

Une décomposition de Benders pour un problème de choix de liaisons

Daniel Porumbel

<http://cedric.cnam.fr/~porumbed/mla/>

Un problème d'installation de liaisons

$$\min \sum_{\{i,j\} \in E} y_{ij}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq d_i, \quad \forall i \in T$$

$$b_{nd} y_{ij} - x_{ij} - x_{ji} \geq 0, \quad \forall \{i,j\} \in E, \quad i < j$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{ij}, x_{ji} \geq 0, \quad \forall \{i,j\} \in E, \quad i < j$$

Un problème d'installation de liaisons

$$\min \sum_{\{i,j\} \in E} y_{ij}$$

L'installation d'une liaison y_{ij} coûte 1, mais pas de coût pour envoyer un flux x_{ij} sur y_{ij}

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq 0, \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq d_i, \forall i \in T$$

Demande du terminal $i \in T$

$$b_{\text{nd}} y_{ij} - x_{ij} - x_{ji} \geq 0, \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+, x_{ij}, x_{ji} \geq 0, \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

Bande passante
d'une liaison
(débit max câble)

Si la solution \mathbf{y} est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq 0, \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq d_i, \forall i \in T$$

$$-x_{ij} - x_{ji} \geq -b_{nd}y_{ij}, \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall \{i,j\} \in E$$

Voici le dual :

$$\max \quad - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd}y_{ij}v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i$$

$$x_{ij} : \quad -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ji} : \quad -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

Ce dual est réalisable et doit être borné !

Si la solution \mathbf{y} est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq 0, \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq d_i, \forall i \in T$$

$$-x_{ij} - x_{ji} \geq -b_{nd}y_{ij}, \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall \{i,j\} \in E$$

Voici le dual :

$$\max \quad - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd}y_{ij}v_{ij} + \sum_{i \in T} d_iv_i$$

$$x_{ij} : \quad -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ji} : \quad -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

Ce dual est réalisable et doit être borné !

Si la solution \mathbf{y} est faisable, il existe des flux qui rendent le programme ci-après réalisable

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq 0, \forall i \notin T \cup \{s\}$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{ji} - \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \geq d_i, \forall i \in T$$

$$-x_{ij} - x_{ji} \geq -b_{nd}y_{ij}, \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall \{i,j\} \in E$$

Voici le dual :

$$\max \quad - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd}y_{ij}v_{ij} + \sum_{i \in T} d_iv_i$$

$$x_{ij} : \quad -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$x_{ji} : \quad -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \quad \forall \{i,j\} \in E, i < j$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

Ce dual est réalisable et doit être borné !

Le dual précédent est intégré dans le modèle Benders

- Sa valeur objectif ne doit pas dépasser 0, sinon ce dual sera non-borné.

$$\min \mathbf{1}^\top \mathbf{y}$$

$$0 \geq - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i,$$

$$\forall \mathbf{v} \in \underbrace{\left\{ \mathbf{v} \geq \mathbf{0} : -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0, -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \right\}}_{\mathcal{P}}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^n$$

Il est impossible d'écrire toutes les contraintes ! Il faut les générer une par une à l'aide du sous-problème Benders :

- $\max_{\mathbf{v} \in \mathcal{P}} - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i$

Le dual précédent est intégré dans le modèle Benders

- Sa valeur objectif ne doit pas dépasser 0, sinon ce dual sera non-borné.

$$\min \mathbf{1}^\top \mathbf{y}$$

$$0 \geq - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i$$

Pour ne pas devoir décaler les indices dans les tableaux, ajouter une variable fictive $v_0 = 1$ pour la source $s = 0$

- $v[1] = 0$ sous julia

$$\forall \mathbf{v} \in \underbrace{\left\{ \mathbf{v} \geq \mathbf{0} : -v_{ij} - v_i + v_j \leq 0, -v_{ij} + v_i - v_j \leq 0 \right\}}_{\mathcal{P}}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^n$$

Il est impossible d'écrire toutes les contraintes ! Il faut les générer une par une à l'aide du sous-problème Benders :

- $\max_{\mathbf{v} \in \mathcal{P}} - \sum_{\{i,j\} \in E} b_{nd} y_{ij} v_{ij} + \sum_{i \in T} d_i v_i$