Projet de recherche

LUCAS Alexis

23 octobre 2025

Table des matières

Mots clés : Théorie des nombres, Corps de fonctions, Modules de Drinfeld, Modules d'Anderson, Séries L, Séries L P-adiques, Nombres de Wieferich.

1 État de l'art

La théorie des modules de Drinfeld, introduits par ce dernier [15] en 1974, a connu de nombreuses avancées les 20 dernières années et permis une nouvelle compréhension arithmétique des corps de fonctions globaux.

Soit θ une indéterminée, $A = \mathbb{F}_q[\theta]$ et $K = \mathbb{F}_q(\theta)$. Fixons L/K une extension finie, d'anneau des entiers noté $\mathscr{O}_L$. En 2010, Taelman [21] a introduit la notion de série L associée à un module de Drinfeld ϕ comme un produit eulérien

$$L(\phi, \mathscr{O}_L) = \prod_Q z_Q(\phi, \mathscr{O}_L)$$

où le produit porte sur l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de A et les $z_Q(\phi, \mathscr{O}_L) \in K$ sont appelés les facteurs locaux en Q, et démontré [22, Theorem 1] une formule des classes

$$L(\phi, \mathscr{O}_L) = R(\phi; \mathscr{O}_L)[H(\phi; \mathscr{O}_L)]_A$$

où $R(\phi; \mathscr{O}_L)$ est un certain régulateur et $[H(\phi; \mathscr{O}_L)]_A$ est l'analogue du nombre des classes des corps de nombres. Depuis son travail fondateur, des développements ont été effectués dans plusieurs directions, et en particulier dans le cadre des t-modules d'Anderson introduits par ce dernier dans [1], qui sont une généralisation en dimension supérieure des modules de Drinfeld.

Anglès et Tavares Ribeiro [5] introduisent la notion de z-déformation d'un module d'Anderson E, permettant de voir les séries $L(E, \mathscr{O}_L)$ précédemment construites comme des valeurs en $z = 1$ des séries $L(E, \mathscr{O}_L, z)$. Finalement, Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro [4] prouvent une formule de classe dans le cas où l'anneau A est "général" et E est un module d'Anderson "admissible", incluant en particulier tous les modules de Drinfeld.

Durant ma thèse, pour P un polynôme irréductible unitaire de A, j'ai défini la série L P-adique $L_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ dans le contexte des t-modules d'Anderson définie par le produit eulérien suivant

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = \prod_{Q \neq P} z_Q(E, \mathscr{O}_L, z)$$

où le produit porte sur les polynômes irréductible unitaires de A non divisibles par P, et démontré une formule de classe P-adique à la Taelman avec la variable z

$$z_P(E, \mathscr{O}_L, z) L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = R_P(E, \mathscr{O}_L, z)$$

et de même sans la variable z

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, 1) = R_P(E; \mathscr{O}_L)[H(E; \mathscr{O}_L)]_A,$$

où $R_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ (resp. $R_P(E; \mathscr{O}_L)$) est un certain régulateur P-adique définit comme un déterminant de logarithmes P-adiques d'unités. De plus, l'annulation en $z = 1$ de cette série nous donne des informations "arithmétiques sur la nature de l'extension L/K.

Dans le cas des modules de Drinfeld définis sur A, j'ai borné l'ordre d'annulation en $z = 1$ de la série L P-adique et faisant le lien avec certaines périodes du module de Drinfeld.

De plus, dans un travail en commun avec Xavier Caruso et Quentin Gazda [8], nous introduisons, pour un premier P de A, la notion d'être de Wieferich en base ϕ et établissons une connexion surprenante entre cette dernière notion et la valuation P-adique de la valeur spéciale de la série L P-adique $L_P(\phi, A, 1)$.

2 Projet de recherche

De manière générale, mes centres intérêts sont en lien avec la théorie des nombres, et particulièrement les corps de fonctions. Dans mon travail, je compte suivre les directions suivantes :

1. Étudier de manière générale les zéros des séries L P-adiques dans le contexte des modules d'Anderson : multiplicité et localisation des zéros, transcendance des valeurs spéciales, formulation d'analogues de conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer pour les t-modules d'Anderson, relation entre différentes séries L.

