Laboratorio N°1: Métodos Numéricos

Cristóbal Fernández Véliz

Cristobal.fernandez@usach.cl

< LABORATORY N°1: NUMERIC METHODS>

RESUMEN: El laboratorio número uno de Métodos Numéricos tiene como objetivo la implementación de distintos métodos tales como: Newton-Raphson, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel, Cholesky, Givens, QR. Una vez implementados los métodos fueron probados con tres entradas distintas las cuales son matrices de 289x289, 1089x1089 y 4225x4225. El método Newton-Raphson fue probado con un sistema de ecuaciones ni lineales ilustrado en el apartado de Sistemas. Una vez obtenidos los resultados estos se analizaron para obtener el orden de tiempo, costo computacional y errores de los métodos, para concluir que los métodos iterativos tienen menor costo computacional pero un mayor tiempo de ejecución, a diferencia de los métodos directos cuyo costo operacional es alto pero los tiempos se ven disminuidos.

PALABRAS CLAVE: Métodos Numéricos, Newton-Raphson, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel, Iterativo, Directo, LU, Cholesky, Givens, QR, Costo Operacional, Error.

1 INTRODUCCIÓN

El análisis numérico ayuda de una gran manera a solucionar distintos tipos de problemas mediante el uso de métodos numéricos, otorgando distintas maneras de abordar los problemas desde una vista matemática, ofreciendo resultados y un análisis de estos. Un buen uso de los métodos numéricos puede ayudar a modelar problemas del día a día y ofrecer una solución a estos teniendo en cuenta las entradas, salidas y posibles errores del problema.

En el desarrollo del presente laboratorio se abordarán distintos métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones, dichos métodos pueden ser iterativos o directos los cuales serán mencionados en el desarrollo del laboratorio.

1.1 OBJETIVOS

El objetivo general del laboratorio es implementar los métodos solicitados, usarlos para resolver sistemas de ecuaciones y ofrecer un análisis de los resultados obtenidos.

1.1.1 Objetivos Específicos

1. Implementar el método de Newton-Raphson Multivariable para resolver el sistema de ecuaciones dado.
2. Analizar los resultados obtenidos del método de Newton-Raphson.
3. Implementar los métodos iterativos: Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel.
4. Implementar los métodos directos: LU, Cholesky, QR y Givens.
5. Analizar los resultados obtenidos de los métodos directos e iterativos.
6. Realizar tres videos sobre la variación de densidad de los fotones, creando fuentes de fotones y moviendo la fuente.

2 SISTEMAS

Para el caso de Newton-Raphson Multivariable se usará el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ X_{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

Figura 1: SE Newton-Raphson

Para el caso de los métodos directos e iterativos se usarán los sistemas encontrados en la plataforma, los cuales son:

- Sistema 289.
- Sistema 1084.
- Sistema 4225

3 RESULTADOS

En este apartado se mostrarán los resultados obtenidos de las implementaciones de los distintos métodos numéricos.

3.1 Newton-Raphson Multivariable

Para obtener los resultados se iteró un numero de 20 veces y se utilizo una tolerancia de 10^-10 ya que es un número lo bastante pequeño para que las variables tiendan a un número en concreto.

Al obtener los resultados es difícil observar a que número tienden los resultados debido a que se generan fracciones con índices muy altos, por lo que para visualizar la tendencia de los valores de las variables a través de las iteraciones se acercará el valor a el entero mas cercano aplicando la función *round* de Matlab, donde los resultados obtenidos fueron:

Iteración	x	y	z
1	5	37	-39
2	4	18	-20
3	5	9	-12
4	6	5	-7
5	6	2	-5
6	6	1	-4
7	6	1	-4
8	6	1	-4
9	6	1	-4
10	6	1	-4
11	6	1	-4
12	6	1	-4

Tabla 1: Resultados Newton (Valores aproximados)

Donde el error se comportaba de la siguiente manera:

Iteración	Error
1	0,965517241379310
2	0,794866763971107
3	0,623540825602279
4	0,623540825602279
5	0,380437934427999
6	0,170066355455615
7	0,0590609535488668
8	0,00950126252125771
9	0,000259735146638770
10	1,94400632258509e^t
11	1,08912878715729e^t
12	0

Tabla 2: Errores Newton

3.2 MÉTODOS ITERATIVOS Y DIRECTOS

La tolerancia usada para estos métodos es:

$$E = 10^{-15}$$

Los métodos fueron usados para distintas matrices de distintos tamaños, donde lo resultados obtenidos varían según la matriz.

