximación de la raíz con cada uno de los métodos planteados.

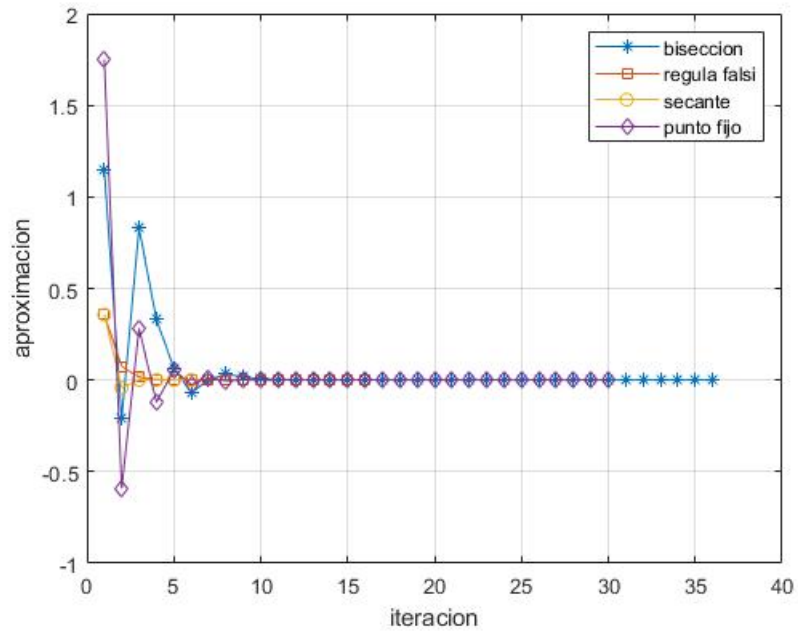


Figura 4: Gráfica de la función no lineal de  $f_1(x)$

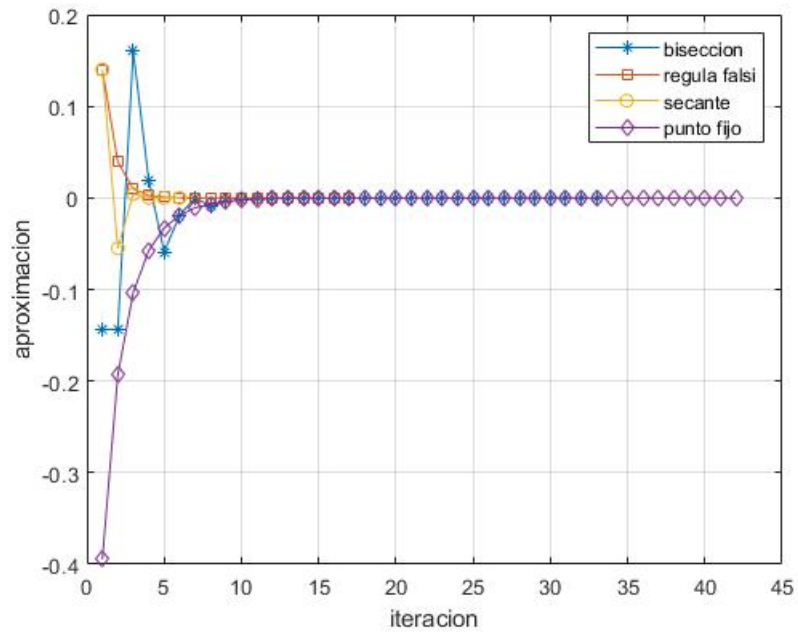


Figura 5: Gráfica de la función no lineal de  $f_2(x)$

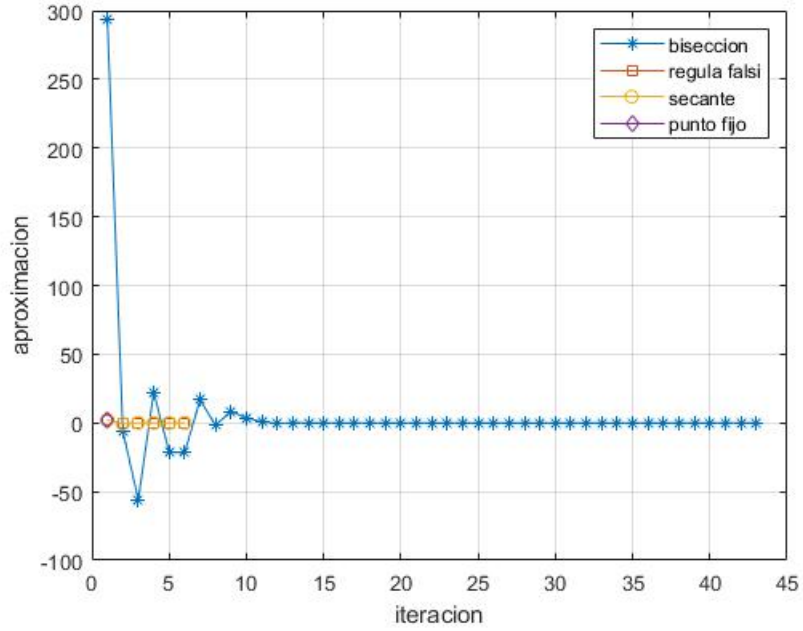


Figura 6: Gráfica de la función no lineal de  $f_3(x)$

Las siguientes tablas muestran el tiempo de ejecución de cada método, el error, y la cantidad de iteraciones a las que llegaron para cada función  $f_i(x)$ .

Método	Error	tiempo (s)	iteración
Bisección	2.1750e-11	0.0027	36
Regula falsi	2.3973e-11	0.0031	16
Secante	0	0.0029	6
Punto fijo	8.5077e-11	0.2463	30

Cuadro 1: Resultados  $f_1(x)$

Método	Error	tiempo (s)	iteración
Bisección	1.4136e-11	0.0022	33
Regula falsi	2.9881e-11	0.0025	17
Secante	9.4955e-12	0.0016	6
Punto fijo	8.8256e-11	0.3373	42

Cuadro 2: Resultados  $f_2(x)$

Método	Error	tiempo (s)	iteración
Bisección	5.9212e-11	0.0023	43
Regula falsi	7.2692e-11	0.0022	6
Secante	2.3093e-14	0.0015	6
Punto fijo	—	—	—

Cuadro 3: Resultados  $f_3(x)$

### 3.2. Análisis de resultados

Para cada función, se utiliza un gráfico de error en el que se muestra la convergencia del error por parte de cada uno de los métodos implementados. Respecto al error experimental obtenido en cada una de las pruebas, es posible apreciar, que el método que obtuvo mejor resultado ya sea en tiempo de ejecución, o error obtenido, es el método de la secante, que al ser aplicado en las tres funciones, se obtuvieron valores menores a comparación de lo otros métodos.

