Projet de recherche

LUCAS Alexis

25 novembre 2025

1 État de l'art et résumé des travaux

La théorie des modules de Drinfeld, introduits par ce dernier [15] en 1974, a connu de nombreuses avancées les 20 dernières années et permis une nouvelle compréhension arithmétique des corps de fonctions globaux.

Commençons par rappeler quelques points importants du cas des corps de nombres, qui ont guidé les mathématiciens, par analogie, pour le cas des corps de fonctions.

Vaste généralisation des valeurs spéciales étudiées par Euler, des fonctions zêta sont introduites pour les corps de nombres, appelées fonctions zêta de Dedekind, et plus généralement des fonctions L. Des formules du nombre de classes relient ces fonctions aux informations arithmétiques du corps, comme par exemple la formule des classe de Dedekind, voir [21, Chapitre 7, Section 5]

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_K}{w_L\sqrt{|D_K|}}h_K.$$

Dans la contexte des corps de fonctions, soit θ une indéterminée, $A=\mathbb{F}_q[\theta]$ et $K=\mathbb{F}_q(\theta)$. Fixons L/K une extension finie, d'anneau des entiers noté $\mathscr{O}_L$. En 2010, Taelman [24] a introduit la notion de série L associée à un module de Drinfeld ϕ comme un produit eulérien

$$L(\phi,\mathscr{O}_L) = \prod_Q \frac{Q^{[L:K]}}{g_{Q,E(1)}}$$

où le produit porte sur l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de A et $g_{Q,E}(1)\in A$ est un certain générateur d'un idéal de Fitting. Notons $z_Q(\phi,\mathscr{O}_L)$ le facteur local en Q. Taelman a démontré [25, Theorem 1] une formule des classes

$$L(\phi,\mathscr{O}_L) = R(U(\phi;\mathscr{O}_L))[H(\phi;\mathscr{O}_L)]_A$$

où $U(\phi;\mathscr{O}_L)$ est le module des unités de Taelman, $R(U(\phi;\mathscr{O}_L))$ le régulateur associé (un déterminant d'unités, analogue du groupe des unités des corps de nombres) et $H(\phi;\mathscr{O}_L)$ est le module des classes associé à ϕ, dont $[H(\phi;\mathscr{O}_L)]_A$ joue le rôle du nombre des classes des corps de nombres. Depuis son travail fondateur, des développements ont été effectués dans plusieurs directions, et en particulier dans le cadre des t-modules d'Anderson introduits par ce dernier dans [1], qui sont une généralisation en dimension supérieure des modules de Drinfeld.

Anglès et Tavares Ribeiro [6] introduisent la notion de z-déformation d'un module d'Anderson E, permettant de voir les séries $L(E,\mathscr{O}_L)$ précédemment construites comme des valeurs en $z=1$ de fonctions L, notées $L(E,\mathscr{O}_L,z)$. Finalement, Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro [4] prouvent une formule de classe dans le cas où l'anneau A est "général" et E est un module d'Anderson "admissible", incluant en particulier tous les modules de Drinfeld ou les modules abéliens.

Retournons aux corps des nombres. Des analogues p-adiques des fonctions L sont construits et étudiés, appelés fonctions L p-adiques, et ces fonctions donnent de manière inattendue plus d'information arithmétiques que les fonctions L, comme par exemple par la formule analytique p-adique du nombre de classes de Colmez [13]

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{p,F}(s) = \prod_{\mathfrak{P}|p}\left(1-\frac{1}{N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})}\right)\frac{2^{[F:\mathbb{Q}]-1}R_{p,F}}{\sqrt{D_F}}h_F$$

où F est une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$, le produit porte sur les idéaux maximaux de $\mathscr{O}_F$ divisant p et $R_{p,F}$ est un certain régulateur p-adique associé à l'extension.

Suite aux nombreuses analogies corps de nombres corps de fonctions, on veut construire des analogues P-adiques aux fonctions L de Anglès-Ngo Dac-Tavares Ribeiro, appelées fonctions L P-adiques, dont les propriétés analytiques donneraient des informations arithmétiques, ou géométriques, via des formules des classes P-adiques. Cela a été l'objectif principal de mes travaux.

Durant ma thèse, pour P un polynôme irréductible unitaire de A, j'ai défini la fonction L P-adique $L_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ dans le contexte des t-modules d'Anderson, définie par le produit eulérien suivant

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = \prod_{Q \neq P} z_Q(E, \mathscr{O}_L, z)$$

où le produit porte sur les polynômes irréductible unitaires de A non divisibles par P, et démontré une formule de classe P-adique à la Taelman avec la variable z

$$z_P(E, \mathscr{O}_L, z) L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = R_P(E, \mathscr{O}_L, z)$$

et de même sans la variable z

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, 1) = R_P(E; \mathscr{O}_L)[H(E; \mathscr{O}_L)]_A,$$

où $R_P(U(\widetilde{E}; \widetilde{\mathscr{O}_L}))$ (resp. $R_P(U(E; \mathscr{O}_L))$) est un certain régulateur P-adique défini comme un déterminant de logarithmes P-adiques d'unités. De plus, j'ai démontré que cette fonction est un élement de l'algèbre de Tate suivante

$$\mathbb{T}_z(K_P) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \mid a_n \in K_P, \lim_{n \to +\infty} v_P(a_n) = +\infty \right\},$$

et est même une série entière en la variable z. En particulier, je me suis intéressé à l'annulation en $z = 1$ de cette fonction L et énoncé les deux conjectures suivantes.

