

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA EL DISEÑO ASISTIDO
DE EJES SOMETIDOS A CARGAS ESTÁTICAS Y DINÁMICAS**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO**

MARTÍNEZ SARMIENTO EDGAR ALEXIS

`alexis0023@hotmail.com`

DIRECTOR: ING. LUIS RICARDO SOTO AYMAR

`ricardo.soto@epn.edu.ec`

Quito, Marzo 2016

DECLARACIÓN

Yo, Edgar Alexis Martínez Sarmiento, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Edgar Alexis Martínez Sarmiento

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Edgar Alexis Martínez Sarmiento bajo mi supervisión.

Ing. Ricardo Soto
DIRECTOR DEL PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre por su apoyo incondicional, a mi hermano por enseñarme a persistir y lograr mis sueños, a mi hermana por su creatividad contagiosa y a mi padre por mirar en mí la capacidad de conseguir cumplir esta meta. También agradezco a mi director de tesis Ing. Ricardo Soto por permitirme trabajar en equipo junto a él y darme la oportunidad de hacer posible esta tesis.

Alexis

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi familia, especialmente a mamá, ya que este también es su logro, a papá porque sabe que tiene un hijo capaz. Lo dedico también a Dios que me ha dado la energía, la luz y la salud para vivir esta experiencia.

Alexis

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE	VI
ÍNDICE DE FIGURAS	XII
ÍNDICE DE TABLAS	XVI
ÍNDICE DE CÓDIGO	XVIII
NOMENCLATURA	XIX
RESUMEN	XXIII
PRESENTACIÓN	XXIV
CAPÍTULO 1:	1
1. GENERALIDADES Y DISEÑO DE EJES	1
1.1. OBJETIVOS, ALCANCES Y JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO . . .	1
1.1.1. OBJETIVO GENERAL	1
1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	1
1.1.3. ALCANCES	1
1.1.4. JUSTIFICACIÓN	2
1.2. DISEÑO DE EJES	2
1.2.1. MATERIALES	3
1.2.1.1. Esfuerzo, deformación y respuesta estructural	3
1.2.1.2. Resistencia	7
1.2.1.3. Materiales para ejes y su selección	7
1.2.2. CONFIGURACIÓN DE EJES	9
1.2.2.1. Geometría	9
1.2.2.2. Ejemplo de configuración	11
1.2.3. CARGAS EN EJES	11
1.2.3.1. Tipos de cargas	12

1.2.4. REACCIONES Y DIAGRAMAS DE CORTANTE, MOMENTOS FLECTOR Y TORSOR	13
1.2.4.1. Equilibrio y diagramas de cuerpo libre	13
1.2.4.2. Reacciones	14
1.2.4.3. Cargas internas	15
1.2.4.4. Diagramas de cortante, momento flector y torsor . . .	16
1.2.4.5. Funciones de discontinuidad y singularidad	18
1.2.5. ANÁLISIS DE ESFUERZOS	20
1.2.5.1. Solicitaciones mecánicas en ejes	20
1.2.5.2. Esfuerzos combinados	25
1.2.5.3. Esfuerzos principales (Círculo de Mohr)	26
1.2.6. COEFICIENTES GEOMÉTRICOS DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS	28
1.2.7. TEORÍAS DE FALLA	30
1.2.7.1. Factor de seguridad y factor de diseño	37
1.2.8. DIÁMETRO DEL EJE PARA EL DISEÑO ESTÁTICO	38
1.2.9. FATIGA	41
1.2.9.1. Falla por fatiga	41
1.2.9.2. Esfuerzos fluctuantes	41
1.2.9.3. Método esfuerzo-vida	43
1.2.10. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS A FATIGA Y SENSIBILIDAD A LA MUESCA	44
1.2.11. RESISTENCIA A LA FATIGA	45
1.2.11.1. Factores modificadores del límite de resistencia a la fatiga	46
1.2.12. CRITERIOS DE FALLA A LA FATIGA	49
1.2.13. DIÁMETRO DEL EJE PARA EL DISEÑO DINÁMICO	50
1.2.14. TAMAÑOS PREFERIDOS	51

CAPÍTULO 2:	51
2. PYTHON Y FREECAD	53
2.1. LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN PYTHON	53
2.1.1. CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES	53
2.1.2. TIPOS DE DATOS	54
2.1.2.1. Flotantes y enteros	55
2.1.2.2. Booleanos y cadenas	56
2.1.2.3. Tuplas y listas	56
2.1.2.4. Diccionarios	57
2.1.3. FUNCIONES, CLASES Y OBJETOS	58
2.1.3.1. Funciones	58
2.1.3.2. Clases y objetos	58
2.1.4. OPERADORES Y SENTENCIAS	59
2.1.4.1. Operadores	59
2.1.4.2. Sentencias	61
2.1.5. MÓDULOS Y PAQUETES	63
2.1.5.1. Paquete NumPy	63
2.1.5.2. Paquete matplotlib	63
2.1.6. INTERFAZ GRÁFICA DEL USUARIO (GUI)	64
2.1.6.1. PySide	64
2.2. PROGRAMA DE MODELADO FREECAD	64
2.2.1. CARACTERÍSTICAS	65
2.2.2. MÓDULOS Y ENTORNOS DE TRABAJO	66
2.2.2.1. Herramientas del módulo part	66
2.2.2.2. Entorno de desarrollo para Python a través de FreeCAD	67

CAPÍTULO 3:	68
3. ESPECIFICACIÓN, DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE	69
3.1. ESPECIFICACIONES DEL PROGRAMA	69
3.1.1. REQUERIMIENTOS DEL DISEÑADOR	69
3.1.2. CARACTERÍSTICAS DEL SOFTWARE	70
3.2. DISEÑO DEL PROGRAMA	71
3.2.1. ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA	71
3.2.2. DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS	73
3.2.2.1. Módulo de selección del material	73
3.2.2.2. Módulo de configuración geométrica	73
3.2.2.3. Módulo de cargas	74
3.2.2.4. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos	75
3.2.2.5. Módulo de diseño estático	75
3.2.2.6. Módulo de diseño dinámico	76
3.2.2.7. Módulo de tamaños preferidos	77
3.2.2.8. Módulo de interfaz gráfica de usuario	77
3.3. IMPLEMENTACIÓN DEL PROGRAMA	77
3.3.1. DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES, FUNCIONES E INTERFAZ DE USUARIO	77
3.3.1.1. Módulo principal	78
3.3.1.2. Módulo de selección del material	83
3.3.1.3. Módulo de configuración geométrica	83
3.3.1.4. Módulo de cargas	84
3.3.1.5. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos	86
3.3.1.6. Módulo de diseño estático	88
3.3.1.7. Módulo de diseño dinámico	88
3.3.1.8. Módulo de tamaños preferidos	89

3.3.1.9. Módulo de interfaz gráfica de usuario	90
3.3.1.10. Módulo Mpl (matplotlib)	91
3.3.2. ALGORITMOS CLAVE	91
3.3.2.1. Cálculo de reacciones	92
3.3.2.2. Diagramas de cortante y momentos flector y torsor	93
CAPÍTULO 4:	96
4. INSTALACIÓN, VALIDACIÓN Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM	97
4.1. INSTALACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM	97
4.2. VALIDACIÓN Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM	99
4.2.1. VALIDACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM	99
4.2.1.1. Planteamiento del problema de diseño de un eje para validar el programa EjesDim	99
4.2.1.2. Diseño del eje mediante cálculos manuales	99
4.2.1.3. Diseño del Eje Mediante el Uso del Programa EjesDim	111
4.2.1.4. Diseño del eje mediante el uso del software MDSolids, Inventor y MITCalc	127
4.2.2. EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM	136
4.2.2.1. Recopilación de datos y cálculo del error	136
4.2.2.2. Análisis Comparativo	137
CAPÍTULO 5:	137
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	138
5.1. CONCLUSIONES	138
5.2. RECOMENDACIONES	139
5.3. TRABAJOS FUTUROS	140

BIBLIOGRAFÍA	141
ANEXOS	143
Anexo A. Diagrama UML (Unified Modeling Language)	144
Anexo B. Deducción de las ecuaciones para el cálculo de las reacciones en los apoyos	145
Anexo C. Guía Rápida de Uso del Software EjesDim	147

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Barra cargada axialmente	5
1.2. Curvas esfuerzo-deformación unitaria	6
1.3. Ejemplo de configuración de un eje	11
1.4. Ejemplo de eje cargado con diferentes tipos de cargas	13
1.5. Diagramas de cuerpo libre planos	14
1.6. Fuerzas internas	17
1.7. Distribución de esfuerzos en un eje sometido a flexión	24
1.8. Estado de esfuerzo en un punto	26
1.9. Círculo de Mohr en el diseño de ejes	27
1.10. Estado de esfuerzos principales en un punto	28
1.11. Representación gráfica de la teoría de esfuerzo cortante máximo . . .	32
1.12. Representación gráfica de la teoría de energía máxima de distorsión .	33
1.13. Representación gráfica de la teoría Coulomb-Mohr dúctil	34
1.14. Representación gráfica de la teoría de esfuerzo normal máximo . . .	35
1.15. Representación gráfica de las teorías Coulomb-Mohr frágil y Mohr modificada	37
1.16. Representación de los esfuerzos fluctuantes sinusoidales	42
1.17. Esfuerzo más común en ejes para esfuerzos cortantes	42
1.18. Diagrama S-N	43
1.19. Gráfico de relación entre S'_e y S_{ut} en $[MPa]$	45
1.20. Criterios de falla a la fatiga	49
3.1. Estructura modular del programa EjesDim	72
3.2. Captura de la pantalla de arranque del programa EjesDim	78
3.3. Captura de la pantalla de inicio del programa EjesDim	79
3.4. Captura de la pantalla 'acerca de...' del programa EjesDim	82

3.5. Módulo de selección del material del programa EjesDim	84
3.6. Módulo de configuración geométrica del programa EjesDim	85
3.7. Módulo de cargas del programa EjesDim	87
3.8. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos del programa EjesDim	87
3.9. Módulo de diseño estático del programa EjesDim	89
3.10. Módulo de diseño dinámico del programa EjesDim	90
3.11. Módulo de tamaños preferidos del programa EjesDim	90
3.12. Captura de la interfaz de Qt designer	91
3.13. Viga cargada con diferentes tipos de cargas hipotéticamente para la deducción de la ecuación de las reacciones	92
3.14. Diagrama de flujo del algoritmo para calcular distribución de momentos flectores	95
4.1. Captura de la versión de FreeCAD	97
4.2. Captura del formulario de macros de FreeCAD	98
4.3. Esquema del problema de diseño de un eje sometido a cargas estáticas y dinámicas	100
4.4. Configuración geométrica del eje del problema planteado	100
4.5. Diagrama del cuerpo libre tridimensional del problema de diseño de un eje	101
4.6. Diagrama del cuerpo libre del eje x del problema de diseño de un eje	101
4.7. Diagramas de cuerpo libre planos del problema de diseño de un eje	103
4.8. Diagramas de cargas internas del problema de diseño de un eje	104
4.9. Pantalla de la configuración del eje en el software EjesDim	112
4.10. Pantalla de asignación de cargas en el software EjesDim	113
4.11. Diagramas de cortante y momento flector del plano xy en el software EjesDim	114
4.12. Diagramas de cortante y momento flector del plano xz en el software EjesDim	115

4.13. Diagramas de momentos torsor y total en el software EjesDim	116
4.14. Diseño estático usando la teoría de energía de distorsión en el software EjesDim	117
4.15. Diseño estático usando la teoría del esfuerzo cortante máximo en el software EjesDim	118
4.16. Propiedades del material frágil en el software EjesDim	118
4.17. Coeficiente de concentración de esfuerzos en el software EjesDim . .	119
4.18. Diseño estático usando la teoría de Coulomb-Mohr frágil en el software EjesDim	119
4.19. Diseño estático MM en el software EjesDim	120
4.20. Coeficiente de concentración de esfuerzos en el software EjesDim segunda iteración.	120
4.21. Diseño estático usando la teoría de Coulomb-Mohr frágil en el software EjesDim: segunda iteración	121
4.22. Diseño estático usando la teoría de Mohr modificada en el software EjesDim: segunda iteración	121
4.23. Coeficiente de concentración de esfuerzos a fatiga en el software EjesDim	122
4.24. Diseño dinámico ED-Goodman en el software EjesDim	123
4.25. Diseño dinámico ED-Gerber en el software EjesDim	123
4.26. Diseño dinámico ED-Soderberg en el software EjesDim	124
4.27. Diseño dinámico ED-ASME en el software EjesDim	124
4.28. Coeficiente de concentración de esfuerzos a fatiga en el software EjesDim: segunda iteración	125
4.29. Diseño dinámico ED-Goodman en el software EjesDim: segunda iteración	125
4.30. Diseño dinámico ED-Gerber en el software EjesDim: segunda iteración	126
4.31. Diseño dinámico ED-Soderberg en el software EjesDim: segunda iteración	126
4.32. Diseño dinámico ED-ASME en el software EjesDim: segunda iteración	127

4.33. Diagramas de cortante y momento flector del plano xy en el software MDSolids	128
4.34. Diagramas de cortante y momento flector del plano xz en el software MDSolids	129
4.35. Configuración del eje en el software Inventor	129
4.36. Configuración de cargas eje en el software Inventor	130
4.37. Diagramas de cortantes en xz arriba y xy abajo obtenidos por el software Inventor	130
4.38. Diagramas de momentos en xz arriba y xy abajo obtenidos por el software Inventor	131
4.39. Diámetro del eje en el software Inventor	131
4.40. Diámetro preliminar del eje en el software MITCalc	132
4.41. Configuración geométrica del eje en el software MITCalc	132
4.42. Configuración geométrica de discontinuidades del eje en el software MITCalc	133
4.43. Configuración de cargas del eje en el software MITCalc	133
4.44. Selección del material y tipo de cargas del eje en el software MITCalc	134
4.45. Resumen de resultados del dimensionamiento del eje en el software MITCalc	134
4.46. Diagramas de momentos y cortante en el software MITCalc	135

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Procedimiento para el diseño de ejes	4
1.2. Materiales más comunes para ejes	8
1.3. Reacciones según el tipo de conexión	15
1.4. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en configuraciones típicas de carga	18
1.5. Funciones de discontinuidad y singularidad.	19
1.6. Algunos factores teóricos de concentración de esfuerzos	30
1.7. Valores recomendados para el factor de diseño n	38
1.8. Coeficientes del factor de superficie k_a	47
1.9. Factores de confiabilidad k_e estándar	48
1.10. Números de Renard	52
2.1. Características del Software FreeCAD.	65
2.2. Entornos de trabajo del Software FreeCAD.	66
2.3. Herramientas del Módulo Part en FreeCAD	67
3.1. Requerimientos del diseñador	69
3.2. Características del software EjesDim.	70
4.1. Diámetros calculados manualmente para el diseño estático del eje usando material dúctil	106
4.2. Diámetros calculados manualmente para el diseño estático del eje usando material frágil	108
4.3. Diámetros calculados manualmente para el diseño dinámico del eje .	112
4.4. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño estático con material dúctil	118
4.5. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño estático con material frágil	122

4.6. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño dinámico	127
4.7. Diámetros obtenidos usando MITCalc e Inventor Professional	136
4.8. Comparación de los diámetros obtenidos con respecto al cálculo manual	136

ÍNDICE DE CÓDIGO FUENTE

2.1. Tipos de datos numéricos: enteros	55
2.2. Tipos de datos numéricos: flotantes	55
2.3. Tipos de datos: booleanos	56
2.4. Tipos de datos: cadenas	56
2.5. Tipos de datos: tuplas	56
2.6. Tipos de datos: listas	57
2.7. Tipos de datos: diccionarios	57
2.8. Definición de una función en Python	58
2.9. Definición de una clase en Python	58
2.10. Operadores básicos en Python	59
2.11. Operaciones sobre cadenas en Python	60
2.12. Sentencia “if” en Python	61
2.13. Ciclo “while” en Python	61
2.14. Ciclo “for” en Python	62
2.15. Sentencia “try-except” en Python	62
3.1. Función que calcula los diagramas de momento flector	96

NOMENCLATURA

h	Altura de hombro	[mm]
ϕ	Ángulo de giro de un elemento de esfuerzo en el cual se encuentran los esfuerzos principales	[°]
$V_{1,2}$	Aportes de las funciones de singularidad para el diagrama de cortantes	[N]
$M_{1,2}$	Aportes de las funciones de singularidad para el diagrama de momentos flectores	[Nm]
$Mt_{1,2}$	Aportes de las funciones de singularidad para el diagrama de momentos torsores	[Nm]
A	Área de la sección transversal	[m ²]
N	Carga axial	[N]
Kts	Coefficiente geométrico de concentración de esfuerzos para esfuerzos cortantes	[–]
Kt	Coefficiente geométrico de concentración de esfuerzos para esfuerzos normales	[–]
\sqrt{a}	Constante de Neuber	[\sqrt{pulg}]
ε_f	Deformación real a la fractura	[–]
ε_a	Deformación unitaria	[m]
d	Diámetro del eje	[m]
d_d	Diámetro del eje para el diseño dinámico	[mm]
d_e	Diámetro del eje para el diseño estático	[mm]
d_p	Diámetro preferido	[mm]
y	Distancia desde la fibra neutra en la sección transversal	[m]
δ	Elongación	[m]
τ	Esfuerzo cortante	[MPa]
τ_{xy}	Esfuerzo cortante en dirección perpendicular al eje x y paralelo al eje y	[MPa]
τ_{max}	Esfuerzo cortante máximo en la sección transversal	[MPa]
σ'_a	Esfuerzo equivalente amplitud	[MPa]
σ'	Esfuerzo equivalente de Von Misses	[MPa]
σ'_m	Esfuerzo equivalente medio	[MPa]

σ_n	Esfuerzo normal	[MPa]
σ_x	Esfuerzo normal en el eje x	[Nm]
σ_τ	Esfuerzo normal medio	[MPa]
σ_{max}	Esfuerzo normal máximo en la sección transversal	[MPa]
σ_a, τ_a	Esfuerzo normal/cortante amplitud	[MPa]
σ_{ao}, τ_{ao}	Esfuerzo normal/cortante amplitud nominal	[MPa]
σ_m, τ_m	Esfuerzo normal/cortante medio	[MPa]
σ_{mo}, τ_{mo}	Esfuerzo normal/cortante medio nominal	[MPa]
$\tau_{1,2}$	Esfuerzos cortantes máximos	[MPa]
$\sigma_{1,2}$	Esfuerzos principales	[MPa]
k_c	Factor de carga	[-]
k_e	Factor de confiabilidad	[-]
n	Factor de diseño	[MPa]
n_e	Factor de diseño estático	[-]
k_f	Factor de efectos varios	[-]
k_a	Factor de superficie	[-]
k_b	Factor de tamaño	[-]
k_d	Factor de temperatura	[-]
P	Fuerza concentrada	[N]
\mathcal{V}	Fuerza cortante	[N]
$w(x)$	Función de distribución de cargas	[N]
$t(x)$	Función de distribución de cargas de torsión	[Nm]
$\mathcal{V}(x)$	Función de distribución de cortantes	[N]
$\mathcal{M}(x)$	Función de distribución de momentos flectores	[Nm]
$\mathcal{T}(x)$	Función de distribución de momentos torsores	[Nm]
L	Longitud final o longitud con carga	[m]
L_o	Longitud original o inicial del elemento	[m]
l_{tot}	Longitud total del eje	[mm]
m_{w1}	Magnitud de la carga $w1$	[N][Nm]

$M_{i,f}$	Magnitud inicial y final de las cargas	[N][Nm]
E	Módulo de elasticidad (módulo de Young)	[GPa]
M_o	Momento concentrado	[Nm]
\mathcal{M}	Momento flector	[Nm]
M_a, T_a	Momento flector/torsor amplitud	[MPa]
M_m, T_m	Momento flector/torsor medio	[MPa]
\mathcal{T}	Momento torsor	[Nm]
M_{crit}, T_{crit}	Momentos flector y torsor en la sección crítica	[Nm]
M_{max}, T_{max}	Momentos flector y torsor máximos	[Nm]
M_{min}, T_{min}	Momentos flector y torsor mínimos	[Nm]
$\sigma_{A,B}$	Nombres de la abscisa y ordenada en el plano de la representación de las teorías de falla	[MPa]
a	Posición de una discontinuidad de carga a lo largo del elemento	[m]
X_i, f_{w1}	Posición inicial y final de la carga w_1	[mm]
ρ	Posición radial en la sección transversal	[m]
r	Radio de entalle del cambio de sección	[mm]
R_{y_1}	Reacción en dirección y del apoyo 1	[N]
S_c	Resistencia a la compresión	[MPa]
S_e	Resistencia a la fatiga	[MPa]
S'_e	Resistencia a la fatiga de una probeta	[MPa]
S_y	Resistencia a la fluencia	[MPa]
S_t	Resistencia a la tracción	[MPa]
S_{ut}	Resistencia última a compresión	[MPa]
S_{ut}	Resistencia última a la tracción	[MPa]
S_a, S_m	Resistencias amplitud y media para un criterio específico	[MPa]
K	Rigidez axial	[N/m]
I	Segundo momento del área de la sección transversal	[m ⁴]
J	Segundo momento polar de área de la sección transversal	[m ⁴]
q_s	Sensibilidad a la muesca a torsión	[–]

q	Sensibilidad a la muesca a tracción o compresión	$[-]$
$K_{1,2}$	Suma de las funciones de singularidad de las cargas evaluadas en la longitud del eje	$[-]$
ΣF	Suma vectorial de fuerzas	$[N]$
ΣM	Suma vectorial de momentos	$[Nm]$
ΣF_x	Sumatorio de fuerzas en el eje x	$[N]$
ΣM_x	Sumatorio de momentos alrededor del eje x	$[Nm]$
T_F	Temperatura de operación	$[^{\circ}F]$
$X_{R_{1,2}}$	Ubicación de los apoyos	$[mm]$
$X_{i,f}$	Ubicación inicial y final de las cargas	$[mm]$
x_{σ}	Valor del esfuerzo sin tomar en cuenta el diámetro	$[Nm]$
σ, τ_o	Valor nominal de los esfuerzos	$[MPa]$
σ, τ_{real}	Valor real de los esfuerzos	$[MPa]$

RESUMEN

El diseño de ejes es un proceso que requiere cierto tiempo que las industrias de manufactura pueden aprovechar para otro tipo de actividades.

Este proyecto se enfoca en crear un programa escrito en el lenguaje de programación Python a través del software de diseño paramétrico FreeCAD. El programa está diseñado para que el usuario se permita fácilmente diseñar ejes sometidos a cargas tanto estáticas como dinámicas, sin necesidad de tener que disponer de tanto tiempo para hacerlo.

El software muestra una variedad de recursos al usuario para asegurarse de la convergencia de las soluciones. Posee módulos que analizan la configuración, cargas, los esfuerzos en su sección crítica así como los esfuerzos principales y la aplicación de los mismos usando diferentes teorías de falla. El análisis dinámico posee representaciones de los esfuerzos fluctuantes, de la resistencia a la fatiga y de los criterios de falla. Todo esto para que el diseñador enfoque sus conocimientos sobre otros detalles. Además el eje creado podrá ser exportado para su edición en algún otro programa de diseño paramétrico.

PRESENTACIÓN

El diseño de ejes en la industria es fundamental debido a la infinidad de aplicaciones en las que se utiliza, es por eso que el diseñador mecánico debe tener amplio conocimiento acerca del diseño de este elemento de máquinas.

Existen diferentes métodos de diseño de ejes que toman en cuenta una gran cantidad de características específicas, el software diseñado en este proyecto trata de sintetizar en pasos elementales el diseño de ejes de tal manera que no requiera mucho esfuerzo para el diseñador comprenderlo. En definitiva el programa lo que pretende es reducir el tiempo de diseño de este tipo de elementos facilitando la vida al diseñador.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES Y DISEÑO DE EJES

El presente capítulo contiene la definición de los objetivos, tanto general como específicos, los alcances, la justificación del proyecto y el proceso de diseño de ejes desarrollado como el marco teórico en el cual se basa el programa EjesDim.

1.1. OBJETIVOS, ALCANCES Y JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

A continuación se describirán los objetivos, alcances y justificación del presente proyecto de titulación.

1.1.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un Software para el Diseño Asistido de Ejes.

1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar y analizar las teorías aplicables al diseño de ejes.
- Determinar los parámetros que van a gobernar el control del software en función de la teoría de diseño de ejes.
- Desarrollar el algoritmo que permita utilizar la teoría en función de los parámetros determinados.
- Codificar utilizando lenguaje Python y crear el eje a través del software libre de diseño paramétrico FreeCad.

1.1.3. ALCANCES

- Se desarrollará la aplicación utilizando métodos analíticos en el dimensionamiento y cálculo de los ejes basandose en la teoría del diseño de elementos de máquinas.

- Se limitará el desarrollo del software para el diseño de ejes macizos de sección transversal circular con un determinado número de cambios de sección.
- Se diseñará una interfaz gráfica amigable que asista al diseñador en la mejor selección de cada uno de los parámetros.
- Se verificará la validez del programa comparando resultados del programa desarrollado con diseños de ejes previamente calculados manualmente y mediante otros programas de diseño.

1.1.4. JUSTIFICACIÓN

El diseño de elementos de máquinas ha sido clave en la evolución de la industria y la ingeniería, sin embargo los tiempos requeridos para obtener resultados estaban en función de la habilidad del diseñador para obtener esos resultados rápidamente.

Después de que se crearan las primeras computadoras se enfocó el uso de su capacidad de procesar información en tiempos reducidos al diseño. Se han creado un gran número de aplicaciones que pueden realizar diferentes tareas y que suelen complementarse. Normalmente éstas involucran pasar de un programa a otro la información, hecho que retarda ligeramente el diseño ya que toma un tiempo innecesario.

Este trabajo se enfoca en el desarrollo de una herramienta informática que permite al diseñador un crecimiento productivo gracias a la reducción del tiempo usado en diseñar ejes y la capacidad de exportarlos como sólidos hacia un programa de diseño paramétrico promoviendo el uso de herramientas de código abierto que además benefician a las pequeñas industrias por el hecho de no tener que adquirir licencias costosas para su uso.

Finalmente este proyecto fortalece los lazos que existen entre las ciencias informáticas y las ingenierías, especialmente la mecánica y es un programa que posiblemente a futuro tenga la capacidad de calcular y dimensionar otros elementos de máquinas e incorpore paquetes de análisis mediante elementos finitos y permita geometrías más complicadas para el diseño.

1.2. DISEÑO DE EJES

Una flecha o más comúnmente conocida como eje (aunque la definición de eje en sí difiere de la de una flecha) es quizá el elemento de máquina de mayor importancia

en el diseño de máquinas, éste puede estar sometido a diferentes tipos de cargas que han sido resultado de la interacción con otros elementos de máquina tales como engranajes, poleas, ruedas dentadas e inclusive con los cojinetes o rodamientos en los que se apoya además de otros elementos similares. La mayor parte de los elementos mencionados antes constituyen junto con la flecha un sistema rotatorio u oscilatorio. En el caso de un eje, el eje en sí no presenta movimiento alguno donde los demás elementos son los que giran u oscilan alrededor de éste. Por lo tanto un eje en la mayoría de los casos no presenta cargas fluctuantes y puede analizarse mediante diseño estático.

El diseño estático y a fatiga de ejes involucra muchos conceptos; algunos generales y otros específicos para cada caso. Se considerará el diseño de ejes sometido a cargas estáticas independiente del diseño a fatiga.

El desarrollo de los temas que poseen los conceptos básicos para el diseño de ejes se lo ha ordenado según el procedimiento para dimensionar flechas o ejes como se representa en la tabla 1.1 (Mott, 2006, sec. 12-1) (Velasategui, 2013, sec. 2.6.2)

A continuación se explicará de manera más detallada los conceptos de cada uno de los pasos descritos para el diseño de ejes.

1.2.1. MATERIALES

En esta sección se describirán las propiedades mecánicas más importantes de los materiales a tomar en cuenta en el diseño de ejes: la resistencia a tracción y a compresión, la resistencia a la fluencia y su relación con el esfuerzo. Además se detallarán algunos de los materiales más comúnmente usados para este tipo de elementos de máquinas y las consideraciones más importantes para la selección del material.

1.2.1.1. Esfuerzo, deformación y respuesta estructural

La respuesta estructural cuando se le aplica una carga axial a una barra es intuitivamente un cambio desde una longitud inicial L_0 hasta una longitud L . Lo que interesa es la relación entre esa deformación y la magnitud de la carga aplicada, es aquí donde se introduce una propiedad llamada rigidez. Para una barra de un sólo material de sección constante A , como la de la figura 1.1, si se le aplica una carga axial constante la pendiente de la curva generada por la relación carga N elongación δ se llama rigidez axial K y es una propiedad estructural que presenta la siguiente ecuación:

Tabla 1.1. Procedimiento para el diseño de ejes

Paso	Descripción
1. Materiales	Selección preliminar del material a utilizarse tomando en cuenta las solicitaciones mecánicas del elemento y la naturaleza cíclica del mismo.
2. Configuración	Ubicación de los apoyos, geometría de cambios de sección y de ciertos detalles tales como los radios de entalle en los hombros o los alojamientos de chavetas, etc.
3. Cargas	Definición y configuración de las cargas a las que estará sometido el elemento obtenidas a partir del diseño previo de los componentes que van a conjugarse. Entre éstas el par torsional y los diferentes tipos de cargas radiales y axiales.
4. Reacciones y diagramas	Determinación de las reacciones en los apoyos y los diagramas de cortante, de momento flector y torsor a lo largo del elemento y en los planos correspondientes, obtenidos a partir de un diagrama de cuerpo libre del mismo.
5. Análisis de esfuerzos	Análisis de las componentes de los esfuerzos combinados, principales y esfuerzos cortantes máximos en el punto crítico partiendo de la ubicación de la sección crítica.
6. Coeficiente de concentración de esfuerzos	Estimación de los coeficientes teóricos geométricos de concentración de esfuerzos en función del material seleccionado y el tipo de intensificador de esfuerzos.
7. Teorías de falla	Determinación del esfuerzo de diseño usando las Teorías de Falla.
8. Diámetro del eje para el diseño estático	Mediante un factor de seguridad y la relación con las resistencias del material se determina el diámetro crítico estático.
9. Fatiga	Identificación de los esfuerzos fluctuantes y sus componentes.
10. Coeficiente de concentración de esfuerzos a fatiga	Cálculo de los factores de concentración de esfuerzo a fatiga.
11. Resistencia a la fatiga	Cálculo de la resistencia a la fatiga obtenida con los factores de corrección debidos al acabado superficial, geometría, tipo de carga, temperatura, confiabilidad y otros además de la resistencia a la tensión del material.
12. Criterios de falla a la fatiga	Selección de un criterio de falla a la fatiga junto con la determinación de los esfuerzos equivalentes.
13. Diámetro del eje para el diseño dinámico	Mediante el criterio seleccionado, la relación de los esfuerzos equivalentes con la resistencia a la fatiga y un factor de seguridad se determina iterando, el diámetro crítico dinámico.
14. Tamaños preferidos	Usando la serie de Renard se determina el tamaño ideal del eje aproximando al inmediato superior de la serie.

$$K = \frac{N}{\delta} \quad (\text{Ec. 1.1})$$

La relación generalmente es lineal cuando se trata con deformaciones muy pequeñas tal como en los materiales usados en el diseño de ejes, evidentemente la figura 1.1 se encuentra exageradas sus proporciones con el objetivo de una mejor visualización. Además de presentar una relación lineal entre la deformación y la carga se considera únicamente el rango elástico del material. Elástico significa que el material al cargarlo o descargarlo recorre la misma curva (sea lineal o no) sin cambiar.

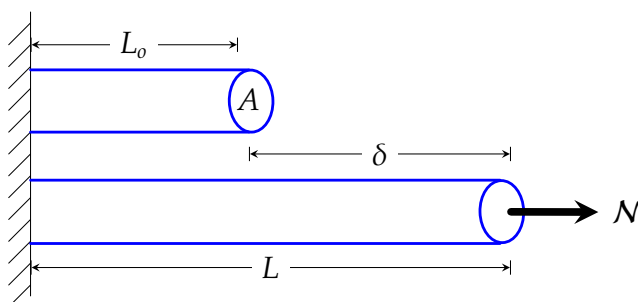


Figura 1.1. Barra cargada axialmente

Ahora considerando otra barra de una sección mayor a la anterior, al aplicar la misma carga de manera intuitiva se puede decir que la deformación será menor (o tendrá una mayor rigidez). En otro caso, en una barra de mayor longitud e igual sección se dice que la deformación será mayor que la barra inicial (o tendrá menor rigidez). Por lo tanto se deduce que la rigidez es directamente proporcional a la sección e inversamente proporcional a la longitud lo que permite en vez de usar la carga como tal usar el esfuerzo, y en vez de usar la elongación como tal usar la deformación unitaria para obtener una relación que es propiedad del material y no de la estructura.

El esfuerzo normal σ_n es la carga N por unidad de área A generalmente expresada en pascuales para el sistema internacional de unidades y la deformación unitaria ε_a se define como la elongación δ sobre la longitud original o inicial L_0 .

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \quad (\text{Ec. 1.2})$$

$$\varepsilon_a = \frac{\delta}{L_0} \quad (\text{Ec. 1.3})$$

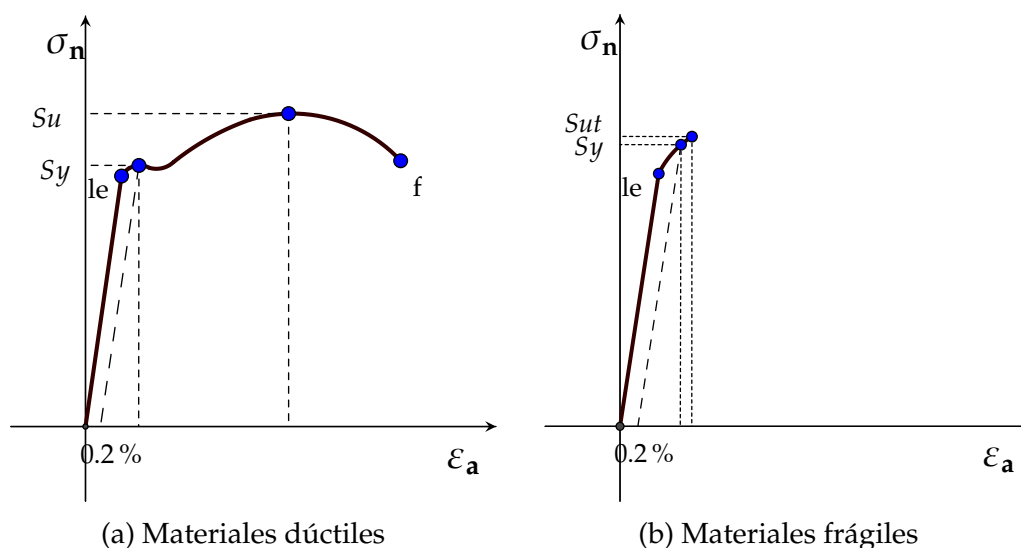


Figura 1.2. Curvas esfuerzo-deformación unitaria

Hecho esto se puede encontrar una única curva que define a las tres barras del mismo material antes mencionadas por medio de una relación que resulta en una propiedad del material por sobre una propiedad estructural. Esta propiedad que es la relación entre el esfuerzo normal σ_n y la deformación unitaria ϵ_a tiene el nombre de Módulo de Young E cuyas unidades son las mismas que las del esfuerzo normal N . Reordenando las cantidades se obtiene una relación constitutiva como sigue:

$$\sigma_n = E \epsilon_a \quad (\text{Ec. 1.4})$$

Finalmente conocido lo anterior se deduce la siguiente ecuación para la rigidez axial:

$$K = \frac{\sigma_n A}{\delta} = \frac{E \epsilon_a A}{\delta} = \frac{A}{L} E \quad (\text{Ec. 1.5})$$

Una curva típica obtenida en un ensayo de tensión se muestra en la figura 1.2 en la cual se puede observar claramente el comportamiento lineal de los materiales sean éstos dúctiles o frágiles. La ductilidad o fragilidad está definida para fallas estáticas por la deformación unitaria real a la fractura ϵ_f del material siendo mayor que el 5 % en materiales dúctiles y menor que 5 % en materiales frágiles (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-10).

El punto le en las figuras 1.2a y 1.2b representa el límite elástico que presenta el material, éste se identifica porque es donde se considera que inicia la deformación plástica. Por otro lado el punto f representa la deformación y el esfuerzo que presentó el elemento un instante antes de la falla. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 2-1)

1.2.1.2. Resistencia

Es importante diferenciar los términos esfuerzo y resistencia ya que a pesar de que presentan las mismas unidades son distintos. El esfuerzo es, de acuerdo a lo que se había definido antes, el resultado de las cargas aplicadas. La resistencia es a diferencia del esfuerzo una propiedad del material que se obtiene a partir de ensayos y representan algún punto en donde se presentó una singularidad durante el ensayo. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 3.2)

Por ejemplo, ciertos materiales al someterlos a éste ensayo presentan en un punto gran deformación unitaria sin mucho cambio en el esfuerzo. Dicho punto se lo conoce como punto de fluencia y define la resistencia a la fluencia S_y que no es más que el valor del esfuerzo al que se produjo el fenómeno. Muchas veces los materiales no presentan claramente la fluencia por lo que la resistencia a la fluencia S_y suele determinarse usando un método de corrimiento, utilizando una línea paralela a la formada hasta el límite elástico y desplazada horizontalmente un 0.2 % de elongación. La ordenada de la intersección con esa línea corresponde al valor de S_y . (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 2-1)

Otro valor importante a definir, que es propiedad de los materiales, es la resistencia última a la tracción S_{ut} que está definida por el máximo esfuerzo al que estuvo sometido una probeta durante un ensayo de tracción. Una gran cantidad de materiales dúctiles presentan aproximadamente la misma resistencia última tanto a tracción como a compresión y se la suele llamar únicamente como S_u , sin embargo es importante considerar que en ciertos materiales, como en algunos frágiles, se presenta diferente resistencia última en tracción S_{ut} y en compresión S_{uc} .

Además de las mencionadas existen resistencias obtenidas con otros tipos de ensayo. En secciones posteriores se describirá una de las más importantes a considerar en el diseño de ejes que es la resistencia a la fatiga.

1.2.1.3. Materiales para ejes y su selección

Cuando se quiere establecer un material para que soporte cierta carga la selección debe estar en función de la resistencia del mismo, sin embargo en el diseño de flechas o ejes no basta con la resistencia del material como parámetro de selección sino que también involucra otro tipo de propiedades mecánicas tales como la rigidez que se controla tomando decisiones geométricas sobre el elemento.

Los ejes, tomando en cuenta lo anterior, son generalmente de materiales dúctiles,

de acero de bajo carbono: aceros estirados en frío o laminados en caliente y pueden ser tratados térmicamente e inclusive endurecidos superficialmente. Se usan materiales frágiles en casos especiales de bajo ciclaje y de alta producción que generalmente son fundiciones integrales con los engranajes o levas. Se necesita especial atención la selección del material cuando los ejes se encuentren sometidos a cargas que puedan producir falla por fatiga.

En la selección de materiales hay que considerar los siguientes factores:

- Disponibilidad
- Costo
- Propiedades del material (mecánicas, físicas, químicas, dimensionales)
- Procesos de manufactura (mecanizado, conformado, facilidad de unión, acabado, revestido)

Los pasos en el proceso de selección de materiales suelen ser iterativos e involucran un enfoque de toma de decisiones que el diseñador debe enfrentar. (Juvinal y Marshek, 2012, sec. 3.14)

En la selección se puede probar con distintos materiales, primero considerando la resistencia del mismo, no dejando de lado las consideraciones sobre la deflexión del eje que podrían afectar a los otros elementos conjugados con el mismo. Los materiales recomendados se muestran en la tabla 1.2. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 7-2)

Tabla 1.2. Materiales más comunes para ejes

Tipo	Nombre	Procesamiento
Aceros	AISI 1020-1050	Laminado en caliente
	AISI 1020-1050	Estirado en frío
Aceros Tratados	AISI 4140	Templado y revenido
		Normalizado
	AISI 4340	Recocido
Hierros Fundidos	ASTM 20-60	Templado y revenido
		Sin procesamiento

La disponibilidad y el costo son parámetros muy importantes, por lo que debe trabajarse con catálogos proporcionados por distribuidores locales en la selección del material. De igual manera, disponer de la información de más de un proveedor tiene como ventaja poder comparar los costos de los diferentes materiales

disponibles. Es necesario tomar en cuenta también las medidas normalizadas de las barras que serían la materia prima para el eje.

1.2.2. CONFIGURACIÓN DE EJES

Los ejes (o flechas) se usan como componentes en una gran diversidad de máquinas transmitiendo o no el movimiento rotatorio y torque. Puede encontrarse éste tipo de elementos por ejemplo en: cajas de velocidades con engranajes, bandas o cadenas, cintas transportadoras, turbomáquinas: bombas, ventiladores, turbinas; podadoras, en vehículos terrestres, aéreos, marítimos y hasta en varios electrodomésticos. (Mott, 2006, sec. 12)

La aplicación requerida para el eje es fundamental para el diseño del mismo, esto determinará qué otros elementos irán conjugados con el eje, en qué ubicaciones, bajo qué condiciones de carga, etc. Asimismo es necesario tomar en cuenta el montaje y desmontaje del eje en sí, como también de los elementos acoplados.

1.2.2.1. Geometría

La geometría está en función de los otros elementos a acoplarse como los cojinetes, engranajes, catalinas, poleas, etc. Dependiendo del elemento se determina la posición y método de sujección axial sobre el eje y además del método de transmisión de potencia. Si es un factor importante el peso, se puede considerar el uso de ejes huecos.

1.2.2.1.1. Configuración axial

Teniendo lista la disposición de los elementos a acoplarse con el eje se procede a configurarlo geométricamente. Por ejemplo para limitar el desplazamiento axial en componentes como: engranajes, cojinetes, poleas, entre otros; suele establecerse escalones u hombros, o resaltos. Pueden usarse también ajustes de presión, pasadores, collarines separadores con tornillos de sujección o anillos de retención e inclusive roscados parciales.

La limitación de desplazamiento axial se traduce en cargas de empuje que posteriormente serán transmitidas a los cojinetes, luego al bastidor y finalmente al suelo. Se pretende siempre que las cargas axiales transmitidas al eje sean soportadas por un solo cojinete dimensionado para soportar dichas cargas.

1.2.2.1.2. Ubicación de soportes

En la mayoría de aplicaciones lo más común es usar dos cojinetes para soportar el eje y limitar la flexión y deflexión dentro de valores aceptables, sin embargo existen algunas aplicaciones donde se requieren más de dos soportes tales como en el cigüeñal de los motores de combustión interna o en ejes tipo eje-línea que abastecían en la antigüedad de potencia a varias maquinarias en un proceso productivo. En esos casos se requiere gran precisión en el alineamiento debido a que la deflexión resulta mucho más crítica que usando dos apoyos.

La separación entre soportes debe ser la menor posible y lo más cercano a las cargas de mayor magnitud. En el caso de presentarse cargas alejadas de los apoyos los momentos flectores a los que se somete el eje se maximizan, el mismo efecto se produce cuando la separación es excesiva e innecesaria. Lo correcto es dejar un espacio únicamente con el objetivo de facilitar el acceso a los componentes. También debido a la flexión lo más adecuado es minimizar la longitud del eje en sí.

1.2.2.1.3. Transmisión de torque

Para la transmisión de potencia de gran magnitud las mejores opciones son: el uso de chavetas o lengüetas y el maquinado de estrías, éstos además permiten el desplazamiento axial de los elementos que pueden facilitar el montaje y desmontaje. También pueden usarse pasadores con la desventaja que transmiten menor torque, son más críticos en cuestión de concentración de esfuerzos y además restringen el movimiento axial. Otros elementos que permiten transmitir el par de torsión pueden ser: los tornillos de fijación, ajustes a presión y ajustes ahusados. (Juvinal y Marshek, 2012, sec. 17.2-3) (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 7-3)

1.2.2.1.4. Concentradores de esfuerzos

En el diseño se prefiere en lo posible, radios de entalle generosos y buenos acabados superficiales debido a que son una influencia directa en los coeficientes geométricos teóricos de concentración de esfuerzos y en el cálculo de la resistencia a la fatiga. Éstos temas se analizarán detenidamente más adelante.

1.2.2.2. Ejemplo de configuración

En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de configuración de un eje. A la izquierda (figura 1.3a) se presenta la información inicial, como se puede observar como dato se tiene las ubicaciones de los apoyos, y la existencia de dos engranajes helicoidales en sus respectivas ubicaciones. Se supone que además vienen dados como datos las cargas transmitidas en dichos elementos. Una posible solución se

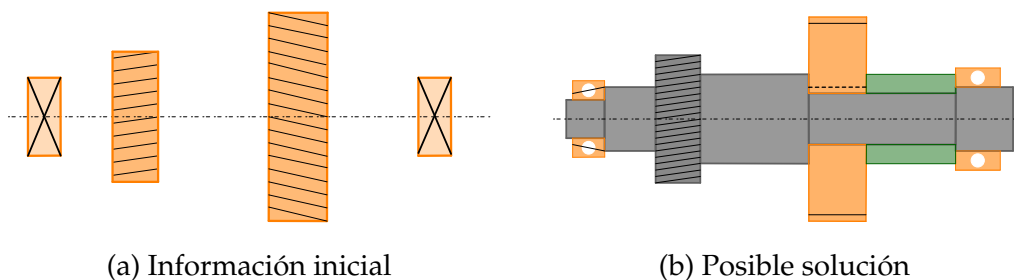


Figura 1.3. Ejemplo de configuración de un eje
Fuente: (Budynas y Nisbett, 2012, fig. 7-2)

muestra en la figura 1.3b, que define a un eje integral con el primer engranaje, presenta cambios de sección para limitar el desplazamiento axial en una dirección del otro engranaje, y para fijarlo se ha acoplado un collarín desmontable junto al cojinete. La carga axial, transmitida por un hombro, la soporta el primer cojinete y finalmente la manera seleccionada para transmitir el par rotatorio ha sido mediante una chaveta para el segundo engranaje.

1.2.3. CARGAS EN EJES

A lo largo del estudio del diseño de ejes se los tratará como elementos estructurales sometidos a diferentes tipos de cargas espaciales y generalmente con las características de una viga isostática simplemente apoyada. Para más de dos apoyos los ejes deben calcularse como un caso de flexión indeterminada.

Una viga isostática es un elemento estructural que se encuentra sometido a cargas de diferente naturaleza generalmente perpendiculares al eje longitudinal de la misma y está estáticamente definido por completo.