2. Construire des séries L v-adiques dans le cas général, c'est à dire pour les A-modules d'Anderson et essayer de comprendre et de mettre en évidence les majeurs différences du cas A principal.

3. Complètement comprendre le cas des fonctions zêta P-adiques de Carlitz, ou autrement dit complètement et explicitement étudier les séries L P-adiques dans le cas des puissances tensorielles du module de Carlitz $C^{\otimes n}$. En particulier, aborder des hypothèses de Riemann P-adiques énoncées par Goss [18] dans le cadre de la caractéristique positive.

4. Introduire des méthodes effectives ainsi que des algorithmes pour étudier et vérifier certains résultats.

2.1 Série L et séries L P-adiques

Mon intérêt principal est, dans la continuité de mes travaux réalisés en thèse, l'étude des séries L et des séries L P-adiques dans le cadre des t-modules d'Anderson.

2.1.1 Étude des zéros de la série L P-adique

La série $L_P(E, \mathscr{O}_L, z)$ d'un t-module d'Anderson étant une focntion entière, j'aimerai étudier ses zéros de manière générale.

Dans un projet actuel avec Xavier Caruso et Quentin Gazda, nous avons, dans un premier temps, montré que la série L P-adique d'un t-module d'Anderson défini sur $\mathscr{O}_L$ peut toujours être vue comme la série L P-adique d'un certain t-module d'Anderson définit sur A, appelé la restriction de Weyl de E. Ainsi, il suffit de comprendre les zéros des séries L P-adiques des t-modules définis sur A. Dans ce cas, nous avons complétement relié l'ordre d'annulation en $z = 1$ et en $z = \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_q$ à certains sous-modules du réseau des périodes, que l'on peut voir comme un équivalent des conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer pour les t-modules d'Anderson, comme suit. Soit $R_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{F}_{q^{p^n}}((\frac{1}{\theta}))$ la $\mathbb{Z}_p$ extension maximale non ramifiée de K_∞, et soient

$$\Omega_d = \left\{ x \in R_\infty^d \mid \exp_E(x) = 0 \right\}, \ \overline{\Omega}_d = \left\{ x \in \left(\overline{\mathbb{F}}_q((\frac{1}{\theta}))\right)^d \mid \exp_E(x) = 0 \right\}$$

deux sous A-modules du réseau des périodes de E.

Theorem 2.1.1. *Sous de "bonnes hypothèses", nous avons*

1. $$\mathrm{ord}_{z=1} L_P(E, A, z) = \mathrm{rank}_A \Omega_d,$$

2. $$\sum_{\gamma \in \overline{\mathbb{F}}_q} \mathrm{ord}_{z=\gamma} L_P(E, A, z) = \mathrm{rank}_A \overline{\Omega}_d.$$

Un premier projet à long terme et justement l'étude de ces "bonnes hypothèses", qui sont des généralisations de conjectures de Leopoldt énoncées dans [20].

Un second projet serait l'étude des autres zéros des séries L P-adiques. En particulier, on voudrait répondre à la question ouverte suivante.

Problème 2.1.2. *Peut-on donner une interprétation des zéros de la série L P-adique ? Par exemple des zéros vivant dans K ?*

J'aimerai ensuite m'intéresser, toujours en lien avec les zéros des séries L P-adiques, aux questions suivantes.

Problème 2.1.3. *Notons K_P le complété de K pour la place P.*

1. *Fixons P et E un t-module d'Anderson définit sur A. Existe-t-il une extension finie $K_{E,P}$ de K_P telle que tous les zéros de la série L P-adique vivent dans $K_{E,P}$?*

2. *Dans le cas d'une réponse positive à la question précédente, notons $d_{E,P}$ le degré de l'extension $K_{E,P}/K_P$. Peut-on donner une borne uniforme (par rapport à P) aux $d_{E,P}$? Et si on fixe P et qu'on fait varier les t-modules E, comment varie $d_{E,P}$?*

2.1.2 Extension du domaine de définition

Soit ϕ un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_L$, et soit M/L une extension finie d'anneau des entiers (sur A) notée $\mathscr{O}_M \supseteq \mathscr{O}_L$. On peut alors considérer ϕ comme un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_M$, et se demander quels sont les liens entre $L_P(\phi, \mathscr{O}_L, z)$ et $L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z)$.