Conjecture. *Soit E un t-module d'Anderson défini sur $\mathscr{O}_L$.*

1. *L'annulation en $z = 1$ de la fonction $L_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ ne dépend pas de P.*
2. *L'ordre d'annulation en $z = 1$ de la fonction L ne dépend pas de P.*

J'ai démontré que la fonction L s'annule en $z = 1$ si certaines périodes associées à E vivent dans certains L_u, le complété u adique de L où u est une place de L au dessus de ∞, et seulement conjecturé la réciproque.

Dans le cas des modules de Drinfeld définis sur A, j'ai borné l'ordre d'annulation en $z = 1$ de la série L P-adique en faisant le lien avec certaines périodes du module de Drinfeld.

Depuis trois années, j'ai également entamé une collaboration avec Xavier Caruso et Quentin Gazda, qui a débuté sur l'étude des fonctions L dans le contexte des modules de Drinfeld définis sur A, voir [9]. D'une part, nous avons démontré que l'ordre d'annulation en $z = 1$ de la série L P-adique était indépendant de P et relié à l'élément spécial $u_\phi(z) = \exp_{\widetilde{\phi}}(L(\phi, A, z)) \in A[z]$. Nous avons introduits une famille de modules pour lesquels cet élément spécial est égal à 1, appelés des modules "petits", vérifiant

$$\deg \phi_{\theta,i} < q^i, \forall i = 1, \ldots, r$$

si $\phi_\theta = \theta + \sum_{i=1}^{r} \phi_{\theta,i} \tau^i$.

D'autre part, nous introduisons, pour un premier P de A, la notion d'être de Wieferich en base ϕ, et établissons une connexion surprenante entre cette dernière notion et la valuation P-adique de la valeur spéciale de la série L P-adique $L_P(\phi, A, 1)$. En particulier, nous démontrons l'équivalence suivante :

$$P \text{ est de Wieferich en base } \phi \Leftrightarrow v_P(L_P(\phi, A, 1)) > 0.$$

Ce travail a soulevé des questions complètement analogues aux nombres premiers de Wieferich du cas classique, et particulièrement sur l'existence, ou non, d'une infinité de premiers P de Wieferich dans ce contexte.

Finalement, dans le cas des modules petits, qui fournit un cadre pour faire des études statistiques, nous avons démontré que si l'on fixe P, il existe une infinité de modules de Drinfeld ϕ tels que P est de Wieferich en base ϕ, et une infinité tels que P n'est pas de Wieferich en base ϕ.

2 Projet de recherche

De manière générale, mes centres d'intérêt sont en lien avec la théorie des nombres, et particulièrement les corps de fonctions. Je compte suivre les directions suivantes :

1. Étudier de manière générale les zéros des fonctions L P-adiques dans le contexte des modules d'Anderson : multiplicité et localisation des zéros, formulation d'analogues de conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer pour les t-modules d'Anderson, relations entre différentes fonctions L.
2. Construire des fonctions L v-adiques dans le cas général, c'est à dire pour les A-modules d'Anderson et essayer de comprendre et de mettre en évidence les différences majeures du cas A principal.
3. Complètement comprendre le cas des fonctions zêta P-adiques de Carlitz, ou autrement dit complètement et explicitement étudier les fonctions L P-adiques dans le cas des puissances tensorielles du module de Carlitz $C^{\otimes n}$. En particulier, aborder des hypothèses de Riemann P-adiques énoncées dans le cadre de la caractéristique positive.
4. Introduire des méthodes effectives ainsi que des algorithmes pour conjecturer, étudier et vérifier certains résultats.

1 Extension à une base A générale

1.1 Réduction des études

Dans le cadre plus général des t-modules d'Anderson définis sur $\mathscr{O}_L$, la fonction L n'est en général pas une unité, et les techniques précédentes se sont présentées trop naïves pour étudier ces questions.

C'est dans la continuité de la collaboration avec Xavier Caruso et Quentin Gazda, toujours en cours [11], [10], que nous avons résolu le cas des t-modules d'Anderson définis sur A, c'est à dire étudié l'annulation de la fonction L P-adique $L_P(E, A, z)$ en $z = 1$ ainsi que la valuation de sa valeur spéciale. Dans l'objectif de généraliser ces derniers travaux, commençons par la remarque suivante.

D'une part, en fixant $A = \mathbb{F}_q[\theta]$, il faut considérer des t-modules d'Anderson définis non seulement sur A mais sur des extensions $\mathscr{O}_L$. D'autre part, on veut considérer des anneaux plus généraux que $\mathbb{F}_q[\theta]$ comme anneaux de base, ce qui a de l'importance pour les applications (e.g. à la théorie explicite du corps de classes, modules de Drinfeld-Hayes, etc.), mais cela complique les aspects techniques.