Las cargas espaciales se descomponen en los diferentes planos ortogonales permitiendo trabajar como una estructura plana en cada uno.

1.2.3.1. Tipos de cargas

Las cargas o fuerzas externas de superficie están ligadas directamente con un área de contacto sin embargo puede tratárselas como:

- **Cargas concentradas:** Cuando el área de contacto entre los cuerpos es muy pequeña.
- **Cargas distribuídas:** Cuando, a diferencia del anterior tipo, el área de aplicación de ésta puede idealizarse en un área estrecha y forma una distribución longitudinal y plana. Una carga distribuída puede tomarse como una fuerza resultante concentrada en el centroide del área del diagrama de carga y tiene una magnitud igual al área bajo la curva.
- **Torques o Momentos:** Miden la tendencia de una fuerza a rotar un cuerpo con respecto a un punto de referencia y puede ser resultado de un par o una fuerza individual. La tendencia de giro o momento tanto torsor como flector se detallarán en la siguiente sección.

Adicional a éstas se puede hablar también de las fuerzas de cuerpo que son producto del efecto de un campo gravitatorio, electromagnético o de una naturaleza tal que no requiera contacto físico en la interacción de los cuerpos implicados como ejemplo el peso, que es producto de la interacción con el campo gravitatorio de la tierra. Es común tratarlas como cargas concentradas. (Hibbeler, 2006, sec. 1.2) Un par de fuerzas es un conjunto de dos fuerzas de igual magnitud que actúan en direcciones opuestas cuyas líneas de acción se encuentran separadas por una distancia. Un par puede sustituirse por un momento concentrado ya que es independiente de la ubicación del punto de referencia de giro.

Una carga se define por su tipo, magnitud y punto o área de aplicación y considerando que puede ser espacial, la orientación de la misma se puede definir mediante ángulos auxiliares o mediante vectores unitarios u otras cantidades geométricas. En la figura 1.4 se pueden observar las cargas concentradas: F_z , R_{y1} , R_{y2} y R_z , las tres últimas son reacciones y se explicarán detalladamente en la siguiente sección. Además se puede observar claramente una carga distribuida lineal $w(x)$, dos momentos torsores denotados como: T_1 y T_2 y finalmente un momento flector concentrado M . Se observa claramente que la naturaleza de las cargas aplicadas sobre un eje son generalmente espaciales y en su mayoría de manera radial.

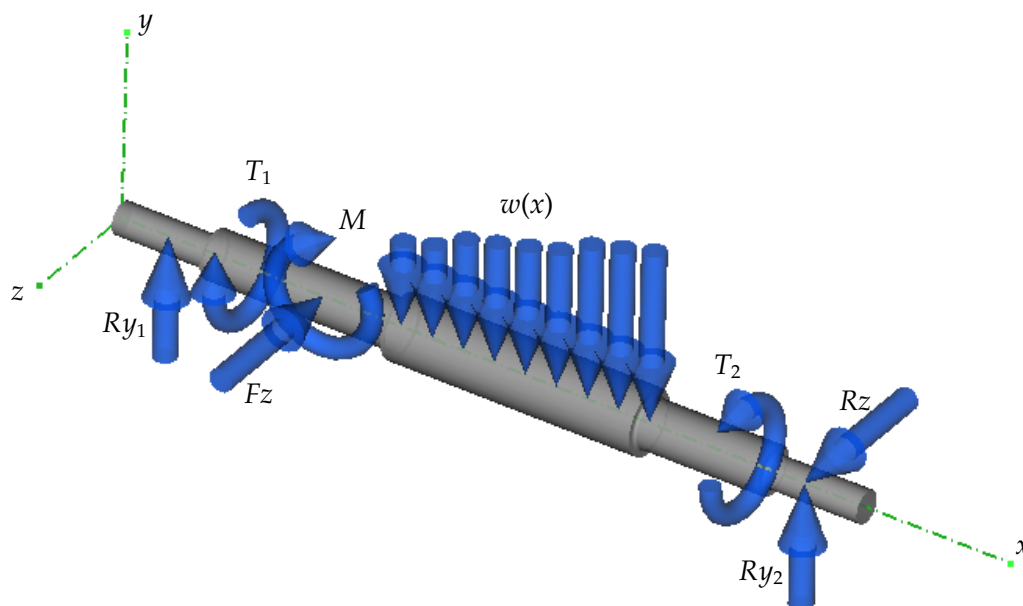


Figura 1.4. Ejemplo de eje cargado con diferentes tipos de cargas

1.2.4. REACCIONES Y DIAGRAMAS DE CORTANTE, MOMENTOS FLECTOR Y TORSOR

En esta sección se describen conceptos muy importantes en el diseño de ejes: encontrar correctamente los diagramas de momento flector y torsor son un punto de partida para el análisis de esfuerzos en el elemento.

1.2.4.1. Equilibrio y diagramas de cuerpo libre

Habiendo definido los diferentes tipos de cargas, se puede introducir el término equilibrio que se produce cuando un cuerpo tiene velocidad constante, o en otras palabras, se traslada uniformemente respecto a un marco de referencia inercial. La velocidad puede tomar o no el valor de cero respecto al marco referencial, en ese caso siempre se cumple que el cuerpo presenta una aceleración nula. De la ecuación de la segunda ley de Newton, con el valor de la aceleración igual a cero se pueden deducir las ecuaciones de equilibrio (Ec. 1.6) que son expresiones vectoriales y restringen el movimiento tanto de rotación como de traslación. Como una buena práctica, los vectores espaciales se los descompone en planos con el fin de mantener un orden adecuado y calcular con mayor facilidad las incógnitas. (Bedford, 2000, sec. 3.2)

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= 0 \\ \Sigma \mathbf{M} &= 0\end{aligned}\tag{Ec. 1.6}$$

De manera escalar se describen seis ecuaciones como en (Ec. 1.7) donde se establece el equilibrio con los componentes cartesianos de las cargas.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 & \Sigma M_y &= 0 & \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\quad (\text{Ec. 1.7})$$

Un diagrama de cuerpo libre no es más que una herramienta visual donde se representa el cuerpo en equilibrio, aislado completamente del resto de componentes. La figura 1.4 es en sí un diagrama de cuerpo libre del eje. Sin embargo se suele trabajar en los planos XY y XZ tomando en cuenta únicamente las cargas aplicadas en cada uno como en la figura 1.5. Es importante tomar en cuenta

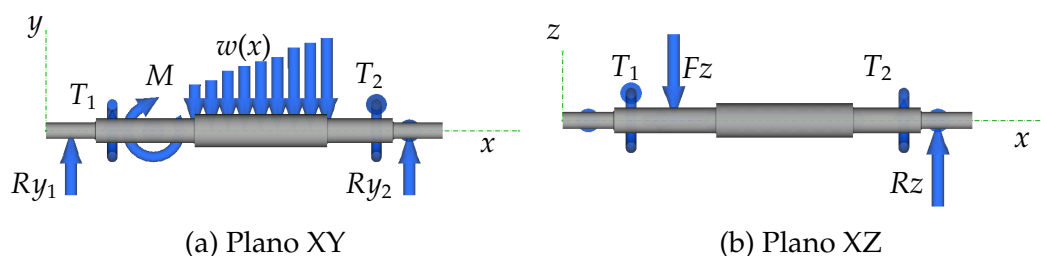


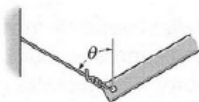
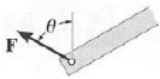



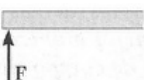
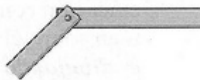
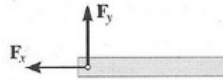
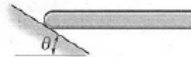
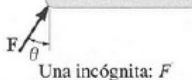

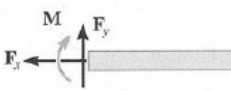
Figura 1.5. Diagramas de cuerpo libre planos

la convención de signos que para las cargas puntuales y distribuidas se establece normalmente en el mismo sentido que los ejes como positivo sin embargo con un enfoque diferente se tomarán al contrario, esto se explicará posteriormente. Para torques y momentos se tomará el sentido antihorario como positivo.

1.2.4.2. Reacciones

Las ecuaciones (Ec. 1.6) o (Ec. 1.7) se usan para determinar las reacciones que son: las fuerzas o momentos que resultan de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo en equilibrio en los soportes del mismo. Las reacciones dependen del tipo de conexión que haya entre el eje y sus apoyos, en la tabla 1.3 se puede observar diferentes tipos de conexiones bidimensionales con sus respectivos equivalentes en reacciones. Los ejes se los toma generalmente idealizando una viga simplemente apoyada que significa que uno de los apoyos es fijo y el otro es móvil o dicho de otra manera: presenta un apoyo de rodillo en un lado y uno de pasador al otro como los de la tabla 1.3. Para determinar el valor de las reacciones se procede a resolver el sistema de ecuaciones que resulta de establecer el equilibrio en un cuerpo, usando los diagramas de cuerpo libre y suponiendo las reacciones como fuerzas puntuales en la dirección positiva según la convención usada.

Tabla 1.3. Reacciones según el tipo de conexión
Fuente: (Hibbeler, 2006, tabla 1.1)

Tipo de conexión	Reacción	Tipo de conexión	Reacción
 Cable	 Una incógnita: F	 Pasador externo	 Dos incógnitas: F_x, F_y
 Rodillo	 Una incógnita: F	 Pasador interno	 Dos incógnitas: F_x, F_y
 Soporte fijo	 Una incógnita: F	 Empotramiento	 Tres incógnitas: F_x, F_y, M

En el presente proyecto no se tratará con sistemas indeterminados o hiperestáticos sino únicamente con sistemas completamente definidos, determinados o isostáticos por lo que el sistema de ecuaciones presentará el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

1.2.4.3. Cargas internas

Las cargas internas son fuerzas resultantes que actúan dentro de un cuerpo y que mantienen unido al mismo íntegramente cuando éste está sometido a cargas externas.

Existe un método que facilita la determinación de las cargas internas de un cuerpo que consiste en realizar cortes en las secciones donde se necesita encontrar la carga interna. Este método se llama por esa razón el método de las secciones. Al seccionar, en la parte expuesta debe existir una distribución de fuerzas internas de tal forma que se siga manteniendo el equilibrio en el cuerpo analizado. El método se usa conjuntamente con las ecuaciones de equilibrio (Ec. 1.7) para encontrar en el punto determinado las cargas internas.

Existen varios tipos de cargas internas resultantes que pueden definirse en las siguientes formas:

1.2.4.3.1. *Fuerza normal, N*

Surge como una fuerza perpendicular al área expuesta cuando las fuerzas externas tienden a comprimir o estirar el elemento analizado.

1.2.4.3.2. *Fuerza cortante, V*

Es una fuerza que se encuentra en el área seccionada de manera paralela a la misma, y resulta de las cargas externas que tienden a deslizar una sección sobre la otra.

1.2.4.3.3. *Momento torsor, T*

Se presenta de manera similar a las fuerzas cortantes pero el efecto ocasionado por las fuerzas externas es de deslizamiento angular mediante un giro relativo a un eje perpendicular al área.

1.2.4.3.4. *Momento flector, M*

Las cargas externas que producen esta carga interna tienden a girar la sección analizada respecto a un eje dentro del plano del área. (Hibbeler, 2006, sec. 1.2)

Para las fuerzas internas también existe una convención de signos a seguir donde: las cargas distribuidas son positivas hacia abajo; las fuerzas normales y los momentos torsores son positivos cuando salen perpendicularmente de la sección cortada; las fuerzas cortantes se las considera positivas en la dirección que tienda a girar el elemento en sentido horario y los momentos flectores se consideran positivos cuando producen una deflexión cóncava. (Hibbeler, 2006, sec. 6.1)

De esta manera como se muestra en la figura 1.6 si se realiza un corte imaginario y se toma la sección izquierda, por convención se establecen las direcciones positivas como están graficadas. La doble flecha de $T(x)$ representa un momento torsor y todas están en función de la posición porque el objetivo es encontrar la distribución de las fuerzas internas a lo largo del elemento.

1.2.4.4. **Diagramas de cortante, momento flector y torsor**

Las cargas internas a lo largo de todo el elemento se las puede representar gráficamente mediante los diagramas de cortante, momento flector y torsor. Estos permiten identificar las zonas de mayor concentración de cargas internas además de la sección crítica donde podría fallar el eje. En la figura 1.6 se puede ver una

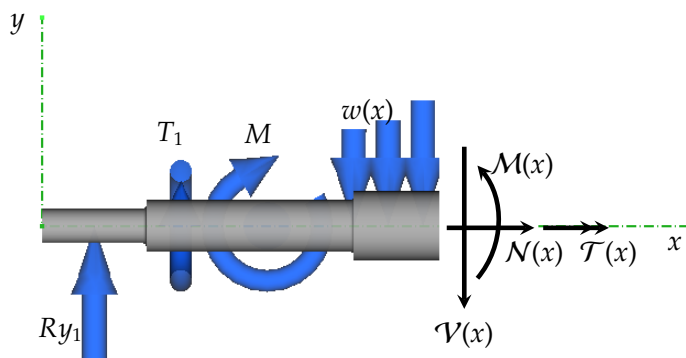


Figura 1.6. Fuerzas internas

sección del eje equilibrada con las fuerzas internas de diferentes tipos. Aplicando las ecuaciones de equilibrio (Ec. 1.7) y realizando varios cortes a lo largo del elemento e introduciendo la variable de posición, se puede encontrar las distribuciones de las fuerzas internas a lo largo del eje.

De otra manera se sabe también que si se aplica una carga distribuida se puede establecer la relación (Ec. 1.8), obtenida equilibrando un elemento diferencial de viga sometida a una carga distribuida $w(x)$ y usando la convención de signos respectiva.

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \quad (\text{Ec. 1.8})$$

Entre el momento flexionante y la fuerza cortante se deduce de manera similar la relación (Ec. 1.9).

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (\text{Ec. 1.9})$$

Operando debidamente se puede encontrar la distribución de las cargas tanto para momentos flectores como para fuerzas cortantes como una alternativa al uso de las ecuaciones de equilibrio. (Hibbeler, 2006, sec. 6.2)

Asimismo para el diseño de ejes se necesita determinar el diagrama de momentos torsores. Para eso se utiliza o las ecuaciones de equilibrio (Ec. 1.7) junto al método de secciones o la ecuación diferencial (Ec. 1.10). (Bittencourt, 2015, sec. 4.7)

$$\frac{dT(x)}{dx} = -t(x) \quad (\text{Ec. 1.10})$$

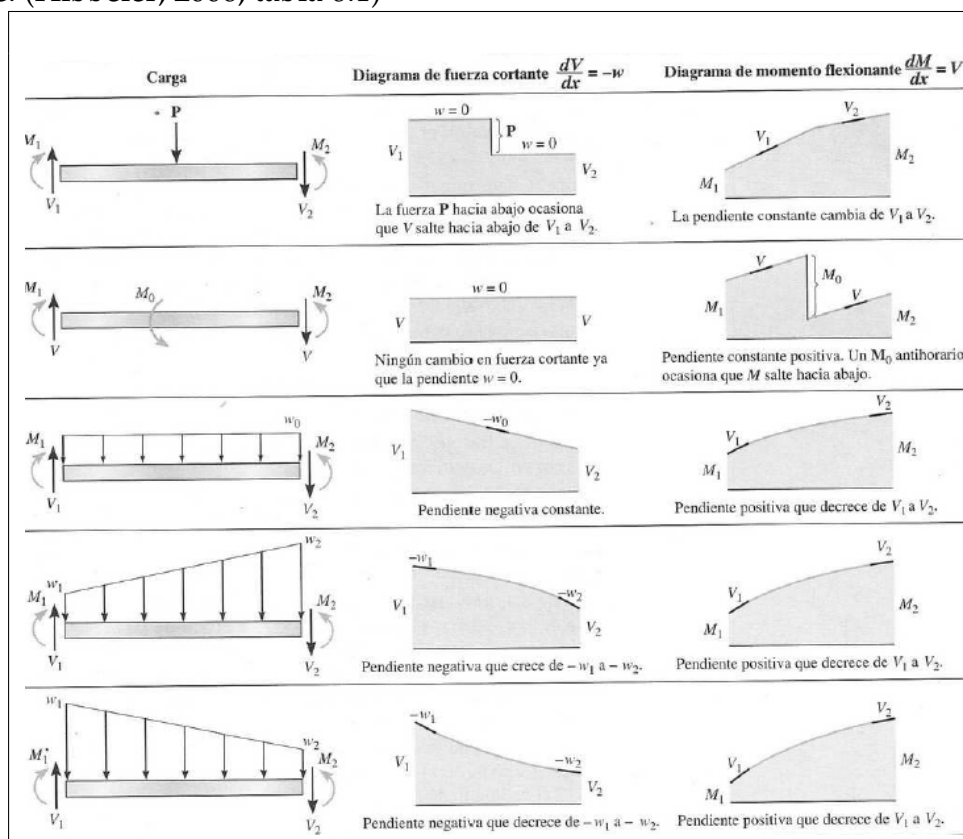
En donde $t(x)$ representa una carga torsional distribuida.

Además de éstos, existen otros métodos para encontrar los diagramas de cortante, momento flector y torsor.

La tabla 1.4 presenta varias distribuciones de fuerza cortante y momento flector en diferentes configuraciones de cargas externas.

Tabla 1.4. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en configuraciones típicas de carga

Fuente: (Hibbeler, 2006, tabla 6.1)



1.2.4.5. Funciones de discontinuidad y singularidad

Al presentarse varios tipos de cargas a lo largo del elemento a diseñar, para usar directamente las expresiones (Ec. 1.8) a (Ec. 1.10) es necesario definir por tramos el elemento, lo que lleva a manejar varias constantes de integración y condiciones de continuidad. Para evitar esto, Macaulay formuló un grupo de funciones que permiten definir en una sola las ecuaciones de carga, fuerza cortante, momento flector y torsor del elemento.

1.2.4.5.1. Funciones de Macaulay

Son funciones que en su definición incluyen los puntos de inicio o fin de una carga distribuida (discontinuidad) evitando de esta manera el uso de condiciones de continuidad. En una forma general se escriben como en (Ec. 1.11) representadas mediante paréntesis angulares.

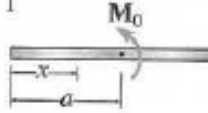
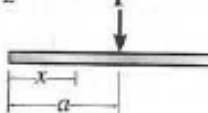
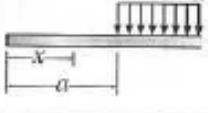
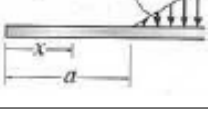
$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x - a)^n & x \geq a \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.11})$$

$$n \geq 0$$

Están restringidas a valores de n mayores o iguales a 0. El valor de x representa la variable posición a lo largo del elemento y a es donde se encuentra la discontinuidad. Éstas funciones son integrables usando la regla de integración para funciones ordinarias y permiten usar la superposición para crear diferentes distribuciones.

Integrando las funciones de carga de Macaulay según las ecuaciones (Ec. 1.8), (Ec. 1.9) y (Ec. 1.10) se puede obtener las funciones de cortante, momento flector y torsor de Macaulay.

Tabla 1.5. Funciones de discontinuidad y singularidad.
Fuente: (Hibbeler, 2006, tabla 12.2)

Carga	Función de carga $w = w(x)$	Cortante $V = -\int w(x) dx$	Momento $M = \int V dx$
1 	$w = M_0 \langle x - a \rangle^{-2}$	$V = -M_0 \langle x - a \rangle^{-1}$	$M = -M_0 \langle x - a \rangle^0$
2 	$w = P \langle x - a \rangle^{-1}$	$V = -P \langle x - a \rangle^0$	$M = -P \langle x - a \rangle^1$
3 	$w = w_0 \langle x - a \rangle^0$	$V = -w_0 \langle x - a \rangle^1$	$M = -\frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2$
4 pendiente = m 	$w = m \langle x - a \rangle^1$	$V = \frac{-m}{2} \langle x - a \rangle^2$	$M = \frac{-m}{6} \langle x - a \rangle^3$

La tabla 1.5 muestra las funciones de Macaulay de carga, cortante y momento flector para cuatro valores de n .

1.2.4.5.2. Funciones de singularidad

Las funciones de singularidad describen casos específicos como fuerzas concentradas o momentos puntuales resultantes de pares de fuerzas. Para una

fuerza concentrada se puede definir la ecuación (Ec. 1.12) y para un momento concentrado sea torsor o flector la ecuación (Ec. 1.13).

$$w = P\langle x - a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ P & x = a \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.12})$$

$$w = M_o\langle x - a \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ M_o & x = a \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.13})$$

La integración de estas funciones poseen diferente comportamiento únicamente incrementando el valor de n en una unidad y sin involucrar una constante de integración. Esto se puede ver claramente en la tabla 1.5 en los valores del cortante y del momento. Para este enfoque las cargas externas usan la convención de signos de ser positivas hacia abajo.

Al aplicar éste método se debe tener especial cuidado en las cargas distribuidas y las trapezoidales debido a que requieren uso del método de superposición que consiste en utilizar diferentes tipos de distribuciones sumadas o restadas para obtener unas nuevas.

1.2.5. ANÁLISIS DE ESFUERZOS

Anteriormente ya se había definido el esfuerzo normal como la carga N por unidad de área A expresada en pascales en la ecuación (Ec. 1.2).

Además del esfuerzo normal se puede diferenciar un esfuerzo en dirección tangencial a la superficie aislada representado con la letra griega τ , producido por las fuerzas cortantes como V de la figura 1.6. Los esfuerzos presentan la misma convención de las fuerzas internas de modo que un esfuerzo normal positivo sale del área en cuestión y un esfuerzo cortante positivo tiende a rotar horariamente la sección. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-4)

A continuación se describirán algunos conceptos de gran importancia en el diseño de ejes respecto a los esfuerzos.

1.2.5.1. Solicitaciones mecánicas en ejes

Las sollicitaciones mecánicas tienen esfuerzos asociados a éstas. En su manera más simple, para una barra sólida de sección constante, los esfuerzos producidos son por:

1.2.5.1.1. Carga axial

Los ejes presentan esfuerzos normales en dos casos: el primero tiene que ver con la conjugación del mismo con otros elementos de máquinas, éstos le transmiten carga axial generando esfuerzos normales dentro del eje. Un ejemplo claro de esto son los engranajes helicoidales. El segundo caso sucede implícitamente dentro de la flexión que se explicará posteriormente.

La carga axial entonces, como se había mencionado, produce esfuerzos normales sean éstos de tracción o de compresión. Tienen menor importancia en la mayoría de diseños de ejes, debido a que en comparación con los otros tipos de cargas son muy pequeñas; sin embargo se prefiere cargar a compresión el elemento para producir una distribución de esfuerzos ligeramente desviada que da valores menores a los que se calculan omitiendo este tipo de cargas. Las cargas axiales por más pequeñas que sean influyen en la selección de los cojinetes.

Ya se había mencionado algo acerca de los esfuerzos normales anteriormente e inclusive ya se definió de manera general la expresión que gobierna el fenómeno en la ecuación (Ec. 1.2). También en la ecuación (Ec. 1.3) se realizó una pequeña descripción de la deformación que sufre un elemento cargado axialmente. Finalmente la ecuación (Ec. 1.4) relaciona las dos ecuaciones anteriores dándo como resultado una expresión para el rango lineal del material homogéneo.

De manera general siendo cargado a compresión o tracción por el centroide de la sección, para un elemento recto, de material homogéneo y siendo la sección lo suficientemente alejada de los extremos y sin discontinuidades, la expresión del esfuerzo normal es la de la ecuación (Ec. 1.2). (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-9)

$$\sigma_n = \frac{N}{A}$$

Donde N es la carga axial y A es el área de la sección transversal. (Hibbeler, 2006, sec.4.2)

Para una sección circular típica en ejes macisos el área está dada en función del diámetro como en la ecuación (Ec. 1.14) lo que resulta finalmente en la ecuación (Ec. 1.15) de esfuerzo específica para ejes macisos.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{Ec. 1.14})$$

$$\sigma_n = \frac{4P}{\pi d^2} \quad (\text{Ec. 1.15})$$

De manera similar, si se quiere determinar el esfuerzo axial en barras circulares huecas se usa el área de la sección correspondiente.

Una forma de falla especial para carga axial en compresión es el pandeo, y se produce con elementos esbeltos y con cargas de gran magnitud por lo que no se lo toma en cuenta en el diseño de la mayoría de ejes.

1.2.5.1.2. Cortante directo

El esfuerzo cortante directo en el diseño de ejes puede o no ser importante dependiendo de la magnitud que tenga. Aunque generalmente se considera de mayor importancia el cortante que se produce por flexión que está descrito con más detalle posteriormente.

En una distribución uniforme de esfuerzo igual a la de la carga axial se puede establecer una relación válida para cortante directo como en la ecuación (Ec. 1.16) sin producir ningún efecto de flexión y suponiendo que es uniforme a través de la sección transversal. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-9)

$$\tau = \frac{V}{A} \quad (\text{Ec. 1.16})$$

Donde V es la fuerza cortante y A es el área de la sección transversal sometida a corte. Usando la ecuación del área circular de una barra macisa de la ecuación (Ec. 1.14) se puede encontrar la ecuación (Ec. 1.17) para el esfuerzo cortante especial para barras circulares macisas.

$$\tau = \frac{4V}{\pi d^2} \quad (\text{Ec. 1.17})$$

1.2.5.1.3. Torsión

La torsión está presente en el eje en el caso de que se requiera transmitir potencia, la magnitud de los esfuerzos producidos por torsión suele ser considerable y son importantes en el diseño del eje.

Para flechas circulares se ha deducido un grupo de ecuaciones que definen el fenómeno de torsión; sin embargo la más importante es la ecuación (Ec. 1.18) donde T es el par de torsión, J es el segundo momento polar de inercia del área y tomando en cuenta la distribución lineal que se presenta en forma radial está la variable ρ cuyo valor máximo es el radio exterior. (Hibbeler, 2006, sec. 5.2)

$$\tau = \frac{\mathcal{T}\rho}{J} \quad (\text{Ec. 1.18})$$

Para una sección circular sólida el segundo momento polar de inercia tiene la forma de la ecuación (Ec. 1.19), por lo tanto al unirla con la ecuación (Ec. 1.18) con su valor máximo, se puede obtener la expresión (Ec. 1.20) exclusiva para el esfuerzo de torsión máximo para una sección circular sólida. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 4.4)

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{Ec. 1.19})$$

$$\tau_{max} = \frac{16\mathcal{T}}{\pi d^3} \quad (\text{Ec. 1.20})$$

1.2.5.1.4. Flexión

Tomando en cuenta que las cargas que producen flexión y torsión son las que gobiernan el dimensionamiento del eje es de vital importancia conocer las relaciones que describen los esfuerzos que aparecen en éstos casos. La flexión a diferencia de la torsión además de esfuerzos cortantes presenta implícitos esfuerzos normales.

Siempre y cuando se tomen en cuenta los siguientes supuestos se puede deducir las ecuaciones a usar en el diseño de ejes.

- Flexión pura suponiendo que las secciones transversales no se deformen.
- Material homogéneo e isotrópico y que cumple con la ley de Hooke
- Viga recta, simétrica en el plano de flexión y de sección transversal uniforme, que geométricamente posee las proporciones para que falle a flexión.

En la flexión los esfuerzos normales presentan una distribución en la sección transversal que generalmente tiene forma lineal de tal forma que justamente en el eje neutro cambia de signo provocando así un comportamiento tanto a tracción como a compresión. La representación izquierda en la figura 1.7 corresponde a la distribución de esfuerzos normales en un eje. Las ubicaciones críticas en este caso son en los puntos A y C. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-10)

Sin embargo, es más crítico el comportamiento a tracción en la ubicación más extrema o alejada del eje neutro (punto A), debido a que experimentalmente la

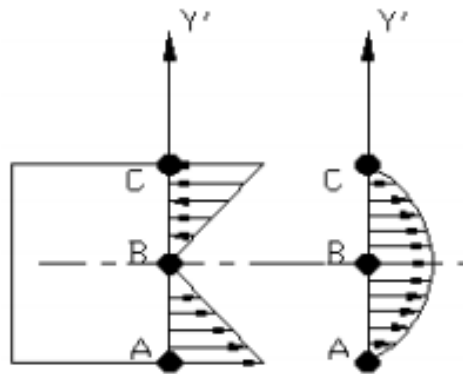


Figura 1.7. Distribución de esfuerzos en un eje sometido a flexión

fluencia de los materiales tiene un comportamiento más crítico a tracción que a compresión a pesar de que los esfuerzos son los mismos. (Velastegui, 2013, sec. 2.6.2)

Al igual que los esfuerzos cortantes producidos por torsión, la mayor magnitud de esfuerzos normales de flexión se los encuentra en los valores más extremos de y en la ecuación (Ec. 1.21), como se puede ver se relaciona las cantidades \mathcal{M} que es el momento flector obtenido del diagrama de momentos, y que es la distancia respecto del eje neutro alrededor del cual se produce la flexión y la cantidad I que representa el segundo momento de área de la sección transversal.

$$\sigma_x = -\frac{\mathcal{M}y}{I} \quad (\text{Ec. 1.21})$$

La ecuación (Ec. 1.23) que es similar a la (Ec. 1.21) se deduce para el esfuerzo normal máximo debido a la flexión con un valor de y máximo expresado como $d/2$ y el segundo momento de inercia I expresado en la ecuación (Ec. 1.22) exclusivamente para el caso de una barra de sección circular. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 4.5)

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (\text{Ec. 1.22})$$

$$\sigma_{max} = \frac{32\mathcal{M}}{\pi d^3} \quad (\text{Ec. 1.23})$$

Los esfuerzos cortantes que aparecen en flexión también presentan una distribución en este caso no lineal y un valor máximo ésta vez en el plano neutro donde se encuentra el eje neutro de flexión como en el punto B a la derecha de la figura 1.7. Se puede considerar un valor medio con la ecuación (Ec. 1.16) sin embargo el valor máximo para una barra circular sólida es el expresado en la

ecuación (Ec. 1.24) donde se ha usado el valor del área de la ecuación (Ec. 1.14).

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{V}}{A} = \frac{16}{3} \frac{\mathcal{V}}{\pi d^2} \quad (\text{Ec. 1.24})$$

Los ejes que presentan esfuerzos cortantes debido a la flexión suelen ser comparativamente más afectados por los esfuerzos normales por lo que dichos esfuerzos cortantes se los omite a menos que se requiera un estudio más allá de los fines ingenieriles.

Las ecuaciones que se usan en el programa EjesDim para determinar los esfuerzos normales y cortantes considerables en el diseño de ejes son las mismas que las ecuaciones (Ec. 1.20) y (Ec. 1.23) con la singularidad de que no se toma en cuenta el valor del diámetro que se encuentra elevado al cubo, para diferenciarlas se introducen los términos que tienen la forma x_{σ_x} . Resultan entonces aplicando esto las siguientes ecuaciones para el cálculo de esfuerzos presentes en un eje:

$$x_{\tau_{max}} = \tau_{max} d^3 = \frac{16\mathcal{T}}{\pi} \quad (\text{Ec. 1.25})$$

$$x_{\sigma_{max}} = \sigma_{max} d^3 = \frac{32\mathcal{M}}{\pi} \quad (\text{Ec. 1.26})$$

1.2.5.2. Esfuerzos combinados

Los esfuerzos combinados en un punto se los puede obtener calculando y combinando todos los componentes de esfuerzos normales y cortantes producidos según las sollicitaciones mecánicas del eje estableciendo así el estado de esfuerzo en el punto seleccionado.

1.2.5.2.1. Estado de esfuerzo en un punto

El estado de esfuerzo en un punto es una representación gráfica que tiene la forma de un cubo de una porción diferencial del material del elemento sometido a cierto conjunto de cargas, en donde se identifican los esfuerzos.

En la figura 1.8 se puede observar tanto un elemento diferencial tridimensional de esfuerzos como un elemento diferencial bidimensional.

En el diseño de ejes los esfuerzos combinados resultantes de las cargas aplicadas se los puede representar mediante el estado de esfuerzo en el punto de estudio de manera bidimensional debido a que los esfuerzos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, al igual que los

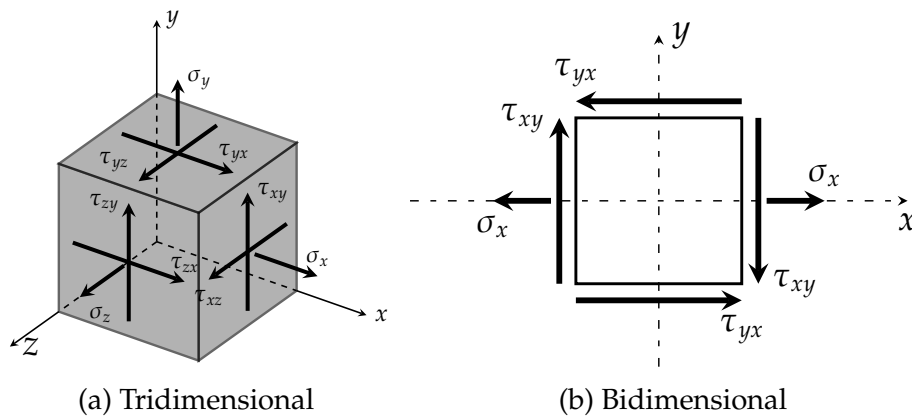


Figura 1.8. Estado de esfuerzo en un punto

cortantes transversales y las componentes normales en el eje y . (Velastegui, 2013, sec. 2.3)

1.2.5.3. Esfuerzos principales (Círculo de Mohr)

Más allá de los esfuerzos combinados, si se toma el estado de esfuerzo en un punto y se lo corta en cierto ángulo se puede determinar, mediante las ecuaciones de transformación de esfuerzos a otros planos, un grupo de esfuerzos que se los conoce como: esfuerzos principales, esfuerzo cortante máximo y esfuerzo normal medio en los cuáles se basan las teorías de falla para diseñar elementos cargados estáticamente. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-6)

La orientación en la que se encuentran los esfuerzos principales se describe como un primer escenario en el cual el estado de esfuerzo en un punto se aparece como si estuviera cargado únicamente con fuerzas axiales en ambos ejes rotados. La ecuación (Ec. 1.27) sirve para calcular dichos esfuerzos principales.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ec. 1.27})$$

El segundo escenario ocurre a un ángulo de 45° respecto al caso anterior en el que el estado de esfuerzo en un punto se encuentra sometido a un mismo esfuerzo normal medio en ambos ejes rotados, que se puede calcular con la ecuación (Ec. 1.29), y al mismo tiempo a los esfuerzos cortantes máximos calculados con la ecuación (Ec. 1.28).

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ec. 1.28})$$

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (\text{Ec. 1.29})$$

Las ecuaciones (Ec. 1.30), (Ec. 1.31), (Ec. 1.32) son la forma simplificada para transformar los esfuerzos en los planos donde aparecen los esfuerzos principales, los esfuerzos cortantes máximos y el esfuerzo normal medio, que son los que se consideran en el diseño de ejes.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{x_{\sigma_{1,2}}}{d^3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ec. 1.30})$$

$$\tau_1, \tau_2 = \frac{x_{\tau_{1,2}}}{d^3} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{Ec. 1.31})$$

$$\sigma_\tau = \frac{x_{\sigma_\tau}}{d^3} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (\text{Ec. 1.32})$$

Aquí también se define unas ecuaciones con el fin de implementar en la programación donde se factora el diámetro elevado al cubo de toda la expresión resultando en la parte derecha de las ecuaciones (Ec. 1.30), (Ec. 1.31), (Ec. 1.32).

Con las expresiones anteriores Mohr desarrolló un método gráfico para determinar de manera más fácil dichos esfuerzos. La figura 1.9 representa el caso más común para el diseño de ejes.

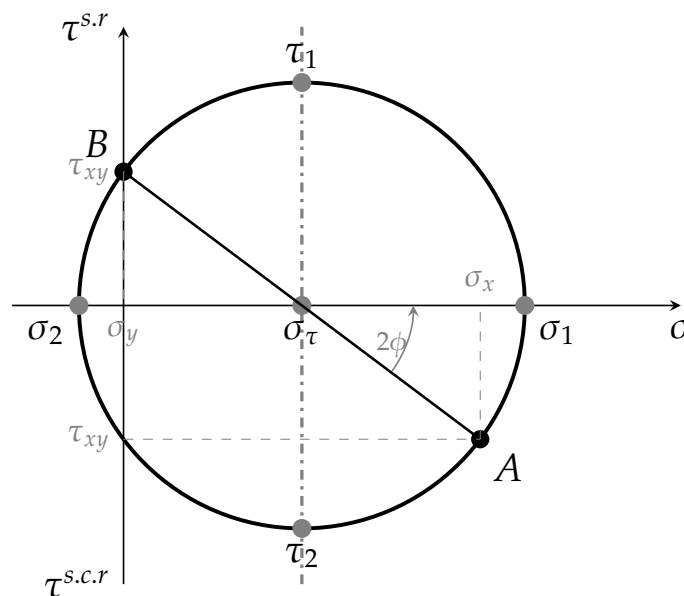


Figura 1.9. Círculo de Mohr en el diseño de ejes

Se puede apreciar claramente que el valor de σ_y es cero por lo que la abscisa del punto B también es cero. El valor de 2ϕ es también otra característica de la transformación de esfuerzos a otro plano; describe el doble del ángulo que tiene que girar el estado de esfuerzo en un punto para conseguir el valor de los

esfuerzos principales. Las ecuaciones (Ec. 1.33) y (Ec. 1.34) sirven para calcularlo en un caso bidimensional general y en el caso más común para el diseño de ejes respectivamente.

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{Ec. 1.33})$$

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (\text{Ec. 1.34})$$

El signo de τ , graficado en el eje de las ordenadas, va de acuerdo a una nueva convención de signos de tal forma que se grafica por sobre el eje horizontal los cortantes que tienden a girar en sentido horario o *s.r* y bajo el eje horizontal los que tienden a girar en sentido antihorario o *s.c.r*.

Habiendo encontrado los esfuerzos principales y el ángulo ϕ se puede graficar los dos escenarios que se había mencionado antes. La figura (1.10a) representa el primer caso donde se ha rotado los ejes para coincidir con los esfuerzos principales, por otro lado la figura (1.10b) muestra la orientación en la cual se produce el valor máximo de esfuerzo cortante junto con el valor de esfuerzo normal medio.

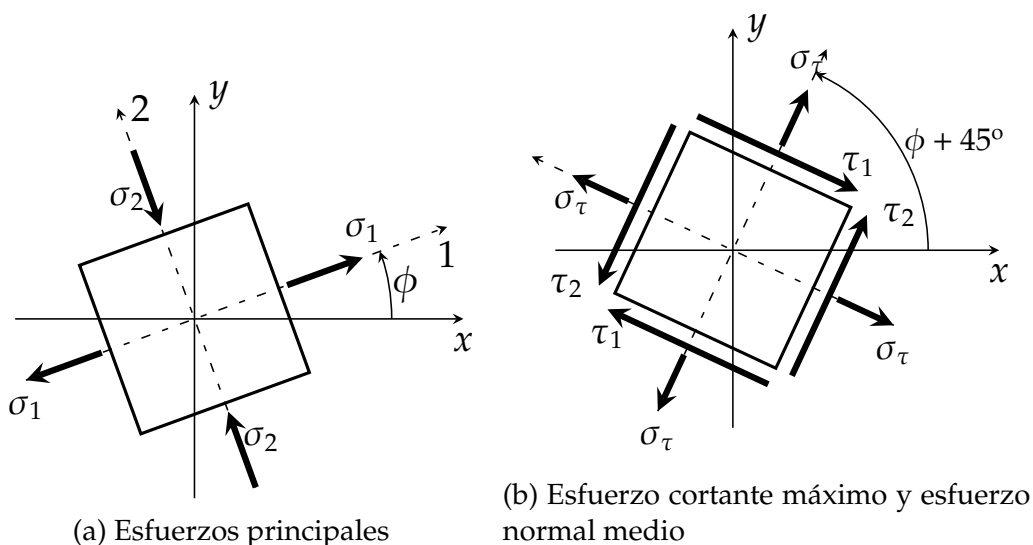


Figura 1.10. Estado de esfuerzos principales en un punto

1.2.6. COEFICIENTES GEOMÉTRICOS DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

Mediante análisis matemático y experimental se ha descubierto que un miembro estructural cargado cuando contiene discontinuidades, alrededor de éstas, la distribución del esfuerzos presenta picos que superan los esfuerzos promedio

en la sección. Discontinuidades como agujeros, ranuras, muescas, filos agudos, chaveteros, grietas y otros cambios de sección se llaman intensificadores que concentran los esfuerzos en sus alrededores. (Pilkey, 2005, sec. 6)

Se los considera factores teóricos geométricos debido a que han sido determinados puramente en función de la geometría de la discontinuidad. El esfuerzo normal real σ_{real} está directamente relacionado con el esfuerzo nominal σ_o en K_t veces. Asimismo para el esfuerzo cortante se define una relación directa entre el esfuerzo real τ_{real} con el esfuerzo nominal τ_o en K_{ts} veces. Las ecuaciones (Ec. 1.35) son las que deben usarse para determinar los esfuerzos reales.

$$\sigma_{real} = K_t \sigma_o \quad \tau_{real} = K_{ts} \tau_o \quad (\text{Ec. 1.35})$$

Los esfuerzos nominales son los calculados directamente con las ecuaciones fundamentales de esfuerzos anteriormente vistos. Los factores de concentración de esfuerzos son determinados mediante técnicas experimentales o también computacionales.

“En carga estática los factores de concentración de esfuerzos se aplican como sigue. En materiales dúctiles ($\varepsilon_f \geq 0.05$) el factor de concentración de esfuerzos a menudo no se aplica para predecir el esfuerzo crítico, porque la deformación plástica en la región del esfuerzo tiene un efecto de endurecimiento. En materiales frágiles ($\varepsilon_f < 0.05$) el factor de concentración de esfuerzos geométrico K_t se aplica al esfuerzo nominal antes de compararlo con la resistencia. Para las cargas dinámicas, el efecto de la concentración de esfuerzos es significativa tanto para materiales dúctiles como para los frágiles y siempre debe tenerse en cuenta.”(Budynas y Nisbett, 2012, sec. 3-13)

“Una excepción a esta regla es un material frágil que contenga inherentemente una concentración del esfuerzo en una microdiscontinuidad, peor que la macrodiscontinuidad que el diseñador tiene en mente”. El hierro fundido gris posee implícito el factor de concentración de esfuerzo en su resistencia. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-2)

En el diseño de ejes se usan diferentes tipos de cambios de sección; por ejemplo los chaveteros alojan las chavetas que permiten transmitir la potencia, los hombros permiten transmitir el empuje al eje desde otros elementos, en las ranuras se colocan anillos de retención, etc. La tabla 1.6 presenta dos de los más comunes concentradores de esfuerzos en ejes con sus respectivas expresiones para cuantificar los factores.

Tabla 1.6. Algunos factores teóricos de concentración de esfuerzos
Fuente: (Pilkey, 2005, tabla 6-1)

Tipo	Solicitación Mecánica	Fórmulas															
Hombros en un eje escalonado	Flexión	$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = 32M/\pi d^3$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$ <table><tr><th></th><th>$0.1 \leq h/r \leq 2.0$</th><th>$2.0 \leq h/r \leq 20.0$</th></tr><tr><td>C_1</td><td>$0.947 + 1.206\sqrt{h/r} - 0.131h/r$</td><td>$1.232 + 0.832\sqrt{h/r} - 0.008h/r$</td></tr><tr><td>$C_2$</td><td>$0.022 - 3.405\sqrt{h/r} + 0.915h/r$</td><td>$-3.813 + 0.968\sqrt{h/r} - 0.260h/r$</td></tr><tr><td>$C_3$</td><td>$0.869 + 1.777\sqrt{h/r} - 0.555h/r$</td><td>$7.423 - 4.868\sqrt{h/r} + 0.869h/r$</td></tr><tr><td>$C_4$</td><td>$-0.810 + 0.422\sqrt{h/r} - 0.260h/r$</td><td>$-3.839 + 3.070\sqrt{h/r} - 0.600h/r$</td></tr></table>		$0.1 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 20.0$	C_1	$0.947 + 1.206\sqrt{h/r} - 0.131h/r$	$1.232 + 0.832\sqrt{h/r} - 0.008h/r$	C_2	$0.022 - 3.405\sqrt{h/r} + 0.915h/r$	$-3.813 + 0.968\sqrt{h/r} - 0.260h/r$	C_3	$0.869 + 1.777\sqrt{h/r} - 0.555h/r$	$7.423 - 4.868\sqrt{h/r} + 0.869h/r$	C_4	$-0.810 + 0.422\sqrt{h/r} - 0.260h/r$	$-3.839 + 3.070\sqrt{h/r} - 0.600h/r$
		$0.1 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 20.0$														
C_1	$0.947 + 1.206\sqrt{h/r} - 0.131h/r$	$1.232 + 0.832\sqrt{h/r} - 0.008h/r$															
C_2	$0.022 - 3.405\sqrt{h/r} + 0.915h/r$	$-3.813 + 0.968\sqrt{h/r} - 0.260h/r$															
C_3	$0.869 + 1.777\sqrt{h/r} - 0.555h/r$	$7.423 - 4.868\sqrt{h/r} + 0.869h/r$															
C_4	$-0.810 + 0.422\sqrt{h/r} - 0.260h/r$	$-3.839 + 3.070\sqrt{h/r} - 0.600h/r$															
	Torsión	$\tau_{\max} = K_t \tau_{\text{nom}}, \quad \tau_{\text{nom}} = 16T/\pi d^3$ $K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D}\right)^3$ <table><tr><th></th><th>$0.25 \leq h/r \leq 4.0$</th></tr><tr><td>C_1</td><td>$0.905 + 0.783\sqrt{h/r} - 0.075h/r$</td></tr><tr><td>$C_2$</td><td>$-0.437 - 1.969\sqrt{h/r} + 0.553h/r$</td></tr><tr><td>$C_3$</td><td>$1.557 + 1.073\sqrt{h/r} - 0.578h/r$</td></tr><tr><td>$C_4$</td><td>$-1.061 + 0.171\sqrt{h/r} + 0.086h/r$</td></tr></table>		$0.25 \leq h/r \leq 4.0$	C_1	$0.905 + 0.783\sqrt{h/r} - 0.075h/r$	C_2	$-0.437 - 1.969\sqrt{h/r} + 0.553h/r$	C_3	$1.557 + 1.073\sqrt{h/r} - 0.578h/r$	C_4	$-1.061 + 0.171\sqrt{h/r} + 0.086h/r$					
	$0.25 \leq h/r \leq 4.0$																
C_1	$0.905 + 0.783\sqrt{h/r} - 0.075h/r$																
C_2	$-0.437 - 1.969\sqrt{h/r} + 0.553h/r$																
C_3	$1.557 + 1.073\sqrt{h/r} - 0.578h/r$																
C_4	$-1.061 + 0.171\sqrt{h/r} + 0.086h/r$																
Chavetero fresado	Flexión	$\sigma_{\max} = K_t \sigma, \quad \sigma = 32M/\pi D^3$ $b = \frac{1}{4}D, \quad h = \frac{1}{8}D, \quad \alpha = 10^\circ, \quad \beta = 15^\circ$ (1) At location A on surface: $K_{tA} = 1.6$ (2) At location B at end of keyway: $K_{tB} = 1.426 + 0.1643 \left(\frac{0.1}{r/D}\right) - 0.0019 \left(\frac{0.1}{r/D}\right)^2$ where $0.005 \leq r/D \leq 0.04$ $D \leq 6.5$ in. $h/D = 0.125$ For $D > 6.5$ in., it is suggested that the K_{tB} values for $r/D = 0.0208$ be used.															
	Torsión	$h = \frac{1}{8}D, \quad b = D/r, \quad \alpha = 15^\circ, \quad \beta = 50^\circ$ (1) At location A on surface: $K_{tA} = \sigma_{\max}/\tau \approx 3.4, \quad \tau = 16T/\pi D^3$ (2) At location B in fillet: $K_{tB} = \sigma_{\max}/\tau$ $= 1.953 + 0.1434 \left(\frac{0.1}{r/D}\right) - 0.0021 \left(\frac{0.1}{r/D}\right)^2$ for $0.005 \leq r/D \leq 0.07$															

1.2.7. TEORÍAS DE FALLA

Para poder realizar el diseño de un eje hace falta establecer una comparación entre la resistencia del material y el esfuerzo al que se encuentra sometido. Para relacionar la resistencia con el esfuerzo de la manera más acertada se describen en éste apartado varias de las teorías más usadas en el diseño.

