ECMA
Partie théorique

Barreaux Alexis - Le Bozec-Chiffoleau Sulian

dépôt github du projet:
https://github.com/alexisbarreaux/projet_ECMA

Barreaux Alexis - Le Bozec-Chiffoleau Sulian

1)Modélisation statique binaire

Nous avons choisi la modélisation en variables binaires, où $x_{i,j}$ vaut 1 si et seulement si les noeuds i et j appartiennent à la même partie dans la partition et y_i^k vaut 1 si et seulement si le nœud i appartient à la k-ème partie. Cela donne le problème (P) suivant :

$$(P)\ :\ min_{x,y} \sum_{(i,j)\ \in E,\ i<j} l_{i,j} x_{i,j}$$

s.c.

$$(1a)\text{: } \sum_{i \in V} w_i y_i^k \ \leq\ B,\ \forall k\ \in\ \{1,..., K\}$$

$$(1b)\text{: } y_i^k\ +\ y_j^k\ \leq x_{i,j} +\ 1,\ \forall (i, j)\ \in\ V^2,\ i\ <\ j,\ \forall k\ \in\ \{1,..., K\}$$

$$(1c)\text{: } \sum_{k \in \{1,...,K\}} y_i^k\ =\ 1,\ \forall i\ \in\ V$$

$$(1d)\text{: } y_i^k \in\ \{0, 1\},\ \forall i\ \in\ V,\ \forall k\ \in\ \{1,..., K\}\ ,\ x_{i,j} \in\ \{0, 1\},\ \forall (i, j)\ \in V^2,\ i\ <\ j$$

Les contraintes sont les suivantes:

- (1a) : contrainte de poids sur les parties,
- (1b) : lien entre les x et les y,
- (1c) : chaque nœud appartient à une et une seule partie.

On aurait pu ajouter la contrainte (1e) suivante :

$$x_{i,j} = x_{j,i}\ ,\ \forall (i, j)\ \in V^2\ (1e)$$

Mais nous avons préféré réduire le nombre de variables (et de contrainte de type 1b) en imposant que $x_{i,j}$ n'est défini que pour i < j, puisque ce sont aussi les seuls que nous prenons en compte dans l'objectif pour éviter de compter en double (en effet le problème est a priori symétrique vu l'exemple fourni dans le sujet). De plus, l'objectif en minimisation et le fait que les $l_{i,j}$ soient positifs a priori (ce sont des distances) impliquent que l'on n'aura pas $y_i^k\ +\ y_j^k\ -\ 1 < x_{i,j}$ pour les solutions optimales, ie que les x et les y auront bien le sens que nous leur avons accordé ci-dessus.

2)Modélisation robuste mixte

La version robuste (Pr) du problème (P) précédent s'obtient alors en minimisant le pire cas ici et en remplaçant $l_{i,j}$ par $l_{i,j}^1$ ainsi que w_i par w_i^2

$$(Pr) :\ min_{x,y} max_{l^1, w^2} \sum_{(i,j)\ \in E,\ i<j} l_{i,j}^1 x_{i,j}$$

s.c.

$(2a)$: $\sum_{i \in V} w_i^2 y_i^k \leq B,\ \forall k \in \{1,..., K\}$

$(2b)$: $y_i^k + y_j^k \leq x_{i,j} + 1,\ \forall (i,j) \in V^2,\ i < j,\ \forall k \in \{1,..., K\}$

$(2c)$: $\sum_{k \in \{1,...,K\}} y_i^k = 1,\ \forall i \in V$

$(2d)$: $y_i^k \in \{0, 1\},\ \forall i \in V,\ \forall k \in \{1,..., K\}\ ,\ x_{i,j} \in \{0, 1\},\ \forall (i,j) \in V^2,\ i < j$

$(2e)$: $l^1 \in U^1, w^2 \in U^2$

La nouvelle contrainte (2e) étant liée aux incertitudes sur $l_{i,j}^1$ et w_i^2 telles que définies dans le sujet.

3)Plans Coupants

a) Robustesse dans les contraintes

Le problème peut alors se réécrire facilement en cachant l'incertitude dans les contraintes :

(Pr') : $min_{x,y,z} z$

s.c.