Suite à des calculs avec le module de Carlitz définit sur des extensions cyclotomiques, on peut énoncer la conjecture suivante.

Problème 2.1.4. *Soit M/L une extension galoisienne de degré n, et ϕ un A-module de Drinfeld défini sur $\mathscr{O}_L$. Alors il existe une famille $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ de A-modules de Drinfeld définis sur $\mathscr{O}_L$, avec $\phi_1 = \phi$, vérifiant pour tout polynôme irréductible unitaire Q :*

$$z_Q(\phi, \mathscr{O}_M, z) = \prod_{i=1}^{n} z_Q(\phi_i, \mathscr{O}_L, z).$$

On obtiendrait en corollaire immédiat :

$$L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z) = \prod_{i=1}^{n} L_P(\phi_i, \mathscr{O}_L, z) \tag{1}$$

et en particulier

$$L_P(\phi, \mathscr{O}_L, z)|_{\mathbb{T}_z(K_P)} L_P(\phi, \mathscr{O}_M, z). \tag{2}$$

J'aimerai dans un premier temps m'intéresser à la relation (2). Une stratégie pour la démontrer serait d'introduire et de développer la notion de Formalisme d'Artin pour les séries L des modules de Drinfeld, puis de l'étendre aux t-modules d'Anderson définis sur A.

2.1.3 Transcendance des différentes séries L

Nous avons la question suivante posée par Anglès-Tavares Ribeiro et Ngo Dac [3, Problem 3.1] :

Problème 2.1.5. *Montrer que $L(E, \mathscr{O}_L, 1) \notin \overline{K}$.*

On peut bien entendu poser la question analogue dans le cadre P-adique. Notons

$$L_P(E, \mathscr{O}_L, z) = (z-1)^k L_P^*(E, \mathscr{O}_L, z)$$

et

$$L_P^*(E, \mathscr{O}_L, 1) := \mathrm{ev}_{z=1} L_P^*(E, \mathscr{O}_L, z) \in K_P^*$$

la valeur spéciale de la série L P-adique. On peut alors considérer le problème P-adique suivant.

Problème 2.1.6. *Montrer que $L_P^*(E, \mathscr{O}_L, 1) \notin \overline{K}$.*

Remarquons que d'après les travaux de Yu [27], les deux problèmes précédents ont une réponse affirmative dans le cas $L = K$ et $d = 1$ ainsi que pour les puissances tensorielles du module de Carlitz $C^{\otimes n}$ définies sur A. Mais le cas général reste ouvert, dont je souhaite dans un premier temps faire l'étude dans le cas des modules de Drinfeld.

2.1.4 Réduction de la dimension par ajouts de variables

Soit E un t-module d'Anderson, dont on veut étudier la série L et la série L P-adique. On peut alors le supposer défini sur A, quitte à considérer sa restriction de Weyl. Le seul cas où nous savons très bien étudier les séries L associées est le cas de la dimension 1 dont on espère pouvoir s'y ramener, quitte à rajouter des variables à notre anneau de base A.

On dira que E est réalisable s'il existe un polynôme $R \in A\{\tau\}$, un entier s, des polynômes $a_1, \ldots, a_s \in A$ ainsi qu'un module de Drinfeld $\phi : A_s \to A_s\{\tau\}$, où $A_s = \mathbb{F}_q[t_1, \ldots, t_s, \theta]$, tels que

$$L(E, A, z) = \mathrm{ev}_{t_i = a_i} R\left(L(\phi, A_s, z)\right)$$

où les t_i sont de nouvelles variables.