Cabe recalcar que dichas teorías se formularon para miembros cargados estáticamente o en otras palabras cargas estacionarias sin cambio en su dirección, magnitud ni punto de aplicación. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5)

Las teorías de falla de mayor aceptación tanto para materiales dúctiles como para materiales frágiles se enlistan a continuación.

Materiales dúctiles

- Esfuerzo cortante máximo (ECM)
- Energía de distorsión (ED)
- Coulomb-Mohr para materiales dúctiles (CMD)

Materiales frágiles

- Esfuerzo normal máximo (ENM)
- Coulomb-Mohr para materiales frágiles (CMF)
- Mohr modificada (MM)

El método gráfico de las teorías de falla involucra a las líneas de carga que son rectas con pendiente igual a la relación entre los esfuerzos principales como en la ecuación (Ec. 1.36). Un ejemplo visible de esto se encuentra en la figura 1.11.

$$\sigma_B = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sigma_A \quad (\text{Ec. 1.36})$$

A continuación se detalla cada una de las teorías de falla y se describe las condiciones más adecuadas para aplicarlas.

1.2.7.0.1. Esfuerzo cortante máximo (ECM)

Esta teoría en forma generalizada cita que en cualquier combinación de esfuerzos el elemento sometido a éstos fallará siempre y cuando el esfuerzo cortante máximo supere la resistencia del material. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 6.7) La ecuación general de la teoría es (Ec. 1.37)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad (\text{Ec. 1.37})$$

La figura 1.11 es una representación gráfica de la teoría. Esta teoría presenta tres casos que se pueden observar claramente en la figura.

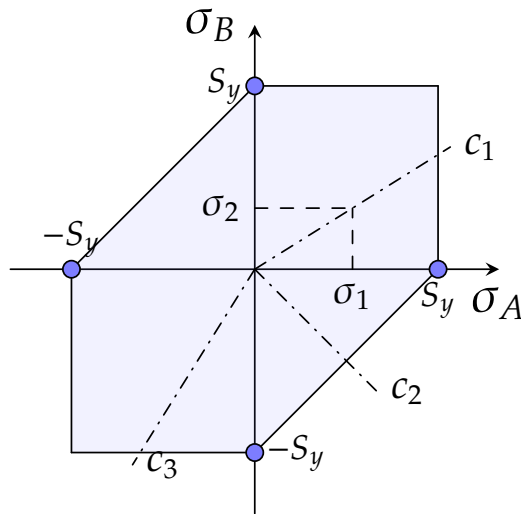


Figura 1.11. Representación gráfica de la teoría de esfuerzo cortante máximo

La primera línea de carga c_1 que cruza con la recta vertical que parte de S_y en el eje σ_A se puede representar mediante la ecuación (Ec. 1.38) y como puede observarse se encuentra en el primer cuadrante.

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_y}{n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad (\text{Ec. 1.38})$$

El segundo caso representado por la segunda línea de carga c_2 está definido por la ecuación (Ec. 1.39) y se encuentra en el cuarto cuadrante.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{x_{\sigma_1} - x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{S_y}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.39})$$

Finalmente el tercer caso se da en el tercer cuadrante con la línea c_3 y está gobernado por la fórmula (Ec. 1.40).

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{S_y}{n}; \quad 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.40})$$

Todas las ecuaciones anteriormente descritas para ésta teoría de falla presentan el valor n que representa el factor de diseño que se explica más detalladamente más adelante en ésta misma sección.

En el diseño de ejes está claramente definido que si se aplica esta teoría el caso

sería el segundo debido a que se caracteriza de esta forma por ser uniaxial. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-4)

1.2.7.0.2. Energía de distorsión (ED)

Cualquier material que se comporte elásticamente sometido a esfuerzos presenta un cambio minúsculo en su forma y volumen. Este cambio se encuentra almacenado como energía elástica dentro del material. Cuando se excede el límite de energía elástica que puede almacenar el material correspondiente a la resistencia a la fluencia en tensión se produce la falla.

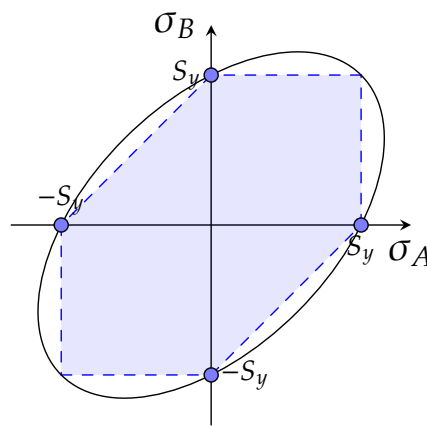


Figura 1.12. Representación gráfica de la teoría de energía máxima de distorsión

Por lo tanto de esto se puede definir un esfuerzo equivalente o efectivo que equivale a un esfuerzo a tensión que produce la misma cantidad de energía de distorsión que el esfuerzo que en realidad se aplica. Éste se basa en los esfuerzos principales y tiene la ecuación (Ec. 1.41) en el caso biaxial. Y la forma (Ec. 1.42) utilizando las componentes cartesianas de los esfuerzos combinados.

$$\sigma' = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 1.41})$$

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 1.42})$$

De igual manera para una configuración de esfuerzos donde $\sigma_y = 0$ como el caso del diseño de ejes se tiene la ecuación (Ec. 1.43) formulada con los componentes de la combinación de esfuerzos. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 6.8)

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 1.43})$$

Debido a la definición del esfuerzo equivalente se puede compararlo entonces con

la resistencia de fluencia a tensión S_y e introduciendo un factor de seguridad n se tiene la expresión general de la teoría (Ec. 1.44). (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-5)

$$\sigma' = \frac{x_{\sigma'}}{d^3} = \frac{S_y}{n} \quad (\text{Ec. 1.44})$$

Gráficamente se la puede visualizar como una elipse rotada como en la figura 1.12, al mismo tiempo se muestra la teoría de esfuerzo cortante máximo para compararla.

La elipse rotada tiene la ecuación (Ec. 1.45) y gráficamente se puede usar con la línea de carga para determinar si un elemento falla o no. (Velasgui, 2013, sec. 3.1.3)

$$S_y^2 = \sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2 \quad (\text{Ec. 1.45})$$

1.2.7.0.3. Coulomb-Mohr para materiales dúctiles (CMD)

La gran mayoría de materiales dúctiles presenta un comportamiento similar en cuanto a su resistencia cuando se las somete a cargas de compresión y tracción. Esta teoría está enfocada en los materiales dúctiles cuyas resistencias a la tensión y compresión son diferentes tales como algunas aleaciones de magnesio. Por eso para obtener la ecuación general de la teoría de falla (Ec. 1.46) se tomó en cuenta ensayos tanto a compresión como a tracción.

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_2}{S_c} = 1 \quad (\text{Ec. 1.46})$$

Una representación gráfica de la teoría es la figura 1.13. De manera similar a la teoría del Esfuerzo Cortante Máximo, presenta tres casos.

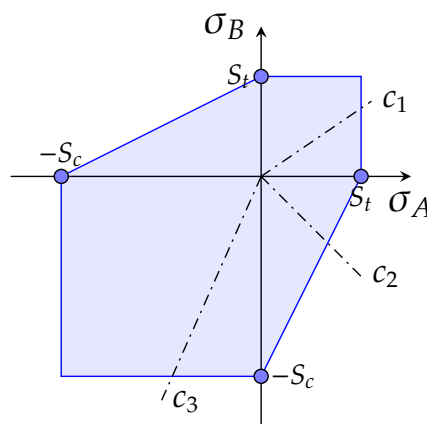


Figura 1.13. Representación gráfica de la teoría Coulomb-Mohr dúctil

La línea de carga c_1 cruza con la recta vertical desde S_t , en ese caso la teoría se

representa con la ecuación (Ec. 1.47) en el primer cuadrante.

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_t}{n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad (\text{Ec. 1.47})$$

En la segunda línea de carga c_2 la teoría está definida por (Ec. 1.48) en el cuarto cuadrante.

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_2}{S_c} = \frac{1}{d^3} \left(\frac{x_{\sigma_1}}{S_t} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_c} \right) = \frac{1}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.48})$$

Y en tercer cuadrante, la línea c_3 corta con la recta horizontal de la teoría definida por la fórmula (Ec. 1.49). (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-6)

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{-S_c}{n}; \quad 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.49})$$

1.2.7.0.4. Esfuerzo normal máximo (ENM)

La teoría de Esfuerzo Normal Máximo es quizá la teoría de falla más simple que relaciona directamente el esfuerzo de tracción máximo con la resistencia a la tracción del material. De manera similar, si el esfuerzo a compresión supera al de tracción entonces relaciona con la resistencia a la compresión del material. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 6.6) En esta teoría se presentan cuatro casos que se pueden observar en la figura 1.14.

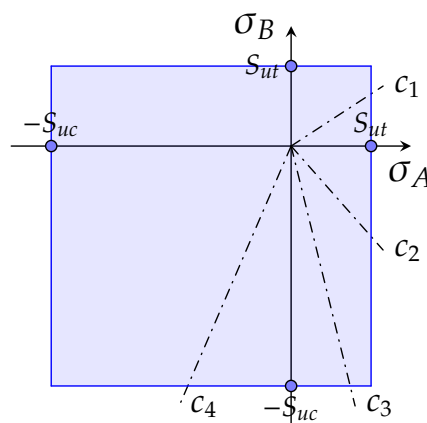


Figura 1.14. Representación gráfica de la teoría de esfuerzo normal máximo

Respectivamente los cuatro casos presentan las ecuaciones (Ec. 1.50), (Ec. 1.51), (Ec. 1.52), (Ec. 1.53).

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_{ut}}{n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad (\text{Ec. 1.50})$$

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_{ut}}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad (\text{Ec. 1.51})$$

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{-S_{uc}}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| > \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad (\text{Ec. 1.52})$$

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{-S_{uc}}{n}; \quad 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.53})$$

Esta teoría está formulada especialmente para cuando se ha de trabajar con materiales frágiles.

1.2.7.0.5. *Coulomb-Mohr para materiales frágiles (CMF) y Mohr modificada (MM)*

La teoría de Coulomb-Mohr para materiales frágiles es prácticamente una versión idéntica a la misma para materiales dúctiles con la única diferencia que está limitada por los valores últimos de resistencia ya que los materiales frágiles no presentan fluencia considerable antes de la falla.

Las expresiones también son muy parecidas cambiando las resistencias como esta visible en (Ec. 1.54), (Ec. 1.55), (Ec. 1.56).

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_{ut}}{n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad (\text{Ec. 1.54})$$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_2}{S_{uc}} = \frac{1}{d^3} \left(\frac{x_{\sigma_1}}{S_{ut}} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_{uc}} \right) = \frac{1}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.55})$$

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{-S_{uc}}{n}; \quad 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.56})$$

Basándose en datos experimentales la teoría de Mohr se ha expandido ligeramente comparando con la de Coulomb-Morh. La figura 1.15 muestra ambas teorías para poder mirar claramente la diferencia.

Las ecuaciones (Ec. 1.57), (Ec. 1.58), (Ec. 1.59), (Ec. 1.60) corresponden a la teoría modificada de Mohr.

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_{ut}}{n}; \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \quad (\text{Ec. 1.57})$$

$$\sigma_1 = \frac{x_{\sigma_1}}{d^3} = \frac{S_{ut}}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| \leq 1 \quad (\text{Ec. 1.58})$$

$$\frac{(S_{uc} - S_{ut})\sigma_1}{S_{uc} S_{ut}} - \frac{\sigma_2}{S_{uc}} = \frac{1}{d^3} \left[\frac{(S_{uc} - S_{ut})x_{\sigma_1}}{S_{uc} S_{ut}} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_{uc}} \right] = \frac{1}{n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| > 1 \quad (\text{Ec. 1.59})$$

$$\sigma_2 = \frac{x_{\sigma_2}}{d^3} = \frac{-S_{uc}}{n}; \quad 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.60})$$

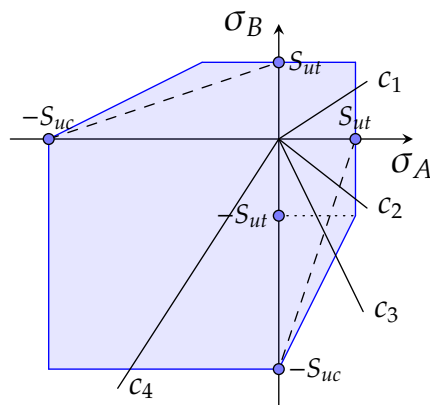


Figura 1.15. Representación gráfica de las teorías Coulomb-Mohr frágil y Mohr modificada

Para materiales frágiles se recomienda el uso de esta teoría modificada debido a que se aproxima mejor a los datos experimentales. Podría sustituirse las rectas del cuarto cuadrante por una curva parabólica, sin embargo no presenta mucha diferencia. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 5-9)

1.2.7.1. Factor de seguridad y factor de diseño

Para comenzar se define el factor de diseño como la relación entre la resistencia y el esfuerzo de manera determinística, la ecuación fundamental es la ecuación (Ec. 1.61). (Juvinal y Marshek, 2012, sec. 6.12)

Este factor compensa las incertidumbres de:

- la variación de las cargas
- la resistencia del material
- los supuestos para calcular los esfuerzos y concentradores de esfuerzos, etc
- las consecuencias catastróficas si falla el elemento

Para que asegure que el elemento no falle debe tomar valores superiores a la unidad. La ecuación Ec. 1.61 corresponde al factor de diseño y es idéntica al factor de seguridad.

$$n = \frac{\text{resistencia significativa del material}}{\text{esfuerzo permisible}} = \frac{S}{(\sigma \text{ o } \tau)} \quad (\text{Ec. 1.61})$$

El factor de seguridad a diferencia del factor de diseño se establece luego de definir

definitivamente las dimensiones del elemento que normalmente son mayores a las calculadas haciéndolas coincidir con los tamaños preferidos de ejes según los números de Renard que se explicará más adelante. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 1-11)

1.2.7.1.1. Valores recomendados para el factor de diseño n

Las recomendaciones basadas en la resistencia a la fluencia se tabulan en 1.7.

Tabla 1.7. Valores recomendados para el factor de diseño n

Rango	Descripción
$1.25 < n < 1.5$	Para materiales confiables y cargas determinadas con certeza
$1.5 < n < 2$	Para materiales bien conocidos bajo condiciones ambientales constantes, y cargas calculables fácilmente
$2 < n < 2.5$	Para materiales que operan en ambientes ordinarios y cargas que son posibles de determinar
$2.5 < n < 3$	Para materiales menos usados o materiales frágiles bajo condiciones promedio ambientales, de carga y esfuerzo
$3 < n < 4$	Para materiales no usados en condiciones promedio o materiales conocidos en condiciones inciertas

Además de éstas consideraciones sobre la resistencia a la fluencia, cuando existen cargas repetidas se las aplica respecto al límite de resistencia a la fatiga del material. Si está sometido a impacto debe añadirse un factor de impacto. En materiales frágiles los factores son aproximadamente el doble. (Juvinall y Marshek, 2012, sec. 6.12.1)

1.2.8. DIÁMETRO DEL EJE PARA EL DISEÑO ESTÁTICO

Lo que interesa a partir de las teorías de falla y todo lo que se ha estudiado anteriormente es saber cómo establecer el valor del diámetro cuando el eje se encuentra sometido a cargas estáticas.

Además del factor de seguridad la única incógnita que queda cuando se calcula los esfuerzos es el diámetro que se lo encuentra elevado al cubo en las ecuaciones que se toman en cuenta en el diseño de ejes.

De ésta manera se puede, partiendo de asignar un valor al factor de seguridad según las recomendaciones de la sección anterior, calcular el diámetro despejando

el valor de las ecuaciones que corresponden a la teoría de falla seleccionada para el análisis. Entonces a continuación se muestran los valores que tomaría el diámetro usando las ecuaciones de las diferentes teorías de falla:

1.2.8.0.1. Diámetro para la teoría del esfuerzo cortante máximo

La ecuación (Ec. 1.39) despejada el diámetro d_e se convierten en (Ec. 1.62). Donde $x_{\sigma_{1,2}}$ representan el valor que se calcula de los esfuerzos sin tomar en cuenta el valor del diámetro.

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{(x_{\sigma_1} - x_{\sigma_2})n}{S_y}}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.62})$$

Las otras dos ecuaciones se despejan de manera similar, sin embargo en el diseño de ejes no se las aplica debido a que los esfuerzos principales nunca van a ser ambos positivos o ambos negativos debido a que el estado de esfuerzos en cualquier punto del eje no presenta esa característica, el círculo de Mohr de la figura 1.9 muestra los esfuerzos principales gráficamente para justificar lo mencionado.

1.2.8.0.2. Diámetro para la teoría de la energía de distorsión

Despejando el diámetro del eje para el diseño estático de la ecuación (Ec. 1.44) se obtiene la ecuación (Ec. 1.63).

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{x_{\sigma'}n}{S_y}} \quad (\text{Ec. 1.63})$$

El valor $x_{\sigma'}$ representa el valor que se calcula del esfuerzo equivalente sin tomar en cuenta el diámetro.

1.2.8.0.3. Diámetro para la teoría de Coulomb-Mohr dúctil

Asimismo para la teoría de Coulomb-Mohr Dúctil despejando la ecuación (Ec. 1.48) se obtiene el diámetro del eje para el diseño estático de la ecuación (Ec. 1.64).

$$d_e = \sqrt[3]{\left(\frac{x_{\sigma_1}}{S_t} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_c}\right)n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.64})$$

Se omite nuevamente los casos 1 y 3 ya que no serán usados en el diseño de ejes.

1.2.8.0.4. Diámetro para la teoría del esfuerzo normal máximo

Las ecuaciones (Ec. 1.51) y (Ec. 1.52) se despejan respectivamente como (Ec. 1.65) y (Ec. 1.66).

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{x_{\sigma_1} n}{S_{ut}}}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad (\text{Ec. 1.65})$$

$$d_e = \sqrt[3]{-\frac{x_{\sigma_2} n}{S_{uc}}}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| > \frac{S_{uc}}{S_{ut}} \quad (\text{Ec. 1.66})$$

Nuevamente se omite los casos 1 y 4 por no ser relevantes.

1.2.8.0.5. Diámetro para la teoría de Coulomb-Mohr frágil

El diámetro en la teoría de Coulomb-Mohr Frágil toma una forma similar a la misma para materiales dúctiles. De la ecuación (Ec. 1.55) se despeja el diámetro obteniendo la ecuación (Ec. 1.67).

$$d_e = \sqrt[3]{\left(\frac{x_{\sigma_1}}{S_{ut}} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_{uc}} \right) n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad (\text{Ec. 1.67})$$

1.2.8.0.6. Diámetro para la teoría de Mohr modificada

Finalmente para la teoría de Mohr-Modificada se obtiene el diámetro de las ecuaciones (Ec. 1.68) y (Ec. 1.69) a partir de las ecuaciones (Ec. 1.58) y (Ec. 1.59) tomando en cuenta asimismo que un eje no puede presentar los casos 1 y 4.

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{x_{\sigma_1} n}{S_{ut}}}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| \leq 1 \quad (\text{Ec. 1.68})$$

$$d_e = \sqrt[3]{\left(\frac{(S_{uc} - S_{ut}) x_{\sigma_1}}{S_{ut} S_{uc}} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_{uc}} \right) n}; \quad \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \quad y \quad \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| > 1 \quad (\text{Ec. 1.69})$$

Otros factores que se ven involucrados con el diámetro son los factores geométricos de concentración de esfuerzos anteriormente vistos. No se los puede despejar fácilmente de las ecuaciones de la tabla 1.6 porque primero, son diferentes ecuaciones para los diferentes tipos de concentradores de esfuerzos y también por ejemplo en el caso de los hombros son expresiones polinomiales.

Entonces para esto se soluciona el problema iterando hasta que converja a una

solución de diámetro válida. Para la primera iteración se toma un valor del diámetro referencial dada por el diseñador, además de la geometría de los concentradores de esfuerzos que serán estimados con criterio. Para la siguiente iteración el diámetro será más o menos cercano al diámetro adecuado, sin embargo las dimensiones de los concentradores de esfuerzos ya no serán muy adecuadas para el diseño final por lo que se deberá proceder a una tercera iteración afinando los valores dimensionales. Finalmente se puede establecer una tolerancia que limite el número de iteraciones hasta dar con un valor de diámetro aceptable.

1.2.9. FATIGA

Se habla de fatiga cuando un elemento se encuentra bajo cargas repetidas o fluctuantes. La falla por fatiga ocurre inclusive bajo esfuerzos menores a la resistencia de fluencia del material, sin previo aviso y sin advertencia visible.

1.2.9.1. Falla por fatiga

La apariencia de un elemento que ha fallado por fatiga en la zona de fractura tiene una forma parecida a la fractura frágil que no presenta deformación plástica previa. En varios experimentos se pudo observar que progresivamente las microgrietas originadas en la discontinuidad crítica se convierten en macrogrietas formando superficies que tienen la forma de marcas de playa o de concha hasta cuando el material que queda no soporta las cargas y forma en esa sección una fractura frágil y/o dúctil.

La falla por fatiga suele iniciarse a partir de la formación de grietas o la propagación de las mismas, esto ocurre en una discontinuidad donde el esfuerzo se maximiza. Entre las discontinuidades más comunes se encuentran los cambios de sección transversal en hombros, alojamientos, etc. Estampados, marcas de herramienta, rebabas y otros errores de fabricación también pueden ser el origen de la falla. Además pueden producirse grietas por un mal ensamblaje y también cuando existen esfuerzos de contacto entre elementos, inclusive la propia composición del material puede ser el origen de la falla. Factores como la temperatura, el entorno y la frecuencia de los ciclos pueden acelerar el inicio de la falla. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-1)

1.2.9.2. Esfuerzos fluctuantes

El diseño de ejes rotatorios en sus fibras superficiales involucra este tipo de cargas experimentando, debido a la flexión una alternancia entre tracción y compresión por

cada revolución. El patrón no siempre es el sinusoidal de la figura 1.16. En ésta se muestran las cantidades: σ_a que representa la componente de esfuerzo amplitud, σ_m que la componente de esfuerzo medio, σ_{max} que toma el valor del máximo esfuerzo y σ_{min} que no es más que el esfuerzo mínimo. La figura 1.16a es un caso en el que no se presentan esfuerzos medios que es un caso de esfuerzo alternante con inversión completa. El gráfico 1.16b sería el que se produce cuando el eje está cargado a compresión y también a flexión, éste es un caso de esfuerzo fluctuante con compresión. Además de éstos se presentan otros casos donde se producen esfuerzos repetidos cuando las cargas son intermitentes, sin embargo no es muy común que se presente en los ejes. En la figura 1.16 se puede ver dos casos a los que los ejes podrían estar sujetos en cuanto a esfuerzos fluctuantes.

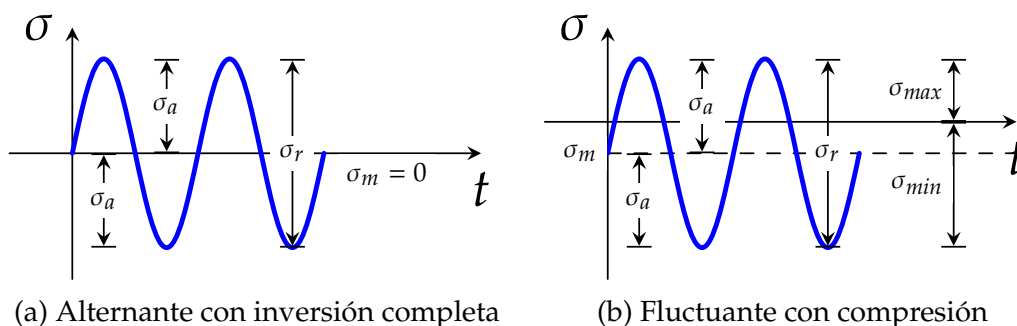


Figura 1.16. Representación de los esfuerzos fluctuantes sinusoidales

Puede presentarse los mismos tipos de componentes de esfuerzos en casos similares con esfuerzos cortantes fluctuantes. Sin embargo el caso más común al que se encuentran sometidos los ejes rotatorios es el que se muestra en la figura 1.17 que es un caso donde el esfuerzo se mantiene constante a lo largo del tiempo y por lo tanto su τ_a es cero pero sí presenta un valor positivo o negativo de τ_m .

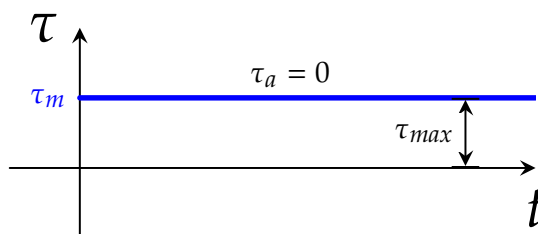


Figura 1.17. Esfuerzo más común en ejes para esfuerzos cortantes

A éstos componentes de esfuerzos que se presentan en fatiga se los debe multiplicar por los factores de concentración de esfuerzos a fatiga para obtener los esfuerzos reales de los mismos. Los concentradores de esfuerzo a fatiga se

los estudiará más adelante en esta misma sección. Para el método de esfuerzo nominal medio se aplican las ecuaciones (Ec. 1.70) para determinar los esfuerzos medios y amplitud razonablemente válidos.

$$\begin{aligned}\sigma_a &= K_f \sigma_{ao} \\ \sigma_m &= K_f \sigma_{mo}\end{aligned}\quad (\text{Ec. 1.70})$$

De igual manera debe aplicarse para los esfuerzos cortantes así como en las ecuaciones (Ec. 1.71).

$$\begin{aligned}\tau_a &= K_{fs} \tau_{ao} \\ \tau_m &= K_{fs} \tau_{mo}\end{aligned}\quad (\text{Ec. 1.71})$$

Donde el valor de K_{fs} es el correspondiente a las cargas que producen cortante. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-11)

1.2.9.3. Método esfuerzo-vida

Los diseños que involucran fatiga pueden enfocarse utilizando diferentes métodos desarrollados bajo un sinnúmero de pruebas experimentales, sin embargo el método seleccionado que abarca con mayor amplitud los problemas es el de esfuerzo-vida debido además a que es de fácil implementación. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-4)

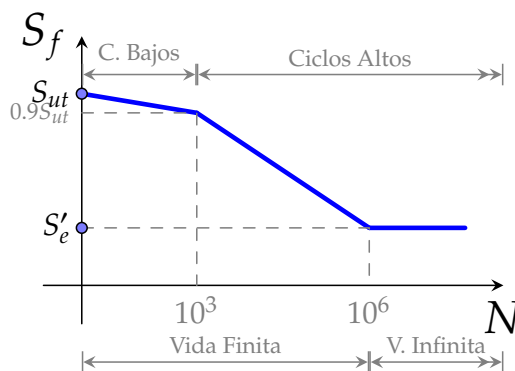


Figura 1.18. Diagrama S-N

La figura 1.18, que se encuentra en escala $\log - \log$ y corresponde a cierto tipo de acero, se ha obtenido de un gran número de ensayos utilizando una probeta normalizada provocándole flexión rotativa con diferentes cargas. La curva obtenida relaciona la resistencia a la fatiga de la probeta con el número de ciclos al cual se produjo la falla. Se calcula que la resistencia a la fatiga cuando falla a 10^3 ciclos toma el valor del 90 % de la resistencia última. (Juvinal y Marshek, 2012, sec. 8.3)

Se puede estimar el límite de resistencia a la fatiga S'_e a partir de valores de dureza Brinell o también se sabe que corresponde a un número de ciclos entre 10^6 y 10^7 para los aceros.

Se considera como fatiga de ciclos bajos cuando la falla ocurre hasta a 10^3 ciclos, cuando supera ese número se le llama fatiga de ciclos altos. Se distinguen además dos regiones marcadas por el número de ciclos que corresponde a la resistencia a la fatiga, por ejemplo 10^6 para cierto acero. Sobre éste valor se considera una región de vida infinita, caso contrario se considera vida finita. Esto quiere decir que una probeta con flexión rotativa cargada de tal manera que el esfuerzo que se produce es menor a la resistencia a la fatiga de la probeta no fallará nunca, pero si el esfuerzo es superior a dicha resistencia la vida de la probeta está limitada.

El método esfuerzo-vida omite la zona de ciclos bajos ya que se dice que no predice muy bien el comportamiento del material en esa zona. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-4)

El enfoque que se le dará al diseño de ejes del presente proyecto es alrededor de la zona de vida infinita.

1.2.10. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS A FATIGA Y SENSIBILIDAD A LA MUESCA

Ya se había mencionado antes la influencia de discontinuidades sobre el esfuerzo estáticamente. Esta vez se describirá el comportamiento de las mismas discontinuidades sometidas a cargas periódicas. Los factores K_t y K_{ts} vuelven a tomar importancia y definen los factores análogos K_f y K_{fs} a fatiga que son valores reducidos de los anteriores. Dicha reducción se debe a la sensibilidad a la muesca que poseen ciertos materiales que está definida por la ecuación (Ec. 1.72) y toma valores entre cero y uno.

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}; \quad q_s = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1} \quad (\text{Ec. 1.72})$$

Los factores de concentración de esfuerzos a fatiga se usan en función del material, por un lado se los puede obtener despejando las ecuaciones (Ec. 1.72) o también aplicando la ecuación de Neuber (Ec. 1.73). El valor de \sqrt{a} es una constante del material y r es el radio de la muesca que depende del tipo de discontinuidad.

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \quad (\text{Ec. 1.73})$$

Las ecuaciones (Ec. 1.74) y (Ec. 1.75) devuelven el valor de la constante de Neuber para el acero tanto para flexión o axial y torsión tomando en cuenta que se obtuvieron usando ajustes a partir de datos experimentales. Donde S_{ut} está en *kpsi*.

$$\sqrt{a} = 0.246 - 3.08(10^{-3}) S_{ut} + 1.51(10^{-5}) S_{ut}^2 - 2.67(10^{-8}) S_{ut}^3 \quad \textbf{Flexión} \quad (\text{Ec. 1.74})$$

$$\sqrt{a} = 0.190 - 2.51(10^{-3}) S_{ut} + 1.35(10^{-5}) S_{ut}^2 - 2.67(10^{-8}) S_{ut}^3 \quad \textbf{Torsión} \quad (\text{Ec. 1.75})$$

Para el hierro fundido la sensibilidad a la muesca se la toma como $q = 0.20$ de manera conservadora.

Los factores K_f y K_{fs} se los puede o bien multiplicar por los componentes de esfuerzos fluctuantes o bien aplicarlos como un factor de reducción del límite de resistencia a la fatiga S'_e dividiéndolo para éste. En este proyecto se lo usa como factor de concentración de esfuerzos. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-10)

1.2.11. RESISTENCIA A LA FATIGA

Es mandatorio, si se quiere diseñar un elemento sometido a fatiga, realizar ensayos del material en condiciones similares. Sin embargo como una alternativa de diseño preliminar se puede usar la ecuación (Ec. 1.76) basada en muchos ensayos de diferentes fuentes para un mismo material.

$$S'_e = \begin{cases} 0.5 S_{ut} & S_{ut} \leq 1400 \text{ [MPa]} \\ 700 \text{ [MPa]} & S_{ut} > 1400 \text{ [MPa]} \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.76})$$

La curva establece un rango de dispersión entre el 40 % y el 60 % de la resistencia última S_{ut} , nivelándose en la recta horizontal con un valor aproximado de 700 [MPa] como se puede ver en la figura 1.19.

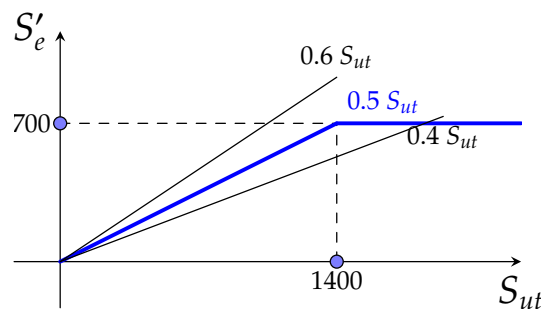


Figura 1.19. Gráfico de relación entre S'_e y S_{ut} en [MPa]

Hasta aquí se establecen los métodos para obtener la resistencia a la fatiga de una probeta, a continuación se describen los factores que están involucrados para que dicha resistencia no se la pueda usar directamente en el diseño de un elemento mecánico.

1.2.11.1. Factores modificadores del límite de resistencia a la fatiga

En la sección anterior, la figura 1.18 mostró el comportamiento de una probeta sometida a fatiga obteniendo los valores S'_e en función del número de ciclos N , asimismo la ecuación (Ec. 1.76) junto con la figura 1.19 permiten establecer el valor de S'_e para diseños preliminares. Sin embargo la geometría de la probeta no siempre es la que se usa en la práctica para diseñar elementos de máquinas, es por eso que deben tomarse en cuenta varios factores que influyen sobre el límite de resistencia a la fatiga de la probeta S'_e modificándola para poder utilizarla en el diseño. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-9)

Según Marin, son seis los factores que modifican a S'_e entre los cuáles se toma en cuenta aspectos del material, la manufactura, el entorno y el diseño en sí. Éstos son:

1. Condición superficial
2. Tamaño
3. Carga
4. Temperatura
5. Confiabilidad
6. Efectos Varios

Cada uno de los factores requiere diferentes parámetros que se describirán a continuación:

1.2.11.1.1. k_a : Factor de superficie

La probeta usada en el ensayo para determinar la resistencia a la fatiga exige una calidad superficial significativa que muchas veces no se compara con la de las piezas que tienen una función en una máquina. La tendencia de los datos obtenidos por varios ensayos con diferentes tipos de acabado superficial se puede ajustar aproximadamente con la ecuación (Ec. 1.77) que está en función de la resistencia

última a la tensión del material S_{ut} y dos coeficientes a y b que depende del acabado superficial. Ambos se encuentran tabulados en la tabla 1.8.

$$k_a = a S_{ut}^b \quad (\text{Ec. 1.77})$$

Tabla 1.8. Coeficientes del factor de superficie k_a

Fuente: (Budynas y Nisbett, 2012, tabla 6-2)

Acabado Superficial	Factor a : S_{ut} [MPa]	Exponente b
Esmerilado	1.58	-0.085
Maquinado o Laminado en Frío	4.51	-0.265
Laminado en Caliente	57.7	-0.718
Forjado	272	-0.995

1.2.11.1.2. k_b : Factor de tamaño

De una muestra de más de cien ensayos se dedujo las ecuaciones (Ec. 1.78) usando el diámetro equivalente como dato.

$$k_b = \begin{cases} 1.24 d^{-0.107}; & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ [mm]} \\ 1.51 d^{-0.157}; & 51 < d \leq 254 \text{ [mm]} \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.78})$$

Éstas expresiones son válidas directamente para barras sólidas de sección circular en rotación. Para otros casos se debe determinar el valor del diámetro equivalente que podrá encontrarse en la bibliografía de éste trabajo.

1.2.11.1.3. k_c : Factor de carga

Dependiendo del tipo de carga, el límite de resistencia a la fatiga se modifica según la ecuación (Ec. 1.79) que son valores medios.

$$k_c = \begin{cases} 1; & \text{flexión} \\ 0.85; & \text{axial} \\ 0.59; & \text{torsión sola} \end{cases} \quad (\text{Ec. 1.79})$$

1.2.11.1.4. k_d : Factor de temperatura

Este factor tiene que ver con el entorno en el que se va a trabajar. Se conoce que la temperatura influye en el comportamiento dúctil o frágil del material por eso este

factor se basa en la variación en la resistencia del material con la temperatura. La curva se ha aproximado a una ecuación polinómica de cuarto orden como en la (Ec. 1.80).

$$k_d = 0.975 + 0.432(10^{-3}) T_F - 0.115(10^{-5}) T_F^2 + 0.104(10^{-8}) T_F^3 - 0.595(10^{-12}) T_F^4 \quad (\text{Ec. 1.80})$$

Para valores $70 \leq T_F \leq 1000$ [°F]. Los valores del factor k_d también se los puede encontrar tabulados, pero en este trabajo es más conveniente poseer una relación que permita encontrar directamente el valor.

1.2.11.1.5. k_e : Factor de confiabilidad

Se sabe que la dispersión de los datos de cada una de las ecuaciones obtenidas ajustando un gran número de datos brindan cierta incertidumbre. Se ha obtenido una relación estocástica para determinar este factor, sin embargo por facilidad, en la tabla 1.9 se encuentran los valores típicos de k_e para confiabilidades estándar.

Tabla 1.9. Factores de confiabilidad k_e estándar
Fuente: (Budynas y Nisbett, 2012, tabla 6-5)

Confiabilidad %	Factor k_e
50 %	1.000
90 %	0.897
95 %	0.868
99 %	0.814
99.9 %	0.753
99.99 %	0.702
99.999 %	0.659
99.9999 %	0.620

1.2.11.1.6. k_f : Factor de efectos varios

Aquí se hace referencia a diferentes factores que no se han tomado en cuenta que también modifican la resistencia a la fatiga, tales como los esfuerzos residuales, las características direccionales, el endurecimiento superficial, corrosión, recubrimientos, frecuencia cíclica, etc. El valor del factor no siempre está disponible y debe por eso aplicarse el criterio del diseñador en esos casos. Finalmente, la ecuación que reduce el límite de resistencia a la fatiga de una probeta S'_e a la resistencia a la fatiga S_e lista para usar en el diseño se escribe como en (Ec. 1.81).

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \quad (\text{Ec. 1.81})$$

1.2.12. CRITERIOS DE FALLA A LA FATIGA

Ya se había establecido que la característica de Fatiga la da el valor de un esfuerzo amplitud σ_a diferente de cero, y la relación con el esfuerzo medio σ_m ha establecido un espacio geométrico que describe la zona segura de un diseño a fatiga. Basado en muchos datos experimentales, Gerber, Goodman, Soderberg, etc. formularon lo que se llaman criterios de falla a la fatiga.

Existen al menos tres métodos diferentes para graficar los datos experimentales obtenidos para diferentes valores de esfuerzo medio y amplitud. La figura 1.20 representa uno de los métodos y presenta cinco criterios de falla a la fatiga que relacionan los esfuerzos medios con los esfuerzos amplitud.

La línea de carga, obtenida a partir de los componentes de esfuerzos fluctuantes, cuando interseca con una de las líneas de las teorías describe un punto de coordenadas S_m en las abscisas y S_a en las ordenadas cuyos valores representan las resistencias que limitan a los esfuerzos medios y amplitud respectivamente. Entre

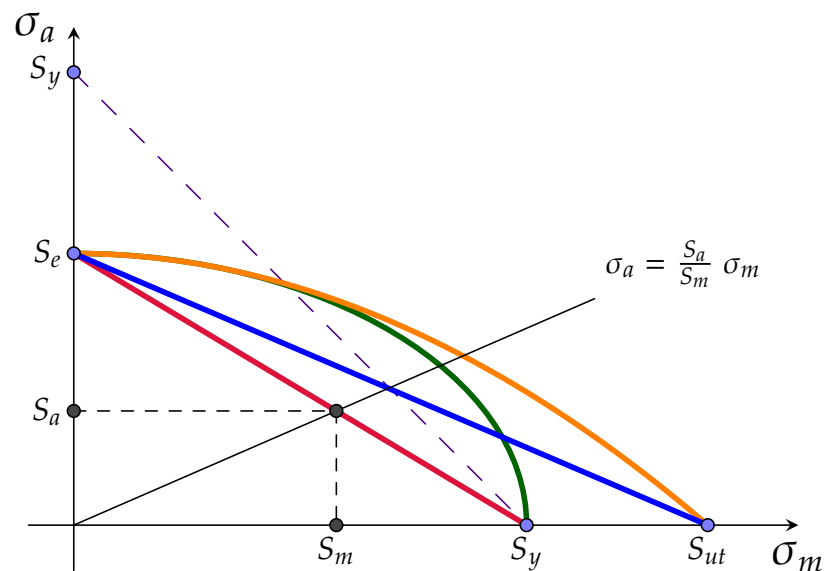


Figura 1.20. Criterios de falla a la fatiga

las teorías graficadas se encuentran: la parábola de Gerber que se muestra en color Anaranjado, la recta de Goodman modificada en Azul, la recta de Soderberg en Rojo, la curva elíptica de ASME en Verde y la recta de Fluencia o de Langer en línea segmentada color Morado. Las ecuaciones que gobiernan las líneas de los

criterios son de la Ec. 1.82 a la Ec. 1.84.

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{d^3} \left(\frac{x_{\sigma_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma_m}}{S_y} \right) = \frac{1}{n}; \quad \textbf{Soderberg} \quad (\text{Ec. 1.82})$$

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{d^3} \left(\frac{x_{\sigma_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma_m}}{S_{ut}} \right) = \frac{1}{n}; \quad \textbf{Goodman mod.} \quad (\text{Ec. 1.83})$$

$$\frac{n \sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n \sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = \frac{n x_{\sigma_a}}{d^3 S_e} + \left(\frac{n x_{\sigma_m}}{d^3 S_{ut}} \right)^2 = 1; \quad \textbf{Gerber} \quad (\text{Ec. 1.84})$$

$$\left(\frac{n \sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{n \sigma_m}{S_y} \right)^2 = \frac{1}{d^6} \left[\left(\frac{n x_{\sigma_a}}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{n x_{\sigma_m}}{S_y} \right)^2 \right] = 1; \quad \textbf{ASME-elíptica} \quad (\text{Ec. 1.85})$$

Adicional las ecuaciones tanto de la línea de fluencia estática de Langer como la línea de carga son (Ec. 1.86) y (Ec. 1.87) respectivamente.

$$\sigma_a + \sigma_m = \frac{S_y}{n}; \quad \textbf{Langer} \quad (\text{Ec. 1.86})$$

$$\sigma_a = \frac{S_a}{S_m} \sigma_m; \quad \textbf{Línea de Carga} \quad (\text{Ec. 1.87})$$

Para materiales frágiles se usan otros criterios que no son relevantes en el desarrollo de este proyecto. (Budynas y Nisbett, 2012, sec. 6-12)

1.2.13. DIÁMETRO DEL EJE PARA EL DISEÑO DINÁMICO

En el análisis de esfuerzos a fatiga de un eje sólido de sección redonda los esfuerzos que resultan debidos a la flexión y torsión deben calcularse tanto para el componente medio como el amplitud resultando en expresiones como:

$$\sigma_a = \frac{x_{\sigma_a}}{d^3} = K_f \frac{32M_a}{\pi d^3}; \quad \sigma_m = \frac{x_{\sigma_m}}{d^3} = K_f \frac{32M_m}{\pi d^3}; \quad (\text{Ec. 1.88})$$

$$\tau_a = \frac{x_{\tau_a}}{d^3} = K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}; \quad \tau_m = \frac{x_{\tau_m}}{d^3} = K_{fs} \frac{16T_m}{\pi d^3}; \quad (\text{Ec. 1.89})$$

Los esfuerzos combinados a los que se somete un eje sólido de sección redonda se los analiza determinando los esfuerzos de Von Mises tanto alternantes como medios como describen las ecuaciones:

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2)^{1/2}; \quad x_{\sigma'_a} = (x_{\sigma_a}^2 + 3 x_{\tau_a}^2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 1.90})$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3 \tau_m^2)^{1/2}; \quad x_{\sigma'_m} = (x_{\sigma_m}^2 + 3 x_{\tau_m}^2)^{1/2} \quad (\text{Ec. 1.91})$$

A continuación, partiendo de los criterios de falla y junto con los esfuerzos equivalentes obtenidos con la teoría de energía de la distorsión, se puede deducir el valor que el diámetro dinámico toma en cada caso tomando en cuenta que para la mayoría de casos de diseño de ejes $M_m = T_a = 0$.

$$d_d = \left[n \left(\frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma'_m}}{S_y} \right) \right]^{1/3} \quad \text{ED-Soderberg} \quad (\text{Ec. 1.92})$$

$$d_d = \left[n \left(\frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right) \right]^{1/3} \quad \text{ED-Goodman} \quad (\text{Ec. 1.93})$$

$$d_d = \left[\left(n \frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} \right)^2 + \left(n \frac{x_{\sigma'_m}}{S_y} \right)^2 \right]^{1/6} \quad \text{ED-ASME elíptica} \quad (\text{Ec. 1.94})$$

$$d_d = \left\{ \left(\frac{2n x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right) \left[-\frac{n x_{\sigma'_a}}{S_e} + \sqrt{\left(\frac{n x_{\sigma'_a}}{S_e} \right)^2 + 4 \left(\frac{n x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right)^2} \right]^{-1} \right\}^{1/3} \quad \text{ED-Gerber} \quad (\text{Ec. 1.95})$$

Las ecuaciones obtenidas para el diámetro se deben iterar hasta llegar a un valor aceptable del diámetro. Como se puede ver el diámetro depende de los valores de los factores de concentración de esfuerzos a fatiga, y éstos a su vez dependen de los factores geométricos de concentración de esfuerzos donde también se encuentra involucrado el diámetro dependiendo del tipo de discontinuidad presente. La manera de iterar sobre el diámetro es similar a la descrita para el diseño estático.

