Universidad de Santiago de Chile
Departamento ingeniería informática
Ingeniería civil informática

1-2020

# ESTUDIO Y OPTIMIZACIÓN DE MÉTODO LSQR PARA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Alexis Javier Quintana Vega
e-mail: alexis.quintana@usach.cl

# *STUDY AND OPTIMIZATION OF THE LSQR METHOD FOR SOLUTION OF EQUATION SYSTEMS*

**RESUMEN:** *El presente trabajo de investigación, profundiza en la comparación del método LSQR con su versión optimizada, en donde el enfoque de la mejora se puede ver en el cambio a la forma de multiplicar, una matriz con un vector, y en el cómo el trabajar con matriz dispersa permite mejorar la eficiencia y eficacia del método.*

***Abstract:*** *This research work delves into the comparison of the LSQR method with its optimized version, where the improvement approach can be seen in the change to the way of multiplying, a matrix with a vector, and in how to work with dispersed matrix allows to improve the efficiency and effectiveness of the method.*

**PALABRAS CLAVE**: sistemas de ecuaciones, LSQR, LSQR optimizado, matriz dispersa.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones consisten corresponden a un conjunto de ecuaciones lineales, que tienen de más de una incógnita, en donde el principal objetivo es encontrar los valores de las incógnitas presentes en dichas ecuaciones.

Existen varios métodos que permiten encontrar las soluciones a dichos sistemas, entre los cuales podemos encontrar los métodos de sustitución, LU, Cholesky, entre otros. En esta ocasión se estudiará la comparación del método LSQR y LSQR optimizado, en donde los principales puntos a comparar serán el tiempo de ejecución, el error obtenido, y la cantidad de operaciones necesarias para finalizar el programa. Para ello se contará con una matriz que representa un sistema de ecuaciones de 4225 ecuaciones con 4225 incognitos, es decir, una matriz "***A***" de $4225 \times 4225$, con su respectiva matriz "***b***", la cual el resultado al que deben llegar las ecuaciones.

El desarrollo de esta experiencia tiene como principal enfoque, el estudio de métodos que solucionan sistemas de ecuaciones, aplicando técnicas de optimización de cómputo sobre matrices dispersas.

## DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

LSQR cuenta con varios pasos entre los cuales podemos encontrar inicialización, bidiagonalizar, construcción y aplicación de transformaciones ortogonales. Entre los pasos de este método se pueden encontrar multiplicaciones de matrices, los cuales representan el mayor costo tanto operacional, como temporal, es por esto que el principal enfoque de optimización es en la mejora de las multiplicaciones entre la matriz *A* con el vector correspondiente.

Para realizar la optimización del método LSQR, se opto por crear un mapa de la matriz de entrada **A**, el cual consiste en crear tres arreglos en los cuales, en el primer arreglo denominado "*map_a*", se guardarán todos los valores de la matriz los cuales son distintos de

0, los dos arreglos restantes guardaran las filas y las columnas de los valores guardados en "*map_a*", estos arreglos serán denominados "*map_fila*", y "*map_columna*" respectivamente. Así para saber la fila y la columna de el valor guardado en la posición *i* de *map_a*, es necesario acceder al respectivo arreglo en la misma posición *i*.

Una vez realizado el mapeo de la matriz, se procedió con el desarrollo de una nueva función de multiplicación, el cual será el principal cambio para obtener la versión optimizada de LSQR, en donde se recorre el arreglo de *map_a*, al cual se le identifica su columna respectiva, la cual corresponderá a la posición de la fila en el vector, donde se encuentra ubicado al valor correspondiente a multiplicar. Los resultados de dichas multiplicaciones serán sumados hasta a encontrar un cambio de fila, momento en el cual se guardará el valor de la suma en un arreglo, para posteriormente continuar con las multiplicaciones de la siguiente fila.

Con el fin de obtener los resultados de comparación se realizan los siguientes procedimientos:

- **Tiempo ejecución:** para medir el tiempo de ejecución se utilizará la herramienta tic toc, presente en Matlab, el tiempo transcurrido desde que se hace tic, hasta que se hace toc.
- **Error:** con el fin de calcular el error obtenido, se consideró la utilización de la norma de la diferencia de los valores a comparar, así la forma de obtener el error para saber si el resultado es correcto es de la forma $norm(A * x - b)$, siendo *A* la matriz, *x* los valores de la solución encontrada, y *b* los resultados de cada ecuación en el sistema.
- **Operaciones:** Las operaciones fueron tomadas considerando las complejidades de cada función aproximada, y en caso de que una línea de código realice más de una operación, la cantidad de operaciones realizada por dicha línea será de la suma de todas las operaciones realizadas.