Par exemple, si on considère le t-module $E = C^{\otimes n}$ défini sur A, alors E est réalisable en posant $s = q^l - n$ avec l assez grand pour avoir $s > 0$, $a_1 = \ldots = a_s = \theta$, $R = \tau^l$ et $(\phi_s)_\theta = \theta + \prod_{i=1}^{s}(t_i - \theta)\tau$, et on obtient pour tout polynôme irréductible unitaire P

$$\mathrm{ev}_{t_i = \theta} \tau^l (z_P(C^{\otimes d}, A, z) = z_P(\phi_s, A, z)$$

d'où en particulier

$$L(C^{\otimes n}, A, z) = \mathrm{ev}_{t_i = \theta} \tau^l \left(L(\phi_s, A, z)\right) \text{ et } L_P(C^{\otimes n}, A, z) = \mathrm{ev}_{t_i = \theta} \tau^l \left(L_P(\phi_s, A, z)\right).$$

En toute généralité, on à la question suivante posée par Papanikolas dans une communication personnelle.

Problème 2.1.7. *Quels sont les t-modules réalisables ?*

Une première piste intéressante serait d'étudier le cas d'un produit tensoriel d'un module de Drinfeld avec des puissances du module de Carlitz.

Problème 2.1.8. *Soit ϕ un A-module de Drinfeld défini sur A. Montrer que le t-module $\phi \otimes C^{\otimes n}$ est réalisable.*

2.1.5 Le cas A général

Soit $K/\mathbb{F}_q$ un corps de fonctions global, ∞ une place fixée (dîte à l'infini), A l'anneau des fonctions régulières hors de ∞, v une place finie de K. On aimerait étendre les constructions établies dans [20] à cette situation générale et répondre successivement aux questions suivantes, où E est un A-module d'Anderson défini sur $\mathscr{O}_L$.

Problème 2.1.9.
1. *Que peut-on dire de la converge v-adique de $\exp_{E,v}$ et $\log_{E,v}$?*
2. *Peut-on construire la série L v-adique $L_v(E, \mathscr{O}_L, z)$ et démontrer que c'est une série entière ?*
3. *Peut-on démontrer une formule de classes v-adique à la Taelman ?*
4. *Peut-on alors étudier tous les problèmes précédents dans ce contexte ?*

Remarquons que répondre à la question (1) dans le cas des modules de Drinfeld répondrait à une conjecture de Chung, voir [13, Conjecture 8.1].

Dans un premier temps on aimerait s'intéresser aux questions précédentes dans le cas où A est un anneau principal, dont il n'existe que 4 cas différents d'après Thakur [23]. Ce travail semble abordable assez rapidement, toutes les construction de [20] ne dépendant que du caractère principal de A.

Ensuite, un projet à moyen terme serait de définir les séries L pour les A-modules d'Anderson dans le cadre où l'anneau A est général. Le bon cadre serait celui des modules dits admissibles (incluant tous les modules de Drinfeld) suite aux travaux de Anglès, Ngo Dac et Tavares Ribeiro [4].

2.2 Premiers de Wieferich en caractéristique positive

Dans un travail effectué avec Xavier Caruso et Quentin Gazda [8], pour un A-module de Drinfeld ϕ défini sur A, nous avons défini la notion pour un polynôme irréductible P d'être de Wieferich en base ϕ. Une question naturelle se pose alors, à l'image des nombres classiques de Wieferich.

Problème 2.2.1. *Fixons ϕ. Existe-t-il une infinité de premiers de Wieferich en base ϕ ?*

Dans un projet en cours, toujours avec Xavier Caruso et Quentin Gazda, nous avons étendu cette notion aux t-modules d'Anderson définis sur A, et relié la propriété pour un nombre premier d'être de Wieferich et la valuation de la valeur spéciale de la série L P-adique.

Dans un projet à court terme, on voudrait étendre ces travaux à des t-modules définis sur des extensions finis de K, autrement dit de définir la notion d'un premier $\mathfrak{p} \in \mathscr{O}_L$ d'être de Wieferich en base E, et d'adresser des questions similaires à celles étudiées. En particulier, on pourrait comparer ces résultats avec ceux récemment étudiés dans le contexte des corps de nombres par Fellini et Ram Murty [16].

Enfin, dans un projet à plus long terme, j'aimerais étendre ces notions dans le cas A général où la connexion à la valuation à des séries L P-adiques semble moins évidente, sauf peut-être dans le cas où l'anneau A est principal qui pourra être étudié dans un premier temps.