1.2.14. TAMAÑOS PREFERIDOS

Los números preferidos son un sistema internacionalmente estandarizado en la norma ISO 3. Se los conoce también como los números de Renard o la serie-R. Éstos números son generados por una serie geométrica que genera dependiendo de la serie un grupo de números preferidos entre el 1 y el 10. La serie R5 prefiere 5 números en ese rango, la R10 posee 10 pasos, la R20 tiene 20 pasos, y la R40 posee 40 pasos entre el 1 y el 10. Entre cada paso existen incrementos entre pasos de aproximadamente 60, 25, 12 y 6 % respectivamente.

La tabla 1.10 contiene los números de cada serie tomando en cuenta que las series de mayor número R contienen a la serie anterior, además sus múltiplos de potencias de 10 se pueden usar para obtener los tamaños preferidos en cualquier escala. (Oberg, Jones, Horton, y Ryffel, 2012, pág. 674)

Tabla 1.10. Números de Renard
Fuente: (Budynas y Nisbett, 2012, tabla A-17)

Serie	Números
R5	1, 1.6, 2.5, 4, 6.3, 10
R10	1.25, 2, 3.15, 5, 8
R20	1.12, 1.4, 1.8, 2.24, 2.8, 3.55, 4.5, 5.6, 7.1, 9
R40	1.06, 1.18, 1.32, 1.5, 1.7, 1.9, 2.12, 2.36, 2.65, 3, 3.35, 3.75, 4.25, 4.75, 5.3, 6, 6.7, 7.5, 8.5, 9.5

CAPÍTULO 2

PYTHON Y FREECAD

Habiendo definido el proyecto con sus objetivos, tanto general como específicos; sus alcances, justificación y el proceso de diseño de ejes en general; a continuación se tiene una descripción de los recursos informáticos a usarse en el desarrollo del mismo.

2.1. LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN PYTHON

Python es un lenguaje de programación interpretado, interactivo y orientado a objetos que incorpora módulos, excepciones, tipado dinámico, tipos de datos dinámicos y de alto nivel y clases. Su sintaxis es sencilla pero en sí es un lenguaje poderoso, portable, de código abierto y además multiplataforma que posee a disposición un sinnúmero de librerías con funciones y clases listas para usar. (python.org, 2015a)

Este lenguaje es usado por organizaciones de todo tipo incluido Google, Yahoo, Lucasfilm y la NASA. Permite crear programas con interfaz de usuario (GUI), sitios web, analizar datos, tareas de administración del sistema, desarrollo de juegos, etc. (thepythonguru.com, 2015)

En la actualidad existen dos versiones principales disponibles: Python 2 y Python 3, la versión utilizada en el entorno de programación embebido en el programa FreeCad es 2.7 por lo que a lo largo del capítulo únicamente se hablará de dicha versión.

2.1.1. CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

Python es un lenguaje de *alto nivel* lo que significa que el código primero tiene que traducirse a un lenguaje de máquina para poder ejecutarlo, en este lenguaje quien se encarga de eso es un intérprete. A diferencia de un lenguaje compilado, uno interpretado es un poco más lento. Y un lenguaje a nivel de máquina es mucho más rápido que ambos pero presenta mayor dificultad en desarrollarlo.

La *sintaxis* de Python permite al usuario tener cierta facilidad de comprensión del código. A diferencia de muchos otros lenguajes utiliza la indentación para definir los bloques del programa. Además posee palabras claves en donde normalmente otros lenguajes usan símbolos. Todo esto lo hace más legible y amigable para el usuario. (python.org, 2015c)

Interactivo significa que puede interactuar o inclusive estar embebido en otros programas pudiendo controlarlos. (freecadweb.org, 2014)

El *tipeo dinámico* que posee se refiere a que no existe la necesidad de definir el tipo de las variables antes de usarlas, porque se establecen automáticamente. El tipeado fuerte de Python no permite la conversión automática de tipos de datos.

Orientado a objetos es un paradigma de programación que propone el uso de clases y objetos junto a los conceptos de: herencia, abstracción, polimorfismo, encapsulamiento, etc.

El manejo de *módulos* permite importar un grupo de funciones y clases desde los archivos en los que están empaquetados. También es permitido crear estos módulos para usarlos de forma extensiva.

La *portabilidad* hace referencia a la facilidad de poder ejecutar el mismo código en diferentes tipos de computadoras.

En general la programación en Python requiere menos cantidad de código en comparación con otros lenguajes para conseguir el mismo resultado.

2.1.2. TIPOS DE DATOS

El lenguaje de programación Python posee varios tipos de datos nativos; desde los más básicos como: enteros, flotantes, booleanos y cadenas; hasta tipos de datos más complejos de gran utilidad como lo son las: tuplas, listas y diccionarios, además de éstos existen otros que tienen usos especiales. Tomando en cuenta que todo es un objeto en Python se define también como tipos de datos a las funciones y clases, sin embargo no se los tomará como tipos de datos al no ser elementales como los anteriormente mencionados. (python.org, 2015d)

Una característica de gran utilidad es la mutabilidad que poseen algunos de los tipos de datos que permite actualizar o cambiar el valor del dato mediante algunos operadores. Los tipos de datos inmutables son: números (enteros, largos o flotantes), booleanos, cadenas, tuplas y funciones. (Greiner, 2012c)

A continuación se describe con pequeños ejemplos lo más elemental de los diferentes tipos de datos.

2.1.2.1. Flotantes y enteros

Ambos tipos son números, pero presentan diferentes características. Los tipo *entero* poseen un número limitado de dígitos y pueden tomar un valor entre -2^{31} y $2^{31} - 1$. Se puede ver en el código a continuación un ejemplo con este tipo de datos.

Código fuente 2.1. Tipos de datos numéricos: enteros

```
>>> #Tipo Entero
>>> entero = 12
>>> print entero
12
>>> type(entero)
<type 'int'>
```

Asimismo los tipo *float* representan números reales que poseen decimales y doble precisión, esto significa que pueden tomar valores de aproximadamente $\pm 2.2 \times 10^{-308}$ hasta $\pm 1.8 \times 10^{308}$. En el siguiente cuadro se puede ver un ejemplo.

Código fuente 2.2. Tipos de datos numéricos: flotantes

```
>>> #Tipo Float
>>> real = 31.4159e-1
>>> print real
3.14159
>>> type(real)
<type 'float'>
```

Los cuadros de código muestran lo que se llama la línea de comando que es uno de los entornos de programación que posee Python, en este se ejecuta inmediatamente la programación mostrando cada uno de los resultados de las líneas. La primera línea es de asignación, donde a una variable llamada “entero” se le asigna un valor entero. La sentencia “print” da como resultado una impresión en la consola de la variable a continuación de la palabra clave. La sentencia “type” retorna el tipo de la variable entre paréntesis. La letra “e” significa que el número posee un exponente base 10 elevado al número a continuación. (Covantec, 2014)

2.1.2.2. Booleanos y cadenas

Los tipo *booleanos* pueden tener únicamente dos valores: *True* y *False*, verdadero y falso respectivamente. Se usa ampliamente para darle lógica a las declaraciones compuestas.

Código fuente 2.3. Tipos de datos: booleanos

```
>>> #Tipo Booleano
>>> booleano = False
>>> print booleano
False
>>> type(booleano)
<type 'bool'>
```

Las *cadenas* son en otras palabras un grupo de caracteres que se lo encierra entre comillas simples o dobles para declararlo. Entre los caracteres especiales de uso común se encuentran: “\n” (nueva línea) y “\t” (tabulación). Poseen otras características que se verán en el ejemplo.

Código fuente 2.4. Tipos de datos: cadenas

```
>>> #Tipo Cadena o String
>>> cadena = "Esto es una \t 'cadena'."
>>> print cadena
Esto es una      'cadena'.
>>> type(cadena)
<type 'str'>
>>> cadena[8:11]
'una'
```

Como se puede apreciar las cadenas están indexadas y por eso se puede extraer uno o varios elementos específicos conociendo su índice.

2.1.2.3. Tuplas y listas

Las *tuplas* son tipos de datos que pueden alojar otros datos de cualquier tipo pero de manera inmutable. Las tuplas se encuentran indexadas a partir del cero.

Código fuente 2.5. Tipos de datos: tuplas

```
>>> #Tipo Tupla
>>> tupla = (1,2.0,'tres',(4,'cinco'),True)
>>> print tupla
```



```
(1, 2.0, 'tres', (4, 'cinco'), True)
>>> type(tupla)
<type 'tuple'>
>>> tupla[-2]
(4, 'cinco')
```

A diferencia de las tuplas, las *listas* permiten almacenar una secuencia de valores de cualquier tipo pudiendo modificarlos en tiempo de ejecución (mutabilidad). Asimismo los datos dentro de las listas tienen un índice con lo cual se puede acceder al dato usando corchetes.

Código fuente 2.6. Tipos de datos: listas

```
>>> #Tipo Lista
>>> lista = ['a', (1, 'b'), ['c', 2.5], True]
>>> print lista
['a', (1, 'b'), ['c', 2.5], True]
>>> type(lista)
<type 'list'>
>>> lista[1:3]
[(1, 'b'), ['c', 2.5]]
```

Recordando que los tipos de datos son objetos, poseen métodos por ejemplo para el tipo de dato listas, métodos para ordenar, agregar o quitar ítems.

2.1.2.4. Diccionarios

Los *diccionarios* presentan una estructura de mapeo de datos a partir de claves, esto significa que en vez de tener un índice para referirse a un ítem en específico, se usa una clave. También se los conoce como memorias asociativas o arreglos asociativos. Las claves son inmutables, pero los valores asociados si pueden modificarse.

Código fuente 2.7. Tipos de datos: diccionarios

```
>>> #Tipo Diccionario
>>> diccionario = {'clave1':'dato1','c2':2.0,'c3':True,'c4':[4,5]}
>>> print diccionario
{'c3': True, 'c2': 2.0, 'clave1': 'dato1', 'c4': [4, 5]}
>>> type(diccionario)
<type 'dict'>
>>> diccionario['c4']
[4, 5]
```

Como se puede apreciar en el ejemplo, cuando se muestra un diccionario con la sentencia “print”, este no tiene un orden secuencial. Se almacena como mejor se acomode en la memoria usada para la variable. (Greiner, 2012a)

2.1.3. FUNCIONES, CLASES Y OBJETOS

2.1.3.1. Funciones

Crear una función es encapsular código, o en otras palabras es una manera de almacenarlo para reutilizarlo posteriormente. Toma o no parámetros de entrada y retorna o no valores de salida. Un ejemplo sencillo de definición y llamado de una función se muestra a continuación. (Greiner, 2012b)

Código fuente 2.8. Definición de una función en Python

```
>>> #Definicion de una funcion
>>> def cubo(n):
...     c = n * n * n
...     return c
...
>>> #Llamado de una funcion
>>> cubo(3)
27
```

2.1.3.2. Clases y objetos

La programación orientada a objetos promueve el uso de clases y objetos. Una clase es como una plantilla para crear objetos que posee en su cuerpo atributos y métodos específicos definidos dentro de la misma. Y un objeto en sí es una instancia de una clase. Un método es simplemente una función que se ha definido dentro de una clase y que forma parte de los atributos de un objeto creado a partir de dicha clase. A continuación se muestra un ejemplo sencillo de definición de una clase y la creación de una instancia de esa clase u objeto.

Código fuente 2.9. Definición de una clase en Python

```
>>> #Definicion de la clase Persona
>>> class Persona(object):
...     '''Una clase que define el objeto persona.'''
...     def __init__(self, nombre, edad, sexo, estatura):
...         self.estatura = estatura
...         self.sexo = sexo
...         self.edad = edad
```

```

...         self.nombre = nombre
...     def modif_estatura(self,nueva):
...         self.estatura = nueva
...
>>> #Creacion de una instancia de la clase Persona
>>> personal = Persona('Juan', 18, 'Masculino', 1.72)
>>> print personal
<__main__.Persona object at 0x00000000007634E10>
>>> #Acceso a un atributo del objeto
>>> personal.estatura
1.72
>>> #Ejecucion de un metodo propio del objeto
>>> personal.modif_estatura(1.75)
>>> #Verificacion de la ejecucion
>>> personal.estatura
1.75

```

Como se puede apreciar, un objeto es una manera más compleja de manejar la información, puede en algunos casos ser conveniente definir clases para crear objetos con el objetivo de simplificar el código de programación y evitar tener que repetir líneas de programación una y otra vez a lo largo del programa. (Codecademy, 2015)

2.1.4. OPERADORES Y SENTENCIAS

2.1.4.1. Operadores

Un *operador* es un símbolo especial que se usa para realizar un cálculo u operación entre datos. Para tipos de datos numéricos, Python usa los símbolos +, – y / para operar, que son los mismos que en la matemática, también usa el * (asterisco) como símbolo para multiplicar y la potenciación la representa con **. Sin embargo la división / es una división entera si los operandos son enteros, y es flotante cuando al menos uno es tipo flotante. En el siguiente cuadro de código se puede observar el uso de estos operadores básicos.

Código fuente 2.10. Operadores básicos en Python

```

>>> #Suma de entero con flotante
>>> 4 + 5.0
9.0
>>> #Suma de dos enteros, uno negativo
>>> -7 + 1
-6

```

```

>>> #Multiplicacion de entero con flotante
>>> 6 * 4.2
25.200000000000003
>>> #Division entera
>>> 10 / 3
3
>>> #Division flotante
>>> 10.0 / 3
3.3333333333333335
>>> #Ley de signos en enteros
>>> 4 - -3
7
>>> #Operaciones combinadas con simbolos de agrupacion
>>> 5 * -(1.0 / 2.0)
-2.5

```

Los ejemplos de división y multiplicación flotante muestran que la capacidad que poseen este tipo de datos tiene implícito un error cuando se realiza operaciones. Sin embargo el error está en un orden muy pequeño. También se puede convertir entre datos, encontrar el máximo y mínimo de un grupo de datos, aproximar decimales, etc. todo esto usando funciones simples para eso.

Cuando se usa ciertos operadores con datos tipo cadena se puede obtener resultados diferentes, por ejemplo el símbolo + permite concatenar cadenas, el símbolo * junto con un entero permite multiplicar la cadena el número de veces especificado. El siguiente bloque muestra ejemplos de esto.

Código fuente 2.11. Operaciones sobre cadenas en Python

```

>>> a = 'hola '
>>> b = 'mundo'
>>> #Concatenacion de cadenas
>>> a + b
'hola mundo'
>>> #Multiplicacion de cadenas
>>> a * 3
'hola hola hola '

```

De igual manera los datos tipo cadena poseen más operadores que permiten entre otras cosas, contar los caracteres, cambiar de minúsculas a mayúsculas o viceversa, etc. (Becerra, 2009, cap. 3)

2.1.4.2. Sentencias

Una *sentencia* es una instrucción a ser ejecutada por el intérprete. Por ejemplo la asignación y “print” son dos de las más comunes. A parte de éstas existen unas sentencias llamadas compuestas que permiten manejar lógica matemática y operaciones de iteración. Las más importantes en Python son: el condicional: “*if*”, el ciclo: “*while*”, el lazo “*for*” y la sentencia: “*try – except*”. Las estructuras básicas de este tipo de sentencias se encuentran a continuación.

Código fuente 2.12. Sentencia “if” en Python

```
>>> #Sentencia 'if-elif-else'
>>> a = 2
>>> if a >= 5:
...     print 'mayor o igual'
... elif a < 0:
...     print 'negativo'
... else:
...     print 'menor'
...
menor
```

En este ejemplo se puede ver una estructura donde se usan los comparadores: >= (mayor o igual) y < (menor), donde entre otros también se pueden usar: > (mayor), <= (menor o igual), == (igual), != (no igual). La sentencia “*elif*” representa otro caso, en el caso de que el primero no se cumpla y la sentencia “*else*” ejecuta el código indentado cuando ninguna de las anteriores premisas se cumple.

Código fuente 2.13. Ciclo “while” en Python

```
>>> #Ciclo 'while'
>>> a = 5
>>> while a >= 5 and a < 10:
...     a += 1
...     print a
...
6
7
8
9
10
```

Las operaciones de comparación retornan valores tipo booleano o de verdad, es

por eso que se puede añadir operadores lógicos en las sentencias que funcionan de la misma forma que en la lógica matemática. Los principales son: *and* (y), *or* (o), *not* (no).

Código fuente 2.14. Ciclo “for” en Python

```
>>> #Ciclo 'for'
>>> a = 5
>>> for i in range(a):
...     print i
...
0
1
2
3
4
```

En el ejemplo de este tipo de sentencia, se ha usado una función de gran utilidad llamada “*range*” que generalmente toma un valor devolviendo una lista con un número de elementos igual al valor de entrada en una secuencia aritmética empezando desde el 0. Por lo tanto si se pretende usar un lazo “*for*” se debe usar un objeto de tipo iterable.

Código fuente 2.15. Sentencia “try-except” en Python

```
>>> #Sentencia 'try-except'
>>> a = 5
>>> b = 0
>>> try:
...     c = a / b
... except ZeroDivisionError:
...     print 'no existe division para cero'
...
no existe division para cero
>>>
```

La sentencia prueba-excepción, se usa con el objetivo de tomar acciones respecto a posibles errores presentes en el código, sin embargo se debe conocer el tipo de error que puede producirse para posteriormente manejarlo. (python.org, 2015e)

2.1.5. MÓDULOS Y PAQUETES

Un módulo es un archivo que puede contener funciones, variables, excepciones, clases e inclusive más tipos de datos definidos que pueden importarse fácilmente para usarlas en el programa principal usando en éste la sentencia “import” y sus variantes. Python posee varios módulos estándar, como el módulo “math”, que se instalan junto con el intérprete y que pueden ser importados en cualquier momento.

Un paquete es una colección de módulos relacionados organizados para uso extensivo.

Los módulos y paquetes pueden ser creados por el usuario cuando un programa se torna largo, con el objetivo de poder mantener ordenado el código y dar mantenimiento al mismo fácilmente.

Ciertos programas que se manejan usando el lenguaje Python o lo poseen embebido, tienen varios módulos creados para usarlos dentro de los mismos; también usan librerías de terceros haciéndolos más versátiles.

Además de “NumPy”, una de las librerías de código abierto y de uso libre más importantes a considerar tiene el nombre de “matplotlib”.

2.1.5.1. Paquete NumPy

Entre otros el paquete “NumPy” es fundamental para la computación científica y suele venir incorporado en algunas versiones de Python. Puede manejar arreglos de N dimensiones y trabajar con operaciones de álgebra lineal, números aleatorios, funciones sofisticadas, transformadas de Fourier, etc. (NumPy, 2013)

2.1.5.2. Paquete matplotlib

Es una librería pensada para realizar gráficos de alta calidad en dos dimensiones, en variedad de formatos y con entornos interactivos a través de diferentes plataformas. Puede usarse en guiones (scripts), servidores de aplicaciones web y también embebido en una interfaz de usuario. Posee el paquete “pyplot” que simula el modelo de entrada de “MATLAB” que junto al paquete “IPython” permite obtener un entorno poderoso. (matplotlib development team, 2015)

2.1.6. INTERFAZ GRÁFICA DEL USUARIO (GUI)

Existen varios kits de herramientas para crear y manipular interfaces de usuario. Los más conocidas son: “Tkinter”, “wxWidgets”, “Qt” y “OpenGL”. A lo largo de este proyecto se hablará del paquete “PySide” que es una versión libre de “PyQt” de Riverbank Computing que tiene una capacidad comparable con “PyQt” en la generación de interfaces. (python.org, 2015b)

2.1.6.1. PySide

PySide al igual que “PyQt”, es una adaptación para Python de “Qt” que originalmente se diseñó para crear interfaces de usuario en C++. Provee al lenguaje de programación de características claves en el desarrollo de interfaces tales como: “signals and slots”, objetos gráficos, un entorno para diseñar, etc.

El entorno de diseño de interfaces que posee Qt se llama “QtDesigner” y presta todo tipo de herramientas para crear una interfaz de calidad, además el paquete incluye un aplicativo que permite convertir y almacenar todos los elementos en un archivo que contiene código Python, casi listo para usar. (Qt, 2015) (freecadweb.org, 2015f)

2.2. PROGRAMA DE MODELADO FREECAD

FreeCAD es un modelador CAD 3D paramétrico multipropósito completamente gratuito y de código abierto. Principalmente diseñado para el uso en ingeniería mecánica y diseño de productos pero con uso extendido para diferentes ramas como la arquitectura y otras especialidades de la ingeniería.

Las características de las herramientas de FreeCAD son similares a las de Catia, SolidWorks o SolidEdge, por eso se lo puede encasillar dentro de tecnologías de CAx. Posee una arquitectura modular que permite usar funcionalidades añadidas por el usuario sin modificar el núcleo del programa.

Además como cualquier modelador CAD 3D presenta componentes para trabajar sobre 2D como en bosquejos, croquis y detalles de objetos 3D. No está enfocado en el trazado directo en 2D, tampoco en la animación ni en creación de figuras orgánicas. Aunque gracias a su gran adaptabilidad FreeCAD puede llegar a ser útil en áreas más grandes que en las que se enfoca.

Hace un fuerte uso de librerías de código abierto relativas a la computación científica. Algunas son: OpenCascade (un núcleo de CAD), Coin3D (grupo de

herramientas para desarrollo de imágenes 3D), Qt (infraestructura de desarrollo de interfaces gráficas) y Python (un poderoso lenguaje de programación orientado a objetos). FreeCAD también puede usarse como una librería dentro de otros programas y es multiplataformas. (freecadweb.org, 2015a)

2.2.0.0.1. CAD

La expresión CAD significa Diseño Asistido por Computador e involucra el uso de la tecnología de computación, reemplazando los procedimientos manuales, en el diseño ingenieril. Los programas CAD permiten visualizar, diseñar ideas y simularlas de manera que el ingeniero tenga más claro el funcionamiento de su diseño. (Autodesk, 2015)

2.2.1. CARACTERÍSTICAS

Las características clave que posee el software FreeCAD se encuentran tabuladas en 2.1 con una breve descripción de cada una.

Tabla 2.1. Características del Software FreeCAD.

Operaciones 3D complejas para generación de formas complicadas con un gran rango de entidades geométricas.
Modelado paramétrico , que significa que las formas están en función de propiedades y pueden también depender de otras, se calculan en tiempo real y pueden controlarse mediante código escrito en Python.
Arquitectura modular , que permite añadir funcionalidades al programa mediante código en C++, Python o simplemente usando Macros. Para esto también posee embebido un intérprete de Python para controlar completamente el programa.
Importación y exportación de formatos estándar como: STEP, IGES, DXF, etc. y también su formato nativo Fcstd.
Un bosquejador con resolutor de restricciones, permitiendo definir geometrías 2D correctamente restringidas. Permite crear algunas geometrías base para crear otros tipos de objetos en FreeCAD.
Un módulo de simulación de Robot para el estudio de los movimientos de robots que tiene su propia interfaz de usuario.
Hojas de trazado que permiten generar vistas planas de objetos 3D exportables a formatos como SVG o PDF.
Un módulo de renderizado que permite exportar objetos 3D listos para trabajar con renderizadores externos.
Un módulo de arquitectura que permite un trabajo similar al Modelado de Información de Construcción (BIM).

En la actualidad se encuentra en desarrollo un módulo de ensamblado de partes y otro más de CAM dedicado con generación de código G. (freecadweb.org, 2015b)

La comunidad de usuarios con bastos conocimientos de las herramientas del software ha contribuido con un sinnúmero de aplicaciones desarrolladas para FreeCAD. Existen aplicaciones de impresión 3D, librerías de elementos normalizados, generador de engranajes, ruedas de Geneva, resortes, chapas metálicas, animación de mecanismos, etc.

2.2.2. MÓDULOS Y ENTORNOS DE TRABAJO

FreeCAD se maneja por entornos de trabajo (Workbenches); en su versión 0.15 se encuentran los entornos de la tabla 2.2

Tabla 2.2. Entornos de trabajo del Software FreeCAD.

Entorno	Nombre
Arquitectura	Arch
Bocetos 2D	Draft
Dibujo	Drawing
Elementos Finitos	Fem
Imágenes	Image
Mallado	Mesh Design
OpenSCAD	OpenSCAD
Parte	Part
Diseño de Partes	Part Design
Gráficos	Plot
Puntos	Points
Renderizado	Raytracing
Ingeniería Inversa	Reverse Engineering
Simulación de Robots	Robot
Barcos	Ship
Croquizador	Sketcher
Hoja de Cálculo	Spreadsheet

Los entornos más útiles en cuanto al diseño de piezas y partes son el Part y el Part Design para lo cual existen herramientas especializadas. (freecadweb.org, 2015g)

2.2.2.1. Herramientas del módulo part

El banco de trabajo Part, posee un grupo de geometrías tridimensionales primitivas y también un conjunto de herramientas para realizar operaciones que modifican los objetos como puede apreciarse en la tabla 2.3.

Todas las operaciones y objetos elementales pueden trabajarse usando algunos comandos creados para usar en guiones (scripts) o directamente en la consola de Python. El entorno Part Design posee operaciones adicionales para trabajar a partir de croquis con su propio set de herramientas. (freecadweb.org, 2015c)

Tabla 2.3. Herramientas del Módulo Part en FreeCAD

(b) Operaciones de modificación

(a) Geometrías 3D Básicas

Caja
Cono
Cilindro
Esfera
Toroide

Operaciones Booleanas
Extrusión
Redondear
Revolución
Sección
Chaflán
Simetría

2.2.2.2. Entorno de desarrollo para Python a través de FreeCAD

Una de las características más interesantes y poderosas de FreeCAD es la disponibilidad de una consola de Python en todo momento y la capacidad de crear guiones (scripts) para uso extensivo de las herramientas que el programa ofrece. La mayor ventaja de usar el intérprete de Python embebido en FreeCAD es que no es necesario el proceso de compilación antes de tener una respuesta del programa. Además se puede tener acceso total a cualquier parte de FreeCAD. Entre otras cosas es posible:

- Crear y modificar geometrías
- Crear y personalizar herramientas y comandos
- Modificar la interfaz
- Modificar la escena de representación, etc.

La documentación acerca de cómo usar el lenguaje Python sobre FreeCAD es extensa y se ha escrito para algunos casos más comunes. Muchos ejemplos básicos y pedazos de código reutilizable se han publicado tanto por los desarrolladores como por la comunidad de usuarios.

El desarrollo de FreeCAD se encuentra en una etapa fuerte por lo que algunas partes del programa se encuentran en una manera primitiva tal como lo está el editor de código que posee únicamente las herramientas más básicas para desarrollar. Una desventaja presente dentro de FreeCAD es que los programas escritos usando el editor de FreeCAD pueden no tener utilidad fuera del programa. (freecadweb.org, 2015d)

Se encuentra planeado la implementación de herramientas para desarrollo automáticas y un sistema de gestión de errores (debugger) además de otras

herramientas típicas de un editor sofisticado. El módulo principal para crear y modificar geometrías dentro de Python es el módulo “FreeCAD” que posee submódulos para manejar tipos de datos topológicos. De manera similar se usa el módulo “Part” que posee diferentes objetos geométricos básicos. Combinando los diferentes módulos disponibles es posible crear programas muy útiles para el usuario. (freecadweb.org, 2015e)

CAPÍTULO 3

ESPECIFICACIÓN, DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE

Ya se describió en capítulos anteriores tanto la conceptualización del proyecto como las herramientas a usar para el desarrollo del programa; lo que hace falta es especificar los requerimientos técnicos, elaborar el diseño y estructura del sistema, y la implementación del código del mismo. Éste capítulo culmina con el núcleo del programa en código, mostrando las principales características del mismo y en función de los requisitos de un diseñador mecánico.

3.1. ESPECIFICACIONES DEL PROGRAMA

El programa a diseñar necesita cumplir con ciertos requisitos establecidos que lo caracterizan tomando en cuenta diferentes criterios que deben involucrar al usuario final. Con las requerimientos establecidas el programador determina las características del mismo para obtener un resultado satisfactorio.

3.1.1. REQUERIMIENTOS DEL DISEÑADOR

En función de las necesidades del usuario (diseñador mecánico) se debe tomar en cuenta que el programa haga lo que se presenta en la tabla 3.1.

Tabla 3.1. Requerimientos del diseñador

•	Debe tener la capacidad de diseñar satisfactoriamente ejes mecánicos sometidos a cargas tanto estáticas como dinámicas.
•	El programa debe reducir los tiempos requeridos de diseño de ejes.
•	Debe presentar un sólido del elemento exportable a otros entornos de diseño paramétrico.
•	Debe disponer de una interfaz gráfica amigable.
•	Debe ahorrar el costo de licencias y gastos en uso de herramientas informáticas.

3.1.2. CARACTERÍSTICAS DEL SOFTWARE

Basado en los requerimientos se describe en la tabla 3.2 la solución establecida por el programador.

Tabla 3.2. Características del software EjesDim.

<ul style="list-style-type: none"> • Permite seleccionar materiales típicos de ejes con la posibilidad de añadir nuevos a la lista.
<ul style="list-style-type: none"> • Ubica según los requerimientos del usuario los cambios de sección y dos apoyos.
<ul style="list-style-type: none"> • Permite añadir diferentes tipos de cargas espaciales descomponiéndolas en dos planos.
<ul style="list-style-type: none"> • Calcula las reacciones en los apoyos y los diagramas de Cortantes, Momentos Flectores y Torsores con sus valores máximos y críticos en dos planos.
<ul style="list-style-type: none"> • Entrega una representación gráfica de la sección crítica, las teorías de falla y el círculo de Mohr para diseño estático así como también muestra los cálculos necesarios para crear dichas representaciones.
<ul style="list-style-type: none"> • Muestra gráficamente los esfuerzos fluctuantes sinusoidales, la gráfica S'_e vs S_{utr} y los criterios de falla para el diseño dinámico con materiales dúctiles y los cálculos de las cantidades necesarias para graficarlas.
<ul style="list-style-type: none"> • Calcula los coeficientes de los concentradores de esfuerzos tanto teóricos como reducidos para fatiga en cambios de sección.
<ul style="list-style-type: none"> • Permite establecer los coeficientes modificadores de la resistencia a la fatiga de manera interactiva y fácil.
<ul style="list-style-type: none"> • Dimensiona una gran variedad de ejes de sección transversal circular usando expresiones analíticas tanto para cargas estáticas como dinámicas y cumpliendo con las recomendaciones de la bibliografía para el diseño de ejes.
<ul style="list-style-type: none"> • Itera de forma manual sobre el diámetro y los coeficientes geométricos de concentración de esfuerzos, además posee un módulo de redondeo a dimensiones más comunes de ejes.
<ul style="list-style-type: none"> • Permite el uso libre y sin licencia debido a que se crea a partir de un paquete de código abierto y gratuito FreeCAD programable usando lenguaje Python.
<ul style="list-style-type: none"> • Exporta el sólido dimensionado hacia otros paquetes de diseño paramétrico.
<ul style="list-style-type: none"> • Trabaja con unidades del Sistema Internacional.
<ul style="list-style-type: none"> • Para interactuar directamente con los parámetros de diseño presenta una interfaz gráfica amigable diseñada usando Qt designer para PySide soportados por FreeCAD.

3.2. DISEÑO DEL PROGRAMA

El diseño del programa está restringido por el método que se use para dimensionar el diámetro de un eje. El método estocástico requiere de más información de entrada y a pesar de brindar mayor precisión es menos práctico para el diseño rápido debido a que se requieren cierta cantidad de estudios previos de las variaciones estadísticas de algunos parámetros. Es por eso que el método clásico que itera sobre el diámetro es el que se ha elegido como el guía para el desarrollo del programa.

3.2.1. ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA

Ya se ha descrito anteriormente el proceso de dimensionamiento de un eje en el marco teórico. La estructura del programa irá determinada en base a dicho proceso y dividida por subprocesos. A continuación se muestra una lista de los módulos que se ha creído conveniente crear:

- Selección del material: dúctil y frágil
- Configuración geométrica: secciones y apoyos
- Cargas: aplicadas, reacciones y diagramas
- Coeficientes de concentración de esfuerzos: K_t , K_{ts} , K_f , K_{fs} para hombros
- Diseño estático: sección crítica, círculo de Mohr, teorías de falla y diámetro crítico bajo cargas estáticas
- Diseño dinámico: esfuerzos fluctuantes, resistencia a la fatiga, criterio de falla a la fatiga y diámetro crítico bajo cargas dinámicas
- Tamaños preferidos
- Interfaz de usuario

De forma gráfica en la figura 3.1 se puede observar la distribución de los módulos hasta en tres niveles.

Para cada módulo secundario se pueden ver un grupo de submódulos que de igual manera se han considerado fundamentales en el proceso de dimensionamiento de ejes, algunos de éstos a su vez se los ha dividido en partes. En la sección siguiente se describirá el contenido de cada módulo y submódulo y los parámetros que gobiernan en cada uno.

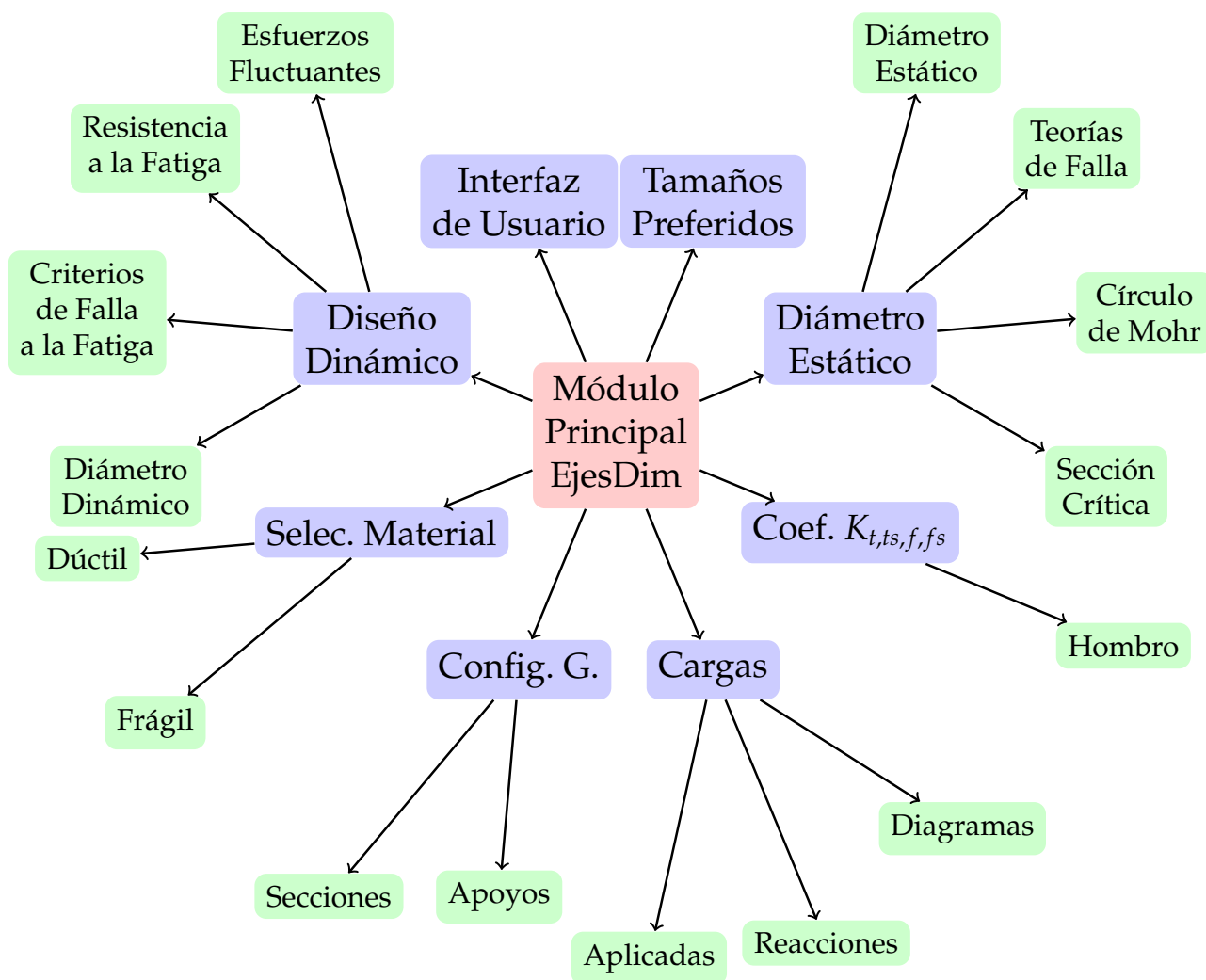


Figura 3.1. Estructura modular del programa EjesDim

3.2.2. DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS

En cada uno de los pasos que normalmente se sigue para dimensionar ejes se presentan parámetros de entrada y salida. Los módulos y submódulos que definen cada paso descritos en la estructura del programa pueden definir las siguientes variables y características.

3.2.2.1. Módulo de selección del material

Como se puede observar claramente en la figura 3.1 la subdivisión de este módulo está definida por el tipo de material sea este dúctil o frágil. Se especifica esta división debido a que la bibliografía recomienda el uso de materiales dúctiles por sobre materiales frágiles cuando el eje se somete a fatiga lo que provocará que si se selecciona un material frágil el programa bloquee automáticamente la opción de dimensionamiento para condiciones de fatiga.

También es necesario establecer la diferencia de materiales para que se establezcan las propiedades mecánicas adecuadas para cada tipo. Así para *materiales dúctiles* se establece la resistencia a la fluencia S_y y última a tracción S_{ut} . Mientras que para *materiales frágiles* son las resistencias últimas a tracción S_{ut} y compresión S_{uc} .

3.2.2.2. Módulo de configuración geométrica

Muchos de los diseños de ejes con dos apoyos poseen varios cambios de sección. Se debe ingresar las dimensiones de estas entidades definiéndolas geométricamente, tomando en cuenta que cada una posee sus propios parámetros.

3.2.2.2.1. Secciones

Las secciones del eje serían mínimo de una y máximo el número que el diseñador considere adecuado. Por cada sección se debe tomar en cuenta dos parámetros de entrada: el diámetro de la sección d y la longitud l de la misma. La longitud total del eje l_{tot} se calcula automáticamente con la sumatoria de las longitudes de todas las secciones.

3.2.2.2.2. Apoyos

Se establece la ubicación de dos apoyos tomando en cuenta que el eje se lo considera simplemente apoyado. El programa permite voladizos en ambos lados así como en uno solo o en ninguno. Aquí los valores de entrada serían las ubicaciones

respecto del origen de ambos apoyos denotados por X_{R_1} y X_{R_2} . Es muy importante referirse a la sección de configuración de ejes para establecer adecuadamente un diseño preliminar del mismo.

3.2.2.3. Módulo de cargas

Las cargas pueden ser aplicadas o resultantes del cálculo. También se ha incluido a los diagramas de la distribución de las cargas internas en este módulo como salidas.

3.2.2.3.1. Aplicadas

Las cargas se distinguen por el efecto que producen (torsión o flexión) y también por el tipo (fuerza concentrada, distribuída, y momento concentrado).

La *Fuerza Distribuída Lineal* posee como parámetros de entrada una magnitud inicial M_i una final M y las entradas de posición absoluta inicial X_i y final X_f . La *Fuerza Concentrada* al igual que el *Momento Flector* y el *Momento Torsor* poseen únicamente un parámetro M que representa la magnitud y un valor absoluto de la posición X_i .

Además al tratarse de cargas espaciales se debe establecer un ángulo θ para ubicarlas radialmente. Los momentos torsores no presentan este ángulo porque no influye en nada.

3.2.2.3.2. Reacciones

Las *reacciones* R_{y_1} , R_{z_1} , R_{y_2} y R_{z_2} , son valores de salida que se calculan automáticamente por el programa y representan los valores de las fuerzas en los apoyos tanto en el eje y como en el eje z . Se obtienen a partir de una ecuación que se explicará más adelante que considera como parámetros de entrada las características de cada carga aplicada (M_i , M , X_i y X_f), la longitud del eje l_{tot} y las ubicaciones de los apoyos X_{R_1} y X_{R_2} .

3.2.2.3.3. Diagramas

Los *diagramas* tanto de cortante como de momento flector y torsor son el resultado de un algoritmo de cálculo de los mismos de los cuales se obtiene los valores máximos M_{max} , T_{max} , mínimos M_{min} , T_{min} y los valores que toman en las secciones críticas M_{crit} , T_{crit} . Se calculan tanto planos xy y xz como también para un valor total obtenido con la relación de Pitágoras.

3.2.2.4. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos

Los coeficientes de concentración de esfuerzos geométricos se obtienen a partir de la tabla 1.6 que como datos toma dependiendo del tipo de concentrador de esfuerzos los parámetros geométricos específicos del tipo.

3.2.2.4.1. Hombros

En la tabla se muestra la geometría de un hombro donde D representa el diámetro mayor, d el diámetro menor, r es el radio de entalle y h representa la diferencia de radios de las dos secciones. Éstos son los parámetros de entrada para el cálculo de los coeficientes geométricos de hombros K_t y K_{ts} .

Los coeficientes de concentración de esfuerzos reducidos a fatiga también dependen del tipo de concentrador de esfuerzos porque involucran los coeficientes geométricos K_t , K_{ts} y también porque el radio r_m de la muesca influye en el factor de sensibilidad a la muesca que es directamente proporcional al factor a fatiga pero en su otra forma también involucra un valor radical \sqrt{a} que a su vez usa el valor de S_{ut} como parámetro. Finalmente se obtiene el valor de K_f y K_{fs} .

3.2.2.5. Módulo de diseño estático

Para el diseño estático se tienen varios submódulos en los cuales hay algunas entradas y algunas salidas por ejemplo para:

3.2.2.5.1. Sección crítica

se tiene que calcular los esfuerzos a partir de las ecuaciones Ec. 1.20, Ec. 1.23 y Ec. 1.35, que toman como entrada el valor obtenido de los momentos críticos a flexión M_{crit} y torsión T_{crit} , también el valor de los coeficientes de concentración de esfuerzos K_t y K_{ts} presentes en cada uno y el diámetro de las secciones críticas d . La salida finalmente es una gráfica en función de los valores de los esfuerzos tanto cortante $\tau_{xz'}$ como normal σ_x en la sección crítica ubicada en la posición x .

3.2.2.5.2. Círculo de Mohr

El fin de éste submódulo es obtener los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 , los esfuerzos cortantes máximos $\tau_{1,2}$, el esfuerzo medio σ_τ y el ángulo ϕ a partir de las componentes de los esfuerzos combinados calculados en el submódulo anterior $\tau_{xz'}$ y σ_x .

3.2.2.5.3. Teorías de falla

Se usan tres teorías de falla para materiales dúctiles y tres para materiales frágiles. Por lo que las teorías toman los valores de las resistencias S_y , S_{ut} y S_{uc} y los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 para compararlas y se obtiene un gráfico de la teoría seleccionada.

3.2.2.5.4. Diámetro del eje para el diseño estático

Aquí se toma un valor de entrada llamado factor de diseño n_e que determina finalmente el diámetro estático d_e despejado de la teoría seleccionada que toma S_y , S_{ut} y S_{uc} en la combinación que requiera la teoría y la compara con los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 .

3.2.2.6. Módulo de diseño dinámico

El diseño dinámico para vida infinita posee varios submódulos en los que se manejan entradas y algunas salidas como se describen a continuación:

3.2.2.6.1. Esfuerzos fluctuantes

Conociendo las componentes de esfuerzos fluctuantes σ_a y τ_m calculados igual que los esfuerzos σ_x y $\tau_{xz'}$ pero multiplicados por los coeficientes de concentración de esfuerzos a fatiga K_f , K_{fs} se puede diagramar la situación de esfuerzos fluctuantes del sistema.

3.2.2.6.2. Resistencia a la fatiga

La resistencia a la fatiga de la probeta S'_e depende únicamente del valor de la resistencia última a la tracción del material S_{ut} para poder graficar la curva S'_e vs S_{ut} . Pero los coeficientes que modifican a la resistencia a la fatiga de la probeta si dependen de muchos factores entre los cuales se encuentran para el acabado superficial (que depende de S_{ut} y los factores a y b tabulados en 1.8), el tamaño del eje, específicamente su diámetro d , el tipo de cargas, la temperatura de operación T , la confiabilidad, y el valor de k_f . Multiplicando todos los factores modificadores y la resistencia a la fatiga de una probeta se puede obtener el valor de la resistencia a la fatiga S_e .

3.2.2.6.3. *Criterios de falla a la fatiga*

Los criterios de falla a la fatiga para comenzar están formulados en base a las componentes de esfuerzos σ_a y τ_m de los cuales se extrae el valor de los esfuerzos equivalentes σ'_a y σ'_m y están relacionados con las resistencias del material S_y , S_{ut} dependiendo del criterio.

3.2.2.6.4. *Diámetro del eje para el diseño dinámico*

Se agrega el factor de diseño n_d que sirve para calcular el diámetro dinámico d_d usando el criterio seleccionado que toma S_y y S_{ut} dependiendo del mismo y la compara con los esfuerzos equivalentes σ'_a y σ'_m .

3.2.2.7. **Módulo de tamaños preferidos**

El único parámetro de entrada que se requiere es el diámetro sea d_e o d_d para que aproxime a un tamaño preferido d_p . Además calcula los diámetros preferidos de las secciones no críticas usando el vector de secciones y manteniendo la proporción.

3.2.2.8. **Módulo de interfaz gráfica de usuario**

La interfaz en su diseño posee lugares donde colocar las entradas y objetos que muestran las salidas. Al ser un módulo extenso no se lo analizará detalladamente. Sin embargo cabe mencionar que se genera a partir del programa de diseño de interfaces “Qt designer”.

3.3. **IMPLEMENTACIÓN DEL PROGRAMA**

Para poder codificar el programa se realizó un estudio detallado de cada uno de los algoritmos necesarios para resolver ejes y la relación que tienen cada uno. Usando la misma estructura diseñada se pueden mostrar las clases y funciones globales que se crea para el desarrollo de la aplicación. En algunos casos el algoritmo de algunos es un tanto complejo por lo que se desglosa de manera más detallada su funcionamiento.

3.3.1. **DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES, FUNCIONES E INTERFAZ DE USUARIO**

A continuación se definen las variables y funciones agrupadas por cada módulo y su participación en la interfaz del usuario.