Récemment [10], nous avons établi des outils généraux d'une part de restriction de Weyl pour se ramener au cas $\mathscr{O}_L = A$, et de localisation des motifs d'autre part, qui permettent de ramener le cas A général à celui de base : $A = \mathbb{F}_q[\theta]$.

Pour bien débuter et montrer l'efficacité de ces méthodes, nous les mettons en œuvre pour la formule des classes (classique et v-adique) et, dans la suite, les travaux pourront toujours être étudiés initialement dans le cas où $A = R = \mathbb{F}_q[\theta]$ puis,en appliquant les mêmes techniques, le cas général devrait suivre.

1.2 Formule des classes v-adique

Soit $K/\mathbb{F}_q$ un corps de fonctions global, ∞ une place fixée (dite à l'infini), A l'anneau des fonctions régulières hors de ∞, v une place finie de K et E un A-module d'Anderson. On aimerait alors étendre les constructions de l'auteur [20], qui correspondent au cas $K = \mathbb{F}_q(\theta)$ et $\infty = \dfrac{1}{\theta}$.

Dans un travail en commun actuel avec Xavier Caruso et Quentin Gazda [10], nous avons démontré une formule des classes dans le cas où A est un anneau général, sans aucune hypothèse "d'admissibilité" à la Anglès-Ngo Dac-Tavares Ribeiro, sur le module d'Anderson. Un projet accessible serait alors, à partir de cette dernière construction, de construire la fonction L v-adique et de démontrer une formule des classes v-adique.

En particulier, les étapes à considérer seraient les suivantes, en adaptant les idées de [20], tout en appliquant les techniques de [10] pour réduire les questions suivantes au cas $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ et des t-modules définis sur A.

Problème 1. *Soit E un A-module d'Anderson définit sur $\mathscr{O}_L$.*

1. *Etudier la converge v-adique de $\exp_{E,v}$ et $\log_{E,v}$. En particulier, montrer que $\log_{E,v}$ converge sur*
$$\{x \in \mathbb{C}_v \mid v(x) > 0\}.$$
2. *Construire, à partir de la formule des classes de la fonction L, ainsi que du concept de z-déformation, la fonction L v-adique $L_v(E, \mathscr{O}_L, z)$ "formellement".*
3. *Via une étude v-adique des unités de Stark et des unités de Taelman z-déformées, démontrer que cette fonction est sans pôle et entière.*
4. *Introduire le régulateur v-adique $R_v(U(\widetilde{E}; \mathscr{O}_L[z]))$ des unités de Taelman pour A général, et démontrer une formule de classes v-adique à la Taelman*
$$L_v(E, \mathscr{O}_L, z)z_v(E, \mathscr{O}_L, z) = R_v(U(\widetilde{E}, \mathscr{O}_L[z])).$$

2 Étude des zéros et des valeurs spéciales des fonctions L P-adiques

Cette partie se consacre à l'étude des fonctions L P-adiques des t-modules d'Anderson dans le cas $A = \mathbb{F}_q[\theta]$, en particulier les zéros ainsi que les valeurs spéciales.

2.1 Étude des zéros de la fonction L P-adique

La fonction $L_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ d'un t-module d'Anderson étant une fonction entière, j'aimerais étudier ses zéros de manière générale. Supposons, d'après l'étape de réduction, que $L = K$.

Dans ce cas, dans le projet [11], nous avons complètement relié l'ordre d'annulation en $z = 1$ et en $z = \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_q$ de $L_P(E, A, z)$ à certains sous-modules du réseau des périodes, ce que l'on peut voir comme un équivalent des conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer pour les t-modules d'Anderson, comme suit. Soit $R_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{F}_{q^{p^n}}((\frac{1}{\theta}))$ la $\mathbb{Z}_p$-extension maximale non ramifiée de K_∞, et soient

$$\Omega_d = \{x \in \mathrm{Lie}_E(R_\infty) \mid \exp_E(x) = 0\}, \ \overline{\Omega}_d = \left\{x \in \mathrm{Lie}_E\left(\overline{\mathbb{F}}_q((\theta^{-1}))\right) \mid \exp_E(x) = 0\right\}$$

deux sous A-modules du réseau des périodes de E.

Théorème (Caruso, Gazda, L, 2025)**.** *Sous une forme z-déformée de la conjecture de Leopoldt, nous avons*

1. $$\mathrm{ord}_{z=1} L_P(E, A, z) = \mathrm{rank}_A \Omega_d,$$
2. $$\sum_{\gamma\in\overline{\mathbb{F}}_q} \mathrm{ord}_{z=\gamma} L_P(E, A, z) = \mathrm{rank}_A \overline{\Omega}_d.$$

En remontant alors face à la restriction de Weyl, nous obtenons en particulier, sous cette conjecture de Leopoldt, la formule générale suivante :

$$\mathrm{ord}_{z=1} L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = \mathrm{rank}_A \{x \in \mathrm{Lie}_E(L \otimes_K R_\infty) \mid \exp_E(x) = 0\}. \quad (1)$$

Un premier projet à long terme est justement l'étude de cette conjecture de Leopoldt z-déformée, qui est une généralisation de la conjecture de Leopoldt énoncée dans [20]. Elle compare le A-rang et le

A_P-rang de familles d'unités, de manière analogue au cas classique, de la manière suivante. On dénote par h un certain entier assez grand, $V(E;A) = \exp_E U(E;A) \subseteq E(A)$ ainsi que $V^{\mathrm{sat}}(E;A)$ l'évaluation en $z=1$ d'une certaine "$(z-1)$-saturation" de $\exp_{\widetilde{E}} U(\widetilde{E};A[z])$.