Es importante señalar la no obtención de resultados aplicando el método de punto fijo a la función  $f_3(x)$ , el cual es causado por las condiciones de termino de iteración, presentes en la implementación del método.

se considera como metodo con los mejores resultados a la secante

## 4. Método de Newton para varias variables

Para el estudio de este método, se presenta el siguiente sistema de ecuaciones, con funciones multivariantes.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ X_{(0)} = (0, 0, 0)^T \end{cases} \quad (4)$$

### 4.1. Resultados

Para obtener los resultados se iteró 20 veces el algoritmo, y se considero una tolerancia de error de  $10^{-10}$ , ya que, es un número lo suficientemente pequeño para el calculo de resultados.

iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	5.0	37.0	-39.0
2	4.350877193	18.49122807	-19.84210526
3	5.363824178	9.255451786	-11.61927596
4	5.696055596	4.665328357	-7.361383954
5	5.882822663	2.427279455	-5.310102118
6	5.966094768	1.412647461	-4.37874223
7	5.995188111	1.058565935	-4.053754046
8	5.999871862	1.001559577	-4.001431439
9	5.999999904	1.000001166	-4.000001071
10	6.0	1.0	-4.0
11	6.0	1.0	-4.0

Cuadro 4: Resultados Newton multivariable.

Al mirar el cuadro 4 es posible observar como la variación entre iteraciones, va disminuyendo a medida que se acerca mas al resultado del sistema de ecuaciones.

Considerando el cálculo del error mediante la formula del error relativo  $e_r(n) = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|}$ , y al aplicarlo a este método, es posible obtener el error para cada iteración de este algoritmo, el cual se ve reflejado en la siguiente gráfica.