3.3.1.1. Módulo principal

Todos los métodos definidos dentro de este módulo involucran objetos de la interfaz gráfica y aunque están relacionados con otros módulos no se los ha involucrado dentro de los mismos para poder probar cada uno de manera independiente.



Figura 3.2. Captura de la pantalla de arranque del programa EjesDim

Antes de iniciar el programa se despliega una pantalla de arranque hasta cargar los módulos y las funciones definidas dentro de los mismos. La figura 3.2 muestra una captura de dicha pantalla y la figura 3.3 muestra la pantalla inicial.

En el módulo principal se define una clase **EjesDim_Gui** para que funcione con la interfaz generada por el software “Qt designer” la cual contiene lo siguiente:

3.3.1.1.1. Variables de clase

mat: materiales del combo selección de materiales

matprop: propiedades del material seleccionado

vectorSecciones: lista de secciones

xcs: lista de ubicaciones donde hay concentradores de esfuerzos

numsec: número de secciones

r: radio de entalle

vectorCargasXY: lista de cargas plano XY

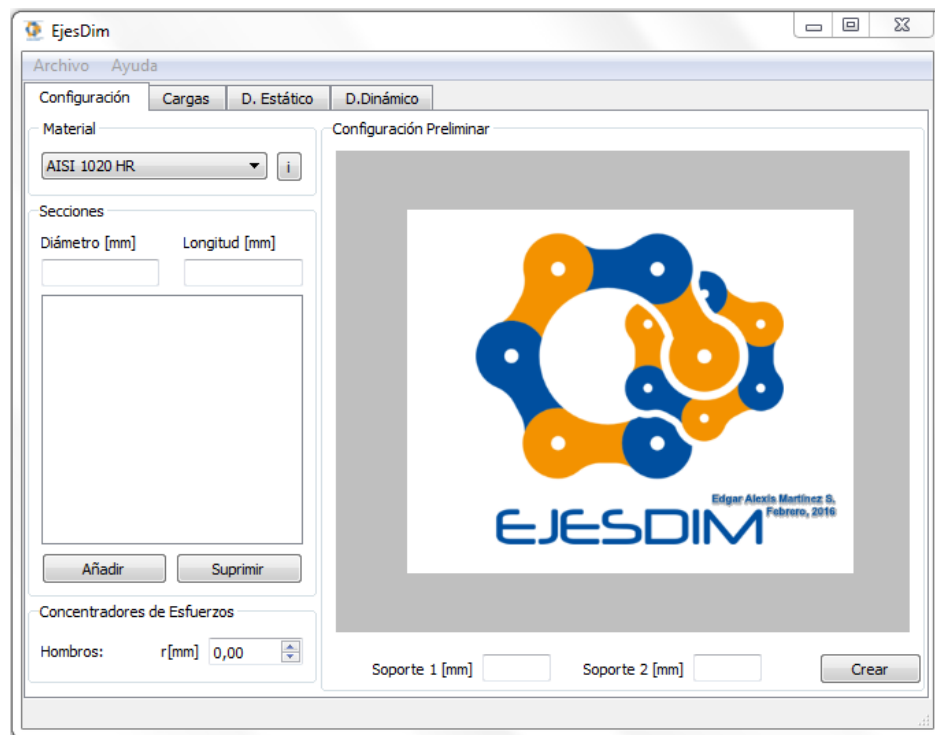


Figura 3.3. Captura de la pantalla de inicio del programa EjesDim

vectorCargasXZ: lista de cargas plano XZ

vectorCargasT: lista de cargas de torsión

numcarga: número de cargas de flexión

xcrit: ubicación de la sección crítica

Mcrit: momento flector crítico

Tcrit: momento torsor crítico

Mxzcrit: momento flector crítico en XZ

Mxycrit: momento flector crítico en XY

sigmax: componente de esfuerzo normal

tauxz: componente de esfuerzo cortante

sigma1: esfuerzo principal normal a tracción

sigma2: esfuerzo principal normal a compresión

sigmaT: esfuerzo principal medio

tau12: esfuerzo cortante máximo

phi: ángulo al que se encuentran los esfuerzos principales

Kt: factor teórico de concentración de esfuerzos a flexión

Kts: factor teórico de concentración de esfuerzos a torsión

Kf: factor teórico de concentración de esfuerzos a flexión dinámica

Kfs: factor teórico de concentración de esfuerzos a torsión dinámica

sigma_a: esfuerzo normal amplitud

tau_m: esfuerzo cortante medio

sigma_ap: esfuerzo equivalente amplitud

sigma_mp: esfuerzo equivalente medio

se: resistencia a la fatiga

sep: resistencia a la fatiga de una probeta

dcrit: diámetro crítico

d_iter: diámetro para iterar

ks: diccionario de los coeficientes que modifican la resistencia a la fatiga

3.3.1.1.2. Métodos

propmat: método activado al presionar el botón de información que muestra un diálogo con las propiedades del material seleccionado en el combo de selección de materiales.

addseccion: método para agregar una sección a una lista que contiene todas las secciones que toma los valores de los cajones de diámetro y longitud; se activa con el botón añadir.

supseccion: método activado por el botón suprimir que sirve para suprimir una sección seleccionada de la lista de secciones.

infosecciones: muestra información de las secciones en la consola.

creareje: crea una parte eje en función de las secciones enlistadas y el radio de acuerdo establecido.

desactedit: método para activar y desactivar las casillas según la carga seleccionada en el combo de cargas y establece las unidades adecuadas.

addcarga: agrega una carga a la lista de cargas del eje mediante el botón de agregar, tomando los valores de los cajones que contienen las magnitudes y la ubicación inicial y final si es el caso.

visualapoyos: representa de forma visual los apoyos a partir de la ubicación de los mismos.

visualcargas: método para la representación visual de las cargas en función del tipo, el ángulo, la ubicación y las magnitudes.

infocargas: muestra la información de las cargas que contiene el vector de cargas en la consola.

supcarga: remueve una carga de la lista de cargas presionando el botón correspondiente.

longeje: calcula el total de la longitud del eje en milímetros sumando las longitudes de las secciones en la lista de secciones.

calcular: con la lista de cargas y sus propiedades calcula las reacciones y los diagramas de cortantes, momentos flector y torsor, crea también una representación 3D de los diagramas de momento flector. Además grafica la sección crítica, el círculo de Mohr y las teorías de falla con sus cantidades respectivas para el diseño estático, para el diseño dinámico deja listo los esfuerzos fluctuantes, para completar con la resistencia a la fatiga y lo que sigue.

desactradio: activa y desactiva los radios de las teorías de falla según el tipo de material seleccionado y habilita o deshabilita el diseño dinámico.

calcularDE: calcula los coeficientes de concentración de esfuerzos, la sección crítica, el círculo de Mohr y las teorías de falla y también genera los gráficos correspondientes.

ka, kb, kc, kd, ke y kf: calculan los factores modificadores de la resistencia a la

fatiga.

calcularDD: calcula los coeficientes de concentración de esfuerzos corregidos para fatiga, los esfuerzos fluctuantes y la resistencia a la fatiga y también genera los gráficos correspondientes.

calcularTF: este método calcula y grafica las teorías de falla tomando en cuenta el radio seleccionado.

calcularRF: genera un gráfico a partir de los cálculos de la resistencia a la fatiga que también se realizan con esta función.

calcularCF: según el criterio de falla seleccionado calcula y grafica las curvas correspondientes.

calcdcritDE: calcula el diámetro estático según la teoría de falla seleccionada.

calcdcritDD: calcula el diámetro dinámico según el criterio de falla a la fatiga seleccionado.

recalc y **recalcD**: toman el diámetro estático o dinámico y lo usan como referencia para dimensionar las otras secciones. Crean un nuevo sólido con las nuevas secciones.

ver_ktkts y **ver_kfkfs**: muestran el formulario que corresponde a los coeficientes de concentración de esfuerzos.

acerca_de: crea y muestra la pantalla de información acerca del programa como el de la figura 3.4.

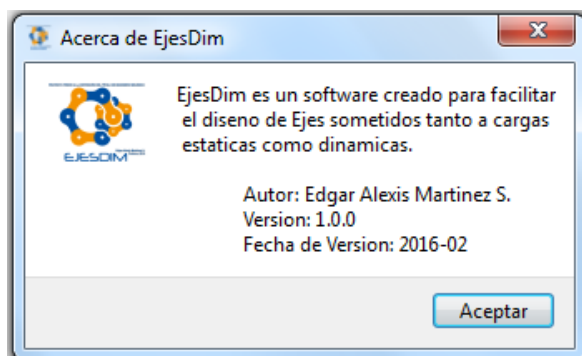


Figura 3.4. Captura de la pantalla 'acerca de...' del programa EjesDim

Además el módulo principal posee una clase **KtKts_Gui** también generada por el software "Qt designer" que corresponde al formulario de los coeficientes de

concentración de esfuerzos para un hombro la cual contiene lo siguiente:

3.3.1.1.3. *Variables de clase*

d: diámetro menor

D: diámetro mayor

h: diferencia entre radios

r: radio de entalle

K_t: coeficiente de concentración de esfuerzos a flexión

K_{ts}: coeficiente de concentración de esfuerzos a torsión

dir: el directorio donde se encuentra el programa

img: la imagen que representa el hombro

3.3.1.1.4. *Métodos*

hombro: calcula el valor de K_t y K_{ts} del hombro en la sección crítica.

actualizar: refresca los valores calculados en el formulario correspondiente.

Finalmente el módulo principal crea una instancia de la clase **EjesDim.Gui** que hace correr el programa en sí.

3.3.1.2. **Módulo de selección del material**

Los materiales más comunes de ejes se los ha colocado dentro de un documento de texto dentro del directorio del programa con un formato especial que posibilita la lectura de los mismos mediante la función **im.mat**. Si se pretende agregar materiales se lo debe hacer dentro del listado con el mismo formato y usando el nombre AISI para aceros o ASTM para hierros fundidos. El módulo contiene únicamente la función **im.mat** descrita arriba y en la interfaz se presenta como en la figura 3.5 que contiene una caja de selección y un botón que muestra la información del material.

3.3.1.3. **Módulo de configuración geométrica**

El módulo de configuración geométrica contiene lo necesario para poder generar el eje con sus características geométricas.

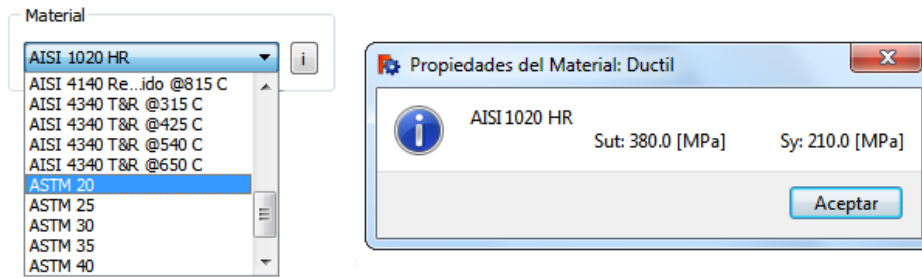


Figura 3.5. Módulo de selección del material del programa EjesDim

3.3.1.3.1. Clases

Seccion: posee únicamente las variables de clase r y l que son el radio y la longitud respectivamente en milímetros, de una sección cilíndrica circular; se crea para poder tratar con las cantidades geométricas de cada sección en una sola entidad.

3.3.1.3.2. Funciones globales

addseccion: utiliza como parámetros una lista, el radio y la longitud de una sección. Sirve para agregar un objeto sección a la lista de secciones.

unirsecciones: toma la lista de secciones y realiza una operación booleana de unión para al final obtener un único sólido a partir de todas las secciones.

cambiosecc: encuentra a partir del objeto eje ya unido, los objetos arista, la ubicación de las mismas y las aristas en las que se puede aplicar el radio de entalle.

r_deacuerdo: usa la función anterior para aplicar el radio de entalle en todas las aristas posibles.

visualapoyos: produce una representación visual en 3D de los apoyos del eje tomando la ubicación de los mismos y la longitud total del eje para escalarlos.

En cuanto a la interfaz gráfica, sus elementos principales se pueden ver en la figura 3.6 que presenta, etiquetas, cajas de entrada de texto, botones, una lista y un lienzo para visualizar la configuración preliminar del eje.

3.3.1.4. Módulo de cargas

Aquí se define una clase que maneja los diferentes tipos de cargas con sus propiedades y genera las funciones de singularidad de cada una para poder graficar los diagramas de cortante y momentos flector y torsor. Luego también presenta un grupo de funciones globales que complementan a la clase.

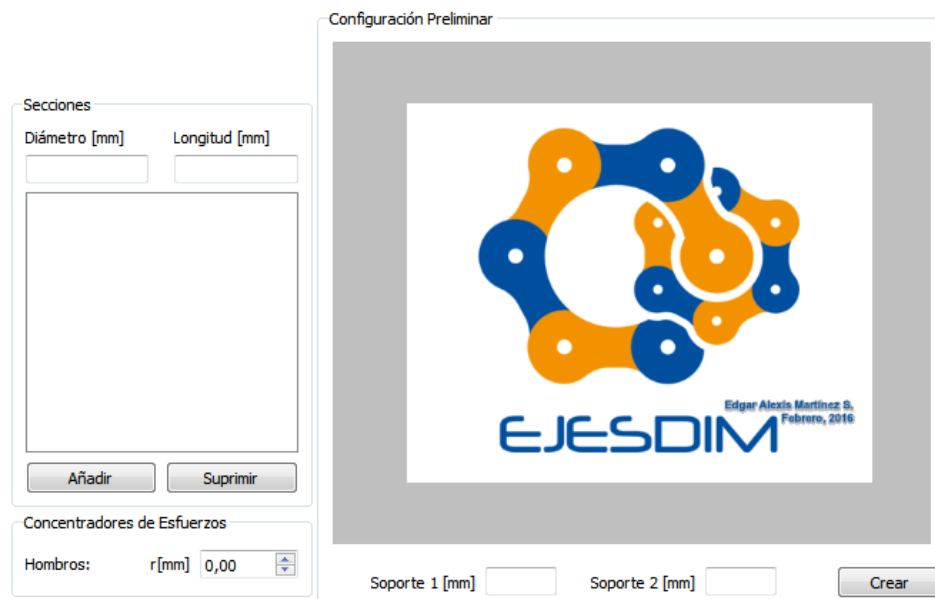


Figura 3.6. Módulo de configuración geométrica del programa EjesDim

3.3.1.4.1. Clase

CargaPlana: esta clase crea una carga en un plano y posee un grupo de variables de clase así como también un grupo de métodos definidos.

3.3.1.4.2. Variables de clase

tipo: tipo de carga

m: magnitud de la carga o magnitud final de la carga en cargas distribuidas

posXi: posición de la carga o posición inicial de la carga en cargas distribuidas

posXf: posición final de cargas distribuidas

mi: magnitud inicial de cargas distribuidas

3.3.1.4.3. Métodos

V: formula la función de singularidad de la carga para la distribución de cortantes

M: calcula la función de singularidad de la carga para la distribución de momentos flectores

T: cuantifica la función de singularidad de la carga para la distribución de momentos torsores

3.3.1.4.4. Funciones globales

reaccion: calcula las reacciones usando las cargas, la longitud del eje y la ubicación de los apoyos.

addCarga: agrega el parámetro ángulo y descompone en el plano las cargas espaciales agregando la carga a la lista de cargas que corresponde al plano seleccionado.

diagCortantes: para cada posición a lo largo del eje y usando la lista completa de cargas genera un vector con valores del cortante para graficar el diagrama de cortantes.

diagMomentos: calcula un vector para graficar el diagrama de momento flector en base a un número discreto de valores de x , y todas las cargas aplicadas usando las funciones de singularidad.

diagTorsion: de la misma manera que las funciones anteriores calcula para cada punto a lo largo del eje el valor correspondiente al torque listo para graficar el diagrama de momentos torsores.

visualcargas: genera una representación gráfica tridimensional de las cargas y las regresa como un objeto parte de FreeCAD. La función escala automáticamente las representaciones en función de la longitud del eje y también las características de cada carga.

vectorX: genera un vector que toma un número discreto de valores de x a lo largo del eje.

indice: es una función que busca un valor en una matriz y retorna su índice.

Los elementos de la interfaz gráfica que están relacionados con el módulo son los que muestra la figura 3.7.

3.3.1.5. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos

El módulo posee un grupo de funciones basadas en las fórmulas para calcular los coeficientes de concentración de esfuerzos geométricos y para fatiga.

Figura 3.7. Módulo de cargas del programa EjesDim

3.3.1.5.1. Funciones globales

kthombro: toma como entrada la geometría del hombro y devuelve los valores de los coeficientes geométricos para flexión y torsión.

kf: calcula los valores de los coeficientes de concentración de esfuerzos reducidos para fatiga tanto para flexión como para torsión a partir de los coeficientes geométricos, la resistencia última a la tracción y el radio de la muesca.

La interfaz gráfica para el módulo no está embebida dentro del programa principal. Los elementos se pueden observar en la figura 3.8 que únicamente tienen la función de mostrar la información calculada.

Figura 3.8. Módulo de coeficientes de concentración de esfuerzos del programa EjesDim

3.3.1.6. Módulo de diseño estático

Este módulo contiene funciones establecidas para el diseño de ejes sometidos a cargas estáticas.

3.3.1.6.1. Funciones globales

scrit: genera un gráfico en los ejes seleccionados calculando las componentes de los esfuerzos combinados a partir de los momentos flectores y torsores obtenidos de los diagramas y los coeficientes geométricos de concentración de esfuerzos.

elementos: como entrada necesita los ejes donde se va a graficar, las componentes de esfuerzos y los esfuerzos principales y otras características. Esta función esquematiza tres elementos de estado de esfuerzos.

cmohr: realiza una figura del círculo de Mohr para el esfuerzo uniaxial en los ejes seleccionados y calcula los esfuerzos principales y otras características del mismo.

tfallaG: usa los valores de los esfuerzos principales y las propiedades del material para graficar las teorías de falla en los ejes elegidos.

dECM, dED, dCM, dENM y dMM: poseen las relaciones que permiten calcular el diámetro según la teoría de falla seleccionada. En todas se relaciona las propiedades del material con los esfuerzos principales a través de un factor de diseño establecido.

El módulo de diseño estático interactúa con la interfaz gráfica usando los objetos que se presentan en la figura 3.9.

3.3.1.7. Módulo de diseño dinámico

Este módulo contiene algunas funciones clave para el diseño de ejes sometidos a cargas dinámicas.

3.3.1.7.1. Funciones globales

fluct: calcula los esfuerzos medios y amplitud tanto cortantes como normales y plotea en los ejes seleccionados una representación gráfica de los esfuerzos fluctuantes presentes en el eje diseñado.

Usa como entrada los valores críticos de los momentos flector y torsor obtenidos de los diagramas y los coeficientes de concentración de esfuerzos reducidos para fatiga.

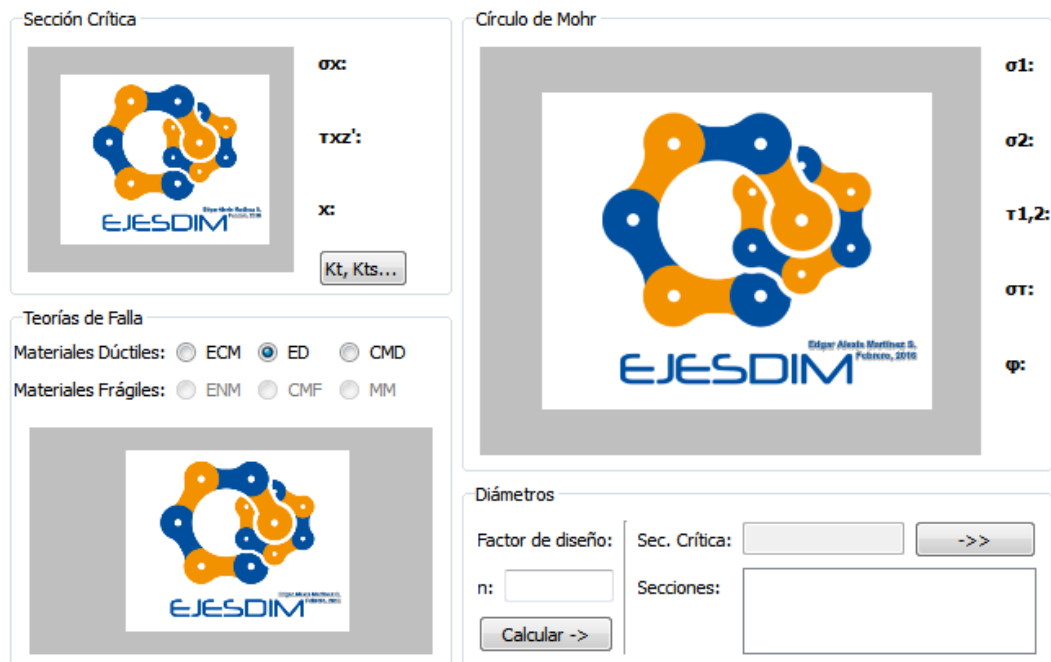


Figura 3.9. Módulo de diseño estático del programa EjesDim

calc_ka, **calc_kb**, **calc_kc**, **calc_kd** y **calc_ke**: toman diferentes parámetros y retornan el valor del coeficiente modificador de la resistencia a la fatiga respectivo.

se: calcula la resistencia a la fatiga de una probeta y también la resistencia a la fatiga para diseño de elementos a partir de la resistencia última a tracción y los factores que la modifican. Además muestra una representación gráfica en los ejes de ploteo seleccionados.

criteriosG: agrupa los criterios de falla a la fatiga en un gráfico tomando como parámetros de entrada los ejes de ploteo, los momentos críticos, los coeficientes de concentración de esfuerzos para fatiga, la resistencia a la fatiga y las propiedades del material. Retorna los esfuerzos equivalentes amplitud y medio.

dGoodman, **dGerber**, **dSoderberg** y **dASME**: cada uno respecto al criterio de falla correspondiente calcula el diámetro del eje a partir de los esfuerzos equivalentes amplitud y medio y las propiedades del material.

Los elementos de la interfaz gráfica que tienen acceso a las funciones definidas los objetos que se presentan en la figura 3.10.

3.3.1.8. Módulo de tamaños preferidos

Aquí se define dos funciones necesarias para redimensionar aproximando a los tamaños preferidos el eje.

The screenshot displays the EjesDim software interface with four main panels:

- Esfuerzos Fluctuantes:** Contains a logo and input fields for σ_a , σ_m , τ_a , and τ_m . A button labeled "Kf, Kfs..." is at the bottom.
- Resistencia a la Fatiga:** Contains a logo, input fields for S_e and S_{ut} , and a section for "Coeficientes de Marin:" with buttons for k_a , k_b , k_c , k_d , k_e , and k_f . Below these are input fields for $S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot S_e$ and $S_e = --$.
- Criterios de Falla a la Fatiga:** Features radio buttons for "ED-Goodman", "ED-Gerber", "ED-Soderberg", and "ED-ASME". It includes a large logo and input fields for σ_a' and σ_m' .
- Diámetros:** Includes input fields for "Factor de diseño:", "Sec. Crítica:", and "n:". There is a "Calcular ->" button and a "Secciones:" input field. An "Iterar" button is also present.

Figura 3.10. Módulo de diseño dinámico del programa EjesDim

3.3.1.8.1. Funciones globales

tpref: toma el tamaño calculado con todos su decimales y lo aproxima al inmediato superior de la serie de Renard.

secpref: para cada sección del eje aplica la función anterior manteniendo las proporciones del eje tomando como la mayor la sección crítica y su diámetro.

La lista con su etiqueta de la figura 3.11 es el medio de salida de las funciones que se definieron en el modulo. Dicha lista se encuentra tanto en el diseño estático como el diseño dinámico.

Secciones:

Figura 3.11. Módulo de tamaños preferidos del programa EjesDim

3.3.1.9. Módulo de interfaz gráfica de usuario

El módulo interfaz gráfica de usuario posee dos clases que inicializan los formularios tanto el general **Ui_MainWindow** como el usado para mirar los valores de los coeficientes de concentración de esfuerzos **Ui_Kt_Kts**. Cada uno posee tantas variables de clase como elementos gráficos tenga y además dos métodos: **setupUI**

que define en sí al elemento como también a su geometría, ubicación, etc.; el otro método **retranslateUi** agrega texto visible en los elementos. Este módulo es el resultado de la creación de formularios usando QtDesigner y su aplicativo para convertir a código Python el mismo. Se ha distribuido con pestañas para poder seleccionar el modulo a usar. Se usan, botones, listas, radios, etc. además de un widget que permite usar la librería matplotlib para realizar trazado de curvas dentro de la interfaz. La figura 3.12 muestra una captura de pantalla del programa que permite generar la interfaz.

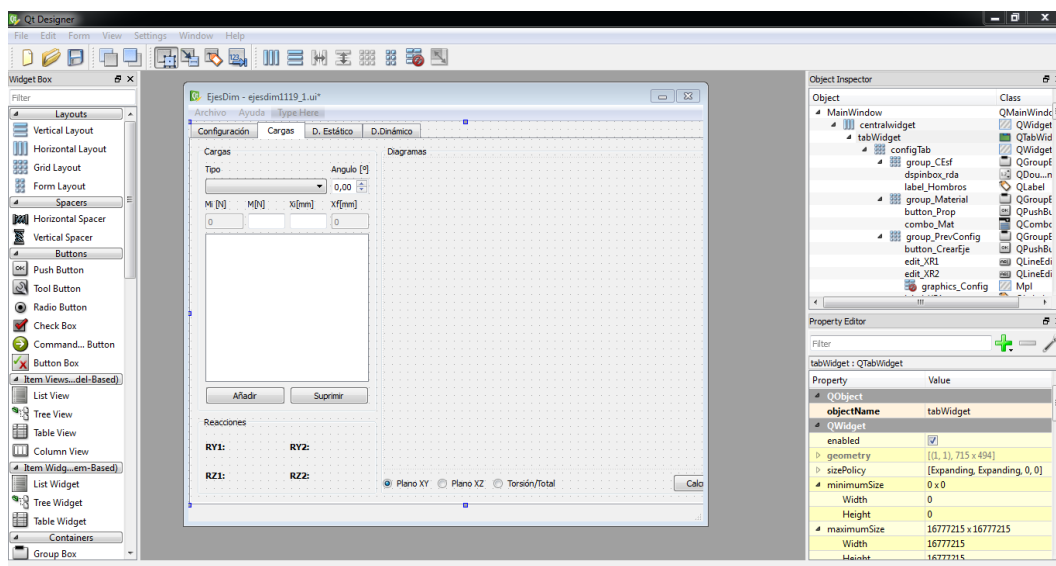


Figura 3.12. Captura de la interfaz de QtDesigner

3.3.1.10. Módulo Mpl (matplotlib)

A parte de los módulos mencionados hubo la necesidad de usar un proceso para poder usar las gráficas generadas con la librería “matplotlib” embebidas en el programa. Ese proceso involucra dos clases **MplCanvas** y **Mpl** que crean y configuran un lienzo, una figura y un grupo de ejes de ploteo.

3.3.2. ALGORITMOS CLAVE

La parte más complicada del programa es la obtención de los diagramas de cortantes y momentos flector y torsor a partir de las cargas aplicadas en el eje, para eso se definió la clase **CargaPlana** que posee las variables de clase: **tipo**, **m**, **posXi**, **posXf** y **mi**; y los métodos: **M**, **V** y **T**. Además se crearon funciones globales que permiten calcular los cortantes, momentos flector y torsor de cada punto a lo largo del eje.

3.3.2.1. Cálculo de reacciones

Para el cálculo de las reacciones se usó las expresiones de equilibrio junto con las funciones de singularidad para un caso hipotético de viga sometido a todo tipo de cargas planas como en la figura 3.13. Se dedujo dos expresiones, una para cada apoyo, que dieron como resultado el valor de la reacción en cada uno.

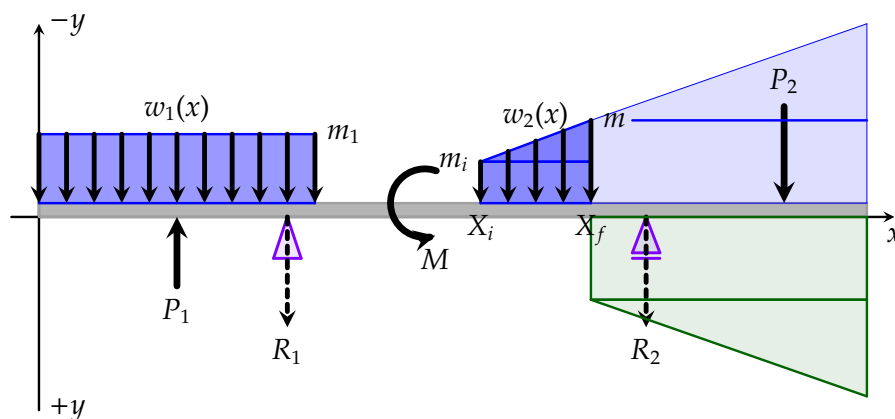


Figura 3.13. Viga cargada con diferentes tipos de cargas hipotéticamente para la deducción de la ecuación de las reacciones

Sobre la figura se han trazado las reacciones en sentido positivo según la convención de signos tomada. Cada carga está definida por su magnitud y posición, la carga distribuida constante se define entre dos cotas y la carga distribuida lineal además de eso posee dos magnitudes aunque en realidad la carga distribuida constante es un caso de la lineal. Se denotará la magnitud de una carga por ejemplo de una fuerza concentrada P como m_P y su posición como X_P .

A continuación se formula la ecuación de carga usando las funciones de singularidad de la tabla 1.5.

$$\begin{aligned}
 w(x) = & m_{w_1} \langle x - X_{i_{w_1}} \rangle^0 - m_{w_1} \langle x - X_{f_{w_1}} \rangle^0 && \text{Carga Distribuida Constante} \\
 & - m_{P_1} \langle x - X_{P_1} \rangle^{-1} && \text{Fuerza Concentrada 1} \\
 & + m_{R_1} \langle x - X_{R_1} \rangle^{-1} && \text{Reacción 1} \\
 & + m_M \langle x - X_M \rangle^{-2} && \text{Momento Concentrado} \\
 & + m_{i_{w_2}} \langle x - X_{i_{w_2}} \rangle^0 + \left(\frac{m_{w_2} - m_{i_{w_2}}}{X_{f_{w_2}} - X_{i_{w_2}}} \right) \langle x - X_{i_{w_2}} \rangle^1 && \text{Carga Distribuida} \\
 & - m_{w_2} \langle x - X_{f_{w_2}} \rangle^0 - \left(\frac{m_{w_2} - m_{i_{w_2}}}{X_{f_{w_2}} - X_{i_{w_2}}} \right) \langle x - X_{f_{w_2}} \rangle^1 && \text{Lineal} \\
 & + m_{R_2} \langle x - X_{R_2} \rangle^{-1} && \text{Reacción 2} \\
 & + m_{P_2} \langle x - X_{P_2} \rangle^{-1} && \text{Fuerza Concentrada 2}
 \end{aligned}$$

Siguiendo la deducción detallada del Anexo B se obtienen las siguientes ecuaciones para encontrar la magnitud de las reacciones en los apoyos con su signo respectivo.

$$\mathbf{m}_{R_1} = \frac{K1 (l_{tot} - X_{R_2}) - K2}{X_{R_1} - X_{R_2}} \quad (\text{Ec. 3.1})$$

$$\mathbf{m}_{R_2} = K1 - \mathbf{m}_{R_1} \quad (\text{Ec. 3.2})$$

En el programa se usa la ecuación Ec. 3.1 y la ecuación Ec. 3.2 para calcular las reacciones directamente. El valor de $K1$ y $K2$ se lo calcula con un lazo “for” sobre el vector que contiene todas las cargas excepto las reacciones, evaluando sobre la longitud del eje cada función de singularidad y discontinuidad y sumándolas. Un ejemplo de las cantidades $K1$ y $K2$ para el caso de la figura 3.13 se puede encontrar en el Anexo B.

En el caso de presentarse momentos torsores, el eje se supone rotatorio y debe establecerse el equilibrio con al menos dos torques iguales. No se consideran reacciones para ese caso.

3.3.2.2. Diagramas de cortante y momentos flector y torsor

Habiendo calculado las reacciones, éstas se añaden al vector de cargas debido a que también influyen en las distribuciones de cortante y momentos flectores. Los torques que producen torsión en el eje se los añade a otro vector para analizarlos independientemente de las cargas que producen flexión.

Para calcular el aporte de cada carga en las distribuciones de cortante y momentos flector y torsor se dedujo dos expresiones para cada tipo de carga y cada diagrama basado en la superposición de las funciones de discontinuidad y singularidad, estudiados en el 1. La tabla 1.5 contiene las funciones de singularidad en algunos casos que no requiere del método de superposición, en base a esto se muestran a continuación las expresiones deducidas.

3.3.2.2.1. Fuerza concentrada

Para el diagrama de cortantes

$$V_1 = -m; \quad V_2 = 0 \quad (\text{Ec. 3.3})$$

Para el diagrama de momento flector

$$M_1 = -m \langle x - X_i \rangle; \quad M_2 = 0 \quad (\text{Ec. 3.4})$$

3.3.2.2.2. *Momento flector*

Para el diagrama de cortantes

$$V_1 = V_2 = 0 \quad (\text{Ec. 3.5})$$

Para el diagrama de momento flector

$$M_1 = -m; \quad M_2 = 0 \quad (\text{Ec. 3.6})$$

3.3.2.2.3. *Cargas distribuidas lineales*

Para el diagrama de cortantes

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m - m_i}{X_f - X_i} \right) \langle x - X_i \rangle^2 + m_i \langle x - X_i \rangle \\ V_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m - m_i}{X_f - X_i} \right) \langle x - X_f \rangle^2 + m \langle x - X_f \rangle \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.7})$$

Para el diagrama de momento flector

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{6} \left(\frac{m - m_i}{X_f - X_i} \right) \langle x - X_i \rangle^3 + \frac{1}{2} m_i \langle x - X_i \rangle^2 \\ M_2 &= \frac{1}{6} \left(\frac{m - m_i}{X_f - X_i} \right) \langle x - X_f \rangle^3 + \frac{1}{2} m \langle x - X_f \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.8})$$

3.3.2.2.4. *Cargas distribuidas constantes*

Se aplica las ecuaciones de las cargas distribuidas lineales pero tomando el valor de m_i como cero.

3.3.2.2.5. *Momento torsor*

Para el diagrama de momento torsor

$$Mt_1 = -m; \quad Mt_2 = 0 \quad (\text{Ec. 3.9})$$

X_i y X_f son equivalentes a $\text{pos}X_i$ y $\text{pos}X_f$, asimismo m_i es m_i y x es la variable que barre a lo largo de la longitud del eje.

La razón por la que se divide en dos partes las funciones de singularidad de cada carga es para poder verificar las cotas de las cargas, así una parte depende

únicamente de la cota inferior y la otra de la superior, esto se hace especialmente para las cargas distribuidas.

Las funciones que calculan los valores correspondientes a cada x de los cortantes y momentos flector y torsor tienen un algoritmo que barre a lo largo del eje tomando en cuenta las cotas en las que están definidas la cargas (los valores de X_i y X_f) y agregando el aporte de cada una en el vector que contiene los datos para trazar los diagramas. Para comprender claramente el código se realizó un diagrama de flujo para el algoritmo representado en la figura 3.14.

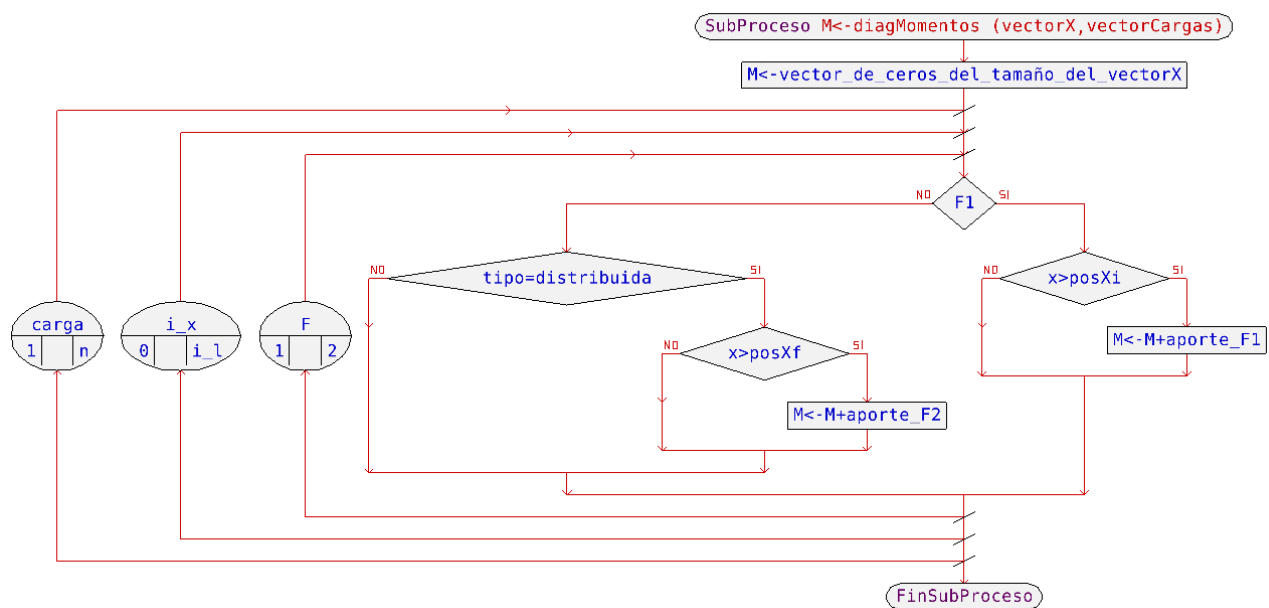


Figura 3.14. Diagrama de flujo del algoritmo para calcular distribución de momentos flectores

En la primera operación se asigna un vector M del mismo largo que el vector X que contiene cada valor de x a lo largo del eje. El primer lazo itera sobre el vector $Cargas$ que contiene n cargas y para cada carga toma los índices de cada x (i_x) hasta el último que es el que corresponde a la longitud total del eje i_l , y el tercer lazo alterna entre la primera componente de la función de singularidad $F1$ y la segunda componente de la misma $F2$.

Dentro del último lazo verifica primero si se trata de la primera componente $F1$, si es el caso verifica si el valor de x es mayor que la posición de la carga $posXi$ y le suma el aporte de la función de singularidad al valor del vector M correspondiente al índice evaluado en x con la primera componente de la función $F1$. En caso de que se trate de la segunda componente $F2$ verifica si el tipo de carga es distribuida, en ese caso verifica si el valor de x es mayor a la cota final $posXf$ de la carga distribuida y le suma el aporte de la segunda función $F2$ evaluada en esa posición.

El algoritmo para obtener los diagramas de momento flector se lo puede observar en el siguiente código fuente, el código para los otros diagramas es muy similar.

Código fuente 3.1. Función que calcula los diagramas de momento flector

```

1  def diagMomentos(vectorX,vectorCargas):
2      '''Calcula un vector para graficar el diagrama de momento flector en
3      base a un numero discreto de valores de x, y todas las cargas
4      aplicadas usando las funciones de singularidad.'''
5      #Inicializa un vector del mismo tamaño que el vectorX
6      M=[0]*len(vectorX)
7      #Para cada carga en el vector cargas
8      for carga in vectorCargas:
9          #Para cada punto a lo largo del eje
10         for i in range(len(vectorX)):
11             #Para cada componente de la funcion de singularidad M1 y M2
12             for j in range(2):
13                 if j == 0: #1er componente
14                     #Si la posicion analizada esta despues de la 1era cota
15                     if vectorX[i]-carga.posXi > 0:
16                         #Aporta a la distribucion de momentos
17                         M[i]+=carga.M(vectorX[i])[j]
18                 #2do componente solo influye en cargas distribuidas
19                 elif carga.tipo == "Carga Distribuida Constante" or\
20                      carga.tipo == "Carga Distribuida Lineal":
21                     #Si la posicion analizada esta despues de la 2da cota
22                     if vectorX[i]-carga.posXf > 0:
23                         #Aporta a la distribucion de momentos
24                         M[i]+=carga.M(vectorX[i])[j]
25             #Regresa el vector calculado en cada x para el diagrama de momentos
26         return M

```


CAPÍTULO 4

INSTALACIÓN, VALIDACIÓN Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM

Ya codificadas todas las funciones del programa es necesario saber como instalar el programa EjesDim en cualquier otra computadora para uso general. También como verificación de su correcto funcionamiento se establece una prueba para evaluar el software.

4.1. INSTALACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM

Para poner a funcionar el programa es necesario tener instalado por lo menos la versión 0.14 del software FreeCAD, el paquete contiene el intérprete de Python incorporado y las librerías que usa el software diseñado en esta tesis por lo que no es necesario el uso de más paquetes, ni complementos adicionales.



Figura 4.1. Captura de la versión de FreeCAD

Es también necesario tener todos los archivos que contienen todos los módulos descritos en el capítulo anterior. Dichos archivos conforman el programa diseñado EjesDim que deberán ser instalados como se detalla a continuación.

En el menú “Macro” del programa FreeCAD se despliegan varias opciones entre las cuales se encuentra el botón “Macros...” que abre un formulario que presenta en la parte inferior un campo con el “Destino de la macro:”, ese es el directorio donde se debe añadir la carpeta con el programa EjesDim. Dentro del mismo formulario se actualiza el directorio a la carpeta del programa EjesDim, dentro de esta se selecciona el archivo “EJESDIM.py” que es el que arranca el programa y se da click en el botón ejecutar.

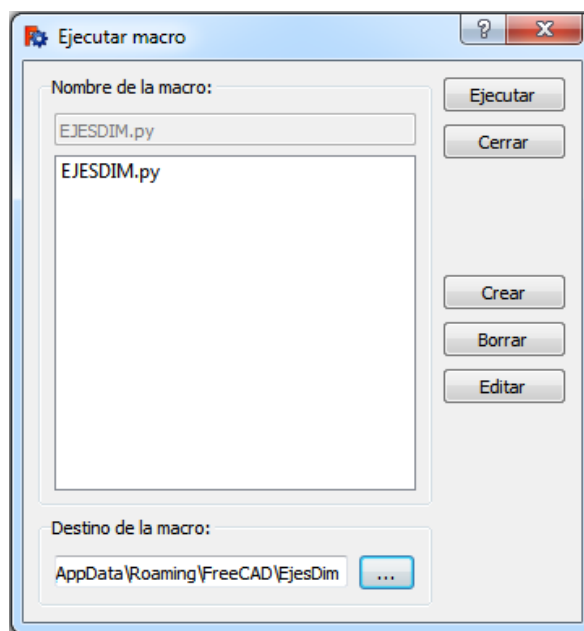


Figura 4.2. Captura del formulario de macros de FreeCAD

Con esto el programa EjesDim queda listo para utilizar.

En el caso de que se ejecute con errores, hay que reiniciar el programa FreeCAD luego de cambiar el directorio de las macros para que reconozca bien los archivos que contiene.

En algunos casos es posible que se presente un error respecto a la captura de la configuración preliminar del eje, para desactivar la captura de imágenes y que funcione el programa normalmente se debe comentar dentro del archivo “EJESDIM.py” la línea 431.

4.2. VALIDACIÓN Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM

Para validar el correcto funcionamiento del programa EjesDim se estableció una prueba que permite comparar entre un dimensionamiento manual, uno usando el programa diseñado EjesDim así como también el software MDSolids, Inventor y MITCalc que por una parte traza los diagramas, por otra dimensiona el eje sometido a cargas estáticas y el último comprende además el dimensionamiento usando cargas dinámicas.

4.2.1. VALIDACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM

Para poder evaluar el correcto funcionamiento de los módulos se plantea un problema referencial que cubre todos los posibles casos. Se trata de un caso de diseño típico de un eje sometido a cargas dinámicas en el cuál además se estudiará el comportamiento estático del mismo.

4.2.1.1. Planteamiento del problema de diseño de un eje para validar el programa EjesDim

Diseñe un eje maquinado de sección circular para la distribución de la figura 4.3, que se encuentra cargado a flexión y torsión. Desprecie los efectos de fuerzas cortantes y de cargas axiales que soporta el apoyo D que es fijo mientras que el A es un apoyo móvil. El ancho del engranaje izquierdo es de 40 *mm* y el derecho 30 *mm*. Establezca el diseño tanto para cargas estáticas como también para cargas dinámicas, use un factor de diseño de 2, pruebe con un material tanto dúctil como frágil y con distintas teorías y criterios de falla usando una confiabilidad del 99.9 %.

4.2.1.2. Diseño del eje mediante cálculos manuales

Para el cálculo manual se seguirá los pasos que se requieren para el diseño de ejes definidos en primer capítulo comenzando con la selección del material con el cuál se trabajará. Los materiales seleccionados para el diseño son:

$$AISI\ 1020\ HR \begin{cases} S_y = 210\ [MPa] \\ S_{ut} = 380\ [MPa] \end{cases}$$

$$ASTM\ 20 \begin{cases} S_{ut} = 151.58\ [MPa] \\ S_{uc} = 571.87\ [MPa] \end{cases}$$

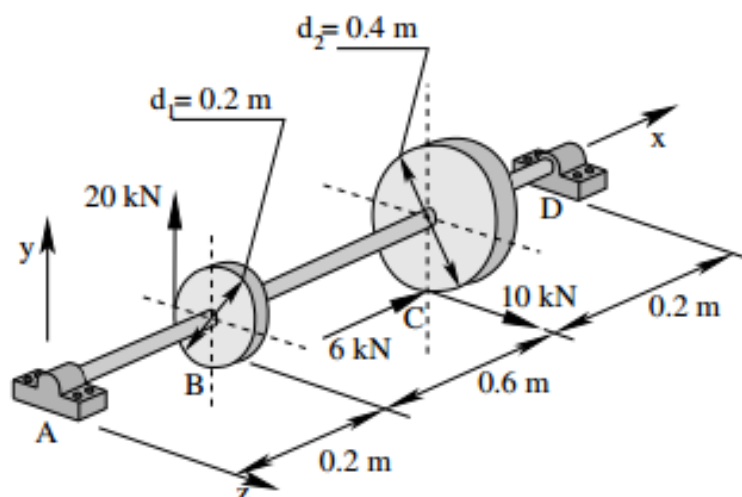


Figura 4.3. Esquema del problema de diseño de un eje sometido a cargas estáticas y dinámicas

Fuente: (Bittencourt, 2015, sec. 7.3.9)

A continuación la figura 4.4 se establece una configuración adecuada para soportar los elementos que se conjugan con el eje. Tomando en cuenta que el apoyo en D será el que soporte las cargas axiales.