2.3 Les fonctions zêta de Carlitz

L'exemple le plus étudié et malgré tout encore mal maîtrisé est l'étude de l'ordre d'annulation en $z = 1$ des séries L P-adiques associées aux puissances tensorielles du module de Carlitz $C^{\otimes n}$ définies sur A, qui ne sont rien d'autre que les fonctions zêta P-adique de Carlitz

$$\zeta_P(A, n, z) = \sum_{\substack{a \in A \text{ unitaire} \\ P \nmid a}} \frac{z^{\deg(a)}}{a^n}.$$

En particulier, il est conjecturé par Goss [18] que les zéros de $\zeta_P(A, n, z)$ sont tous simples, ce qui peut-être vu comme l'analogue P-adique de l'hypothèse de Riemann en caractéristique positive. Cela a été démontré grâce au travail de Wan [26], Thakur [25] ainsi que Diaz-Vargas et Polanco-Chi [14] dans le cas où P est degré 1.

Dans un travail personnel en cours, j'ai démontré cette conjecture pour toute évaluation en des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_q$ pour P quelconque, sous l'hypothèse $n \leq q$. La méthode employée est basée sur les outils développés durant ma thèse, en particulier sur le calcul explicite du vecteur spécial z_n d'Anderson Thakur et l'utilisation d'exponentielles P-adiques, et j'espère pouvoir généraliser cette méthode dans le cas général.

En particulier, Anderson et Thakur [2] ont démontré que la dernière coordonnée de ce vecteur z_n est $\Gamma_n \zeta_A(n, z)$ où Γ_n est la n-ième factorielle de Carlitz. La raison profonde de la présence de ce facteur Γ_n est encore une question ouverte que j'aimerai explorer qui semble lié à la remarque suivante.

Pour $a \in A$, si on note $\partial(a)$ le coefficient constant de $C_a^{\otimes n}$ (qui est une matrice à coefficients dans A), alors on peut étendre cette application en une application $\partial : K_\infty \to M_d(K_\infty)$. On démontrer alors que K_∞^n possède une structure de K_∞-espace vectoriel notée $\mathrm{Lie}_{C^{\otimes n}}(K_\infty)$ via ∂, et que la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Lie}_{C^{\otimes n}}(K_\infty)$. Mais pour l'instant, cela semble très mal compris comment décomposer un vecteur dans la base canonique pour l'action ∂.

Dans un premier temps, j'aimerai écrire un algorithme qui, étant donné un vecteur v de K_∞^n décomposé dans la base canonique pour l'action usuelle, nous donne ses coordonnées pour l'action ∂, noté v^∂. On voudrait alors étudier la situation suivante. Considérons la famille de vecteurs $(\log_{C^{\otimes n}}(e_1), \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n)) \in K_\infty^d$. On veut comparer :

$$\det_{\mathscr{B}}(\log_{C^{\otimes n}}(e_1), \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n))$$

et

$$\det_{\mathscr{B}}(\log_{C^{\otimes n}}(e_1)^\partial, \ldots, \log_{C^{\otimes n}}(e_n)^\partial).$$

D'après la formule des classes, le second déterminant est exactement la fonction zeta de Carlitz $\zeta(A, n, z)$. J'aimerai donc écrire un algorithme capable d'effectuer cette comparaison. En particulier, on aimerait répondre à la question suivante.

Problème 2.3.1. *Est-ce cette comparaison entre ces deux déterminants qui expliquent la présence du facteur Γ_n dans le vecteur spécial z_n d'Anderson et Thakur ?*

2.4 Valeurs zêta multiples en caractéristique positive

Une généralisation des valeurs zêta de Carlitz est introduite par Thakur [24], qui a introduit les valeurs zêta multiples en caractéristique positive, qui sont définies par

$$\zeta_A(s_1, \ldots, s_l) = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_l \in A^+ \\ \deg a_1 > \ldots > \deg a_l \geq 0}} \frac{1}{a_1^{s_1} \ldots a_l^{s_l}}.$$

où les s_i sont des entiers positifs pour $i = 1, \ldots, l$. Ces objets ont été intensément étudiés au cours des 20 dernières années, et bien entendu des analogues P-adiques de ces valeurs zêta multiples ont été introduits. Récemment Chang et Mishiba [11, 10, 12] ont construit un t-module ainsi qu'un vecteur spécial dont le logarithme est étroitement relié aux valeurs zêta multiples, à l'image du vecteur spécial d'Anderson-Thakur.

