

# ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR SOBRE UN CILINDRO

Alexis Javier Quintana Vega  
e-mail: alexis.quintana@usach.cl

The present research work deepens the transfer of heat in a cylinder, where the main objective is to obtain the temperatures present at different radii of the cylinder.

## 1 Introducción

La transferencia de calor, consiste en la energía la cual esta en transito debido a una diferencia de temperaturas entre dos cuerpos, o un cuerpo y el ambiente. Siempre que exista una diferencia de temperatura, la energía se transferirá desde el cuerpo con mayor temperatura al que posea una menor, esto de acuerdo con las leyes de la termodinámica.

Es por lo anterior que al tener un cuerpo que genera calor constante, y a su vez dicho cuerpo este en un medio que posea distinta temperatura a la propia, al momento de evaluar las temperaturas del cuerpo, se puede notar que a mas alejado este el punto de evaluación del centro del cuerpo, y a su vez mas cercano a la partes externas del cuerpo la temperatura empieza a variar, esto con el fin de encontrar un punto de equilibrio con el medio o cuerpo con el que se encuentra.

El problema que se plantea considerando un cilindro de radio  $R$ , de altura  $h$ , que genera un calor constante  $G_0$ , el cual esta en un ambiente a diferente temperatura que el mismo, y se desea saber el como la temperatura varia, al considerar distintos radios del cilindro, para ello se tiene en consideración las siguientes ecuaciones que describen la transferencia de calor del cilindro respecto al medio en que se encuentra.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rq_r) = G_0 \quad (1)$$

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

Para el desarrollo de este problema se considera lo siguiente  $\frac{G_0(\Delta r)^2}{k} = 2 = A$ ,  $\Delta r = \frac{R}{n}$ , y  $n$  corresponde a la cantidad de superficies a las cuales se le quiere saber su temperatura.

## 2 Método a utilizar

Debido al planteamiento de la situación, y los datos que se tienen, se puede decir que se esta frente a un problema de ecuaciones diferenciales. Y para dar solución a este problema se usara el Método de diferencias finitas, el cual al sustituir las derivadas del problemas por aproximaciones de la misma función, ver ejemplo de sustituciones en las ecuaciones 3 y 4.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (4)$$

A continuación se presenta el ecuación diferencial del problema, obtenida al trabajar las ecuaciones 1 y 2.

$$T'' + \frac{1}{r}T' = -\frac{G_0}{k} \quad (5)$$

Al reemplazar las derivadas de  $T$ , se obtiene la ecuación para usar el método de diferencias finitas.

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} = -\frac{G_0}{k} \quad (6)$$

$$(i+1)T_{i+1} + (-1-2i)T_i + iT_{i-1} = -\frac{G_0(\Delta r)^2}{k}i \quad (7)$$

Al momento de iterar  $i$  se generaran distintas ecuaciones, así como lo resultados de dichas ecuaciones, transformando así el problema a uno de sistemas de ecuaciones, el cual al guardar los coeficientes de los  $T$ , y los resultados de cada ecuación en una respectiva matriz, es posible obtener

la solución mediante la instrucción *linsolve* que es propia de Matlab. La forma de la matriz que se genera se muestra a continuación, solo se consideran 5 superficies del cilindro.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} \\ -A \\ -2A \\ -3A \\ -4A - 5T_e \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \\ -408 \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3 Resultados

#### 3.1 Resultados aplicación del método

En esta parte de la experiencia se mostraran los resultados obtenidos al aplicar el método de las diferencias finitas para obtener las distintas temperaturas. A continuación se muestra el sistema de ecuaciones para el primer caso de prueba en el que se considero la obtención de la temperatura en 5 superficies, y se considero una temperatura externa ( $T_e$ ) de 25. obteniendo lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \\ -133 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Así mediante la instrucción *linsolve* es posible obtener las temperaturas de cada superficies, las cuales se muestran a continuación.

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.2833 \\ 36.2833 \\ 34.7833 \\ 32.4500 \\ 29.2000 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos para temperaturas externas de 50 y 80, considerando 5 superficies.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \\ -258 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.2833 \\ 61.2833 \\ 59.7833 \\ 57.4500 \\ 54.2000 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92.2833 \\ 91.2833 \\ 89.7833 \\ 87.4500 \\ 84.2000 \end{bmatrix} \quad (14)$$

#### 3.2 Resultados gráfica de cilindro

A continuación se presentan la gráfica del cilindro con las distintas temperaturas obtenidas, considerando 5 superficies, radio 10, y altura 10.