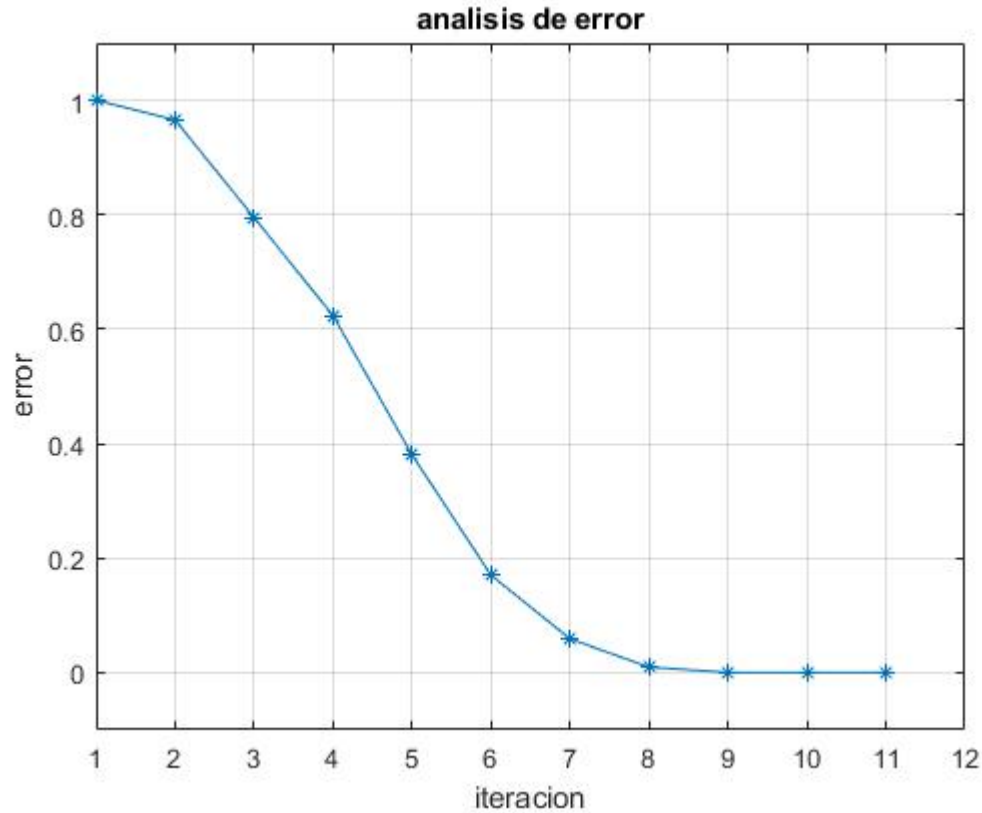


Figura 7: Comportamiento de error Newton multivariable

## 4.2. Análisis de resultados

Al considerar la tolerancia ya propuesta, el algoritmo termina en su onceava iteración con un error de  $1.089\text{e-}13$ . Los valores obtenidos por el método implementados, pueden ser verificados al remplazar los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , por 6, 1, y -4 respectivamente, es posible llegar a la solución, como se muestra a continuación.

$$F(6, 1, -4) = \begin{cases} 6^2 + 1 - 37 = 36 + 1 - 37 = 37 - 37 = 0 \\ 6 - 1^2 - 5 = 6 - 1 - 5 = 6 - 6 = 0 \\ 6 + 1 - 4 - 3 = 7 - 7 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Es importante señalar que al momento de llegar a la onceava iteración, el error obtenido, fue de 1.089e-13. Una vez obtenida La solución para el sistema, se procedió con el calculo del tiempo que requirió este método para llegar a una solución de 2.054903 segundos, donde este tiempo se debe al trabajo de matrices, y el tiempo que este conlleva.

Es importante señalar el comportamiento que tiene el error, observado en la gráfica de la figura 7, ya que se puede apreciar que se tiene una mayor variación en las primeras iteraciones, esto es apreciable desde la primera hasta la sexta iteración, que es donde empieza a disminuir la diferencia de error, entre las repeticiones.



## 5. Métodos de solución para sistemas de ecuaciones

En este capítulo se estudian los métodos que dan solución a sistemas de ecuaciones, los cuales son separados en dos grupos métodos iterativos, y métodos directos. a continuación se presentan los métodos de estudio.

- Iterativos:
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Directos:
  - Factorización LU
  - QR
  - Cholesky
  - LSQR

Todos los métodos son aplicados para resolver el sistema  $Ax = b$ , en tres experimentos, donde:

1.  $A_1 \in \mathbb{R}^{(289,289)}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^{(289,1)}$
2.  $A_2 \in \mathbb{R}^{(1089,1089)}$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^{(1089,1)}$
3.  $A_3 \in \mathbb{R}^{(4225,4225)}$ ,  $b_3 \in \mathbb{R}^{(4225,1)}$

Para efecto de este estudio, las matrices de estudio cumplen todas las condiciones requeridos por los distintos métodos entre las cuales se pueden encontrar.

- La matriz A debe ser del tipo cuadrada, en caso contrario, solo los métodos QR y LSQR podrían ser utilizados de manera directa, con el fin de aplicar los otros métodos seria necesario aplicar una ortogonalización, que escapa de los estudios de este informe.
- La matriz A debe ser Hermitiana positiva: Condición necesaria para el método de Cholesky, de manera que sea posible encontrar un  $L$ , tal que  $A = LL^t$

- La matriz es diagonal estrictamente dominante: garantiza que los métodos Gauss-Seidel y Gauss-Jacobi convergen a la solución.

Para el desarrollo de esta sección, se considero una tolerancia de error de  $10^8$ , ya que, por temas de capacidad de computo, uno de los metodos solo llegaba a ese error sin poder disminuirlo mas.