$(2b), (2c), (2d)$

$(2f)$: $z \geq \sum_{(i,j) \in E,\, i<j} l_{i,j}^1 x_{i,j},\ \forall\, l^1 \in U^{1*}$

$(2g)$: $\sum_{i \in V} w_i^2 y_i^k \leq B,\ \forall k \in \{1,..., K\}\ ,\forall\, w^2 \in U^{2*}$

C'est-à-dire qu'on avait $\chi_{num} = \{(2a), (2e)\}$ et $\chi_{comb} = \{(2b), (2c), (2d)\}$ et on a introduit (2f) et (2g) pour cacher le max_{l^1, w^2} et (2e) dans les contraintes.

b) Ensemble de départs

On peut alors remarquer que $\delta_{i,j}^1 = 0\ \forall (i,j) \in E$ est valide pour U^1 et de même $\delta_i^2 = 0\ \forall i \in V$ pour U^2 et définir les ensembles de départ associés:

- $U^{1*} = \{l^{1*}\},\ o\grave{u}\ l_{i,j}^{1*} = l_{i,j}\ \forall (i,j) \in E$
- $U^{2*} = \{w^{2*}\},\ o\grave{u}\ w_i^{2*} = w_i\ \ \forall i \in V$

C'est-à-dire que l'on va initialiser l'algorithme de plans coupants avec les valeurs liées à des incertitudes nulles et résoudre donc le problème statique.

c) Sous-problèmes

Etant donnée une solution (x^*, y^*, z^*) optimale du problème (Pr'), on est amené à résoudre les (K + 1) problèmes suivants:

$(SP1)$: $max_{\delta^1} \sum_{(i,j) \in E,\, i<j} (l_{i,j} + \delta^1_{i,j}(\hat{l_i} + \hat{l_j}))x^*_{i,j}$

s.c.

$(3a)$: $\sum_{(i,j) \in E} \delta^1_{i,j} \leq L$

$(3b)$: $\delta^1_{i,j} \geq 0,\ \forall\, (i,j)\ \in\ E$

$(3c)$: $\delta^1_{i,j} \leq 3,\ \forall\, (i,j)\ \in\ E$

$(SP2, k)$: $max_{\delta^2} \sum_{i \in V} w_i (1 + \delta^2_i) y^{*k}_i$

s.c.

$(4a)$: $\sum_{i \in V} \delta^2_i \leq W$

$(4b)$: $\delta^2_i \geq 0, \forall i\ \in\ V$

$(4c)$: $\delta^2_i \leq W_i, \forall i\ \in\ V$

d) Conditions d'optimalité

Une solution (x^*, y^*, z^*) du problème maître (Pr') est optimale si et seulement si on a $v(SP1)\ \leq z^*$ et $v(SP2, k)\ \leq\ B,\ \forall k\ \in\ \{1,..., K\}$.

e) Ajout de coupes

Si on a $v(SP1)\ >\ z^*$, soit $\delta^{\sim 1}$ associé, on ajoute la coupe :

(5): $\sum_{(i,j) \in E,\, i<j} (l_{i,j} + \delta^{\sim 1}_{i,j}(\hat{l_i} + \hat{l_j}))x_{i,j} \leq z$

Et si on a $v(SP2, k)\ >\ B$ pour un $k^{\sim}$, soit $\delta^{\sim 2}$ associé, on ajoute la coupe :

(6): $\sum_{i \in V} w_i (1 + \delta^{\sim 2}_i) y^{k^{\sim}}_i\ \leq\ B,\ \ \forall k\ \in\ \{1,..., K\}$

Ou de manière équivalente sur $\tilde{l}^{1}$ et $\tilde{w}^{2}$ c'est-à-dire que l'on fait $U^{1^*} <- U^{1^*} \cup \{\tilde{l}^{1}\}$ et/ou $U^{2^*} <- U^{2^*} \cup \{\tilde{w}^{2}\}$.

4)Dualisation

a) Reformulation de l'objectif

On reformule l'objectif de la modélisation robuste mixte de sorte à isoler les variables $\delta^1_{i,j}$:

$$min_{x,y} \sum_{(i,j)\in E,\, i<j} l_{i,j} x_{i,j} + max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E,\, i<j} \delta^1_{i,j}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{i,j}$$

b) Sous-problème lié aux variables $\delta^1_{i,j}$

On exhibe alors le sous-problème lié aux variables $\delta^1_{i,j}$:

$$(SP1):\ max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E,\, i<j} \delta^1_{i,j}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{i,j}$$

s.c.