Para llevar a cabo estos cilindros se considero que a medida que la temperatura aumenta hacia el centro del cilindro, los colores vayan tomando colores mas cálidos, a su vez se considero el valor que representa la temperatura externa del cilindro como la más fría (color azul). En cada una de las imágenes es posible ver la escala de temperatura que esta a la derecha de su respectivo cilindro.

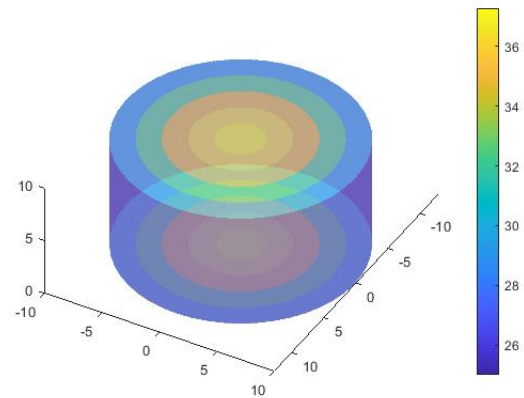


Fig. 1. cilindro con  $T_e = 25$

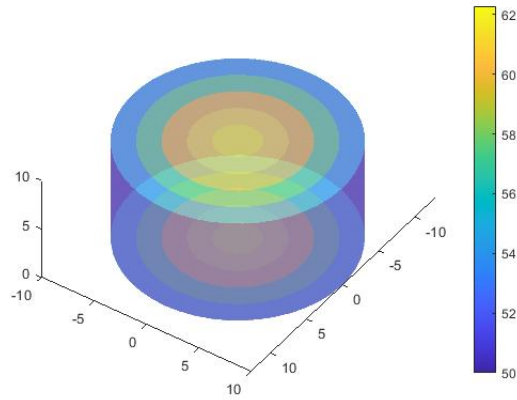


Fig. 2. cilindro con  $T_e = 50$

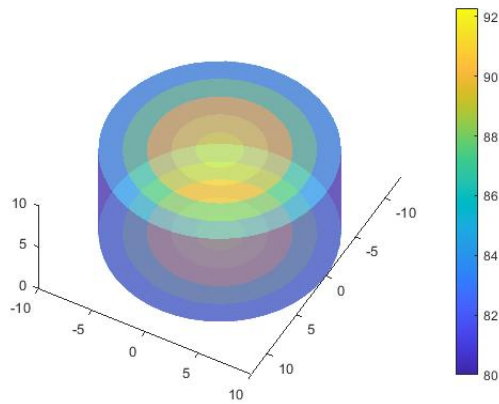


Fig. 3. cilindro con  $T_e = 80$

temperatura, y a medida que el radio aumenta alejándose así del centro dicha temperatura debería disminuir, que es lo que se refleja en los resultados.

Por el lado de la gráfica, se logra obtener la imagen del cilindro, en la cual se ve como su temperatura varia según el radio, que fue considerado, es en esta parte donde se presento el mayor problema, debido al poco manejo que se tiene sobre Matlab, que se dificulto la obtención de una imagen concordante a los requerimientos.

#### 4 Análisis de resultados

Como se aprecia en tanto en las imágenes, como en los valores obtenidos al aplicar linsolve al sistema de ecuaciones obtenido al aplicar el método de diferencias finitas, a medida que el radio de la superficie a la cual se le quiere evaluar su temperatura aumenta, su temperatura disminuye, esto de acuerdo a lo esperado con la termodinámica de un cuerpo cuya temperatura es mayor a la del ambiente que lo rodea.

También es posible notar que los cambios de temperatura no siguen una tendencia lineal, esto quiere decir que si bien tanto la temperatura como el radio del manto de ella, no varían en la misma proporción.

#### 5 Conclusiones

En relación a los resultados obtenidos en el desarrollo de esta experiencia, se logra implementar el método de diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales, obteniendo resultados concordantes con lo esperado, ya que se considera que el centro del cilindro es el que posee mayor