Conjecture (Conjectures de Leopoldt faibles et fortes)**.** *Soit E un t-module d'Anderson défini sur A.*

1. *L'application $A_P \otimes_A g_{P,E}(1)V(E;A) \to E(P^h A_P)$ est injective (conjecture faible).*
2. *L'application $A_P \otimes_A g_{P,E}(1)V^{\mathrm{sat}}(E;A) \to E(P^h A_P)$ est injective (conjecture forte).*

Remarquons que ces conjectures sont vraies dans le cas $d=1$ et $L=K$, et d'après [20] la conjecture de Leopoldt faible est équivalente au fait que l'annulation en $z=1$ de la fonction L P-adique ne dépend pas de P.

Une première approche, pour démontrer les conjectures de Leopoldt, est via les outils de transcendance à l'image du cas classique. Mais de manière surprenante (voir par exemple la Section 3), l'introduction de cette variable z, complètement inexistante pour les corps de nombres, semble permettre d'aborder ces conjectures de manière purement algébrique. Il s'est avéré que la connaissance suffisante du comportement du module des classes $H(\widetilde{E};A[z])$ permette de démontrer les conjectures de Leopoldt, via les questions suivantes.

Problème 2. *Pour tout n assez grand, notons $E_n = \left(P^{q^n}\right)^{-1} E P^{q^n}$ le t-module défini sur A.*

1. *Montrer que pour tout n assez grand, $\left[\mathrm{ev}_{z=1} H\left(\widetilde{E_n};A[z]\right)\right]_A$ ne dépend pas de n.*
2. *Montrer que pour tout n assez grand, $\left[\mathrm{ev}_{z=1} H^{\mathrm{sat}}\left(\widetilde{E_n};A[z]\right)\right]_A$ ne dépend pas de n.*

Une question naturelle est ensuite celle des autres zéros de la fonction L P-adique $L_P(E,A,z)$ et non seulement les zéros dans $\overline{\mathbb{F}}_q$. En particulier, on voudrait répondre à la question ouverte suivante, en essayant de reprendre les techniques du cas de l'évaluation en $z=\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_q$.

Problème 3. *Donner une interprétation des zéros de la fonction L P-adique. En particulier, que peut-on dire des vivant dans K et dans $\overline{K}$?*

j'aimerais ensuite m'intéresser, dans un projet à plus long terme, toujours en lien avec les zéros des fonctions L P-adiques, aux questions suivantes inspirées par [18].

Problème 4. *Notons K_P le complété de K pour la place P, et soit E un t-module d'Anderson définit sur A.*

1. *Existe-t-il une extension finie $K_{E,P}$ de K_P telle que tous les zéros de la fonction L P-adique vivent dans $K_{E,P}$?*
2. *Dans le cas d'une réponse positive à la question précédente, notons $d_{E,P}$ le degré de l'extension $K_{E,P}/K_P$. Peut-on donner une borne uniforme (par rapport à P) aux $d_{E,P}$? Et si on fixe P et qu'on fait varier les t-modules E, comment varie $d_{E,P}$?*

2.2 Extension du domaine de définition

En lien avec les questions précédentes, on aimerait pouvoir, sans passer par la restriction de Weyl qui augmente la dimension, pouvoir cette fois étudier des modules de Drinfeld définis sur des anneaux d'entiers $\mathscr{O}_L$ en se ramenant à l'étude de plusieurs modules de Drinfeld définis sur des anneaux d'entiers $\mathscr{O}_F \subset \mathscr{O}_L$, avec pour objectif de réduire au cas $\mathscr{O}_F = A$, auquel cas toutes les questions précédemment évoquées sont résolues. Cela amène à la question ouverte suivante.

Problème 5. *Caractériser les modules de Drinfeld $\phi : A \to \mathscr{O}_L\{\tau\}$ tels qu'il existe une famille de modules de Drinfeld $\phi_i : A \to A\{\tau\}$ vérifiant pour tout P*

$$L_P(\phi, \mathscr{O}_L, z) = \prod_{i=1}^{n} L_P(\phi_i, A, z).$$

Une première étape serait de considérer la situation "inverse" suivante, qui semble plus abordable avec des stratégies déjà établies dans le cas des corps de nombres. Soit ϕ un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_L$, et soit M/L une extension finie d'anneau des entiers (sur A) notée $\mathscr{O}_M$, en particulier $\mathscr{O}_L \subseteq \mathscr{O}_M$. On peut alors considérer ϕ comme un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_M$, et se demander quels sont les liens entre $L_P(\phi, \mathscr{O}_L, z)$ et $L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z)$. Une première question naturelle est la suivante.

Problème 6. *Montrer que $L_P(\phi, \mathscr{O}_L, z)$ divise $L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z)$ dans $\mathbb{T}_z(K_P)$.*

Suite à des calculs avec le module de Carlitz défini sur des extensions cyclotomiques, on peut énoncer le problème suivant dans le cas galoisien.