$(1a)$: $\sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{i,j} \leq L$

$(1b)$: $\delta^1_{i,j} \geq 0,\ \forall (i,j) \in E,\ i < j$

$(1c)$: $\delta^1_{i,j} \leq 3,\ \forall (i,j) \in E,\ i < j$

c) Dualisation du sous-problème

On écrit le problème dual du sous-problème lié aux variables $\delta^1_{i,j}$:

$$(D - SP1):\ min_{\alpha^1} \sum_{(i,j)\in E,\, i<j} 3\alpha_{i,j} + L\alpha$$

s.c.

$(2a)$: $\alpha + \alpha_{i,j} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{i,j},\ \forall (i,j) \in E,\ i < j$

$(2b)$: $\alpha_{i,j} \geq 0,\ \forall (i,j) \in E,\ i < j$

$(2c)$: $\alpha \geq 0$

où α^1 désigne le vecteur $((\alpha_{i,j})_{(i,j) \in E, i<j}, \alpha)$.

d) Reformulation des contraintes robustes

Les contraintes robustes

$$\sum_{i \in V} w_i (1 + \delta_i^2) y_i^k \leq B, \forall k \in \{1,..., K\}, \forall \delta^2 \in U^2$$

Peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\sum_{i \in V} w_i y_i^k + \max_{\delta^2} \sum_{i \in V} w_i \delta_i^2 y_i^k \leq B, \forall k \in \{1,..., K\}$$

e) Problèmes internes liés aux variables δ_i^2

On peut alors en déduire les problèmes internes liés aux variables δ_i^2 :

Pour $k \in \{1,..., K\}$,

$(SP2, k)$: $\max_{\delta^2} \sum_{i \in V} w_i \delta_i^2 y_i^k$

s.c.

$(3a)$: $\sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W$

$(3b)$: $\delta_i^2 \geq 0, \forall i \in V$

$(3c)$: $\delta_i^2 \leq W_i, \forall i \in V$

f) Dualisation des problèmes internes

On écrit les problèmes duaux des problèmes internes liés aux variables δ_i^2 :

Pour $k \in \{1,..., K\}$,

$(D - SP2, k)$: $\min_{\beta^2} \sum_{i \in V} W_i \beta_i + W\beta$

s.c.

$(4a)$: $\beta_i + \beta \geq w_i y_i^k, \forall i \in V$

$(4b)$: $\beta_i \geq 0, \forall i \in V$

$(4c)$: $\beta \geq 0$

où β^2 désigne le vecteur $((\beta_i)_{i \in V}, \beta)$.

g) Reformulation du problème robuste en PLNE

En utilisant les dualisations effectuées lors des questions précédentes on peut reformuler notre problème robuste sous la forme d'un simple problème linéaire en nombres entiers :

$$(PLNE) : min_{x,y,\alpha^1,\beta^2} \sum_{(i,j) \in E,\, i<j} l_{i,j} x_{i,j} + \sum_{(i,j) \in E,\, i<j} 3\alpha_{i,j} + L\alpha$$

s.c.

$(5a)$: $y_i^k + y_j^k \leq x_{i,j} + 1, \forall (i,j) \in V^2, i < j, \forall k \in \{1,..., K\}$

$(5b)$: $\sum_{k \in \{1,...,K\}} y_i^k = 1, \forall i \in V$

$(5c)$: $\alpha + \alpha_{i,j} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{i,j}, \forall (i,j) \in E, i < j$

$(5d)$: $\sum_{i \in V} w_i y_i^k + \sum_{i \in V} W_i \beta_i + W\beta \leq B, \forall k \in \{1,..., K\}$

$(5e)$: $\beta_i + \beta \geq w_i y_i^k, \forall i \in V, \forall k \in \{1,..., K\}$

$(5f)$: $y_i^k \in \{0, 1\}, \forall i \in V, \forall k \in \{1,..., K\}$, $x_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall (i,j) \in V^2, i < j$

$(5g)$: $\alpha_{i,j} \geq 0, \forall (i,j) \in E, i < j$ et $\alpha \geq 0$

$(5h)$: $\beta_i \geq 0, \forall i \in V$ et $\beta \geq 0$