## 5.1. Resultados

en la siguiente tabla se muestra el tiempo de ejecución, y el error obtenido por los distintos métodos, al ser utilizados para analizar los distintos sistemas de ecuaciones

		<b>289x289</b>	<b>1089x1089</b>	<b>4225x4225</b>
<b>LU</b>	<b>Tiempo [s]</b>	0.0170	1.0422	132.0164
	<b>error</b>	4.8198e-10	1.3856e-09	4.2639e-09
<b>Cholesky</b>	<b>tiempo [s]</b>	0.0089	0.4821	107.5136
	<b>error</b>	8.2108e-10	2.7548e-09	8.5470e-09
<b>QR</b>	<b>tiempo [s]</b>	0.0382	1.3651	178.9024
	<b>error</b>	1.9095e-09	5.3766e-09	1.4196e-08
<b>LSQR</b>	<b>tiempo [s]</b>	0.0090	0.4258	70.0195
	<b>error</b>	6.0281e-09	9.9862e-09	2.9926e-08
<b>Gauss_Seidel</b>	<b>tiempo [s]</b>	0.1014	10.0271	1.7833e+03
	<b>error</b>	7.2317e-09	9.6157e-09	9.9624e-09
<b>Gauss_Jacobi</b>	<b>tiempo [s]</b>	0.2800	16.9343	3.2855e+03
	<b>error</b>	8.1543e-09	9.6026e-09	9.9602e-09

Cuadro 5: Resultados de la implementación de métodos iterativos y directos.

## 5.2. Análisis de resultados

En la tabla 5.1 es posible observar el error de cada método, al momento de calcular la solución del sistema de ecuaciones respectivo. Para los métodos directos el que presenta en cuanto a tiempo de ejecución es el algoritmo de LSQR, mientras que, para los métodos

iterativos el tiempo ejecución para los métodos de Gauss Seidel y Gauss Jacobi, siendo el primero casi el doble de rápido en la obtención de resultados que el segundo método, esto es concordante, ya que, Gauss Seidel es una mejora de Gauss Jacobi. Es importante señalar que para ambos métodos, se utilizó un límite de 1000 iteraciones, y aunque, el tiempo de operación de Seidel fue aproximadamente la mitad, del tiempo empleado por Jacobi, ambos métodos llegan a aproximaciones de la solución mas o menos similares, lo cual se ve reflejado por el error obtenido, para cada caso, en el cual casi no se presenta mucha variación.

Entre todos los métodos implementados, es posible apreciar la superioridad de los métodos directos por sobre los iterativos, ya sea en tiempo de ejecución o por aproximación a la solución (reflejado en los errores obtenidos para cada caso), Pero el método que resultó mas estable al momento de entregar resultados es el método LU, lo que puede ser una de las razones por la que este metodo es utilizado en Matlab para la función *linsolve*.

## 6. Conclusiones

### 6.1. Funciones no lineales

A través de los datos presentados, en el capítulo 2 de este documento, se puede ver que la mayoría logran converger a una solución para las distintas funciones planteadas, esto reflejado en los valores de error obtenidos para cada implementación. Cabe destacar que la utilización de cada uno de los métodos, ya que, para casos como la implementación de regla falsi, es necesario considerar la forma de la función, esto a causa de que, que a medida que se tiene una mayor una mayor pendiente en la curva, haciendo que la convergencia de la curva pueda llegar a ser mas lenta que a hasta el método de la bisección.

En términos de eficiencia y eficacia, el método que obtuvo los mejores resultados es el de la secante, ya sea en términos de tiempo requerido, o por rapidez de convergencia.

### 6.2. Newton para varias variables

Se demuestra que el método de Newton para varias variables, el cual para este estudio presento un buen comportamiento, y en donde se puede apreciar en la figura 7, que el error converge a una razón casi cuadrática.

### 6.3. Sistemas de ecuaciones

Para el desarrollo de esta sección los puntos que son posibles de rescatar son los siguientes:

- como se muestra en la tabla 5.1, el método Gauss Seidel es siempre mejor Gauss Jacobi, lo que es de esperar, ya que, el primer método surge de mejorar el segundo.
- El Método LSQR es el más rápido en obtener una convergencia a la solución, pero pierde ante otros métodos al comparar la convergencia de la solución obtenida.
- debido a que tres de los métodos directos realizan distintas factorizaciones, se hace necesario la implementación de sustituciones, ya sea progresiva o regresiva, para la obtención del resultado final.

- es de vital importancia considerar las características de cada matriz al momento de aplicar alguno de los métodos aquí propuestos, ya que algunos de estos métodos, requieren que la matriz cumpla ciertas condiciones, antes de poder aplicarse.