3.2.1 Matriz 289x289

Con el método de Cholesky, QR y Givens se pueden observar las aproximaciones en el siguiente gráfico.

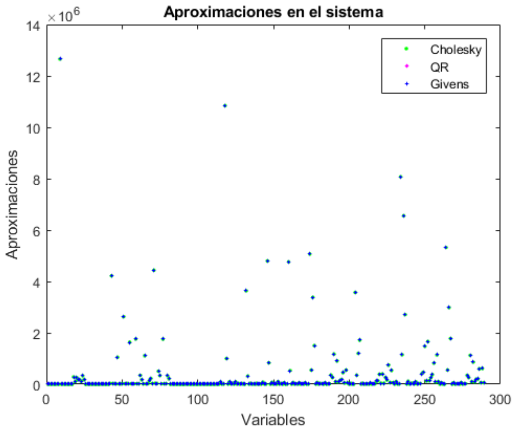

Figura 2: Aproximaciones MD 289x289

Por otro lado, con los métodos Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel se obtuvieron las siguientes aproximaciones:

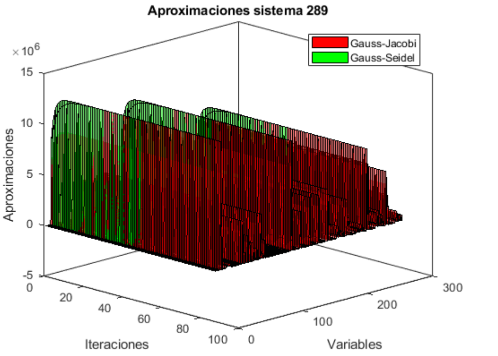

Figura 3: Aproximaciones MI 289x289

Los errores obtenidos fueron ordenados en una tabla para poder observarlos de mejor manera, donde la tabla es la siguiente:

Método	Error
Gauss-Jacobi	6,2308795e^12
Gauss-Seidel	5,87434439e^16
Cholesky	3,15106810710e^15
QR	2,9114751231e^15
Givens	8,36125988513487e^15
LU	4,24003720000e^13

Tabla 3: Errores Métodos 289x289

3.2.2 Matriz 1089x1089

Al igual que con la matriz de 289x289 se graficaron las aproximaciones para poder observarlas de una mejor manera, lo que se ve representado en la Figura 4.

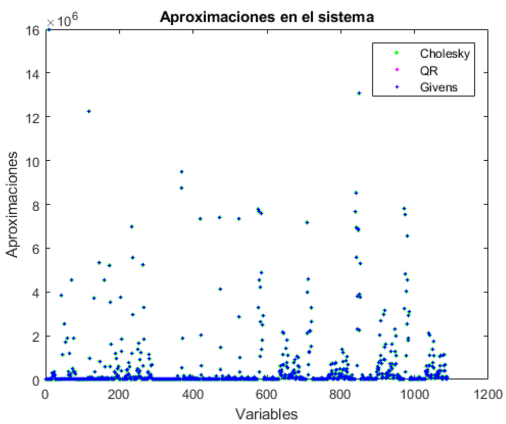

Figura 4:Aproximaciones MD 1089x1089

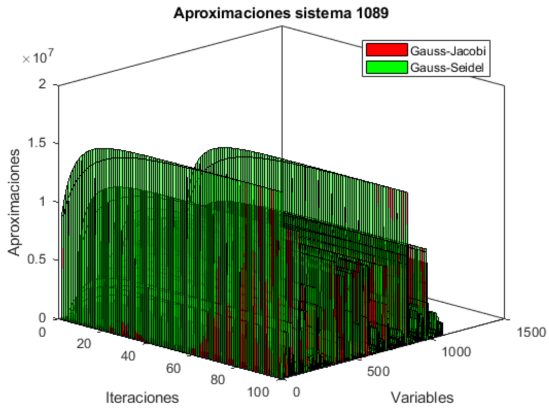

Figura 5:Aproximaciones MI 1089x1089

Los errores obtenidos se pueden observar en la Tabla 5.