Problème 7. *Soit M/L une extension galoisienne finie de degré n, et ϕ un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_L$. Montrer qu'il existe une famille $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de A-modules de Drinfeld définis sur $\mathscr{O}_L$, avec $\phi_1 = \phi$, vérifiant pour tout polynôme irréductible unitaire P*

$$L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z) = \prod_{i=1}^{n} L_P(\phi_i, \mathscr{O}_L, z). \tag{2}$$

On obtiendrait en particulier une réponse positive au Problème 6. Une stratégie serait d'introduire et de développer la notion de Formalisme d'Artin, en s'inspirant par exemple de [21, Chapitre 7], pour les fonctions L des modules de Drinfeld, puis de l'étendre aux t-modules d'Anderson.

2.3 Valeurs spéciales des fonctions L P-adiques

Notons

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = (z-1)^k L_P^*(E, A, z)$$

et

$$L_P^*(E, \mathscr{O}_L, 1) := \mathrm{ev}_{z=1}\, L_P^*(E, A, z) \in K_P^*$$

la valeur spéciale de la fonction L P-adique. j'aimerais m'intéresser aux valuations de la fonction L P-adique $L_P(E, \mathscr{O}_L, 1)$ et de la valeur spéciale de la fonction L P-adique $L_P^*(E, \mathscr{O}_L, 1)$, dans des projets qui semblent disjoints des précédents, mais qui en fait y sont complètements reliés.

Soit $\phi : A \to A\{\tau\}$ un module de Drinfeld. Un problème ouvert à long terme, qui semble assez hors d'atteinte avec les outils actuels, est de démontrer l'existence (ou non) d'une infinité de premiers de Wieferich en base ϕ introduits dans [9]. En revanche, dans la continuité des travaux réalisés dans le cadre des modules de Drinfeld définis sur A, j'aimerais répondre aux questions suivantes, directement inspirée des travaux de Silvermann [22], pour démontrer l'infinité de non-premiers de Wieferich en base ϕ lorsque $L_P(\phi, A, 1) \neq 0$.

Problème 8.

1. *Énoncer une conjecture ABC dans le contexte des modules de Drinfeld définis sur A.*
2. *Supposons que $L_P(\phi, A, 1) \neq 0$. Montrer que, sous cette conjecture ABC, il existe une infinité de premiers P tels que P n'est pas de Wieferich en base ϕ.*
3. *Démontrer, sous cette conjecture, qu'il existe une infinité de premiers P tels que*

$$v_P(L_P^*(\phi, A, 1)) = 0.$$

Dans le projet [11] en cours, nous avons étendu les travaux de [9] dans le cadre plus général des t-modules d'Anderson définis sur A. Pour tout sous-A-module $X \subseteq E(A)$, nous avons défini un A-module, appelé module de Wieferich et noté $W_X(E; A) \subseteq E(A)$, dont la longueur (i.e., la valuation P-adique de son Fitting) généralise la valuation P-ordique de [9].

En particulier, en prenant successivement $X = V(E; A) = \exp_E U(E; A)$ et $X = V^{\mathrm{sat}}(E; A)$, sous les conjectures de Leopoldt, nous avons démontré que

$$v_P(L_P(E, A, 1)) = \mathrm{length}_A \left(W_{V(E;A)}(E, P) \right)$$

et

$$v_P(L_P^*(E;A)) = \mathrm{length}_A\left(W_{V^{\mathrm{sat}}(E;A)}(E,P)\right).$$

Dans un projet immédiatement accessible, on voudrait généraliser ces résultats dans le cas où E est défini sur $\mathscr{O}_L$. Notons S_P l'ensemble des premiers de $\mathscr{O}_L$ au dessus de P, et pour $\mathfrak{P}$ un premier de $\mathscr{O}_L$ notons P l'unique premier de A en dessous de $\mathfrak{P}$.

Problème 9. *Soit E un t-module d'Anderson défini sur $\mathscr{O}_L$.*

1. *Soit $\mathfrak{p}$ un premier de $\mathscr{O}_L$. Définir, pour $X \subseteq E(\mathscr{O}_L)$ le module de Wieferich $W_X(E,\mathfrak{P})$.*
2. *Relier, sous la conjecture de "Leopoldt faible", $v_P(L_P(E,\mathscr{O}_L,1))$ et $W_{U(E;\mathscr{O}_L))}(E,\mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P} \in S_P$.*
3. *Relier, sous la conjectures de "Leopoldt forte", $V_P(L_P^*(E,\mathscr{O}_L,1))$ et $W_{U(E;\mathscr{O}_L)^{\mathrm{sat}}}(E,\mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P} \in S_P$.*

Remarquons que répondre aux questions précédentes semble abordable à court terme, en reprenant les techniques du cas $L = K$. Mais on pourrait essayer de passer plutôt par la restriction de Weyl de E, nous permettant d'utiliser tous les résultats démontrés sur A, puis donner une interprétation des résultats en "remontant" la restriction. Notons enfin qu'il serait intéressant de comparer des résultats avec une étude récente des nombres premiers de Wieferich dans les corps de nombres, voir [16].