Il serait intéresser d'étudier toute la machinerie introduite dans ma thèse à ce t-module, avec ou sans variable z, pour obtenir des résultats sur les zêta multiples P-adiques.

2.5 Aspects effectifs

Depuis ces dernières années et en particulier le travail de Caruso, Leudière, Ayotte, Musleh [6], Caruso et Leudière [9] ainsi que Caruso et Gazda [7], l'implémentation de la théorie des modules de Drinfeld a débuté. En lien avec mes travaux, voici une liste de potentiels projets algorithmiques que je souhaite effectuer.

1. Étant donné un t-module d'Anderson E défini sur $\mathscr{O}_L$ (ou d'abord défini sur A), je souhaiterai développer un algorithme pour calculer le modules des classes de Taelman $H(E; A)$ ainsi que le module des classes pour la z-déformation $H(\widetilde{E}; A[z])$. En effet, il semble que le module

des classes avec un z contient énormément d'informations, et une assez bonne maîtrise de cet objet, ce qui n'est pas le cas actuellement, semble permettre d'aborder algébriquement la conjecture de Leopoldt dans ce contexte, autrement que par des méthodes transcendantes ce qui serait particulièrement intéressant en comparaison au cas classique des corps de nombres.

2. Un invariant important d'un module de Drinfeld est le spectre de ce dernier. Cette notion apapraît de manière essentielle dans la théorie des formes modulaires de Drinfeld, voir par exemple les travaux de Gekeler [17], et de manière surprenante nous donne des informations sur l'annulation de la série L P-adique, voir [20, Proposition 6.7]. Un projet à court terme serait l'écriture d'un algorithme qui, étant donné un module de Drinfeld, nous retourne le spectre de ce dernier. Une des voies de réponse serait de le calculer à partir des polygônes de Newton successifs de $\phi_{\theta^n}(X)$ pour $n \geq 0$ en se basant sur le travail de [19].
3. J'aimerai également m'intéresser à des questions statistiques autour de l'annulation des séries L P-adiques dans le cadre des modules de Drinfeld. Soit ϕ un A-module de Drinfeld défini sur A de rang r noté $\phi_\theta = \theta + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i \tau^i$. J'ai démontré que l'ordre d'annulation de $L_P(\phi, A, z)$ est borné par r et de dépend pas de P, noté o_ϕ. Notons

   $$\Omega_{x,r} = \{\phi \text{ de rang } r \mid \deg(a_i) < x, i = 1, \ldots, r\}, x \in \mathbb{N}^*$$

   et on voudrait estimer pour tout $0 \leq k \leq r$

   $$n(r, x, k) = \{\phi \in \Omega_{r,x} \mid o_\phi = k\}$$

   puis faire $x \to +\infty$. Remarquons que contrairement à ce qu'on pourrait espérer en comparant le cas des courbes elliptiques, les premières études semblent montrer qu'en général, on s'attend à ce que l'ordre d'annulation de la série L P-adique en 1 soit plus eptit que le rang. r Une première stratégie serait d'étudier $\exp_{\tilde{\phi}}(L(\phi, A, z)) \in A[z]$ mais ce n'est pas du tout clair comment varie ce polynôme lorsqu'on fait varier les coefficients a_i.
   Une autre stratégie serait la suivante. On a démontré la borne

   $$o_\phi \leq \#\{i = 1, \ldots, r \mid v_\infty(\lambda_i) \in \mathbb{Z}\}$$

   où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est une "bonne base" du réseau des périodes de ϕ et la quantité $(v_\infty(\lambda_1), \ldots, v_\infty(\lambda_r))$ est un invariant de ϕ appelé le spectre de ϕ. On veut donc être capable d'estimer le nombres de modules de Drinfeld de rang r dont le spectre a exactement k valeurs entières pour $k = 0, \ldots, r$ et on aurait alors besoin du projet 2. pour étudier le problème.
4. En lien avec les puissances tensorielles du module de Carlitz, j'aimerai implémenter un algorithme permettant le calcul du vecteur spécial d'Anderson Thakur. De plus j'aimerai développer des outils, algorithmiques et théoriques, pour étudier l'étude au problème 2.3.1. En particulier, il semble que les polylogarithmes de Carlitz seront d'importants objets à étudier.