Método	Error
Gauss-Jacobi	3,077712757e^05
Gauss-Seidel	2,210626159e^07
Cholesky	5,283192595769840e^14
QR	1,180438366378053e^14
Givens	5,031628960140376e^14
LU	4,012251495797500e^10

Tabla 4: Errores Métodos 1089x1089

3.2.3 Matriz 4225x4225

Al resolver el sistema con los métodos se obtienen los resultados graficados en la Figura 6 para los métodos iterativos, en el caso de los métodos directos no se pudieron determinar los resultados debido a la alta demora en obtener los resultados debido a la alta cantidad de datos.

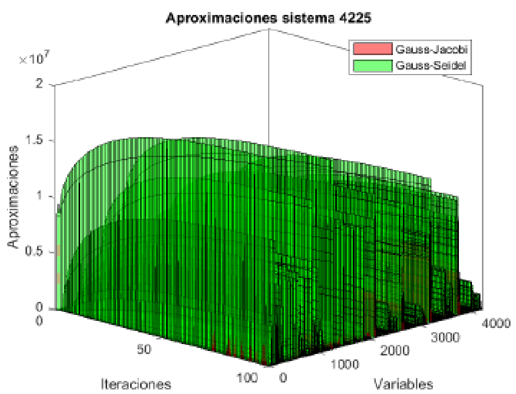

Figura 6: Aproximaciones MI 4225x4225

Los errores obtenidos de los métodos iterativos son los ilustrados por la Tabla 5.

Método	Error
Gauss-Jacobi	0,001008438291151

Gauss-Seidel	3,17222444411e^4
Cholesky	-
QR	-
Givens	-
LU	-

Tabla 5: Errores 4225x4225

4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este apartado se analizará el comportamiento de los resultados obtenidos y mostrados en el capitulo anterior.

4.1 MÉTODO NEWTON-RAPHSON

Al usar un error de 10^{10} tomó alrededor de 12 iteraciones llegar al resultado de las raíces del sistema. Los valores obtenidos por el método implementado pueden ser corroborados reemplazándolos en el sistema de ecuaciones original, donde si reemplazamos x_1 por 6, x_2 por 1 y x_3 por -4 se puede ver que las igualdades se cumplen. También es posible observar en la tabla de errores (Tabla 2), que en la iteración 12 el error era tan cercano a 0 que para una mejor representación este fue reemplazado por 0.

Una vez obtenidos los valores de las raíces se hizo una medición del tiempo el cual tomó al método finalizar. Obteniendo que se demoraba alrededor de 1,284848000 segundos. Donde este tiempo se debe al trabajo de matrices y la complejidad que este conlleva.

4.2 MÉTODOS LINEALES

4.2.1 Matriz 289x289

Se obtiene la tabla con los tiempos de ejecución de los métodos utilizados.

Método	Tiempo(s)
LU	0,411075000000000
Gauss-Jacobi	1,01707900000000
Gauss-Seidel	0,794817000000000
Cholesky	0,176388000000000
QR	0,141730000000000
Givens	0,212517000000000

Tabla 6: Tiempos 289x289

Entre los métodos iterativos se puede destacar el método 'Gauss-Seidel' el cual obtiene un tiempo de ejecución menor al método de 'Gauss-Jacobi', esto puede deberse a la menor cantidad de operaciones del primer método mencionado. Por otro lado, en los métodos directos el que tiene menor tiempo es el método QR.