3 Puissances tensorielles du module de Carlitz et extensions

L'exemple le plus important et étudié, mais malgré tout encore très incompris dans le cas P-adique, est l'étude des fonctions L P-adiques associées aux puissances tensorielles du module de Carlitz $C^{\otimes n}$ définies sur A, qui ne sont rien d'autre que les fonctions zêta P-adique de Carlitz

$$L_P(C^{\otimes n}, A, z) = \zeta_P(A,n,z) = \sum_{\substack{a \in A \text{ unitaire} \\ P \nmid a}} \frac{z^{\deg(a)}}{a^n}.$$

Suite aux travaux de Anderson-Thakur [2], il s'est avéré de manière inattendue et en désaccord avec le cas classique, que la fonction zêta de Carlitz, ainsi que son analogue P-adique, sont réalisées comme des "valeurs" et non seulement comme des déterminants.

En effet, Anderson et Thakur ont exhibé un vecteur spécial $z_n(z) \in U\left(\widetilde{C^{\otimes n}}; A[z]\right)$, d'image par l'exponentielle notée $Z_n(z)$, tel que si on note $Z_{n,P}(z) = \widetilde{C^{\otimes n}}_{P^m g_{P,C^{\otimes n}(z)}}(Z_n(z))$ et $z_{n,P}(z) = \log_{\widetilde{C^{\otimes n}},P}(Z_{n,P}(z))$ (où m est un entier assez grand) alors

$$\mathrm{pr}_d(z_{n,P}(z)) = \Gamma_n P^{m+d} \zeta_P(A,n,z)$$

où $\mathrm{pr}_d : \mathbb{T}_z(K_P)^d \to \mathbb{T}_z(K_P)$ est la projection sur la dernière coordonnée de la base canonique.

Il s'avère que l'étude de ce vecteur spécial, et surtout de son image $Z_{d,P}(z) \in A[z]^n$, nous donne toutes les informations arithmétiques et analytiques de la fonction zêta P-adique.

Goss [18] a énoncé la conjecture suivante.

Conjecture (Hypothèse de Riemann P-adique en caractéristique positive)**.** *Les zéros de $\zeta_P(A,n,z)$ sont tous simples.*

Cela a été démontré grâce au travail de Wan [27], Thakur [26] ainsi que Diaz-Vargas et Polanco-Chi [14] dans le cas où P est de degré 1, mais reste ouvert dans le cas général.

Dans un travail personnel en cours, en étudiant ce vecteur spécial $Z_{n,P}(z)$, j'ai démontré cette conjecture pour toute évaluation en des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_q$ pour P quelconque, sous l'hypothèse n de la forme $p^k(q-1)$, $k \geq 0$. On obtient donc une preuve complètement élémentaire et algébrique de la conjecture de Leopoldt dans ces cas précis. En affinant l'étude, j'espère répondre à la question suivante.

Problème 10. *Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_q$, on a*

$$\mathrm{ev}_{z=1}\,\zeta_P(A,n,z) = \begin{cases} 1 \text{ si } \zeta = 1 \text{ et } (q-1)|n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En lien avec l'étude du vecteur spécial d'Anderson Thakur, la raison de la présence du polynôme Γ_n en dernière coordonnée de $z_n(z)$ est encore une question ouverte, dont une piste très sérieuse est la suivante.

Dans un premier temps, soit $u \in K_\infty^d = \mathrm{Lie}_{C^{\otimes n}}(K_\infty)$. On note u^∂ le vecteur u, décomposé dans la base canonique, mais pour l'action de ∂. Alors la réponse semble être cachée dans la première question générale suivante et ses conséquences sur les questions 2 et 3 suivantes.

Problème 11. *1. Comparer u et u^∂.*

2. Soit $M \in M_n(K)$. On peut voir cette matrice comme la matrice d'une application agissant sur un vecteur u. Donner alors M^∂, la matrice de cette même application agissant sur u^∂.

3. En déduire d_k^∂ (resp. l_k^∂), où d_k (resp. l_k) est le k-ème coefficient de $\exp_E$ (resp. $\log_E$).

Dans un second temps, dans [10], nous avons démontré que la famille $(\log_{C^{\otimes n}}(e_1), \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n))$ est une A-base du module des unités ainsi que du module des unités de Stark. On veut comparer

$$\det_{\mathscr{B}}(\log_{C^{\otimes n}}(e_1), \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n)) \text{ et } \det_{\mathscr{B}}(\log_{C^{\otimes n}}(e_1)^\partial, \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n)^\partial).$$

D'après la formule des classes, le second déterminant est exactement la fonction zêta de Carlitz $\zeta(A,n,z)$, et j'aimerais en particulier répondre à la question suivante.

Problème 12. *Est-ce cette comparaison entre ces deux déterminants qui explique la présence du facteur Γ_n dans le vecteur spécial z_n d'Anderson-Thakur ?*

Toujours en lien avec ce vecteur spécial, les simulations numériques semblent également relier, de manière inattendue, la valuation de la valeur spéciale de la fonction zêta P-adique de Carlitz et le module de Wieferich associé au vecteur spécial de Anderson-Thakur. En particulier, j'aimerais répondre à la question suivante, dont l'étude pourrait donner une nouvelle approche au Problème 12 d'une part, et d'autre part permettre d'avancer dans la démonstration de la conjecture de Leopoldt associée à la fonction zêta P-adique de Carlitz.