Références

[1] G. W. Anderson. t-motives. *Duke Math. J.*, 53(2) :457–502, 1986.

[2] G. W. Anderson and D. S. Thakur. Tensor powers of the carlitz module and zeta values. *Annals of Mathematics*, 132(1) :159–191, 1990.

[3] B. Anglès, T. N. Dac, and F. T. Ribeiro. Recent developments in the theory of anderson modules. *Acta Mathematica Vietnamica*, 45(1) :199–216, 2020.

[4] B. Angles, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro. A class formula for admissible anderson modules. *Inventiones mathematicae*, 229(2) :563–606, 2022.

[5] B. Anglès and F. Tavares Ribeiro. Arithmetic of function field units. *Mathematische Annalen*, 367 :501–579, 2017.

[6] D. Ayotte, X. Caruso, A. Leudière, and J. Musleh. Drinfeld modules in sagemath, 2023.

[7] X. Caruso and Q. Gazda. Computation of classical and v-adic l-series of t-motives. *to appear in the proceedings of the Algorithmic Number Theory Symposium*, 2024.

[8] X. Caruso, Q. Gazda, and A. Lucas. Wieferich primes for Drinfeld modules, 2024. `https://arxiv.org/abs/2412.11588`.

[9] X. Caruso and A. Leudière. Algorithms for computing norms and characteristic polynomials on general drinfeld modules, 2024.

[10] C.-Y. Chang, Y.-T. Chen, and Y. Mishiba. Algebra structure of multiple zeta values in positive characteristic, 2020.

[11] C.-Y. Chang and Y. Mishiba. On multiple polylogarithms in characteristic p : v-adic vanishing versus ∞-adic eulerianness, 2017.

[12] C.-Y. Chang and Y. Mishiba. On a conjecture of furusho over function fields. *Inventiones mathematicae*, 223(1) :49–102, 2021.

[13] K. Chung. Factorization of coefficients for exponential and logarithm in function fields. *Journal of Number Theory*, 245 :263–291, 2023.

[14] J. Diaz-Vargas and E. Polanco-Chi. Riemann hypothesis for the Goss t-adic zeta function. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 46(2) :435–442, 2016.

[15] V. G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 23(4) :561, 1974.

[16] N. Fellini and M. R. Murty. Wieferich primes in number fields and the conjectures of Ankeny–Artin–Chowla and Mordell, 2025.

[17] E.-U. Gekeler. Towers of $GL(r)$-type of modular curves. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(754) :87–141, 2019.

[18] D. Goss. A Riemann hypothesis for characteristic p L-functions. *Journal of Number Theory*, 82(2) :299–322, 2000.

[19] M. Huang. On successive minimal bases of division points of Drinfeld modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 28(2) :249–295, 2024.

[20] A. Lucas. A P-adic class formula for Anderson t-modules. *arXiv preprint arXiv :2504.03430*, 2025.

[21] L. Taelman. A Dirichlet unit theorem for Drinfeld modules. *Mathematische Annalen*, 348(4) :899–907, 2010.

[22] L. Taelman. Special L-values of Drinfeld modules. *Annals of Mathematics*, pages 369–391, 2012.

[23] D. S. Thakur. Drinfeld modules and arithmetic in the function fields. *International Mathematics Research Notices*, 1992(9) :185–197, 1992.

[24] D. S. Thakur. *Function field arithmetic.* World Scientific, 2004.

[25] D. S. Thakur. Valuations of v-adic Power Sums and Zero Distribution for the Goss v-adic Zeta Function for $\mathbb{F}_q[t]$. *Journal of Integer Sequences*, 16(2) :3, 2013.

[26] D. Wan. On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function. *Journal of Number Theory*, 58(1) :196, 1996.

[27] J. Yu. Transcendence and special zeta values in characteristic p. *Annals of Mathematics*, 134(1) :1–23, 1991.