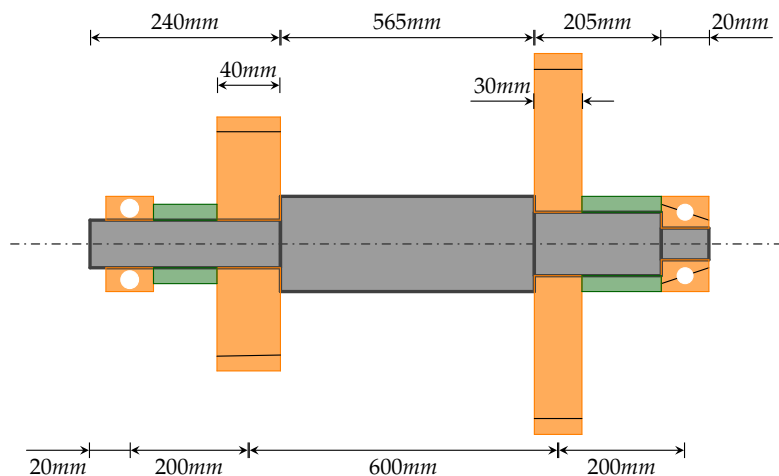


Figura 4.4. Configuración geométrica del eje del problema planteado

El siguiente paso involucra la determinación de cargas y reacciones por lo que en la figura 4.5 se muestra el diagrama de cuerpo libre tridimensional.

Primero se estudian las fuerzas que se ubican a lo largo del eje x , para esto se ha realizado el diagrama 4.6 que muestra tanto las cargas axiales como los momentos torsores a los que se encuentra sometido el eje. En relación a la torsión, no es necesario establecer ningún equilibrio debido a que ya se encuentra equilibrado por

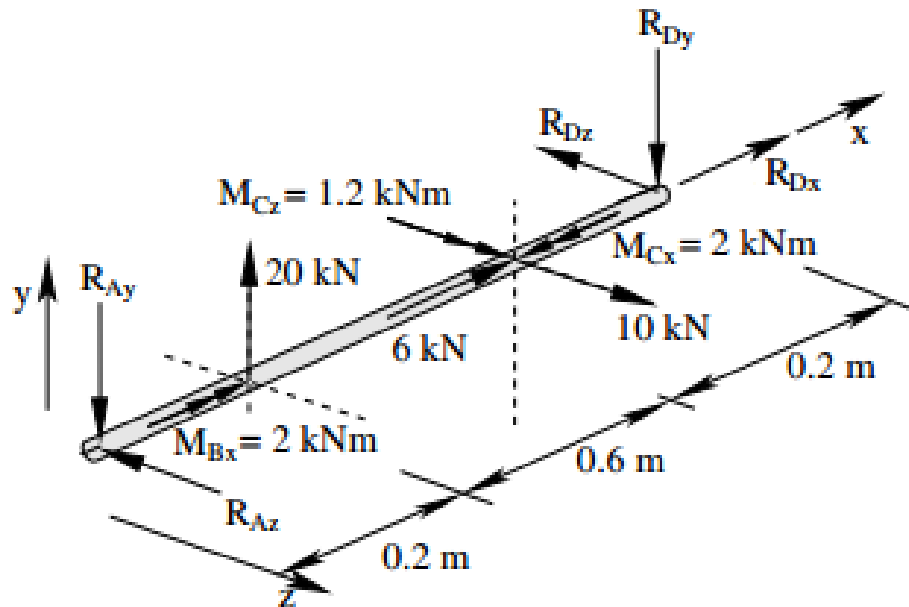


Figura 4.5. Diagrama del cuerpo libre tridimensional del problema de diseño de un eje

Fuente: (Bittencourt, 2015, sec. 7.3.9)

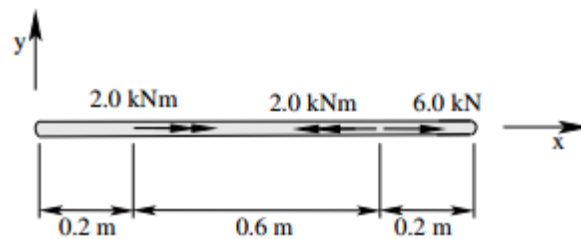


Figura 4.6. Diagrama del cuerpo libre del eje x del problema de diseño de un eje

Fuente: (Bittencourt, 2015, sec. 7.3.9)

el torque que se transmite entre los engranajes. La reacción en D se establece con la siguiente igualdad basada en las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 = 6.00 \text{ [kN]} + R_{Dx}$$

$$R_{Dx} = -6.00 \text{ [kN]}$$

El problema sugiere que las cargas axiales se omitan por lo tanto el valor de R_{Dx} no se lo tomará en cuenta de aquí en adelante. Los momentos torsores influyen en la elaboración del diagrama de los mismos y en el problema son datos cuyos valores son:

$$M_{Bx} = 2.00 \text{ [kN]}; \quad M_{Cx} = -2.00 \text{ [kN]}$$

Los diagramas en 4.7 son representaciones en los planos xy y xz del diagrama de cuerpo libre tridimensional omitiendo las cargas que influyen en x ya analizadas. Las reacciones en los apoyos A y D se calculan como sigue:

$$\Sigma F_y = 0 = R_{Ay} - 20.00 \text{ [kN]} + R_{Dy};$$

$$\Sigma M_{Az} = 0 = 20 \text{ [kN]} 0.2 \text{ [m]} + 1.2 \text{ [kNm]} - R_{Dy}$$

Que dan como resultado el valor de las reacciones R_{Ay} y R_{Dy} .

$$R_{Dy} = 5.20 \text{ [kN]}; \quad R_{Ay} = 14.80 \text{ [kN]}$$

Ahora estableciendo el equilibrio en el plano xz se procede a calcular:

$$\Sigma F_z = 0 = R_{Az} - 10 \text{ [kN]} + R_{Dz};$$

$$\Sigma M_{Ay} = 0 = 10 \text{ [kN]} 0.8 \text{ [m]} - R_{Dz} 1 \text{ [m]}$$

De lo que resulta: $R_{Dz} = 8.00 \text{ [kN]}; \quad R_{Az} = 2.00 \text{ [kN]}$

Para trazar los diagramas se definió las ecuaciones que corresponden a los diagramas usando las funciones de singularidad y discontinuidad de la siguiente manera, para el plano xy :

$$V_y(x) = -R_{Ay}\langle x - 0 \rangle^0 + 20\langle x - 0.2 \rangle^0 - 1.2\langle x - 0.8 \rangle^{-1} - R_{Dy}\langle x - 1 \rangle^0$$

$$M_z(x) = -R_{Ay}\langle x - 0 \rangle^1 + 20\langle x - 0.2 \rangle^1 - 1.2\langle x - 0.8 \rangle^0 - R_{Dy}\langle x - 1 \rangle^1$$

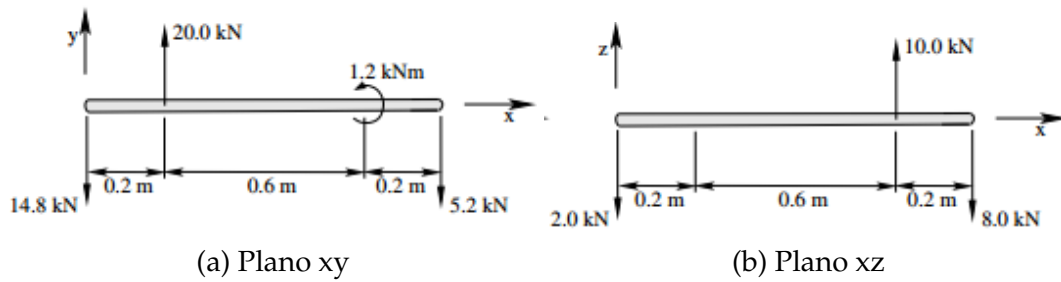


Figura 4.7. Diagramas de cuerpo libre planos del problema de diseño de un eje
Fuente: (Bittencourt, 2015, sec. 7.3.9)

En el plano xz se definen las siguientes funciones:

$$V_z(x) = -R_{Az}\langle x - 0 \rangle^0 + 10\langle x - 0.8 \rangle^0 - R_{Dz}\langle x - 1 \rangle^0$$

$$M_y(x) = -R_{Az}\langle x - 0 \rangle^1 + 10\langle x - 0.8 \rangle^1 - R_{Dz}\langle x - 1 \rangle^1$$

Asimismo se puede definir la siguiente ecuación para el diagrama de torsión:

$$V_y(x) = -M_{Bx}\langle x - 0.2 \rangle^0 + M_{Cx}\langle x - 0.8 \rangle^0$$

4.2.1.2.1. Diseño estático con material dúctil

Para el siguiente paso se definirá el análisis de esfuerzos en el eje comenzando por determinar la sección crítica del mismo:

Existen dos posibles escenarios que son respectivamente a $x_1 = 0.22[m]$ y $x_2 = 0.785[m]$ medidos desde la primera reacción y usando las funciones deducidas anteriormente se obtiene:

$$M_z(0.22) = -2.856 \text{ [kNm]}; \quad M_y(0.22) = -0.44 \text{ [kNm]};$$

$$M_{Tot}(0.22) = \sqrt{M_z(0.22)^2 + M_y(0.22)^2} = 2.89 \text{ [kNm]}$$

$$M_z(0.785) = 0.082 \text{ [kNm]}; \quad M_y(0.785) = 1.57 \text{ [kNm]};$$

$$M_{Tot}(0.785) = \sqrt{M_z(0.785)^2 + M_y(0.785)^2} = 1.57 \text{ [kNm]}$$

En ambas secciones el eje posee una carga interna de torsión de $M_x = -2.00 \text{ [kNm]}$ por lo que la sección crítica se determina en función del momento flector total que en este caso toma su máximo valor en $x_1 = 0.22 \text{ [m]}$.

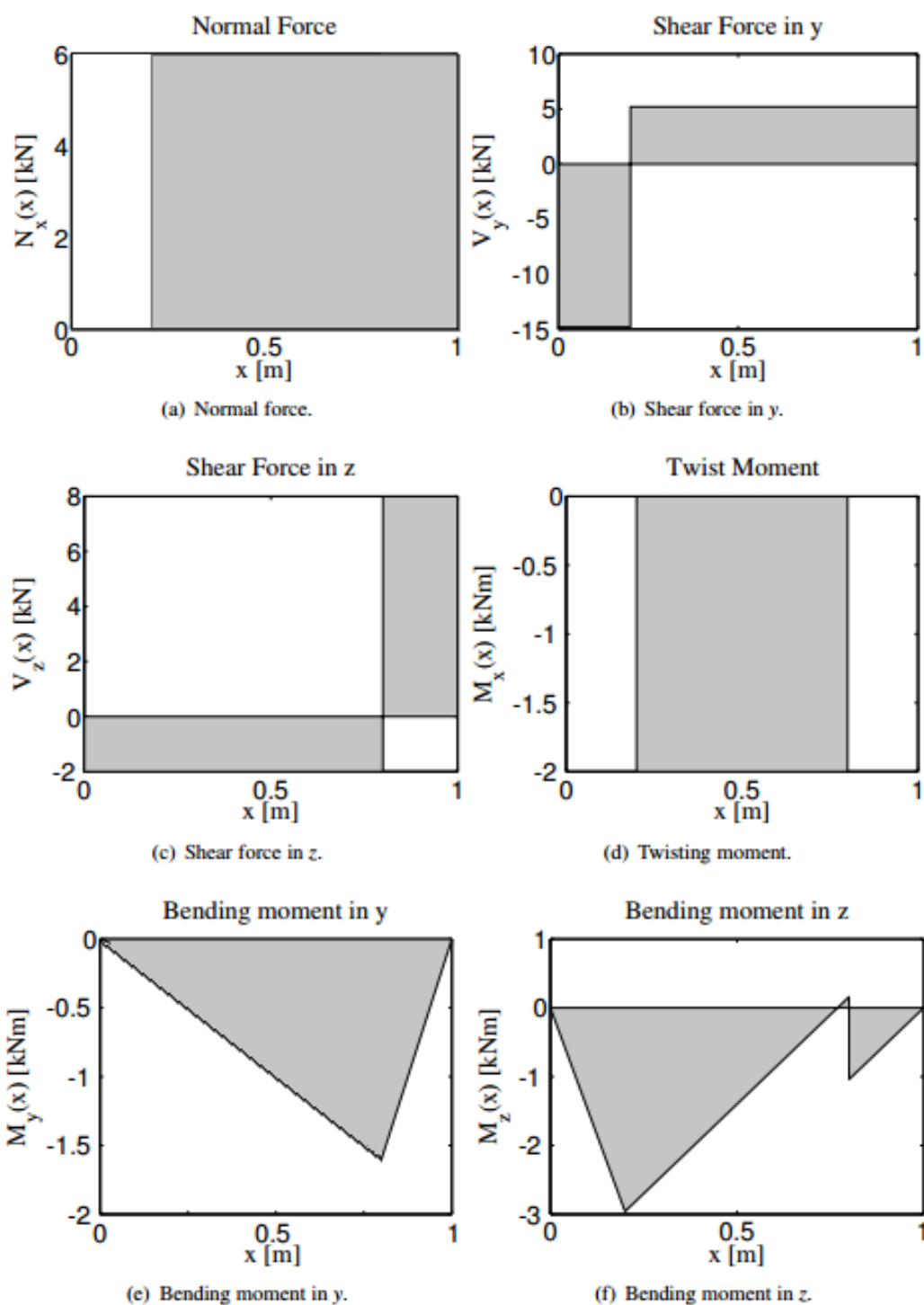


Figura 4.8. Diagramas de cargas internas del problema de diseño de un eje
Fuente: (Bittencourt, 2015, sec. 7.3.9)

Los coeficientes de concentración de esfuerzos para materiales dúctiles tienen el valor de $K_t = K_{ts} = 1$ debido al endurecimiento por deformación para cargas estáticas. Aplicando las ecuaciones que siguen para obtener el valor de los componentes de esfuerzos combinados se tiene:

$$x_{\sigma_x} = K_t \frac{32M_{Tot}}{\pi} = 29.43;$$

$$x_{\tau_{xz'}} = K_{ts} \frac{16M_x}{\pi} = 10.19;$$

Para los esfuerzos principales se calcula usando las expresiones que suelen usarse para graficar el círculo de Mohr como sigue:

$$x_{\sigma_{1,2}} = \frac{x_{\sigma_x}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_{\sigma_x}}{2}\right)^2 + x_{\tau_{xz'}}^2};$$

$$x_{\sigma_1} = 32.62; \quad x_{\sigma_2} = -3.18;$$

$$x_{\tau_{1,2}} = \pm \sqrt{\left(\frac{x_{\sigma_x}}{2}\right)^2 + \tau_{xz'}^2} = \pm 17.90;$$

A continuación se procede a usar las teorías de falla para materiales dúctiles para determinar el diámetro estático del eje, la teoría de **Coulomb-Mohr** para materiales **dúctiles** dará el mismo resultado que la del **esfuerzo cortante máximo**, de esta forma y con el factor de diseño de $n = 2$ el diámetro estático toma el valor de:

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{(x_{\sigma_1} - x_{\sigma_2})n}{S_y}} = 0.06986 [m]$$

$$d_e = 69.86 [mm]$$

Para la teoría de falla de la **energía de distorsión** primero se tiene que calcular el esfuerzo equivalente para calcular el diámetro estático como sigue:

$$x_{\sigma'} = (x_{\sigma_x}^2 + 3x_{\tau_{xz'}}^2)^{1/2} = 34.32;$$

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{x_{\sigma'}n}{S_y}} = 0.0688 [m];$$

$$d_e = 68.88 [mm]$$

La tabla 4.1 resume los cálculos realizados en la sección anterior.

Tabla 4.1. Diámetros calculados manualmente para el diseño estático del eje usando material dúctil

Diseño estático material dúctil	AISI 1020 HR
Esfuerzo cortante máximo	69,86 [mm]
Coulomb-Mohr dúctil	69,86 [mm]
Energía de distorsión	68,88 [mm]

4.2.1.2.2. Diseño estático con material frágil

Ahora para determinar el diámetro estático de un material frágil se debe primero encontrar el valor de los coeficientes geométricos de concentración de esfuerzos K_t y K_{ts} usando la tabla 1.6. Suponiendo un diámetro mayor de $D = 60$ [mm], uno menor $d = 50$ [mm] y un radio de entalle $r = 2$ [mm] se puede obtener la altura del hombro $h = \frac{D-d}{2} = 5$ [mm] y encontrar la relación altura del hombro, radio de entalle h/r y mirar en que caso cae para calcular los coeficientes C requeridos en la ecuación del K_t para hombros.

$$h/r = 2.5; \quad 2 \leq 2.5 \leq 20 \quad \text{entonces se usa :}$$

$$C_1 = 1.232 + 0.832 \sqrt{h/r} - 0.008h/r = 2.53$$

$$C_2 = -3.813 + 0.968 \sqrt{h/r} - 0.260h/r = -2.93$$

$$C_3 = 7.423 - 4.868 \sqrt{h/r} - 0.869h/r = 1.90$$

$$C_4 = -3.839 + 3.07 \sqrt{h/r} - 0.6h/r = -0.48 \quad \text{entonces :}$$

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3 = 2.09$$

De manera similar se obtiene el valor de K_{ts} , verificando $h/r = 2.5$ que se encuentra en el intervalo $0.25 \leq 2.5 \leq 4$ se aplica:

$$C_1 = 0.905 + 0.783 \sqrt{h/r} - 0.075h/r = 1.96$$

$$C_2 = -0.437 - 1.969 \sqrt{h/r} + 0.553h/r = -2.17$$

$$C_3 = 1.557 + 1.073 \sqrt{h/r} - 0.578h/r = 1.83$$

$$C_4 = -1.061 + 0.171 \sqrt{h/r} - 0.086h/r = -0.58 \quad \text{entonces :}$$

$$K_{ts} = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3 = 1.64$$

Con K_t y K_{ts} calculados se procede a recalcular tanto las componentes de los esfuerzos combinados como también los principales y los esfuerzos cortantes

máximos como sigue:

$$\begin{aligned}x_{\sigma_{xmax}} &= K_t x_{\sigma_x} = 61.50 \\x_{\tau_{xz'}max} &= K_{ts} x_{\tau_{xz'}} = 16.73 \\x_{\sigma_1} &= 65.76 \\x_{\sigma_2} &= -4.26\end{aligned}$$

Ahora se aplicará las teorías de falla para materiales frágiles para determinar el diámetro estático. Se puede verificar que la teoría del Esfuerzo Cortante Máximo, da los mismos resultados que la de Mohr Modificada haciendo $x_{\sigma_2}/x_{\sigma_1} = 0.064$ que cumple tanto con $x_{\sigma_2}/x_{\sigma_1} \leq S_{uc}/S_{ut}$ en **esfuerzo normal máximo** como también $x_{\sigma_2}/x_{\sigma_1} \leq 1$ para **Mohr modificada**, de esa manera el diámetro estático tiene el valor de:

$$\begin{aligned}d_e &= \sqrt[3]{\frac{x_{\sigma_1} n}{S_{ut}}} = 0.09537 [m] \\d_e &= 95.37 [mm]\end{aligned}$$

Para la teoría de falla de **Coulomb-Mohr frágil** se usa la siguiente expresión para determinar el diámetro estático:

$$\begin{aligned}d_e &= \sqrt[3]{\left(\frac{x_{\sigma_1}}{S_{ut}} - \frac{x_{\sigma_2}}{S_{uc}}\right) n} = 0.09592 [m] \\d_e &= 95.92 [mm]\end{aligned}$$

Estos valores se redondean al siguiente tamaño preferido que es 100[mm] junto con un D de 125[mm], si se mantiene la relación h/r constante, no es necesario iterar sobre los coeficientes C necesarios para calcular K_t y K_{ts} pero lo que si influye es el nuevo diámetro mayor D dando como resultado:

$$K_t = 2.01 \quad K_{ts} = 1.59$$

Estos valores nuevos influyen en los esfuerzos y en consecuencia en los diámetros del eje, si se sigue el mismo procedimiento anterior se obtiene para la teoría del **esfuerzo normal máximo y Mohr modificada**:

$$d_e = 94.22 [mm]$$

Y usando la teoría de **Coulomb-Mohr** para materiales **frágiles**:

$$d_e = 94.77 \text{ [mm]}$$

Finalmente si se desea hacer una iteración más se puede ver claramente que el diámetro adecuado para ese eje es el del tamaño preferido de 95[mm] o si se desea algo más conservador se puede usar un diámetro de 100[mm].

La tabla 4.2 contiene para cada teoría aplicada la recopilación de los diámetros calculados arriba.

Tabla 4.2. Diámetros calculados manualmente para el diseño estático del eje usando material frágil

Diseño estático material frágil		ASTM 20
	Iteración 1	Iteración 2
Energía normal máxima	95,38 [mm]	94,22 [mm]
Mohr modificada	95,38 [mm]	94,22 [mm]
Coulomb-Mohr frágil	95,92 [mm]	94,77 [mm]

4.2.1.2.3. Diseño a fatiga

Para el diseño a fatiga es necesario calcular los coeficientes de concentración de esfuerzos reducidos para fatiga K_f y K_{fs} , esto se logra partiendo de los coeficientes geométricos K_t y K_{ts} ya calculados junto con la constante de Neuber \sqrt{a} que depende de la resistencia última a tracción S_{ut} en *kpsi*. Usando un radio de muesca $r = 2\text{[mm]}$ se tiene:

$$S_{ut} = 380 \text{ [MPa]} \left| \frac{\text{[kpsi]}}{6.89 \text{ [MPa]}} \right| = 55.15 \text{ [kpsi]}$$

$$\sqrt{a} = 0.246 - 3.08(10^{-3}) S_{ut} + 1.51(10^{-5}) S_{ut}^2 - 2.67(10^{-8}) S_{ut}^3$$

$$\sqrt{a} = 0.12 \left[\sqrt{\text{pulg}} \right] \left| \frac{\sqrt{25.4} \left[\sqrt{\text{mm}} \right]}{\left[\sqrt{\text{pulg}} \right]} \right| = 0.59 \left[\sqrt{\text{mm}} \right]$$

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a}/r} = 1.77$$

Se aplica un procedimiento muy parecido para encontrar el factor K_{fs} como sigue:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &= 0.190 - 2.51(10^{-3}) S_{ut} + 1.35(10^{-5}) S_{ut}^2 - 2.67(10^{-8}) S_{ut}^3 \\ \sqrt{a} &= 0.088 [\sqrt{\text{pulg}}] \left| \frac{\sqrt{25.4} [\sqrt{\text{mm}}]}{[\sqrt{\text{pulg}}]} \right| = 0.44 [\sqrt{\text{mm}}] \\ K_{fs} &= 1 + \frac{K_{ts} - 1}{1 + \sqrt{a}/r} = 1.49\end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular los componentes de los esfuerzos fluctuantes tanto amplitud como medios. Se sabe de antemano que el esfuerzo normal medio es cero por tratarse de un esfuerzo con inversión completa y también que el esfuerzo cortante amplitud al ser constante no presenta un esfuerzo amplitud, entonces se dice: $\sigma_m = \tau_a = 0$. Para las otras componentes de esfuerzo sin tomar en cuenta el valor del diámetro se tiene:

$$\begin{aligned}x_{\sigma_a} &= K_f \frac{32 M_a}{\pi} = 52.03 \\ x_{\tau_m} &= K_{fs} \frac{16 T_m}{\pi} = -15.16\end{aligned}$$

Donde M_a es el valor de $M_{Tot}(0.22) = 2.889 \text{ [kNm]}$ y T_m tiene el valor de $M_x = -2 \text{ [kNm]}$ correspondientes a la sección crítica.

La resistencia a la fatiga debe determinarse en función de la resistencia última a tracción S_{ut} y los coeficientes que la modifican. Recordando que $S_{ut} = 380 \text{ [MPa]}$ la resistencia a la fatiga de una probeta toma el valor:

$$S'_e = 0.5 S_{ut} = 190 \text{ [MPa]}$$

Los coeficientes que modifican la resistencia a la fatiga se calculan a continuación:

$$\begin{aligned}k_a &= a S_{ut}^b = 0.93; \quad a = 4.51 \quad b = -0.265 \quad \text{Maquinado} \\ k_b &= 1.24 d^{-0.107} = 0.82; \quad 2.8 < d < 51 \text{ [mm]}; \quad \text{Suponiendo } d = 50 \text{ [mm]} \\ k_c &= 1; \quad \text{Cargas combinadas} \\ k_d &= 1; \quad \text{Temperatura ambiente} \\ k_e &= 0.75; \quad \text{Confiabilidad } 99.9\% \\ k_f &= 1\end{aligned}$$

Con esto la resistencia a la fatiga es:

$$S_e = S'_e k_a k_b k_c k_d k_e k_f = 109.07 \text{ [MPa]}$$

En el siguiente paso se determinan los esfuerzos equivalentes de Von Misses a usarlos con los criterios de falla.

$$x_{\sigma'_a} = x_{\sigma_a} = 52.03$$

$$x_{\sigma'_m} = \frac{|x_{\tau_m}|}{\sqrt{3}} = 8.76$$

Para el criterio de falla de **Soderberg** se puede calcular el diámetro para la primera iteración como:

$$d_d = \left[n \left(\frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma'_m}}{S_y} \right) \right]^{1/3} = 0.10123 [m]$$

$$d_d = 101.23 [mm]$$

Usando **Goodman** el diámetro cambia a:

$$d_d = \left[n \left(\frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} + \frac{x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right) \right]^{1/3} = 0.10001 [m]$$

$$d_d = 100.01 [mm]$$

Con el criterio de **ASME-elíptica**:

$$d_d = \left[\left(n \frac{x_{\sigma'_a}}{S_e} \right)^2 + \left(n \frac{x_{\sigma'_m}}{S_y} \right)^2 \right]^{1/6} = 0.09857 [m]$$

$$d_d = 98.57 [mm]$$

De igual manera usando el criterio de **Gerber**:

$$d_d = \left\{ \left(\frac{2n x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right) \left[-\frac{n x_{\sigma'_a}}{S_e} + \sqrt{\left(\frac{n x_{\sigma'_a}}{S_e} \right)^2 + 4 \left(\frac{n x_{\sigma'_m}}{S_{ut}} \right)^2} \right]^{-1} \right\}^{1/3} = 0.09852 [m]$$

$$d_d = 98.52 [mm]$$

En la segunda iteración se aproxima al valor preferido inmediato superior que es $d = 106 [mm]$ y su correspondiente $D = 132 [mm]$ manteniendo la proporción. Para ese valor se debe recalcular los coeficientes geométricos de concentración de esfuerzos K_t , K_{ts} que influyen en el nuevo diámetro y toman los siguientes valores:

$$K_t = 2.02 \quad K_{ts} = 1.60$$

Y respectivamente :

$$K_f = 1.81 \quad K_{fs} = 1.50$$

Que afectan al diámetro crítico junto con el valor de k_b que ahora toma el valor:

$$k_b = 1.51 d^{-0.157} = 0.73$$

La nueva resistencia a la fatiga es por ende:

$$S_e = 97.07 \text{ [MPa]}$$

Y usando el criterio de falla a la fatiga de **Soderberg** se obtiene el diámetro:

$$d_d = 105.71 \text{ [mm]}$$

Con el criterio de **Goodman**:

$$d_d = 104.58 \text{ [mm]}$$

Aplicando el criterio de **ASME**:

$$d_d = 103.25 \text{ [mm]}$$

Y finalmente usando el criterio de falla a la fatiga de **Gerber**:

$$d_d = 103.21 \text{ [mm]}$$

En todos los criterios ya se puede determinar como el diámetro adecuado el inmediato superior de la serie de tamaños preferidos como $d_d = 106 \text{ [mm]}$.

No es necesario más iteraciones debido a que el programa necesariamente va a aproximar a los tamaños preferidos provocando que en cada iteración se recalcule lo mismo.

La tabla 4.3 contienen tabulados los diámetros calculados en el diseño dinámico para las dos iteraciones realizadas.

4.2.1.3. Diseño del Eje Mediante el Uso del Programa EjesDim

Usando el software diseñado en el presente proyecto, EjesDim, se puede obtener en la pantalla de configuración lo mostrado en la figura 4.9

Tabla 4.3. Diámetros calculados manualmente para el diseño dinámico del eje

Diseño dinámico		AISI 1020 HR
	Iteración 1	Iteración 2
ED-Soderberg	101,23 [mm]	105,71 [mm]
ED-Goodman	100,01 [mm]	104,58 [mm]
ED-ASME	98,57 [mm]	103,25 [mm]
ED-Gerber	98,52 [mm]	103,21 [mm]

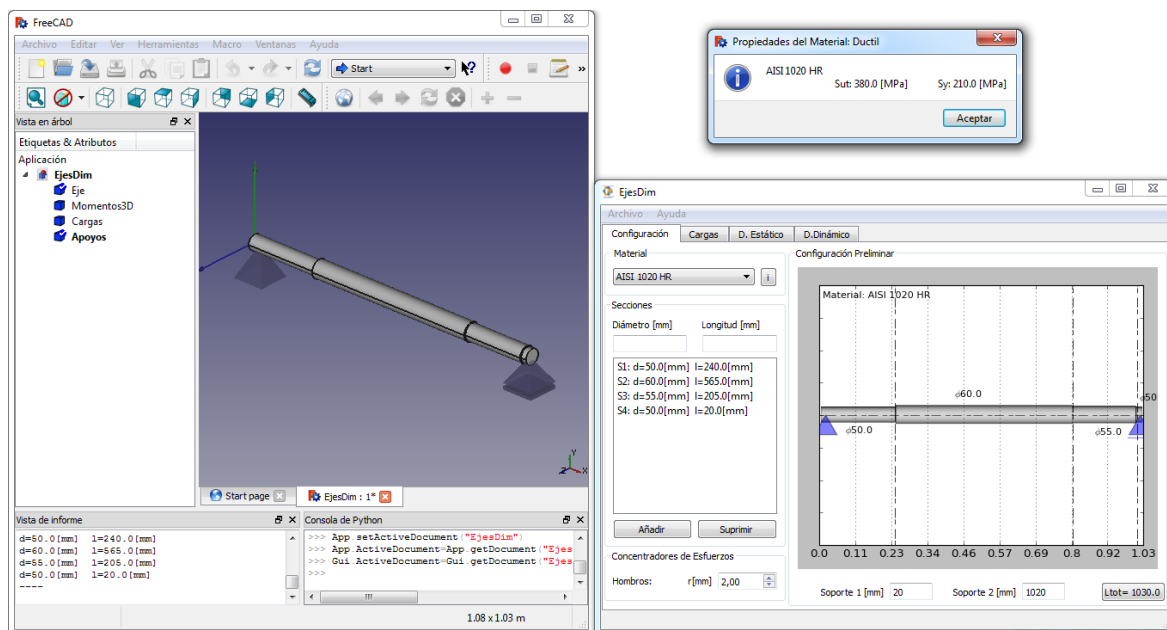


Figura 4.9. Pantalla de la configuración del eje en el software EjesDim

Para la selección del material se encuentra el combo que además muestra un diálogo con las propiedades cuando se da click en el botón “i”.

Se puede observar claramente que el programa trabaja conjuntamente con el software FreeCAD y apenas se activa el botón crear se crea tanto una representación visual plana dentro de la interfaz de EjesDim y una representación en sólido en FreeCAD. La lista contiene todas las secciones agregadas pudiendo agregar o borrar las que no se desea y recrear el eje. Todos los cambios de sección tendrán un radio de entalle especificado en “r [mm]”. La geometría establecida hasta ese momento es referencial.

La figura 4.10 contiene la interfaz gráfica en la pestaña cargas, en la que se puede agregar diferentes tipos de cargas espaciales. Al agregar o quitar una carga se crea o elimina la representación visual de la misma dentro del programa FreeCAD.

Luego de dar click en “Calcular” se puede observar los diagramas correspondientes

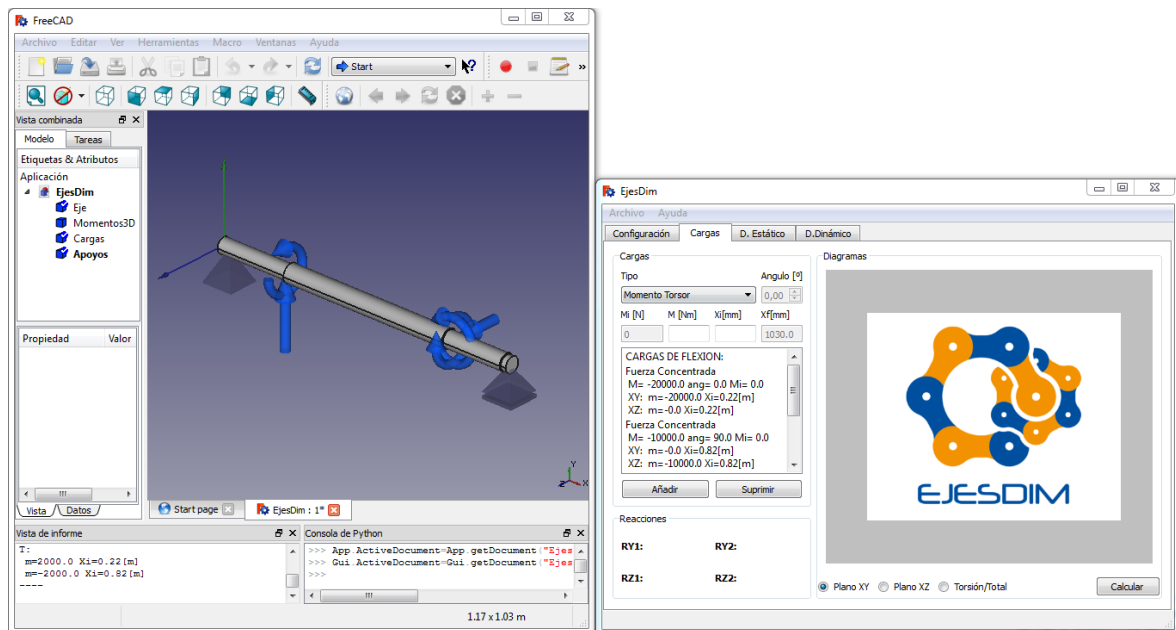


Figura 4.10. Pantalla de asignación de cargas en el software EjesDim

al plano seleccionado como puede apreciarse en la figura 4.11 que contiene los diagramas tanto de cortante como de momento flector en el plano xy , y en la esquina inferior izquierda de la interfaz se puede ver además el valor de las reacciones que ha calculado el programa.

De igual manera para el plano xz seleccionando el radiobotón correspondiente y recalculando se pueden obtener los diagramas de cortante y flector como se ve en la figura 4.12

También se generó una gráfica que contiene el diagrama de momentos torsores del eje en el caso de existir, y el de momentos totales que no es más que el obtenido por una relación pitagórica con las componentes en los dos planos. Así en la figura 4.13 se puede observar claramente los diagramas mencionados.

4.2.1.3.1. Diseño estático con material dúctil

Para el diseño estático se creó una pestaña especializada donde se muestra la sección crítica, el círculo de Mohr y las teorías de falla además del diámetro calculado y los diámetros recomendados para las secciones. Todo esto puede observarse en la figura 4.14 donde también se encuentran valores parciales de los cálculos de los esfuerzos en función del diámetro y el valor de los coeficientes geométricos de concentración de esfuerzos.

La figura 4.14 muestra y calcula el diámetro en función de la teoría de falla de la **energía de la distorsión**.

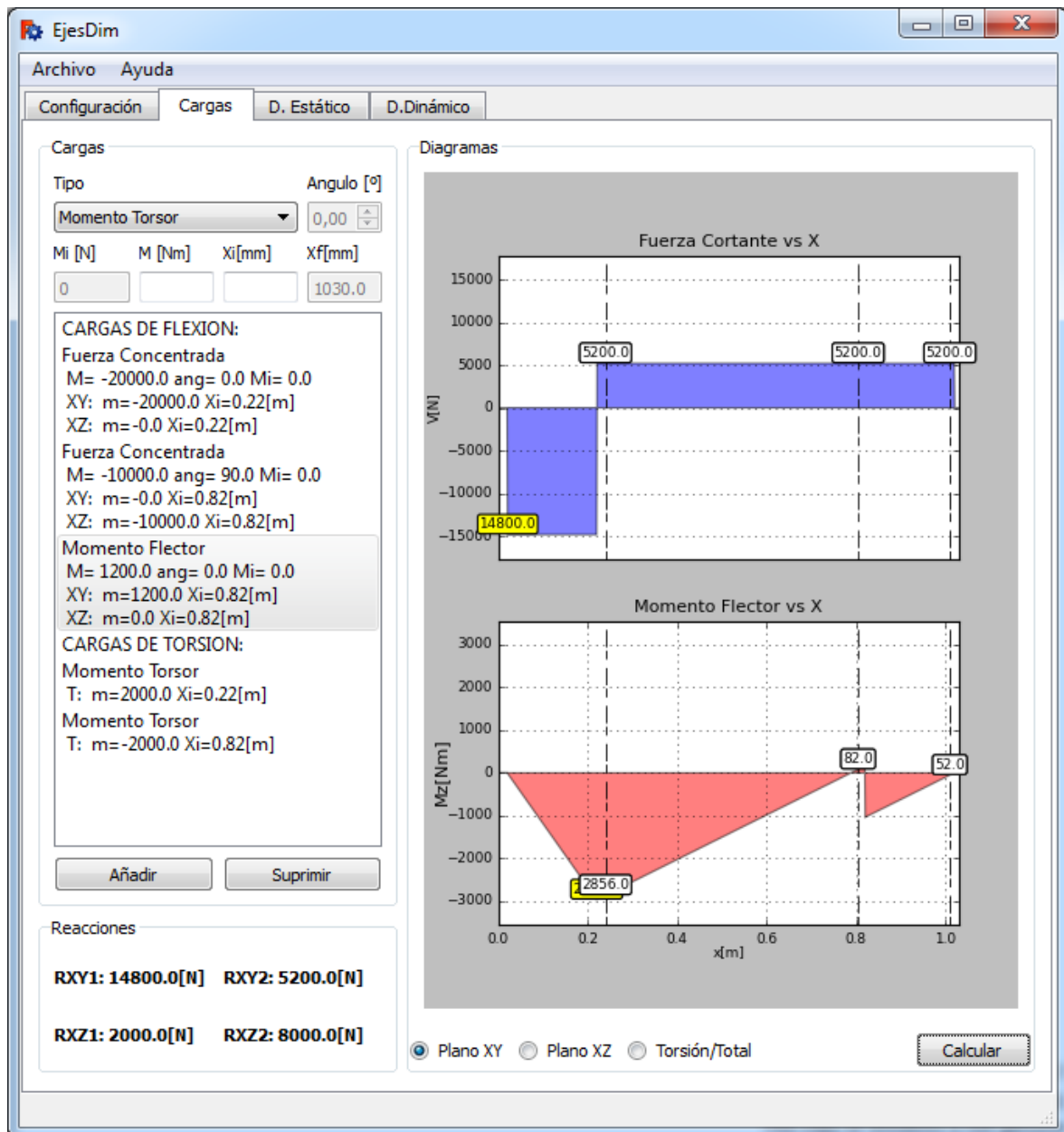


Figura 4.11. Diagramas de cortante y momento flector del plano xy en el software EjesDim

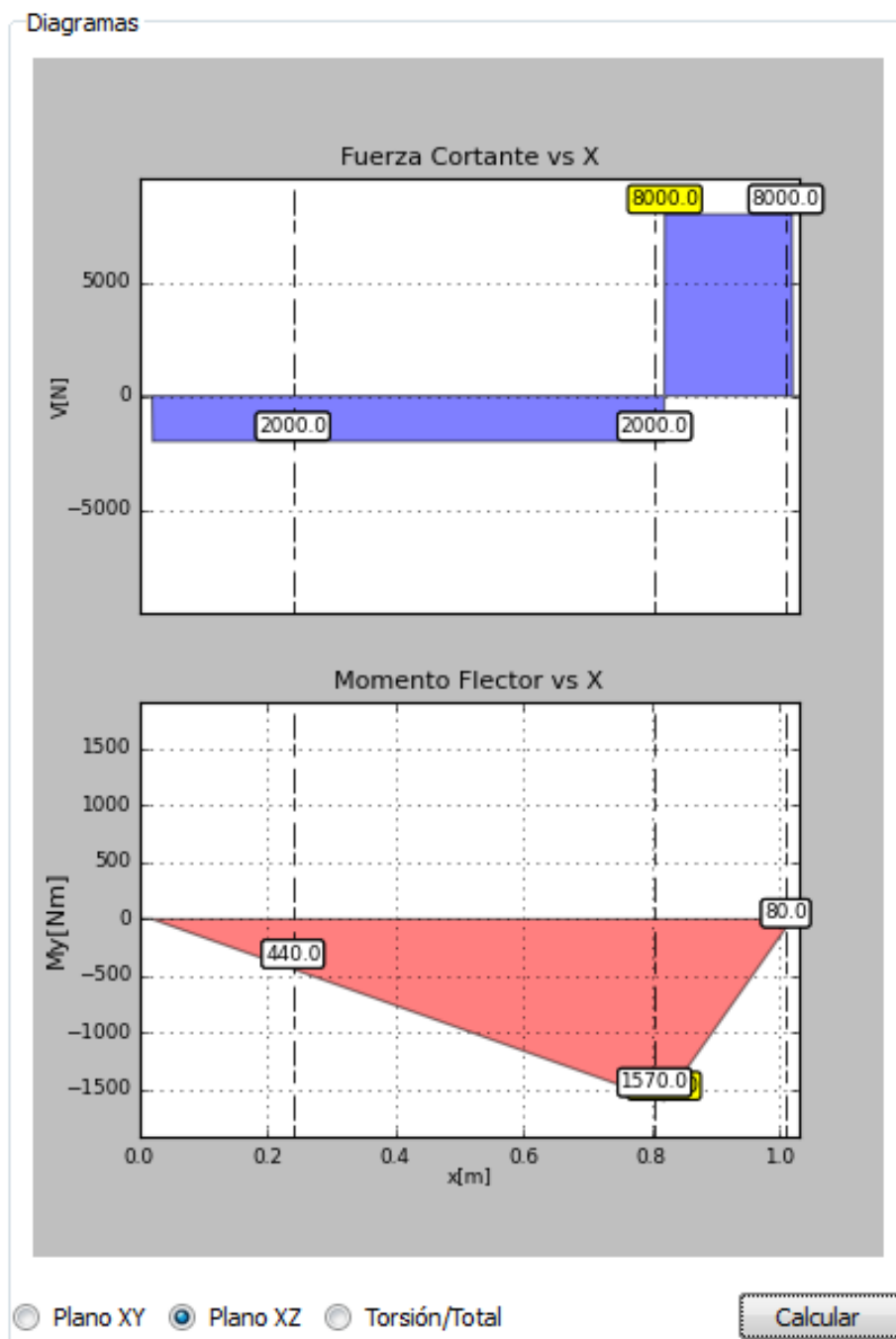


Figura 4.12. Diagramas de cortante y momento flector del plano xz en el software EjesDim

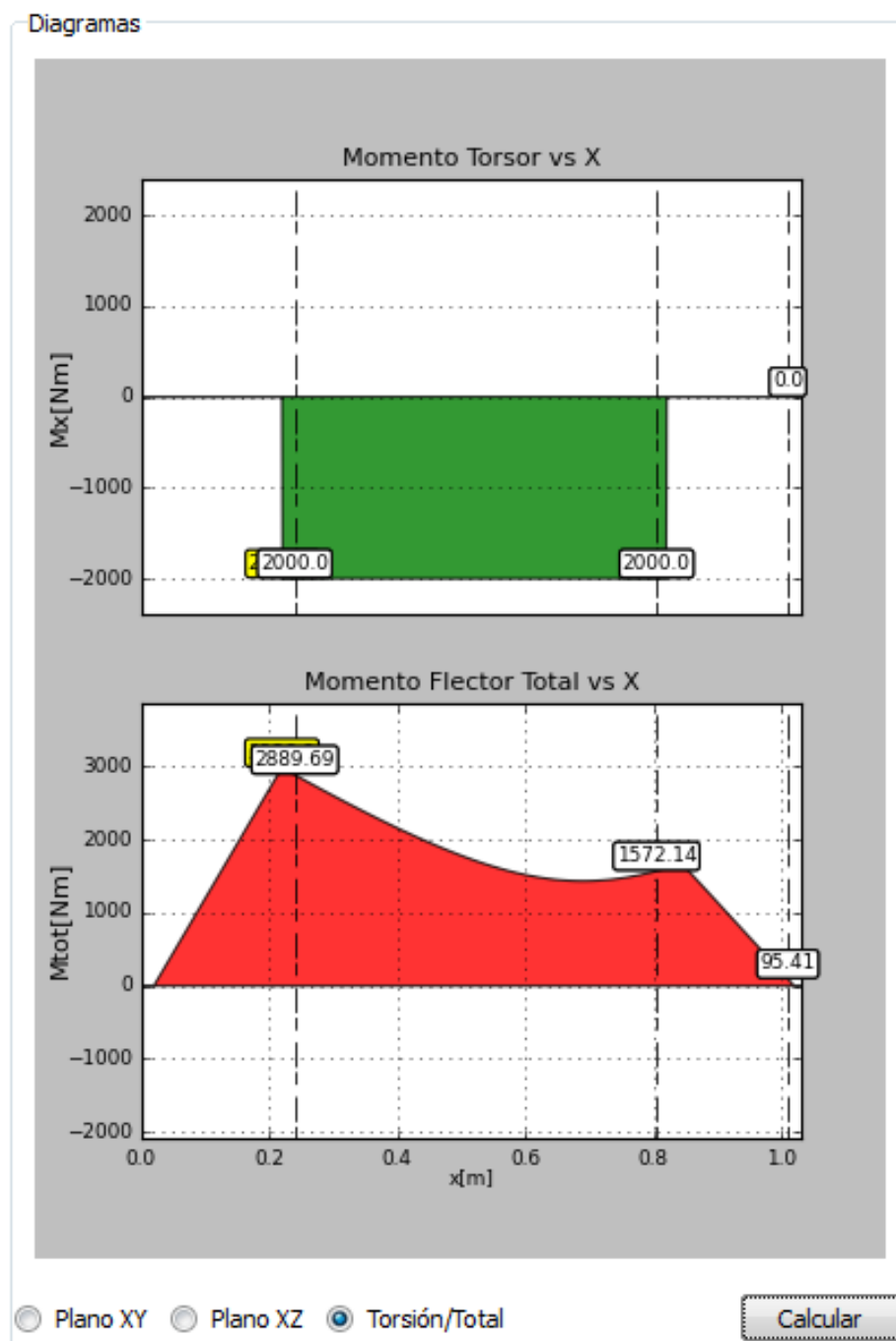


Figura 4.13. Diagramas de momentos torsor y total en el software EjesDim

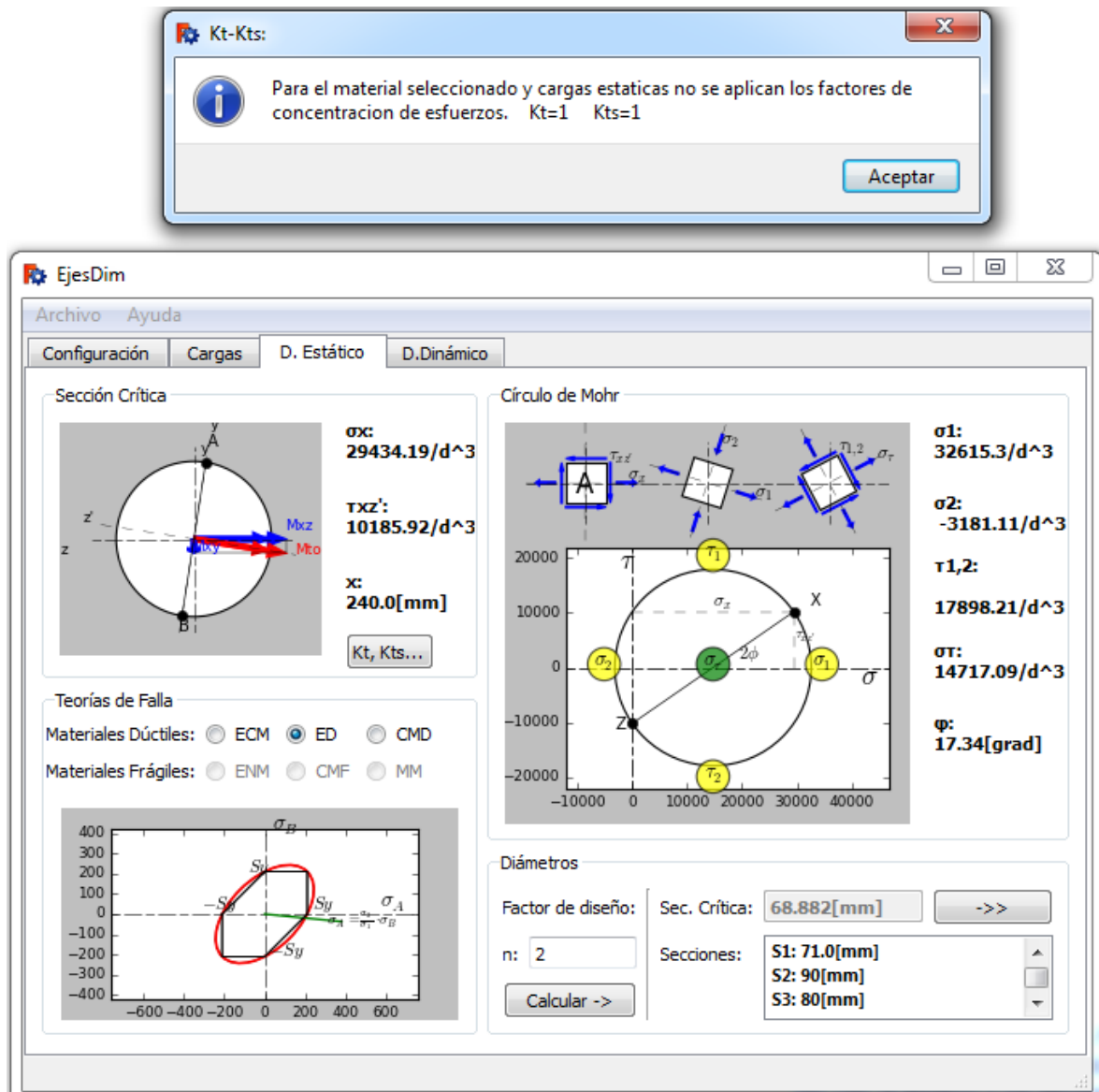


Figura 4.14. Diseño estático usando la teoría de energía de distorsión en el software EjesDim

La figura 4.15 muestra el dimensionamiento pero para la teoría del **esfuerzo cortante máximo**.

