SUJET A

Oral blanc
Semaine du 12 décembre

Démonstration de cours

Démontrer le théorème de Pythagore.

Exercice 1

Monsieur Migros, frontalier embourgeoisé, a décidé de se mettre au footing. Il décide d'utiliser un protocole spécial pour savoir combien de kilomètres parcourir chaque jour. Pour ce faire :

- Il lance un dé et compte le nombre n de lancers nécessaires pour obtenir un six.
- Il lance ensuite une pièce équilibrée n fois et compte le nombre de «pile» obtenus : c'est le nombre de kilomètres qu'il devra parcourir.

Dans toute la suite on notera :

- A_n :«le premier six est obtenu au n-ième lancer»,
- B_p :«la pièce est tombée p fois sur pile».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
2. Calculer $\mathbb{P}(B_0)$.
3. Soit $x \in]0,1[$. Rappeler la formule permettant de calculer :
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$
4. En dérivant la relation obtenue, déterminer la convergence et la valeur de la série $\sum nx^n$.
5. En déduire $\mathbb{P}(B_1)$.

SUJET B

Oral blanc
Semaine du 12 décembre

Exercice 1

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Damien fait du ski à la station “Vallées blanches”. Il est en haut du téléski des Cailloux, et a le choix entre les pistes de Tout-Plat (une bleue), Les-Bosses (une rouge) et Rase-Mottes (une noire). Il va choisir une de ces trois pistes au hasard, de telle façon qu'il choisisse la bleue ou la noire avec probabilité $1/4$, et la rouge, qu'il préfère, avec probabilité $1/2$. Il descend ensuite la piste choisie. Damien n'est pas encore très à l'aise cette saison, et il tombe avec une probabilité de $0,1$ sur la piste bleue, de $0,15$ sur la piste rouge, et de $0,4$ sur la piste noire.

1. Modéliser la situation.
2. Soit A l'événement “*Damien tombe en descendant la piste qu'il a choisie*”. Calculer $P(A)$.
3. Maxime attend Damien à la terrasse d'un café et le voit arriver couvert de neige : Damien est tombé. Déterminer la probabilité que Damien ait choisi la piste noire.

Correction du sujet A

Correction 1.

1. On montre que $\mathbb{P}(A_n) = (5/6)^{n-1} \cdot 1/6$.
2. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $p \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(B_p) = \sum_{\substack{n=p\\ n\geqslant 1}}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n-p)!} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \frac{1}{12}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

3. facile.
4. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \frac{1}{12}\\ &= \frac{12}{49}\end{aligned}$$

(vérifier la dernière égalité).

Correction du sujet B

Correction 1. On montre que A est diagonalisable. Avec les notations du cours, une solution est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$