Problème 13. *Démontrer les deux égalités suivantes.*

1. $v_P(L_P(C^{\otimes n}, A, 1) = \mathrm{length}\, W_{Z_{n,P}(1)}(C^{\otimes n}, P) - n - m.$
2. $v_P(L_P^*(C^{\otimes n}, A, 1) = \mathrm{length}\, W_{Z_{n,P}^*(1)}(C^{\otimes n}, P) - n - m.$

Le fait surprenant que toute l'information, arithmétique et analytique, de la fonction L, soit contenue dans un sous-espace de dimension 1 n'est pas un cas isolé et a été conjecturé par Taelman [23] et étudié par Anglès-Ngo Dac-Tavares Ribeiro [3]. Ces derniers ont construits, sous de bonnes hypothèses, un K_∞-espace vectoriel W de dimension le rang de E, tel que : $U(E;A) \cap W$ et $\mathrm{Lie}_E(A) \cap W$ sont des A-réseaux dans W et

$$[U(E;A) \cap W : \mathrm{Lie}_E(A) \cap W]_A = \alpha L(E,A,1) \tag{3}$$

pour un certain $\alpha \in K^\times$. En particulier, si E est un t-module de rang 1 vérifiant ces hypothèses, on obtient trivialement que la conjecture de Leopoldt faible est vraie pour E, autrement dit l'annulation en 1 de la fonction L P-adique ne dépend pas de P.

Daniel Krell Calvo a généralisé, dans un travail à venir, ces résultats avec la variable z, en introduisant un espace W_z, puis a redémontré une version P-adique du résultat précédent sous de bonnes hypothèses, ce qui englobe en particulier le cas $C^{\otimes n}$. Son travail permet alors d'étudier la valeur spéciale de la série L P-adique dans ce contexte.

Notons $W' = \exp_E(W \cap U(E;A))$, $W'_z = \exp_{\widetilde{E}}(U(\widetilde{E}; A[z] \cap W_z)$ et $W'^{,\mathrm{sat}} = \mathrm{ev}_{z=1} W_z'^{,\mathrm{sat}}$. Alors on peut généraliser le Problème 13 en le Problème suivant.

Problème 14. *Démontrer les deux égalités suivantes, où $m_1 \in \mathbb{Z}$ est une constante qui dépendra de α dans l'Équation* (3).

1.
$$v_P(L_P(E, A, 1)) = \operatorname{length} W_{W'}(E, P) + m_1$$

2.
$$v_P(L_P^*(E, A, 1) = \operatorname{length} W_{W',\mathrm{sat}}(E, P) + m_1$$

4 Aspects effectifs

Depuis ces dernières années et en particulier les travaux de Caruso, Leudière, Ayotte, Musleh [7], Caruso et Leudière [12] ainsi que Caruso et Gazda [8], l'implémentation de la théorie des modules de Drinfeld a débuté. En lien avec mes travaux, voici une liste de projets algorithmiques que je souhaite effectuer, en particulier pour étudier certains des problèmes précédemment cités.

1. Pour essayer de répondre au Problème 2, étant donné un t-module d'Anderson E défini sur A, je souhaiterais développer un algorithme pour calculer le modules des classes de Taelman $H(E; A)$ ainsi que le module des classes pour la z-déformation $H(\widetilde{E}; A[z])$.
2. Un invariant important d'un module de Drinfeld est le spectre de ce dernier. Cette notion apaparaît de manière essentielle dans la théorie des formes modulaires de Drinfeld, voir par exemple les travaux de Gekeler [17], et de manière surprenante nous donne des informations sur l'annulation de la série L P-adique, voir [20, Proposition 6.7]. Un projet à court terme serait l'écriture d'un algorithme qui, étant donné un module de Drinfeld, nous retourne le spectre de ce dernier. Une des voies de réponse serait de le calculer à partir des polygônes de Newton successifs de $\phi_{\theta^n}(X)$ pour $n \geq 0$ en se basant sur le travail de [19].
3. En lien avec le point précédent, j'aimerais également m'intéresser à des questions statistiques autour de l'annulation des fonctions L P-adiques dans le cadre des modules de Drinfeld. Soit ϕ un A-module de Drinfeld défini sur A de rang r, noté $\phi_\theta = \theta + \sum_{i=1}^{r} a_i \tau^i$. J'ai démontré que l'ordre d'annulation de $L_P(\phi, A, z)$ est borné par r et de dépend pas de P, noté o_ϕ. Notons

   $$\Omega_{x,r} = \{\phi \text{ de rang } r \mid \deg(a_i) < x, i = 1, \ldots, r\}, x \in \mathbb{N}^*,$$

   on voudrait estimer pour tout $0 \leq k \leq r$

   $$n(r, x, k) = \{\phi \in \Omega_{r,x} \mid o_\phi = k\}$$

   puis faire $x \to +\infty$. Remarquons que contrairement à ce qu'on pourrait espérer en comparant au cas des courbes elliptiques, les premières études semblent montrer qu'en général, on s'attend en général à ce que l'ordre d'annulation de la série L P-adique en 1 soit nul.