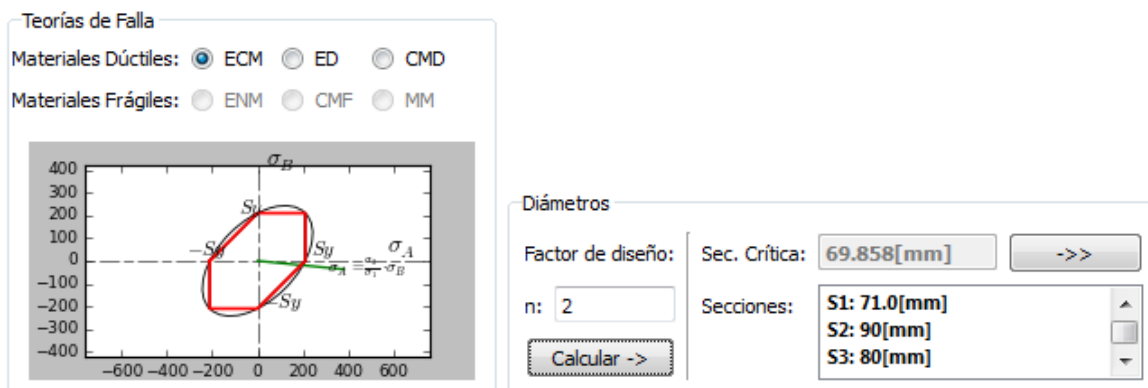


Figura 4.15. Diseño estático usando la teoría del esfuerzo cortante máximo en el software EjesDim

La tabla 4.4 recopila los diámetros calculados a través del software EjesDim.

Tabla 4.4. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño estático con material dúctil

Diseño estático material dúctil	AISI 1020 HR
Esfuerzo cortante máximo	69,86 [mm]
Coulomb-Mohr dúctil	69,86 [mm]
Energía de distorsión	68,88 [mm]

4.2.1.3.2. Diseño estático con material frágil

Para el material frágil se sigue el mismo procedimiento, las características del material se muestran en la figura 4.16

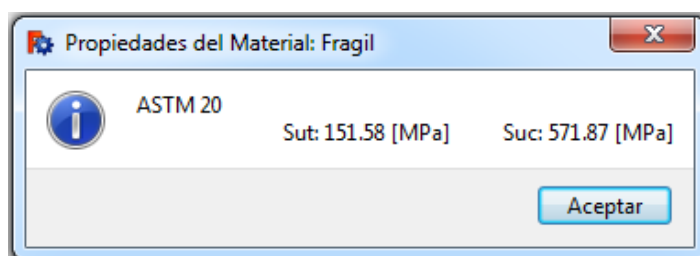


Figura 4.16. Propiedades del material frágil en el software EjesDim

La configuración de las cargas y los resultados tanto de las reacciones como de los diagramas de momentos y cortantes son iguales, lo que cambia es el valor de

los coeficientes de concentración de esfuerzos que esta vez si toma un papel muy importante en el diseño del eje. El programa identifica el tipo de material y habilita las teorías de falla posibles para dicho material además de calcular los coeficientes de concentración de esfuerzos. La interfaz de la figura 4.17 muestra los valores calculados junto con los parámetros geométricos en los que se basó el programa.

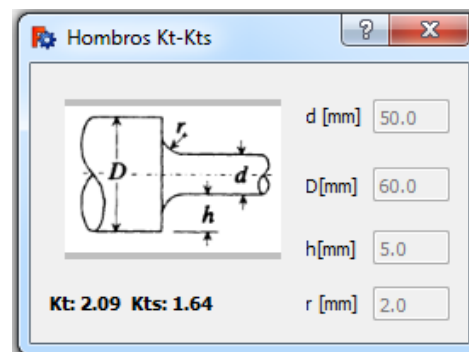


Figura 4.17. Coeficiente de concentración de esfuerzos en el software EjesDim

Entonces el diseño estático del eje usando material frágil y la teoría de falla de **Coulomb-Mohr** se puede observar en la figura 4.18. Y para la teoría de **Mohr modificada** en la figura 4.19.

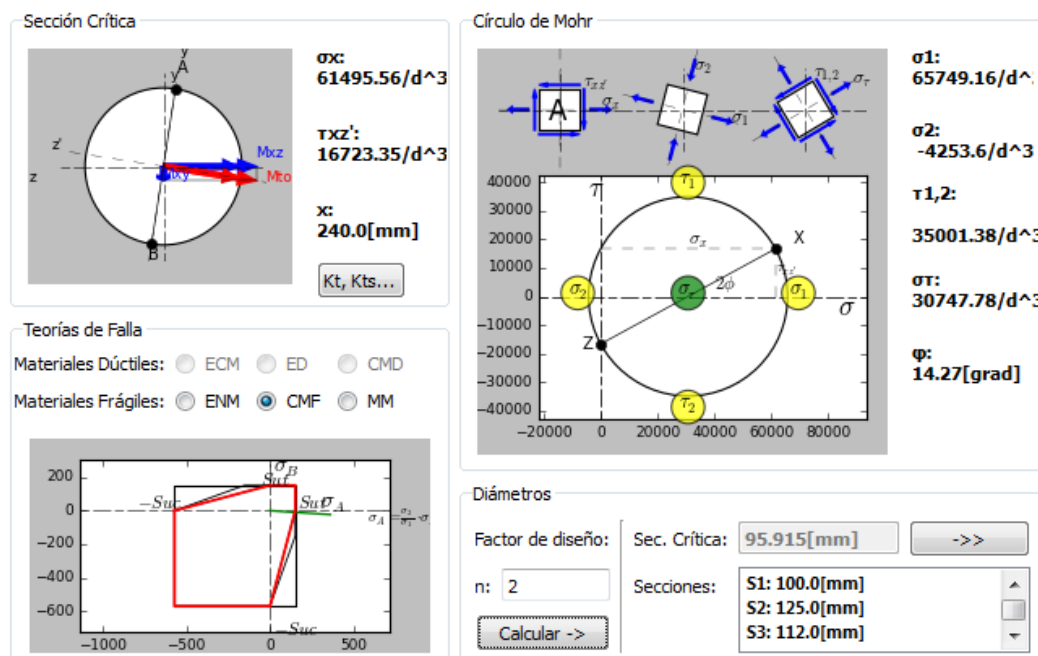


Figura 4.18. Diseño estático usando la teoría de Coulomb-Mohr frágil en el software EjesDim

La segunda iteración para el diseño estático con material frágil como se había

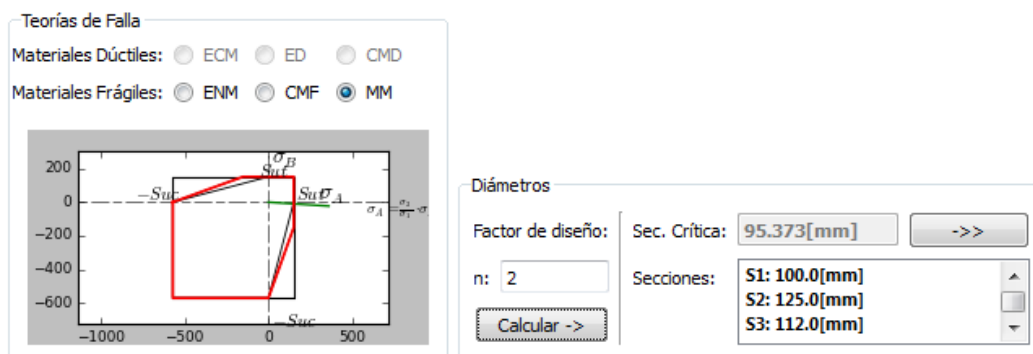


Figura 4.19. Diseño estático MM en el software EjesDim

comentado antes se la realiza usando un diámetro preferido de 100 [mm] y calculando se obtiene los coeficientes de concentración de esfuerzos de la figura 4.20.

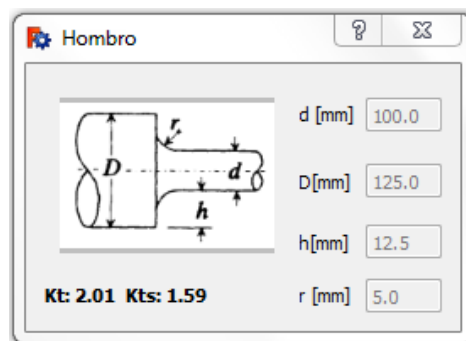


Figura 4.20. Coeficiente de concentración de esfuerzos en el software EjesDim segunda iteración.

De igual manera en la segunda iteración se obtiene los diámetros que se calculan en la figura 4.21 para la teoría de falla del **esfuerzo cortante máximo**.

Asímismo para la teoría de **Mohr modificada** se puede apreciar en la figura 4.22 los diámetros para la iteración respectiva.

La tabla 4.5 recopila los diámetros calculados en esta sección a través del software EjesDim para las dos iteraciones realizadas.

4.2.1.3.3. Diseño dinámico

En el diseño dinámico es preferible usar materiales dúctiles por lo que en el programa se ha deshabilitado la opción de diseño dinámico para materiales frágiles. El material usado es el mismo que se usa en el diseño estático con material dúctil que se muestra en la figura 4.9. Siguiendo el mismo procedimiento del

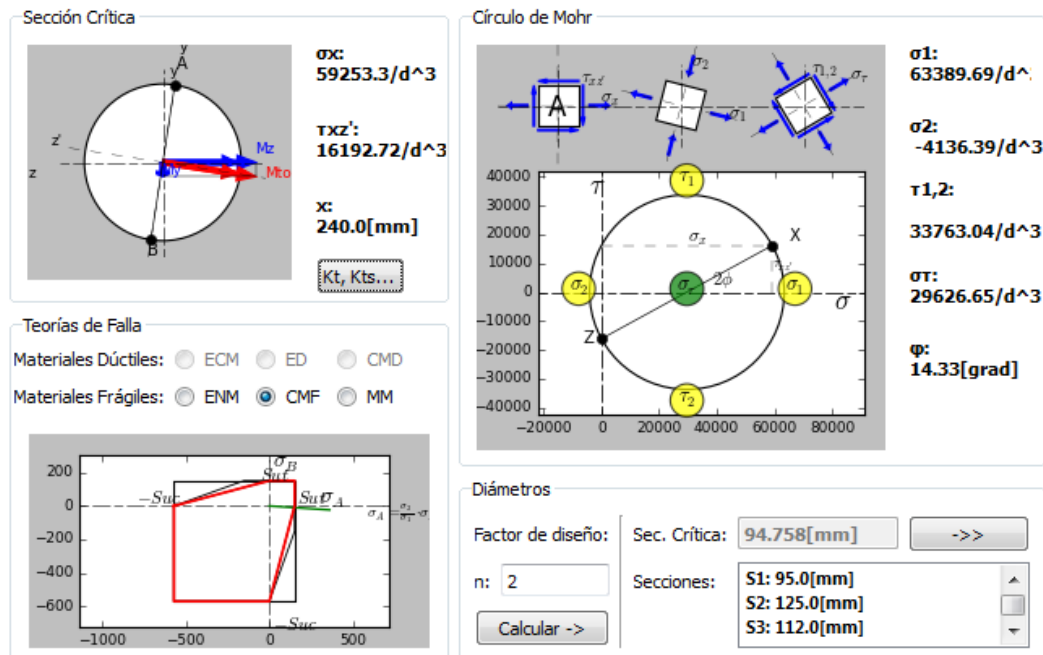


Figura 4.21. Diseño estático usando la teoría de Coulomb-Mohr frágil en el software EjesDim: segunda iteración

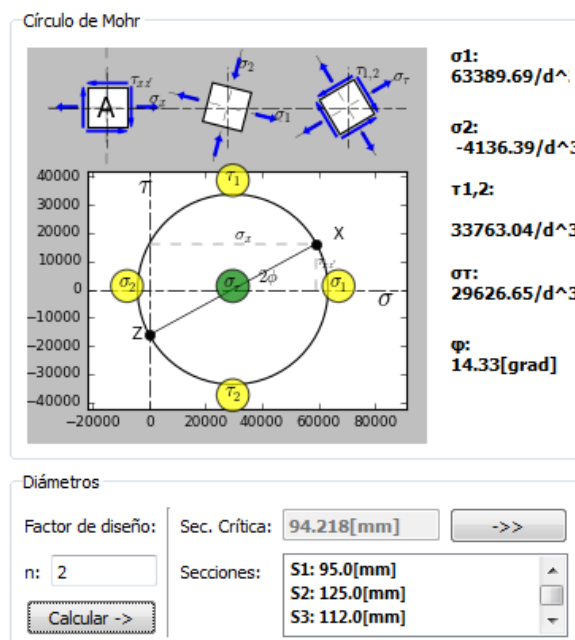


Figura 4.22. Diseño estático usando la teoría de Mohr modificada en el software EjesDim: segunda iteración

Tabla 4.5. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño estático con material frágil

Diseño estático material frágil		ASTM 20
	Iteración 1	Iteración 2
Esfuerzo normal máximo	95,37 [mm]	94,22 [mm]
Mohr modificada	95,37 [mm]	94,22 [mm]
Coulomb-Mohr frágil	95,92 [mm]	94,76 [mm]

diseño estático para materiales dúctiles, el programa calcula los coeficientes de concentración de esfuerzos modificados para fatiga y los muestra en una pantalla aparte como la de la figura 4.23.

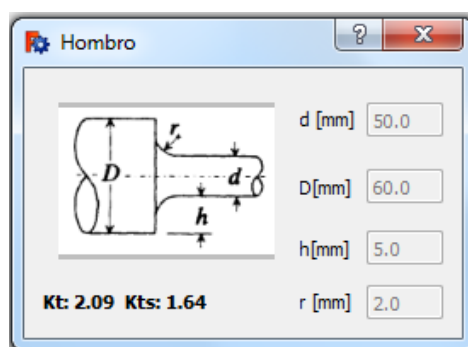


Figura 4.23. Coeficiente de concentración de esfuerzos a fatiga en el software EjesDim

Luego habiendo establecido los parámetros de los factores modificadores de la resistencia a la fatiga y seleccionado el criterio de falla deseado se obtiene el diámetro por ejemplo para el criterio de **ED-Goodman** se puede ver en la figura 4.24 los diámetros para la primera iteración.

Si se selecciona el criterio de **ED-Gerber** se tiene una respuesta del programa como la de la figura 4.25

De la misma manera con el criterio de **ED-Soderberg** se obtiene la figura 4.26.

Finalmente seleccionando el criterio de falla a la fatiga de **ED-ASME** se obtiene la pantalla de la figura 4.27.

La segunda iteración se la realiza estableciendo el nuevo diámetro de 106[mm] donde se modifican los factores de concentración de esfuerzos como se puede apreciar en la figura 4.28.

Así para el criterio de falla de **ED-Goodman** y la segunda iteración se obtiene la respuesta de la figura 4.29.

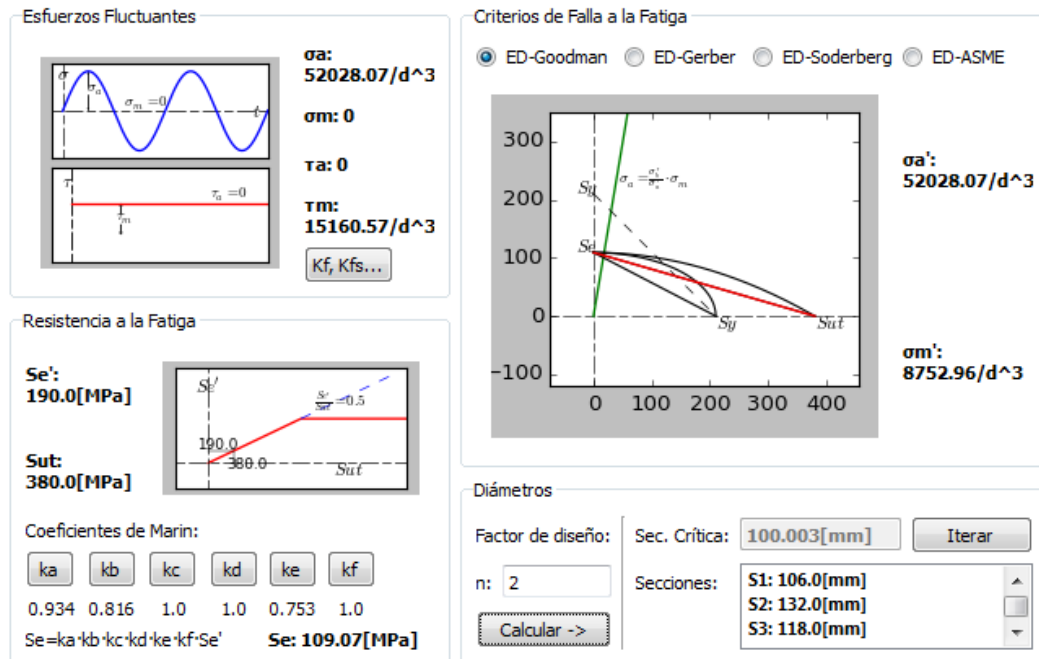


Figura 4.24. Diseño dinámico ED-Goodman en el software EjesDim

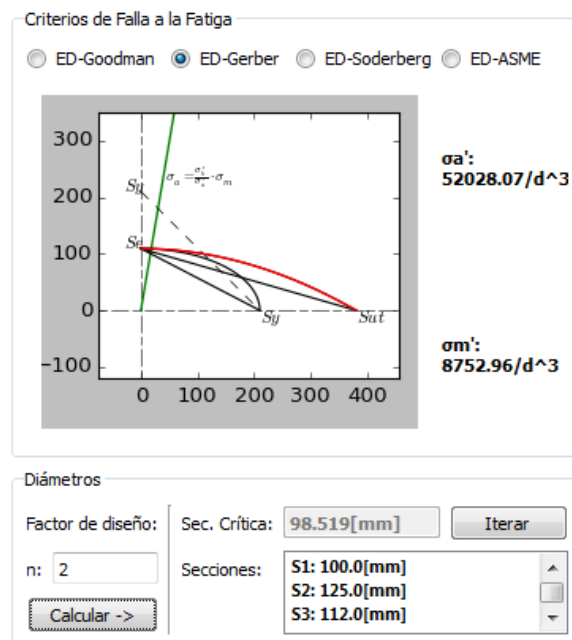


Figura 4.25. Diseño dinámico ED-Gerber en el software EjesDim

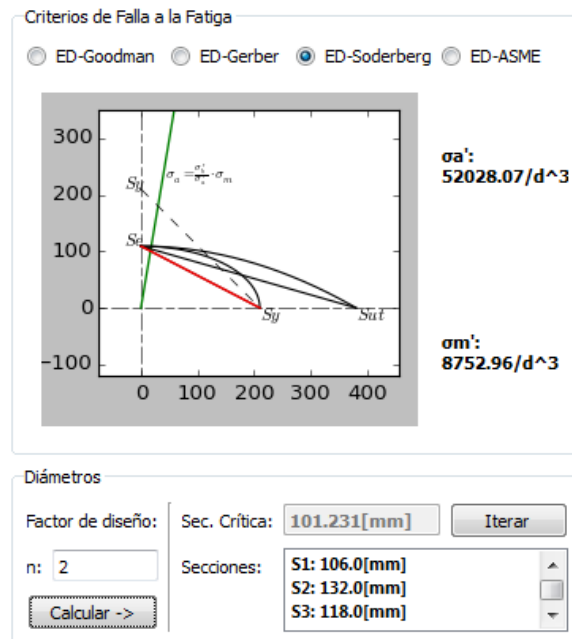


Figura 4.26. Diseño dinámico ED-Soderberg en el software EjesDim

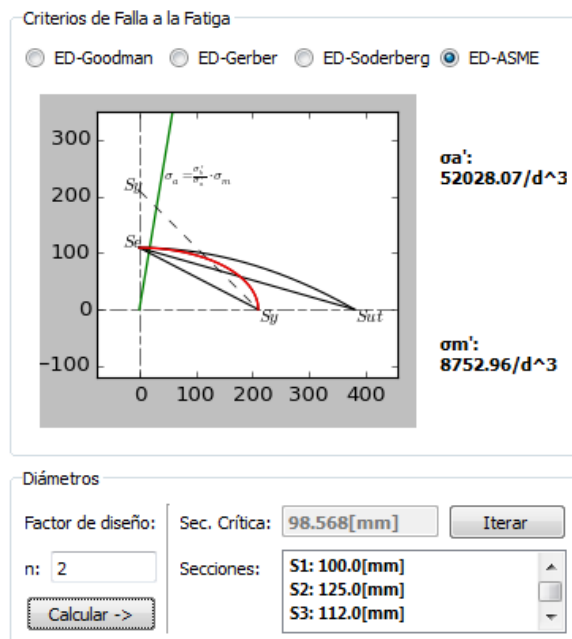


Figura 4.27. Diseño dinámico ED-ASME en el software EjesDim

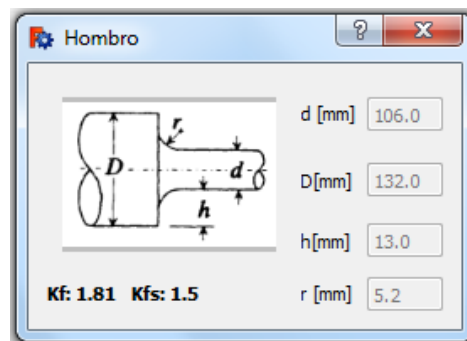


Figura 4.28. Coeficiente de concentración de esfuerzos a fatiga en el software EjesDim: segunda iteración

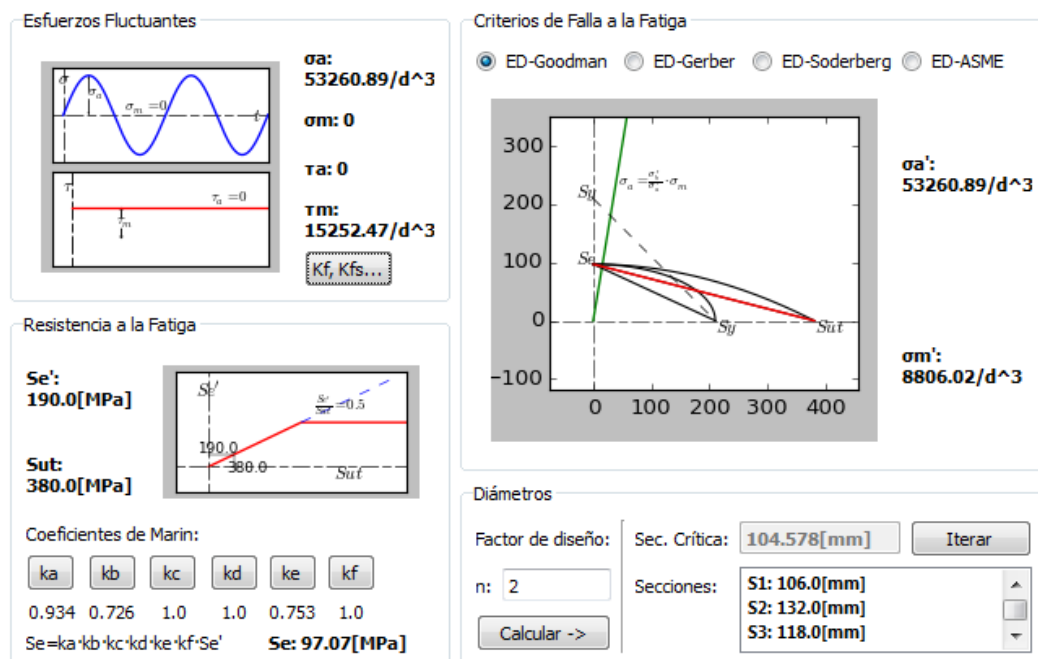


Figura 4.29. Diseño dinámico ED-Goodman en el software EjesDim: segunda iteración

Seleccionando el criterio de **ED-Gerber** se muestra la figura 4.30.

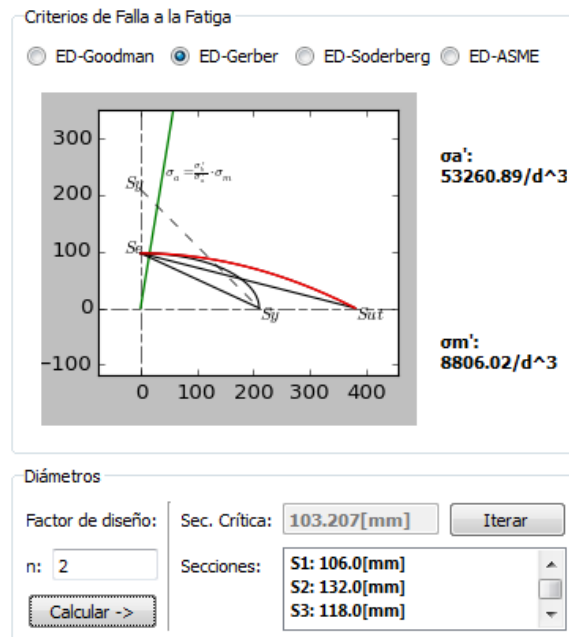


Figura 4.30. Diseño dinámico ED-Gerber en el software EjesDim: segunda iteración

Usando el criterio de **ED-Soderberg** se obtiene la figura 4.31 para la segunda iteración.

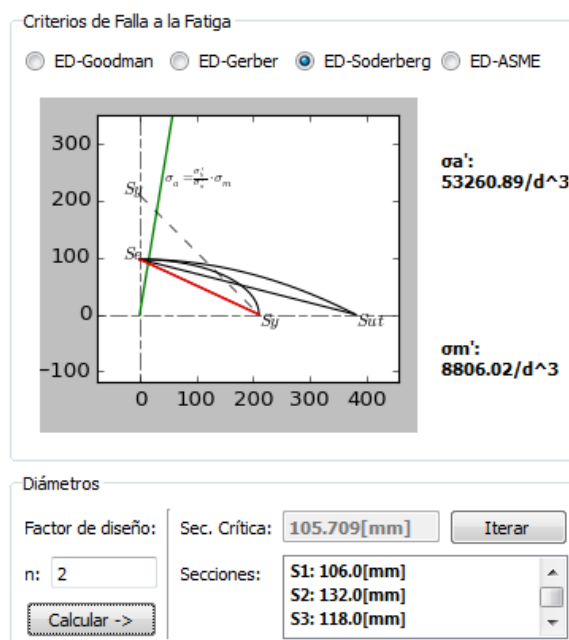


Figura 4.31. Diseño dinámico ED-Soderberg en el software EjesDim: segunda iteración

Finalmente si se marca en el criterio de **ED-ASME** se puede obtener los resultados

de la figura 4.32.

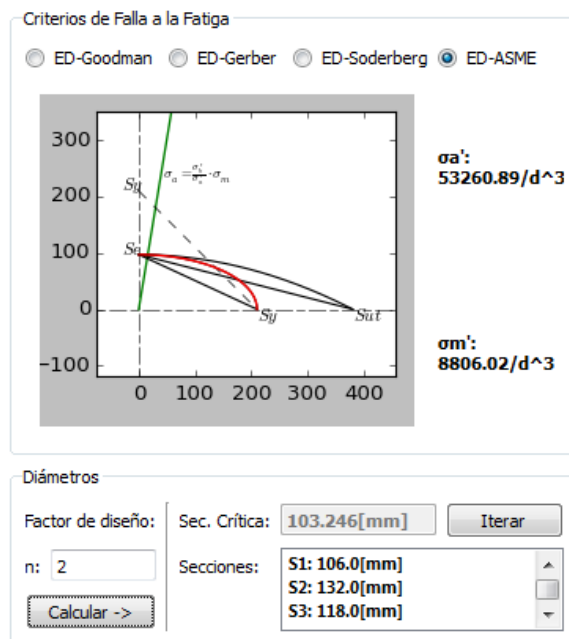


Figura 4.32. Diseño dinámico ED-ASME en el software EjesDim: segunda iteración

Con esto ya queda claro que el diámetro adecuado del eje según el software diseñado asciende a $d_d = 106 \text{ [mm]}$.

En la tabla 4.5 se han tomado los diámetros calculados a través del software EjesDim usando los diferentes criterios de falla para las dos iteraciones realizadas.

Tabla 4.6. Diámetros calculados usando el software EjesDim para el diseño dinámico

Diseño dinámico	AISI 1020 HR	
	Iteración 1	Iteración 2
ED-Soderberg	101,23 [mm]	105,71 [mm]
ED-Goodman	100,00 [mm]	104,58 [mm]
ED-ASME	98,57 [mm]	103,25 [mm]
ED-Gerber	98,52 [mm]	103,21 [mm]

4.2.1.4. Diseño del eje mediante el uso del software MDSolids, Inventor y MITCalc

4.2.1.4.1. Obtención de los diagramas con el software MDSolids

Con MDSolids versión 3.5 se podrán comparar los diagramas obtenidos calculados a mano y también con el software diseñado EjesDim. Para el plano xy se puede configurar las cargas como en la figura 4.33:

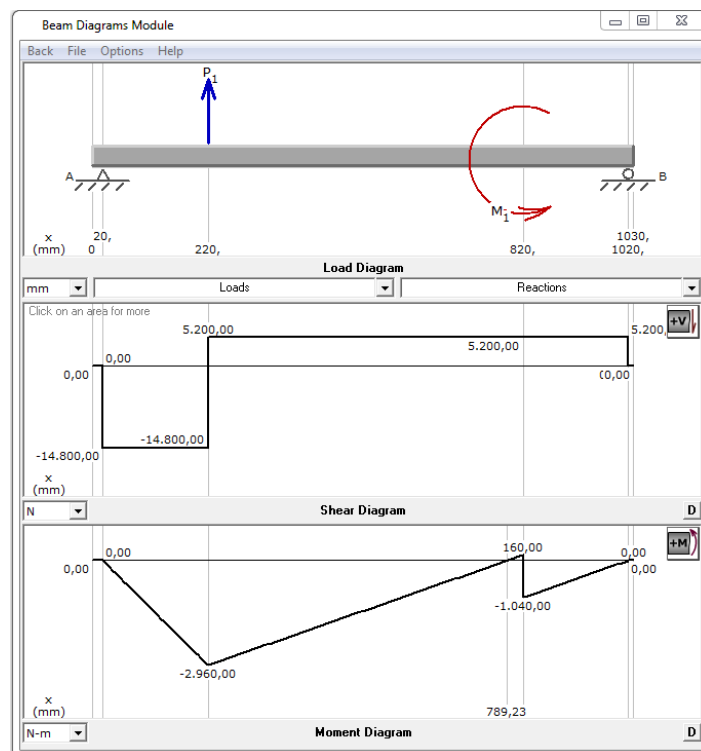


Figura 4.33. Diagramas de cortante y momento flector del plano xy en el software MDSolids

Y para el plano xz se pueden observar en la figura 4.34.

4.2.1.4.2. Dimensionamiento con el Software Inventor Professional

Ahora se dimensiona el mismo eje en el software Inventor Professional 2014, en su entorno de acelerador de diseño para ejes. La figura 4.35 muestra la interfaz gráfica que permite diseñar ejes. Asimismo se permite añadir cargas y las variables que intervienen en el cálculo del diámetro como muestra la figura 4.36.

Los diagramas de cortantes y momentos flectores se muestran en las figuras 4.37 y 4.38 respectivamente.

Finalmente se muestra el diámetro propuesto por el programa en el diagrama de la figura 4.39. El diámetro que propone el programa inventor es el mismo tanto para materiales frágiles como para materiales dúctiles.

4.2.1.4.3. Dimensionamiento con el Software MITCalc

MITCalc es un programa diseñado para funcionar dentro de Excel que posee varios módulos de cálculo de elementos de máquinas entre los cuales se incluye uno para dimensionamiento de ejes. En la figura 4.40 se puede observar que puede predecir

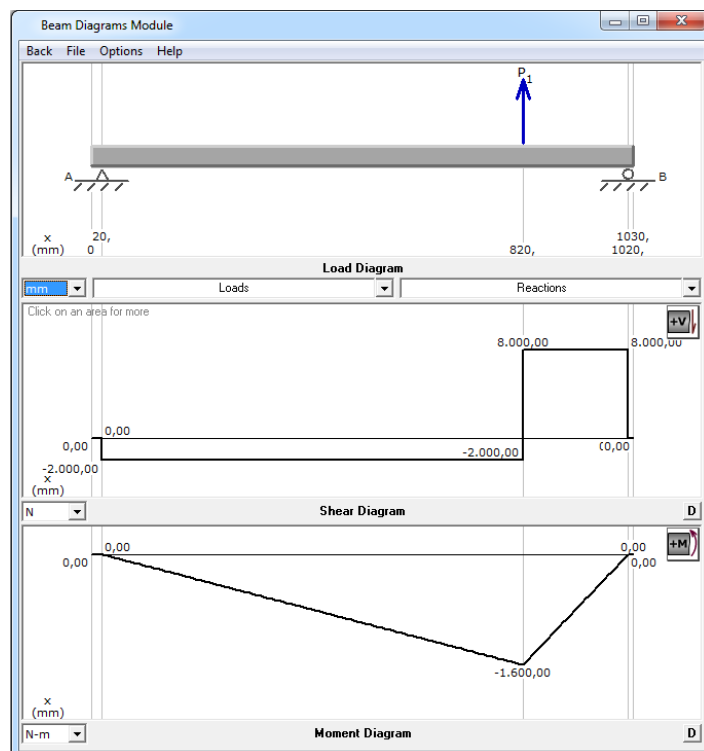


Figura 4.34. Diagramas de cortante y momento flector del plano xz en el software MDSolids

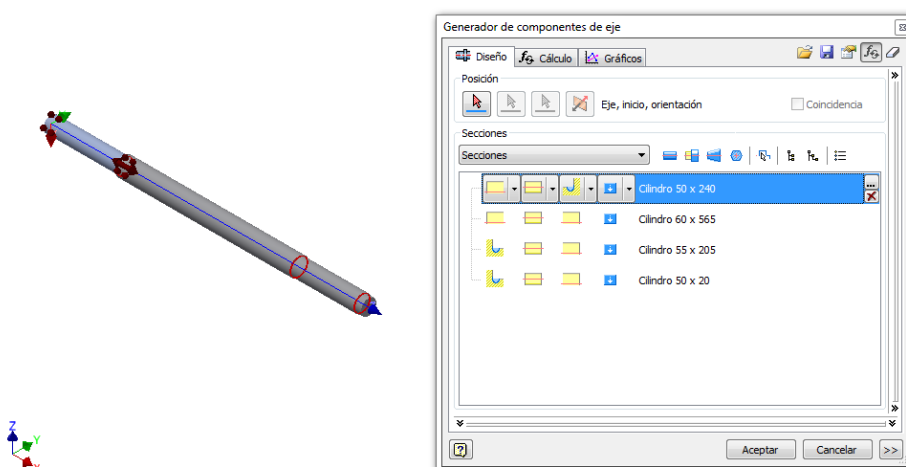


Figura 4.35. Configuración del eje en el software Inventor

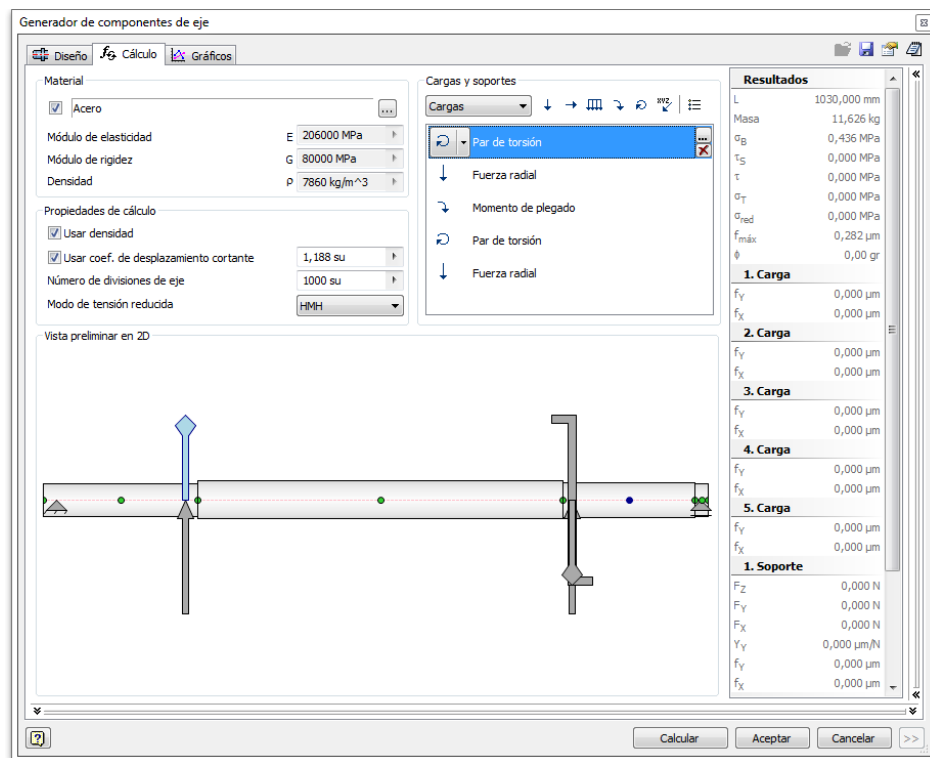


Figura 4.36. Configuración de cargas eje en el software Inventor

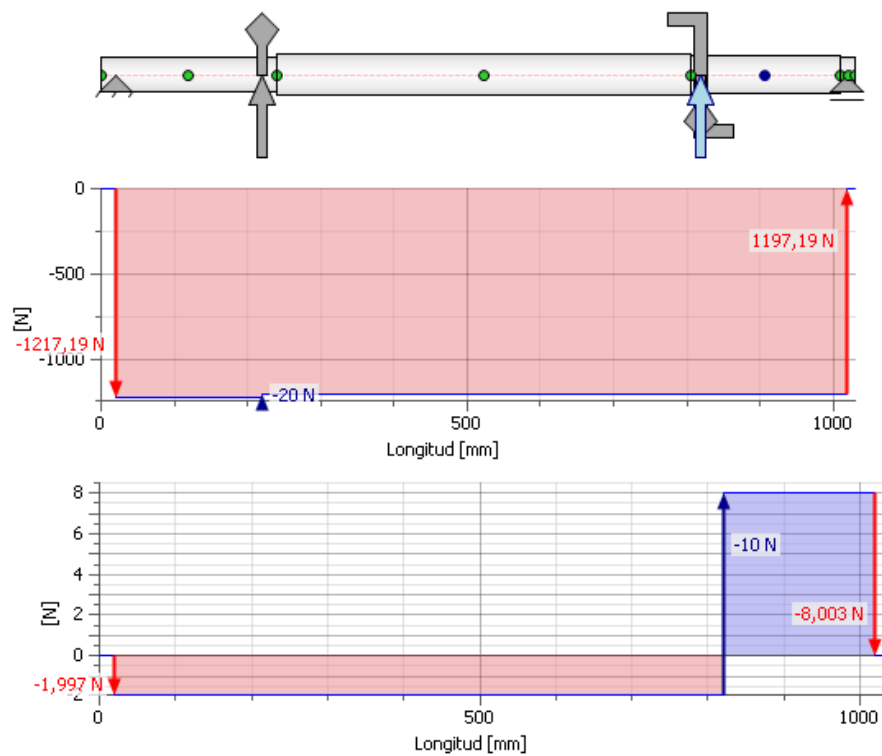


Figura 4.37. Diagramas de cortantes en xz arriba y xy abajo obtenidos por el software Inventor

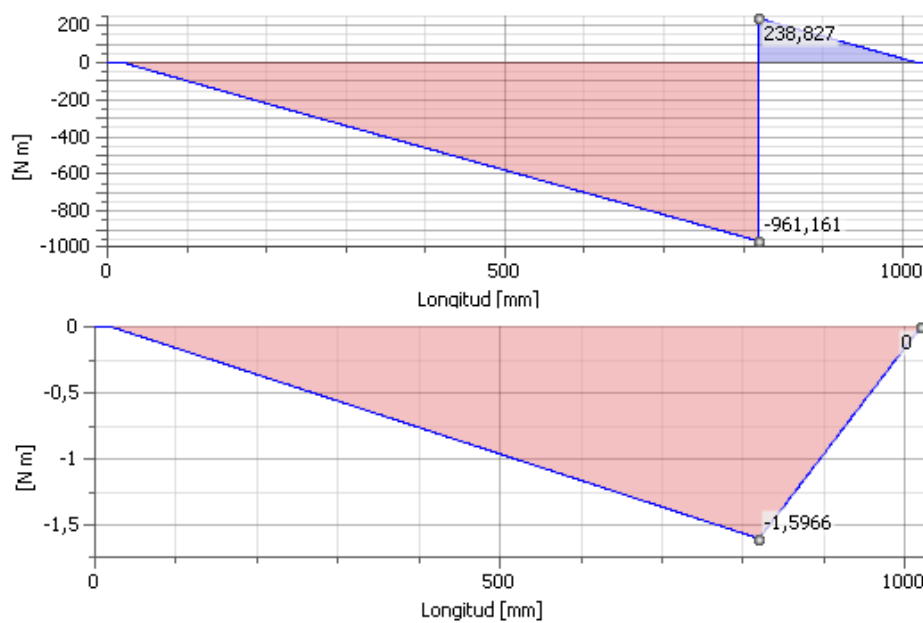


Figura 4.38. Diagramas de momentos en xz arriba y xy abajo obtenidos por el software Inventor

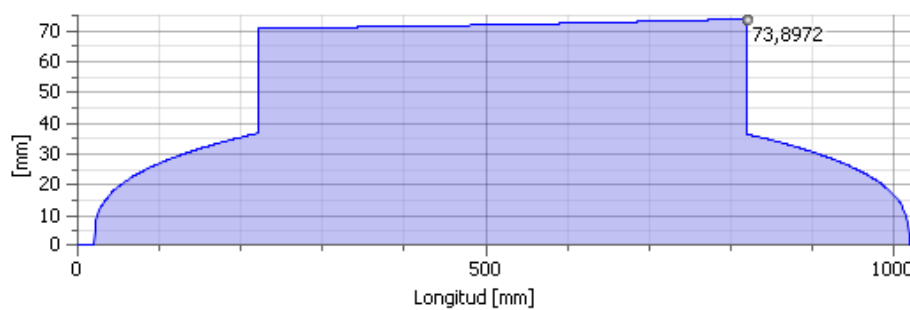


Figura 4.39. Diámetro del eje en el software Inventor

un diámetro aproximado en función de la velocidad angular del eje y la potencia que transmite. Para esto se ha tomado valores arbitrariamente de la velocidad angular y la potencia para que de el torque al que se somete el eje que está siendo calculado. La figura 4.41 muestra una captura de la configuración de la geometría básica del eje.