Se considera como condición de parada la obtención de cierto error, el cual variara entre ambos procesos, a causa de que el mínimo error posible de obtener para cada método es con el equipo disponible, diferentes entre sí. El error mínimo posible de obtener para la implementación de LSQR es aproximadamente $2.4972e-8$, mientras que para LSQR optimizado es de $2.0623e-8$.

## RESULTADOS

En primer lugar, se realiza la verificación de la implementación de la multiplicación para vectores creada, sea concordante con lo esperado, para ello se calculó el error obtenido al comparar la multiplicación de matrices "***A*b***", con lo obtenido de multiplicar el "**map_a*b**", esto mediante la aplicación de la norma a la resta de los resultados de dichos cálculos, obteniendo así un error de $2.1014e-11$.

La implementación de los algoritmos LSQR y LSQR optimizado, presento los siguientes resultados para los enfoques de estudio, en los que se centra este estudio para comparación.

*Tabla 1 resultados implementación LSQR y LSQR optimizado.*

| | **LSQR** | **LSQR optimizado** |
|---|---|---|
| **Tiempo (s)** | 43.819051 | 13.936115 |
| **Error** | 2.4965e-8 | 2.0585e-8 |
| **operaciones** | 2.3846e+11 | 2.3646e+8 |

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En primer lugar, se considera la Implementación de la multiplicación para los arreglos de matrices dispersas, el cual al es un error de $2.1014e-11$, que al ser lo bastante cercano a 0, se puede considera que esta función es adecuada para su uso, en LSQR optimizado.

Comparando los algoritmos con los datos presentes en la tabla 1 se presenta lo siguiente:

El Tiempo de ejecución entre ambas implementaciones se puede observar que, el tiempo recorrido para obtener un resultado por parte de LSQR, es casi aproximadamente tres veces (3.144 veces) el utilizado por el método LSQR optimizado.

En cuanto el error obtenido por parte de la solución final, no hay mucha diferencia entre ambas implementaciones, esto a causa del error mínimo al que puede llegar el equipo para las implementaciones de los métodos, pero aun así cabe destacar, que el algoritmo LSQR optimizado presenta un error menor en comparación a su contraparte LSQR.

Por ultimo cabe analizar la cantidad de operaciones requeridas por cada uno de los métodos, en donde se aprecia que LSQR, requirió casi 1000 veces la cantidad de operaciones utilizadas por su versión optimizada, la principal causa de esto es la multiplicación de matrices normal, ya que, a diferencia del LSQR que usa la multiplicación normal de matrices el cual tiene una complejidad algorítmica de O($n^2$), en donde "$n$" corresponde a las dimensión mayor de la matriz, su versión optimizada tiene una complejidad O($m$), siendo "$m$" la cantidad de valores distintos a 0, presentes en la matriz **A**. siendo la multiplicación de matrices tradicional el mayor contribuyente al coste operacional, ya que es utilizado en cada iteración del algoritmo.

**CONCLUSIONES**

A través de este trabajo fue posible comprender el funcionamiento del método LSQR para dar solución a los sistemas de ecuaciones, considerando también posibles formas de optimización, en donde la simple modificación de los datos a trabajar puede afectar de una manera muy significativa a la eficiencia y eficacia del método. Aunque cabe señalar que se debe considerar el tipo de sistema con el cual se trabaja, ya que, para el caso de estudio, el usar "*map*" de la matriz **A**, permitió una reducir de manera significativa la cantidad de elementos que deben ser operados, lo cual no siempre ocurrirá, y puede llegara a ocurrir que llegar a usar este método sea hasta contraproducente.

Cabe señalar que, para la diferencia entre los resultados obtenidos, se debió principalmente a la disminución de valores con los cuales se trabajar, ya que se pasó de trabajar de un aproximado de 17850000 datos de la matriz de $4225 \times 4225$ a solo trabajar con un aproximado de 29000 datos, al momento de realizar una multiplicación que requiera de la matriz **A**.