   Une première stratégie pour étudier $n(r, x, k)$ serait de considérer $u_\phi(z) \in A[z]$ mais ce n'est pas du tout clair comment varie ce polynôme lorsqu'on fait varier les coefficients a_i.

   Une autre stratégie serait la suivante. On a démontré la borne

   $$o_\phi \leq \#\{i = 1, \ldots, r \mid v_\infty(\lambda_i) \in \mathbb{Z}\}$$

   où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est une "bonne base" du réseau des périodes de ϕ et la quantité $(v_\infty(\lambda_1), \ldots, v_\infty(\lambda_r))$ est le spectre de ϕ. On veut donc être capable d'estimer le nombre de modules de Drinfeld de rang r dont le spectre a exactement k valeurs entières pour $k = 0, \ldots, r$ et on aurait alors besoin de l'algorithme du projet 2 pour étudier le problème.
4. En lien avec les puissances tensorielles du module de Carlitz et les Problèmes 10,11,12,13, j'aimerais implémenter un algorithme permettant le calcul du vecteur spécial d'Anderson-Thakur ainsi que d'algorithmes pour décomposer des vecteurs pour l'action de ∂, et enfin pour étudier les modules des classes $H(\widetilde{C^{\otimes n}}; A[z])$.

Références

[1] G. W. Anderson. t-motives. *Duke Math. J.*, 53(2) :457–502, 1986.

[2] G. W. Anderson and D. S. Thakur. Tensor powers of the carlitz module and zeta values. *Annals of Mathematics*, 132(1) :159–191, 1990.

[3] B. Anglès, T. N. Dac, and F. T. Ribeiro. On special L-values of t-modules. *Advances in Mathematics*, 372 :107313, 2020.

[4] B. Angles, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro. A class formula for admissible Anderson modules. *Inventiones mathematicae*, 229(2) :563–606, 2022.

[5] B. Anglès, L. Taelman, and V. Bosser. Arithmetic of characteristic p special L-values. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 110(4) :1000–1032, 2015.

[6] B. Anglès and F. Tavares Ribeiro. Arithmetic of function field units. *Mathematische Annalen*, 367 :501–579, 2017.

[7] D. Ayotte, X. Caruso, A. Leudière, and J. Musleh. Drinfeld modules in sagemath, 2023.

[8] X. Caruso and Q. Gazda. Computation of classical and v-adic l-series of t-motives. *to appear in the proceedings of the Algorithmic Number Theory Symposium*, 2024.

[9] X. Caruso, Q. Gazda, and A. Lucas. Wieferich primes for Drinfeld modules, 2024. `https://arxiv.org/abs/2412.11588`.

[10] X. Caruso, Q. Gazda, and A. Lucas. A class formula for Anderson modules over $A[z]$, 2025. work in progress.

[11] X. Caruso, Q. Gazda, and A. Lucas. On the $\mathfrak{p}$-adic L-series of Anderson modules., 2025. work in progress.

[12] X. Caruso and A. Leudière. Algorithms for computing norms and characteristic polynomials on general Drinfeld modules, 2024.

[13] P. Colmez. Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p-adiques. *Inventiones mathematicae*, 91 :371–389, 1988.

[14] J. Diaz-Vargas and E. Polanco-Chi. Riemann hypothesis for the Goss t-adic zeta function. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 46(2) :435–442, 2016.

[15] V. G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 23(4) :561, 1974.

[16] N. Fellini and M. R. Murty. Wieferich primes in number fields and the conjectures of ankeny–artin–chowla and mordell, 2025.

[17] E.-U. Gekeler. Towers of $GL(r)$-type of modular curves. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(754) :87–141, 2019.

[18] D. Goss. A Riemann hypothesis for characteristic p L-functions. *Journal of Number Theory*, 82(2) :299–322, 2000.

[19] M. Huang. On successive minimal bases of division points of Drinfeld modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 28(2) :249–295, 2024.

[20] A. Lucas. A P-adic class formula for Anderson t-modules. *arXiv preprint arXiv :2504.03430*, 2025.

[21] J. Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322. Springer Science & Business Media, 2013.

[22] J. H. Silverman. Wieferich's criterion and the abc-conjecture. *Journal of number theory*, 30(2) :226–237, 1988.

[23] L. Taelman. Special L-values of t-motives : a conjecture. *International Mathematics Research Notices*, 2009(16) :2957–2977, 2009.

[24] L. Taelman. A Dirichlet unit theorem for Drinfeld modules. *Mathematische Annalen*, 348(4) :899–907, 2010.

[25] L. Taelman. Special L-values of Drinfeld modules. *Annals of Mathematics*, pages 369–391, 2012.

[26] D. S. Thakur. Valuations of v-adic Power Sums and Zero Distribution for the Goss v-adic Zeta Function for $\mathbb{F}_q[t]$. *Journal of Integer Sequences*, 16(2) :3, 2013.

[27] D. Wan. On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function. *Journal of Number Theory*, 58(1) :196, 1996.

[28] J. Yu. Transcendence and special zeta values in characteristic p. *Annals of Mathematics*, 134(1) :1–23, 1991.