Debido a que el programa no calcula directamente el diámetro se ha colocado valores en las secciones que resulten aproximadamente los factores de seguridad aplicados.

1.0 <input checked="" type="checkbox"/> Preliminary shaft diameter design			
1.1 Calculation units	SI Units (N, mm, kW...)		
1.2 Transmitted power	315,00	[kW]	
1.3 Shaft speed	1500	[/min]	
1.4 Torsion moment	2005,50	[Nm]	
1.5 Preliminary min. diameter	81,15	[mm]	
		1.6 Type of shaft load	B...Static torsion + bending
		1.7 Material of the shaft	A...Common structural steel (500)

Figura 4.40. Diámetro preliminar del eje en el software MITCalc

2.0 <input checked="" type="checkbox"/> Shaft shape and dimensions										
2.1 The scale of the displayed shaft diameter.	<input checked="" type="checkbox"/>	Calculation units	SI Units (N, mm, kW...)							
2.2 Table	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Origin	0,00	240,00	805,00	1010,00	1030,00	1030,00	1030,00	1030,00	1030,00	1030,00
L	240,000	565,000	205,000	20,000						
ϕ Da	69,000	82,800	75,900	69,000						
ϕ Db	69,000	82,800	75,900	69,000						
ϕ da	0,000	0,000	0,000	0,000						
ϕ db	0,000	0,000	0,000	0,000						
R	2,000	2,000	2,000	2,000						
2.3 Total length of the shaft					1030,00	[mm]	2.6 The shaft surface (Roughness Ra)			
2.4 X-coordinate of the left support (bearing)	Fixed				20,00	<input checked="" type="radio"/> [mm]	E...Rough machined (3,2)			
2.5 X-coordinate of the right support (bearing)	Free				1020,00	<input type="radio"/> [mm]				

Figura 4.41. Configuración geométrica del eje en el software MITCalc

En la figura 4.42 se establece la geometría de las discontinuidades y los radios de entalle.

Luego se establecen las cargas que se aplican sobre el eje como en la figura 4.43.

Se ingresa las propiedades del material y el tipo de cargas a usar dentro de las celdas que se muestran en la figura 4.44.

La figura 4.45 muestra un resumen de los resultados del cálculo del eje.

3.0 ☒ **Notches and necking-down on the shaft**

3.1 The ultimate tensile strength (S_u , R_m) ☒ [MPa]

3.2 Notch sensitivity factor (q)

3.3 **A. Transverse hole**

X[mm]	d[mm]	β_c	β_b	β_t
		1,00	1,00	1,00
		1,00	1,00	1,00

3.4 **B. Necking-down**

X[mm]	d[mm]	r[mm]	β_c	β_b	β_t
			1,00	1,00	1,00
			1,00	1,00	1,00
			1,00	1,00	1,00

3.5 **C. General notch**

X[mm]	b[mm]	β_c	β_b	β_t
		1,00	1,00	1,00
		1,00	1,00	1,00
		1,00	1,00	1,00
		1,00	1,00	1,00
		1,00	1,00	1,00

3.6 **D. Rounding between cylindrical sections of the shaft**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β_c	1,80	1,70	1,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
β_b	1,68	1,62	1,59	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
β_t	1,34	1,30	1,28	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Figura 4.42. Configuración geométrica de discontinuidades del eje en el software MITCalc

4.0 ☒ **Loading of the shaft**

4.1 Loading

	X	Fx	F	alfa	Mt	Mb	alfa	Q	b	alfa
	[mm]	[N]	[N]	[°]	[Nm]	[Nm]	[°]	[N/mm]	[mm]	[°]
1	220,00		-20000,0	0	2000,00					
2	820,00		-10000,0	90	-2000,00	1200,00				

Figura 4.43. Configuración de cargas del eje en el software MITCalc

6.0 ☒ **Material and the type of loading**

6.1 Shaft material (Ultimate tensile strength min-max)
 A...Structural steel (B50 - 700) 385 [MPa]

6.2 Ultimate tensile strength S_u/R_m 380 [MPa] ☐

6.3 Yield strength in tension S_y/Re 210 [MPa]

6.4 Yield strength in bending S_{yb}/Re_b 287 [MPa]

6.5 Yield strength in shear S_{ys}/Re_s 154 [MPa]

6.6 **For reversed loading**

6.7 Fatigue limit - tension-press σ_C 144 [MPa]

6.8 Fatigue limit - bending σ_{eC} 186 [MPa]

6.9 Fatigue limit - torsion τ_C 133 [MPa]

6.10 **For cyclic loading**

6.11 Fatigue limit - tension-press σ_{hC} 217 [MPa]

6.12 Fatigue limit - bending σ_{ehC} 279 [MPa]

6.13 Fatigue limit - torsion τ_{hC} 153 [MPa]

6.14 Specific mass R_o 7850,0 [kg/m³]

6.15 Modulus of elasticity in tensi E 210000 [MPa]

6.16 Modulus of elasticity in shea G 80000 [MPa]

6.17 Dead load No

6.18 Max. displayed coefficient of safety 20

6.19 Stress ratio factor α_0 0,70 ☒

6.20 **Coefficient of maximum loading**

6.21 Bending 1,70

6.22 Radial load 1,70

6.23 Torsion 1,70

6.24 Tension/Compression 1,70

6.25 **Loading conditions**

6.26 Loading from bending moment C...Reversed

6.27 Loading from radial force A...Static

6.28 Load from torsional moment A...Static

6.29 Loading from tension/pressure force A...Static

6.30 **Dynamic strength check**

6.31 Impact from shaft surface No

6.32 Impact from shaft size No

6.33 Impact from stress concentration (notc) No

Figura 4.44. Selección del material y tipo de cargas del eje en el software MITCalc

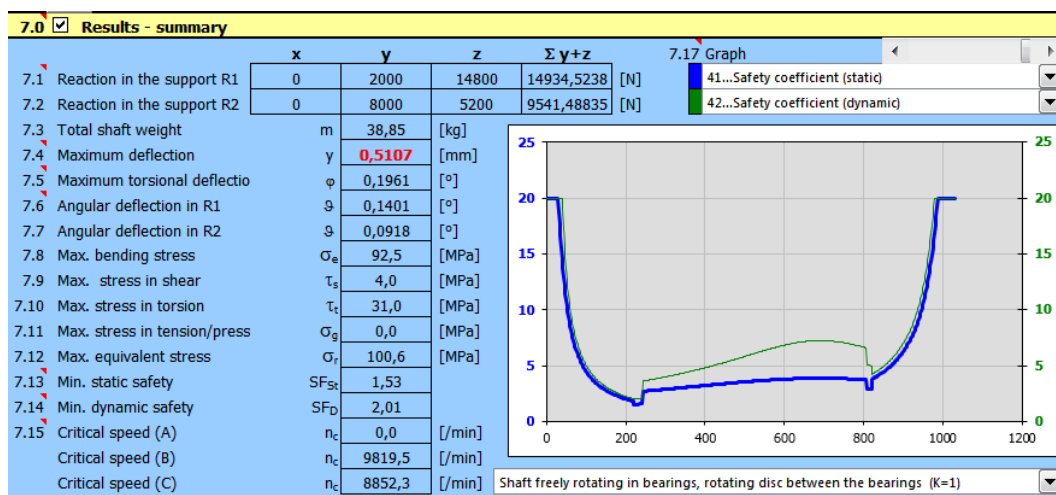


Figura 4.45. Resumen de resultados del dimensionamiento del eje en el software MITCalc

Además el programa muestra los diagramas para cada plano: el plano XZ en color azul, el plano XY en color verde y la suma en color rojo como se muestra en la figura 4.46.

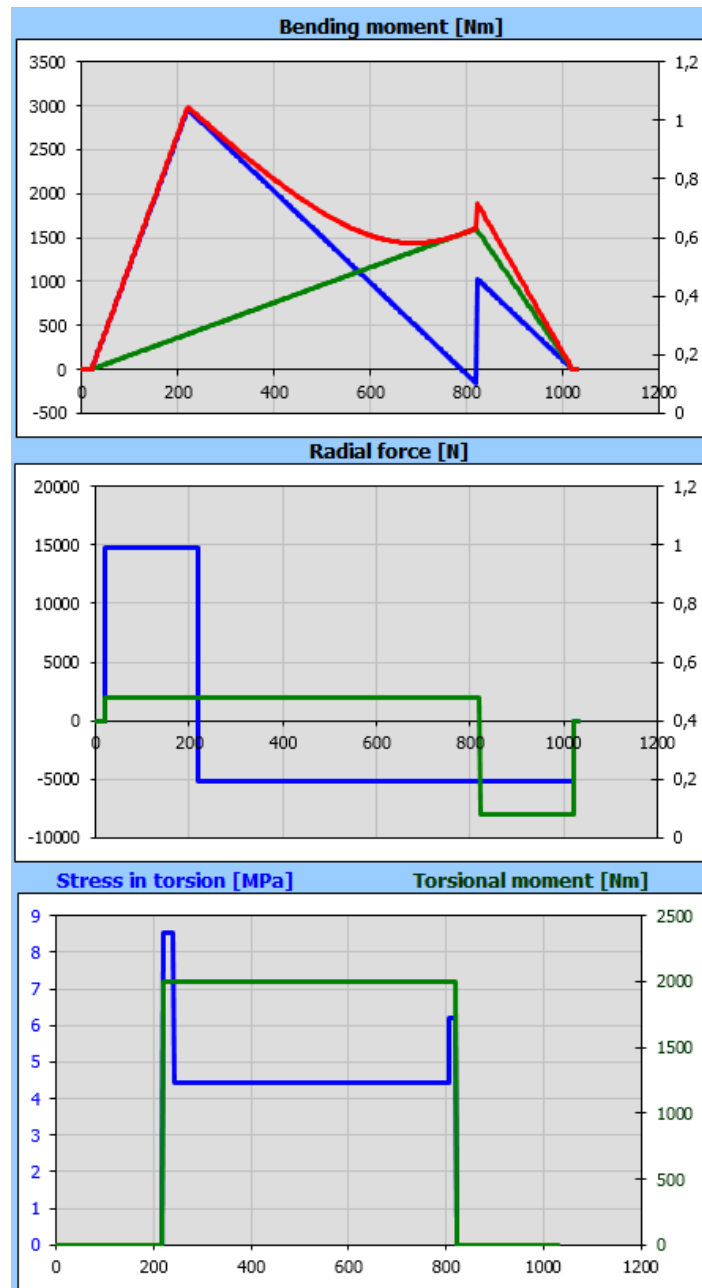


Figura 4.46. Diagramas de momentos y cortante en el software MITCalc

Para una configuración de diseño estático usando material dúctil el diámetro crítico del eje se encuentra alrededor de $d_e = 75$ [mm] y con material frágil $d_e = 104$ [mm].

La tabla 4.7 resume los diámetros que se han calculado usando tanto MITCalc como también Inventor.

Tabla 4.7. Diámetros obtenidos usando MITCalc e Inventor Professional

	Inventor	MITCalc
D. estático m. dúctil	73.90 [mm]	75.00 [mm]
D. estático m. frágil	73.90 [mm]	104.00 [mm]
Diseño dinámico	73.90 [mm]	69.00 [mm]

4.2.2. EVALUACIÓN DEL PROGRAMA EJESDIM

En la evaluación del programa se tomará en cuenta los tres métodos usados: el cálculo manual, el uso del software diseñado y el uso de otros programas de diseño.

A partir de los datos obtenidos como salidas se plantea una comparación estableciendo como el valor verdadero el calculado manualmente que será respecto del cual se calculará el porcentaje de error en el cálculo.

$$e = \frac{|Valor Real - Valor Aproximado|}{Valor Real} \times 100 \% \quad (\text{Ec. 4.1})$$

4.2.2.1. Recopilación de datos y cálculo del error

La ecuación (Ec. 4.1) es la ecuación para el cálculo del error relativo porcentual que se usa junto con los datos extraídos de cada método usado para dimensionar el eje. La tabla 4.8 muestra los diámetros calculados para diseño estático y dinámico además del error respecto al cálculo manual. Los datos tanto de cálculo manual como del software EjesDim corresponden a las teorías y criterios más usados tales como: teoría de la energía de la distorsión para materiales dúctiles, teoría del esfuerzo cortante máximo para materiales frágiles y el criterio de falla a la fatiga de ASME-elíptico.

Tabla 4.8. Comparación de los diámetros obtenidos con respecto al cálculo manual

	Manual	EjesDim		Inventor		MITCalc	
		d [mm]	e [%]	d [mm]	e [%]	d [mm]	e [%]
D. estático m. dúctil	68.88	68.88	0.00	73.90	7.28	75.00	8.88
D. estático m. frágil	94.77	94.76	0.01	73,90	22.02	104.00	9.75
Diseño dinámico	103.25	103.25	0.00	-	-	69.00	33.17

4.2.2.2. Análisis Comparativo

En relación con los cálculos manuales, el programa diseñado se acerca de manera muy precisa a los valores, tanto así que apenas se calcula un porcentaje promedio de error sobre los diámetros menor que el 0.01 %, sin embargo con respecto a los otros programas usados el error asciende a alrededor del 10 % para el programa MITCalc y hasta aproximadamente el 22 % en el software Inventor sólo en diseño estático. Para el diseño dinámico, Inventor no permite calcular el diámetro y MITCalc calcula un diámetro con un error de cerca del 33 %.

Los diámetros calculados en otros programas presentan esos errores quizá debido a que se formularon de manera diferente a la planteada o también debido a consideraciones extra que no se han tomado en cuenta en el diseño del software EjesDim. En todo caso el diámetro calculado por el software EjesDim es muy conservador para el diseño dinámico y no tan conservador para el diseño estático en materiales dúctiles.

Los diagramas de cortante y momentos son idénticos en todos los casos excepto los que da el programa Inventor ya que difieren algunos en gran cantidad. Inventor no sugiere diferentes diámetros en diferentes materiales por lo que se sospecha usa una sola teoría de falla general sobre éste. MITCalc grafica los diagramas de manera invertida, sin embargo se consigue los mismos resultados de las reacciones.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

- Se desarrolló un software llamado EjesDim, que funciona de manera extensiva dentro del software FreeCAD para diseñar ejes de manera precisa.
- Se estudió y analizó la teoría aplicada al diseño de ejes, y se formuló un grupo de ecuaciones basadas en las funciones de singularidad y discontinuidad implementadas en el software EjesDim.
- Se determinó los parámetros que gobiernan el control del software EjesDim para el diseño de ejes.
- Se determinó un procedimiento adecuado para el manejo de los parámetros determinados en el diseño de ejes y se implementó en el software EjesDim de manera que es de fácil comprensión para una persona con conocimientos limitados en el área.
- Se generó los algoritmos que permitieron usar la teoría de diseño de ejes en función de los parámetros determinados.
- Se utilizó lenguaje Python para codificar tanto los algoritmos como también la interfaz gráfica de manera que se creó el programa EjesDim, embebido en el software FreeCAD.
- Del análisis comparativo se concluye que el software EjesDim es una herramienta comparable con el cálculo manual y es de mucha utilidad en el diseño de ejes de sección sólida circular.
- En comparación con otros programas de dimensionamiento de ejes, se encontró que el programa EjesDim difiere en los resultados debido a las diferentes consideraciones que se aplican en cada uno. EjesDim se formuló a partir de los contenidos relativos al diseño de ejes encontrados en la bibliografía.

- Las representaciones visuales de las diferentes partes del software EjesDim aportan con el entendimiento del proceso de dimensionamiento de un eje macizo de sección circular sometido a cargas tanto estáticas como dinámicas.
- La aplicación de las funciones de discontinuidad y singularidad en la determinación de las reacciones y diagramas es ilimitada, en el sentido de que puede adaptarse para la solicitud mecánica requerida.
- El software libre y abierto presenta una gran cantidad de ventajas sobre el software de pago y con código cerrado, en cuanto a libertad de uso, distribución y de acceso al código fuente para crear aplicaciones como la de este proyecto.
- La selección de materiales para el diseño de ejes sometidos a cargas fluctuantes que producen fatiga es un proceso minucioso y es por eso que se han formulado diferentes teorías y criterios para el diseño de ejes.

5.2. RECOMENDACIONES

- A pesar de que el programa EjesDim tiene una gran precisión respecto a los cálculos manuales, se debe tomar en cuenta que lo que el programa da como resultado es un grupo de dimensiones recomendadas que el diseñador debe saber valorar con su criterio ingenieril.
- El programa EjesDim posee un módulo de iteración manual donde el usuario debe considerar usarlo varias veces hasta coincidir con el diámetro óptimo.
- Los parámetros utilizados en el diseño de ejes están limitados por las ecuaciones extraídas de la bibliografía, es probable que el usuario requiera un diseño de ejes más detallado por lo que el diseñador deberá proveer la información extra que necesite para elaborar el diseño.
- El software EjesDim presenta varios recursos gráficos que pueden usarse de manera didáctica en las cátedras que involucren el diseño de ejes en su contenido.
- Se recomienda al usuario aprovechar el hecho de que el software EjesDim posee su código abierto y permite usar los módulos codificados de manera independiente sin el pago de ningún costo.

5.3. TRABAJOS FUTUROS

- Las consideraciones para la deflexión son tan importantes como la determinación del diámetro crítico de un eje debido a que una gran deflexión podría afectar el desempeño de otros elementos de máquinas conjugados con el mismo. Como un trabajo futuro se podría implementar un módulo que prevea lo mencionado.
- Existe una gran variedad de intensificadores de esfuerzos que pueden encontrarse en el diseño de ejes, el programa EjesDim puede extenderse agregando más definiciones de dichas discontinuidades en su código de programación para que permita dimensionar ejes con dichas características.
- El software EjesDim podría permitir al usuario guardar y cargar el estado de cálculo del diseño de un eje y exportar un informe respecto a los cálculos realizados. Todo esto se podría implementar como un trabajo futuro.

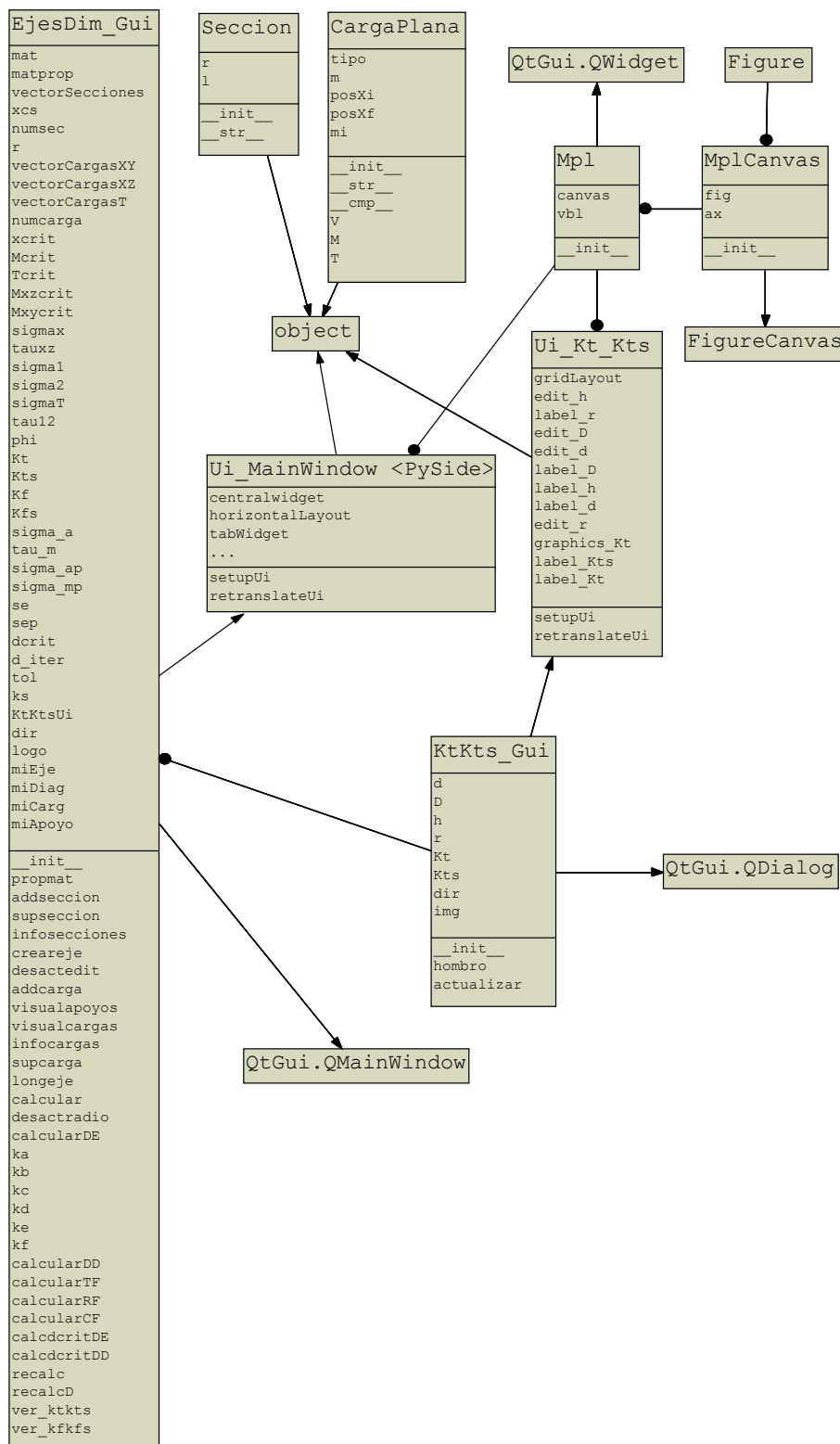
BIBLIOGRAFÍA

- Autodesk. (2015). *Cad software*. <http://www.autodesk.com/solutions/cad-software>.
- Becerra, A. (2009). *Introducción a la programación con python*. PUJ Cali.
- Bedford, A. y. F. W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. Addison Wesley.
- Bittencourt, M. (2015). *Computational solid mechanics, variational formulation and high order approximation*. CRC Press.
- Budynas, R., y Nisbett, J. (2012). *Diseño en ingeniería mecánica de shigley, novena edición*. McGraw-Hill.
- Codecademy. (2015). *Clases*. <https://www.codecademy.com/courses/python-intermediate-en-xef6m/0/1>.
- Covantec. (2014). *Tipos de datos básicos y variables python*. <http://entrenamiento-python-basico.readthedocs.org/es/latest/leccion3/>.
- freecadweb.org. (2014). *Introduction to python*. http://www.freecadweb.org/wiki/index.php?title=Introduction_to_Python.
- freecadweb.org. (2015a). *About freecad*. http://www.freecadweb.org/wiki/?title=About_FreeCAD.
- freecadweb.org. (2015b). *Features*. http://freecadweb.org/wiki/index.php?title=Feature_list.
- freecadweb.org. (2015c). *Part module*. http://freecadweb.org/wiki/index.php?title=Part_Module/es.
- freecadweb.org. (2015d). *Power users hub*. http://freecadweb.org/wiki/index.php?title=Power_users_hub.
- freecadweb.org. (2015e). *Power users hub*. http://freecadweb.org/wiki/index.php?title=Topological_data_scripting.
- freecadweb.org. (2015f). *Pyside*. <http://www.freecadweb.org/wiki/index.php?title=PySide>.
- freecadweb.org. (2015g). *Workbenches*. <http://freecadweb.org/wiki/index.php?title=Workbenches/es>.
- Greiner, J. (2012a). *Documentation*. <http://www.codeskulptor.org/docs.html#tabs-Python>.
- Greiner, J. (2012b). *Functions & methods*. <http://www.codeskulptor.org/docs.html#def-return>.
- Greiner, J. (2012c). *Types*. <http://www.codeskulptor.org/docs.html#types>.

- Hibbeler, R. (2006). *Mecánica de materiales, sexta edición*. Pearson.
- Juvinall, R., y Marshek, K. (2012). *Fundamentals of machine component design, fifth edition*. Wiley.
- matplotlib development team, T. (2015). *Introduction*. <http://matplotlib.org/index.html>.
- Mott, R. (2006). *Diseño de elementos de máquinas, cuarta edición*. Pearson.
- NumPy. (2013). *Numpy*. <http://www.numpy.org/>.
- Oberg, E., Jones, F., Horton, H., y Ryffel, H. (2012). *Machinery's handbook, 29th edition*. Industrial Press.
- Pilkey, W. (2005). *Formulas for stress, strain, and structural matrices, second edition*. Wiley.
- python.org. (2015a). *General python faq*. <https://docs.python.org/2/faq/general.html>.
- python.org. (2015b). *Graphic user interface faq*. <https://docs.python.org/2/faq/gui.html?highlight=gui>.
- python.org. (2015c). *Lexical analysis*. https://docs.python.org/2/reference/lexical_analysis.html.
- python.org. (2015d). *The python language reference*. <https://docs.python.org/2/reference/index.html>.
- python.org. (2015e). *The python tutorial*. <https://docs.python.org/2/tutorial/index.html>.
- Qt. (2015). *PySide faq*. https://wiki.qt.io/PySide_FAQ.
- thepythonguru.com. (2015). *Getting started with python*. <http://thepythonguru.com/getting-started-with-python/>.
- Velastegui, T. (2013). *Elementos de máquinas*. EPN.

ANEXOS

ANEXO A. Diagrama UML (Unified Modeling Language)



ANEXO B. Deducción de las ecuaciones para el cálculo de las reacciones en los apoyos

Partiendo de la premisa que el valor del cortante, del momento flector y torsor toman el valor de cero tanto al inicio como al fin de la viga las ecuaciones de cortante y momento flector, usando las funciones de singularidad para $V(l) = 0$ y $x = l$ (donde l es la longitud total de la viga) son:

$$\begin{aligned}
 V(l) = 0 = & -m_{w_1}(l - Xi_{w_1}) + m_{w_1}(l - Xf_{w_1}) + m_{P_1} - \mathbf{m}_{R_1} - mi_{w_2}(l - Xi_{w_2}) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xi_{w_2})^2 + m_{w_2}(l - Xf_{w_2}) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xf_{w_2})^2 - \mathbf{m}_{R_2} - m_{P_2} \quad (\text{Ec. B.1})
 \end{aligned}$$

Y para $M(l) = 0$ en $x = l$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 M(l) = 0 = & -\frac{1}{2}m_{w_1}(l - Xi_{w_1})^2 + \frac{1}{2}m_{w_1}(l - Xf_{w_1})^2 + m_{P_1}(l - X_{P_1}) \\
 & - \mathbf{m}_{R_1}(l - X_{R_1}) - m_M - \frac{1}{2}mi_{w_2}(l - Xi_{w_2})^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xi_{w_2})^3 \\
 & + \frac{1}{2}m_{w_2}(l - Xf_{w_2})^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xf_{w_2})^3 - \mathbf{m}_{R_2}(l - X_{R_2}) - m_{P_2}(l - X_{P_2}) \\
 & \quad \quad \quad (\text{Ec. B.2})
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones Ec. B.1 y Ec. B.2 poseen la mayoría de sus términos conocidos por lo que se pueden agrupar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 K1 = & -m_{w_1}(l - Xi_{w_1}) + m_{w_1}(l - Xf_{w_1}) + m_{P_1} - mi_{w_2}(l - Xi_{w_2}) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xi_{w_2})^2 + m_{w_2}(l - Xf_{w_2}) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}} \right) (l - Xf_{w_2})^2 - m_{P_2} \quad (\text{Ec. B.3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K2 = & -\frac{1}{2}m_{w_1}(l - Xi_{w_1})^2 + \frac{1}{2}m_{w_1}(l - Xf_{w_1})^2 + m_{P_1}(l - X_{P_1}) \\
& - m_M - \frac{1}{2}mi_{w_2}(l - Xi_{w_2})^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}}\right)(l - Xi_{w_2})^3 \\
& + \frac{1}{2}m_{w_2}(l - Xf_{w_2})^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{m_{w_2} - mi_{w_2}}{Xf_{w_2} - Xi_{w_2}}\right)(l - Xf_{w_2})^3 - m_{P_2}(l - X_{P_2}) \quad (\text{Ec. B.4})
\end{aligned}$$

K1 representa las funciones de singularidad para cortante de todas las cargas evaluadas en $x = l$ exceptuando a las reacciones; y K2 de igual forma pero para momento flector. De esto las ecuaciones Ec. B.1 y Ec. B.2 ahora son:

$$V(l) = 0 = -\mathbf{m}_{R_1} - \mathbf{m}_{R_2} + K1 \quad (\text{Ec. B.5})$$

$$M(l) = 0 = -\mathbf{m}_{R_1}(l - X_{R_1}) - \mathbf{m}_{R_2}(l - X_{R_2}) + K2 \quad (\text{Ec. B.6})$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones con dos incógnitas cuyo resultado da el valor de la magnitud de las reacciones en los apoyos incluido el signo.

$$\mathbf{m}_{R_1} = \frac{K1(l - X_{R_2}) - K2}{X_{R_1} - X_{R_2}} \quad (\text{Ec. B.7})$$

$$\mathbf{m}_{R_2} = K1 - \mathbf{m}_{R_1} \quad (\text{Ec. B.8})$$

ANEXO C. Guía Rápida de Uso del Software EjesDim



Edgar Alexis Martínez S.
Febrero, 2016

EJESDIM

LA HERRAMIENTA MÁS EFECTIVA PARA EL DISEÑO
DE EJES SOMETIDOS A CARGAS TANTO ESTÁTICAS
COMO DINÁMICAS.

EjesDim está diseñado para que el usuario se permita fácilmente diseñar ejes sometidos a cargas tanto estáticas como dinámicas, sin necesidad de tener que disponer de tanto tiempo para hacerlo.



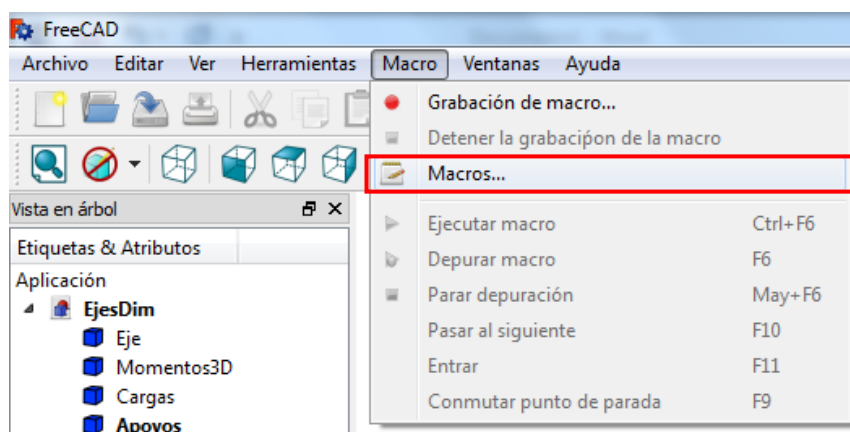
PASOS PARA INSTALAR E INICIAR EJESDIM

1. Asegúrate de tener mínimo la versión 0.14 del software FreeCAD instalada verificando en la ventana “acerca de...” del menú “Ayuda” de FreeCAD.

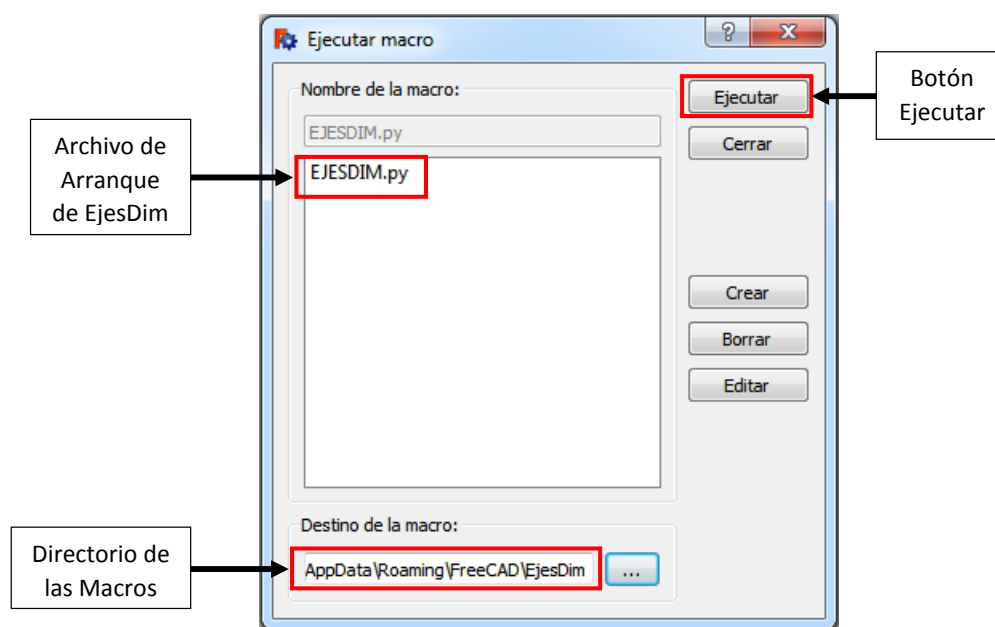
Versión de
FreeCAD



2. En el menú “Macro” del programa FreeCAD se despliegan varias opciones entre las cuales se encuentra el botón “Macros...” que abre un formulario que presenta en la parte inferior un campo con el “Destino de la macro:”, ese es el directorio donde podemos añadir la carpeta con el programa EjesDim.



3. Dentro del mismo formulario actualizamos el directorio a la carpeta del programa EjesDim, dentro de esta se selecciona el archivo "EJESDIM.py" que es el que arranca el programa y le damos en el botón ejecutar.



4. Luego de ejecutar la macro se despliega la pantalla de arranque del programa EjesDim, la primera vez que arranca el programa tarda unos segundos hasta cargar todos los componentes.

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

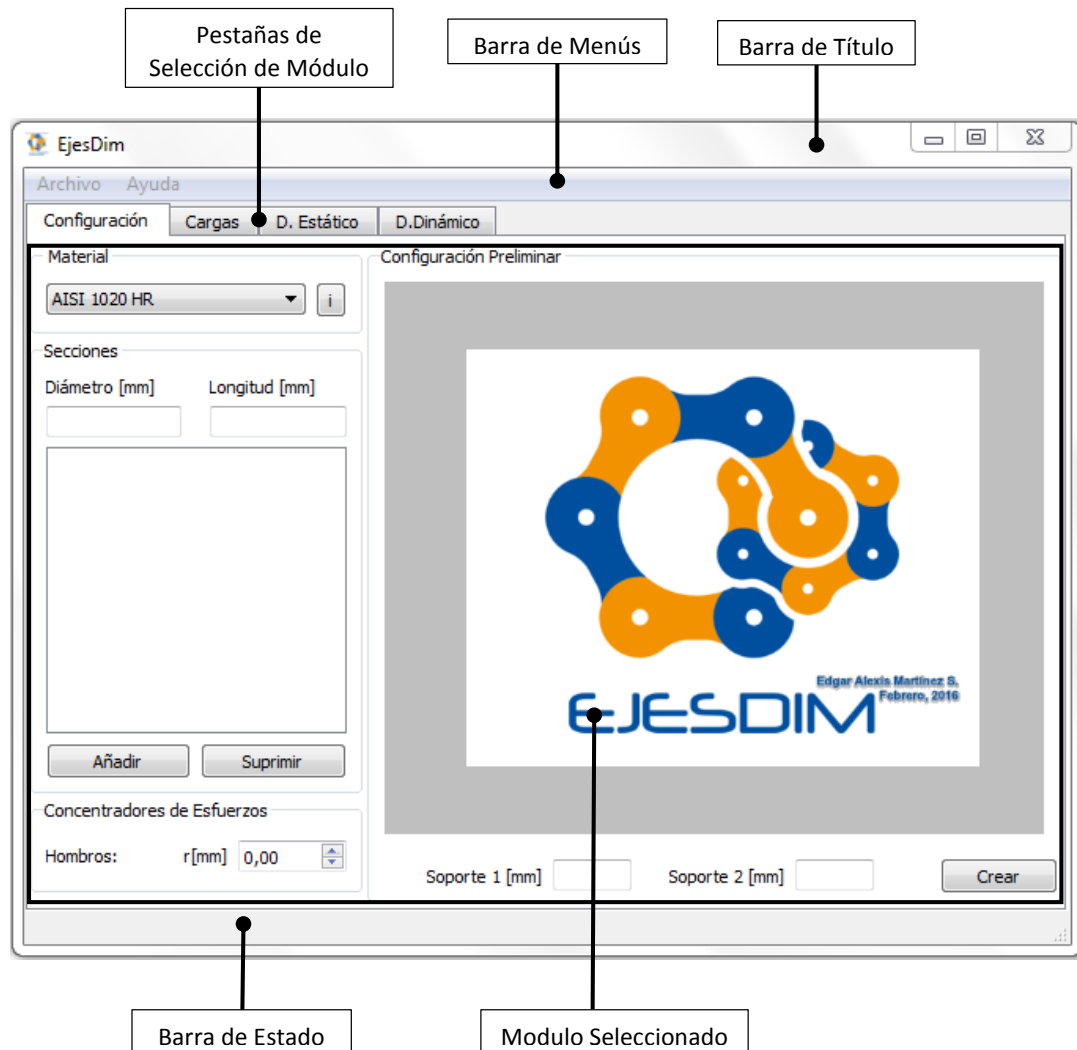


Edgar Alexis Martínez S.
Febrero, 2016

EJESDIM

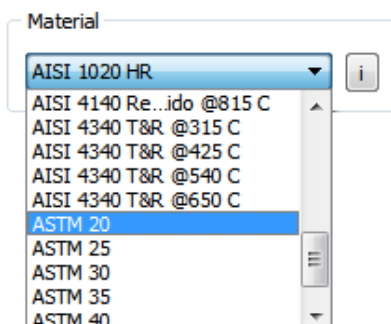
PANTALLA PRINCIPAL DE EJESDIM

5. Componentes principales de la pantalla principal del software EjesDim:

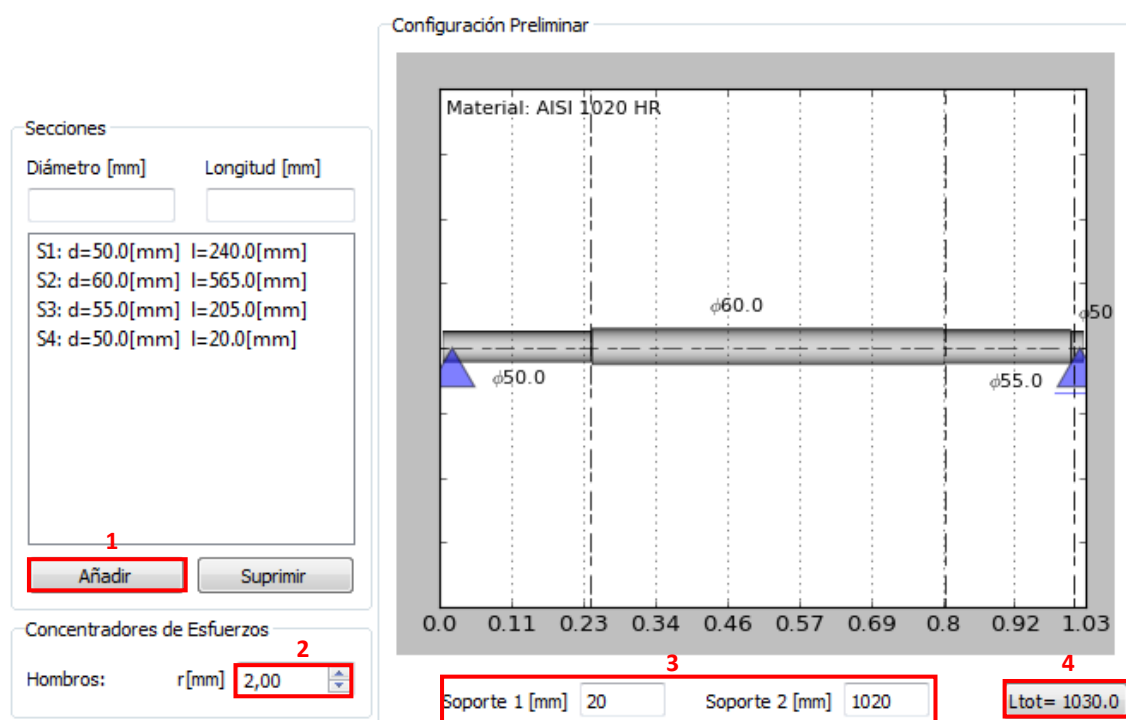


DISEÑE UN EJE EN POCOS PASOS

1. Seleccione el material del eje, visualice las propiedades con el botón “i”:



2. Configure la geometría del eje añadiendo secciones, los radios de entalle en el cambio de secciones y la ubicación de los apoyos del mismo, y obtenga una configuración preliminar del eje.



3. Establezca las cargas a las que se somete el eje con su magnitud y ubicación y obtenga tanto las reacciones en los apoyos como también los diagramas de cortantes y momentos en los planos y el total junto al de momentos torsores.

Cargas

Tipo **1** Angulo [°] 0,00

Mi [N] M [Nm] Xi[mm] Xf[mm]

0 1030,0

CARGAS DE FLEXION:

Fuerza Concentrada
M= -20000.0 ang= 0.0 Mi= 0.0
XY: m= -20000.0 Xi=0.22[m]
XZ: m= -0.0 Xi=0.22[m]

Fuerza Concentrada
M= -10000.0 ang= 90.0 Mi= 0.0
XY: m= -0.0 Xi=0.82[m]
XZ: m= -10000.0 Xi=0.82[m]

Momento Flector
M= 1200.0 ang= 0.0 Mi= 0.0
XY: m= 1200.0 Xi=0.82[m]
XZ: m= 0.0 Xi=0.82[m]

CARGAS DE TORSION:

Momento Torsor
T: m= 2000.0 Xi=0.22[m]

Momento Torsor
T: m= -2000.0 Xi=0.82[m]

Añadir **Suprimir**

Reacciones

RXY1: 14800.0[N] RXY2: 5200.0[N]

RXZ1: 2000.0[N] RXZ2: 8000.0[N]

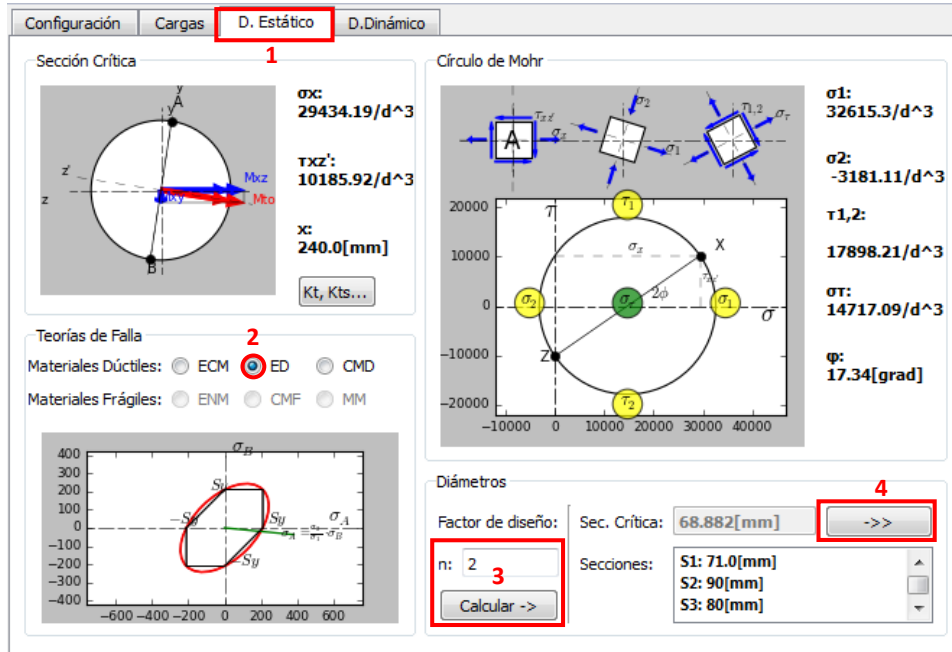
Diagramas

Fuerza Cortante vs X

Momento Flector vs X

2 Plano XY ☒ Plano XZ ☐ Torsión/Total ☐ **3** **Calcular**

4. Seleccione la pestaña de diseño estático y escoja una teoría de falla, posteriormente determine un factor de diseño para el diseño y calcule los diámetros con el botón “Calcular ->” y establezca los diámetros de las secciones en el sólido con “->>”.



5. Para el diseño dinámico hay que ir a la pestaña correspondiente y completar los parámetros requeridos para calcular los coeficientes modificadores de la resistencia a la fatiga, luego seleccione el criterio de falla deseado, llene el cuadro con un factor de diseño y permita que el programa calcule los diámetros de las secciones. El botón “Iterar” establece el diámetro calculado en el sólido y recalcula un diámetro nuevo a partir del anterior. (Esta característica también funciona para el diseño estático con materiales frágiles usando el botón “->>”)

Esfuerzos Fluctuantes

σ_a : **52028.07/d³**
 σ_m : **0**
 τ_a : **0**
 τ_m : **15160.57/d³**
 [Kf, Kfs...]

Criterios de Falla a la Fatiga

☒ ED-Goodman
 ☐ ED-Gerber
 ☐ ED-Soderberg
 ☐ ED-ASME

σ'_a : **52028.07/d³**
 σ'_m : **8752.96/d³**

Resistencia a la Fatiga

S_e : **190.0[MPa]**
 S_{ut} : **380.0[MPa]**

Coefficientes de Marin: **1**
 [ka] [kb] [kc] [kd] [ke] [kf]
 0.934 0.816 1.0 1.0 0.753 1.0
 $S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot S_e'$ **S_e : 109.07[MPa]**

Diámetros

Factor de diseño: Sec. Crítica: **100.003[mm]** **4** Iterar

n: **2** **3** **Calcular ->**

Secciones: **S1: 106.0[mm]**
S2: 132.0[mm]
S3: 118.0[mm]

ACERCA DE EJESDIM

EjesDim es un software creado como un proyecto de tesis previo a la obtención del título de Ingeniero Mecánico de la Escuela Politécnica Nacional en Quito, Ecuador de su desarrollador. El programa facilita el diseño de Ejes de sección circular sometidos tanto a cargas estáticas como dinámicas.

Autor: Edgar Alexis Martínez S.

Versión: 1.0.0

Fecha de Versión: 2016-02