4.2.2 Matriz 1089X1089

Los tiempos obtenidos de los métodos son los siguientes:

Método	Tiempo(s)
LU	6,00863410000000
Gauss-Jacobi	11,8583120000000
Gauss-Seidel	17,1767500000000
Cholesky	4,00846700000000
QR	2,89086300000000
Givens	54,5251130000000

Tabla 7: Tiempos 1089x1089

Se puede destacar el método de Givens teniendo los tiempos más altos haciéndolo un método poco viable para matrices de dimensiones grandes. Los métodos Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel tienen un tiempo mas alto que los métodos directos a excepción de Givens.

4.2.3 Matriz 4225x4225

En este caso particular solo se pueden observar las convergencias de los métodos directos en la Figura 6, ya que los métodos directos no pudieron ser medidos debido al alto costo de tiempo que estos presentan.

Por lo tanto, solo se pudo obtener el tiempo de los métodos iterativos, los cuales pueden observarse en la Tabla 8.

Método	Tiempo(s)
Gauss-Jacobi	1,122092437000000e^3
Gauss-Seidel	7,86408533000000e^2
Cholesky	-
QR	-
Givens	-
LU	-

Tabla 8: Tiempos 4225x4225

Entre los métodos iterativos se puede observar que el tiempo del método Gauss-Jacobi es considerablemente menor al método Gauss-Seidel. Por lo que se destaca el método. Donde las complejidades de los métodos son las siguientes:

Método	Tiempo(s)
Gauss-Jacobi	$O(n^2)$
Gauss-Seidel	$O(n^2)$
Cholesky	$O(n^3)$

QR	$O(n^2)$
Givens	$O(n^4)$
LU	$O(n^3)$

Tabla 9 Complejidades

Donde teniendo en cuenta los datos obtenidos el método más eficiente es QR teniendo en cuenta los tiempos y la complejidad asociada al método. El método Cholesky obtiene tiempos similares, pero tiene una complejidad mayor.

4.3 VIDEOS

En el primero video se puede observar como la fuente de fotones va creciendo exponencialmente y con esto el pico del grafico avanza en el eje z alejándose del *frame* en cuestión.

En el segundo video se generan fuentes aleatorias de fotones dejando los valores de b en 0, después se elige una posición aleatoria para generar una fuente de fotones en ese punto.

5 CONCLUSIONES

Con respecto a la implementación del método Newton-Raphson Multivariable se puede decir que fue una implementación satisfactoria debido a que se llegó a los resultados esperados según la entrada dada. Es necesario notar que la implementación del método mencionado no es tan compleja como otros métodos realizados, por lo que no presentó tanta dificultad en su realización.

Por otro lado, las implementaciones de los métodos iterativos lograron obtener resultados en las tres matrices con las cuales fueron probados y teniendo unos las menores complejidades en comparación de los métodos directos, aunque el tiempo que demoraban era mayor a los métodos directos. El método Gauss-Jacobi fue el que mejor rindió entre los métodos iterativos, obteniendo mejores tiempos en las tres matrices.

En la implementación de los métodos directos se puede observar un mayor orden de complejidad en comparación a los métodos iterativos, aunque disminuyen en gran medida los tiempos de ejecución de estos. Se presentaron problemas con la matriz de 4225x4225 ya que el tiempo que tomaba para obtener los resultados era de un orden demasiado alto por lo que no se obtuvieron resultados en esa matriz no pudiendo analizar estos resultados. El método Givens es el método que mas tiempo demoraba en ejecutarse pasando incluso los métodos iterativos, esto puede deberse al orden de complejidad que presenta el método.

Finalmente, la mayoría de los objetivos específicos fueron realizados a excepción del último video debido a la complejidad de los algoritmos necesarios para la generación de las fuentes de fotones. Los resultados de los métodos directos en la matriz de 4225x4225 no pudieron ser obtenidos debido al alto tiempo que demoraban los algoritmos. Se puede concluir que el objetivo principal fue cumplido. Como puntos de mejora está el mejor entendimiento y optimización de los métodos directos, como también el mejor uso de los tiempos disponibles para el desarrollo del laboratorio.

6 REFERENCIAS

- Plaza, S. (2007), Métodos Numéricos, Santiago De Chile.