



ANTENNES – ESC

Cours 1: Equations de Maxwell et propagation des ondes

Alexis MARTIN

2025

- 
- 1 Equations de Maxwell**
 - 2 Ondes planes**
 - 3 Coordonnées cylindriques et sphériques**
 - 4 Approximation en champ lointain**

Equations de Maxwell

- Grandeurs instantanées: $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t), \vec{J}(\vec{r}, t), \vec{D}(\vec{r}, t)$,
- Equations de Maxwell:

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{E}(\vec{r}, t)) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}}(\vec{H}(\vec{r}, t)) &= \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{B}(\vec{r}, t)) = 0$$

$$\text{div}(\vec{E}(\vec{r}, t)) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Conservation de la charge:
 $\text{div}(\vec{J}(\vec{r}, t)) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- Relations constitutives du milieu:
 - $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_{3 \times 3} \vec{E}(\vec{r}, t)$
 - $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_{3 \times 3} \vec{H}(\vec{r}, t)$
 - $\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma_{3 \times 3} \vec{E}(\vec{r}, t)$
- $\vec{E}(\vec{r}, t)$: champ électrique (V/m)
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$: induction magnétique (T)
- $\vec{H}(\vec{r}, t)$: champ magnétique (A/m)
- $\vec{D}(\vec{r}, t)$: induction électrique (C/m^2)
- $\vec{J}(\vec{r}, t)$: densité de courant (A/m^2)

Equations de Maxwell

En régime sinusoïdal, découplage temps – position:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$$

On associe $\vec{E}(\vec{r}, t)$ à sa représentation complexe $\vec{E}(\vec{r})$:

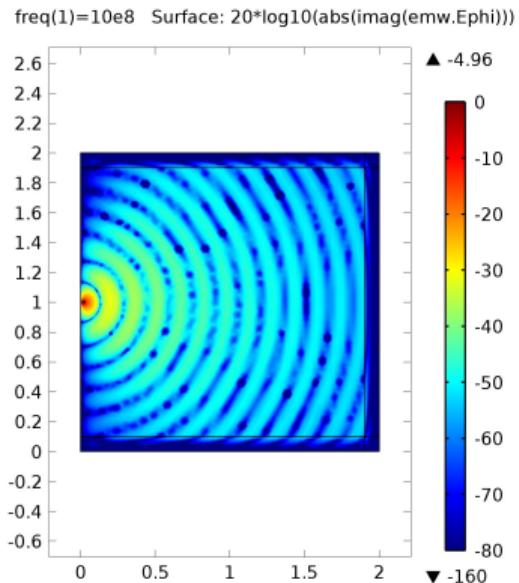
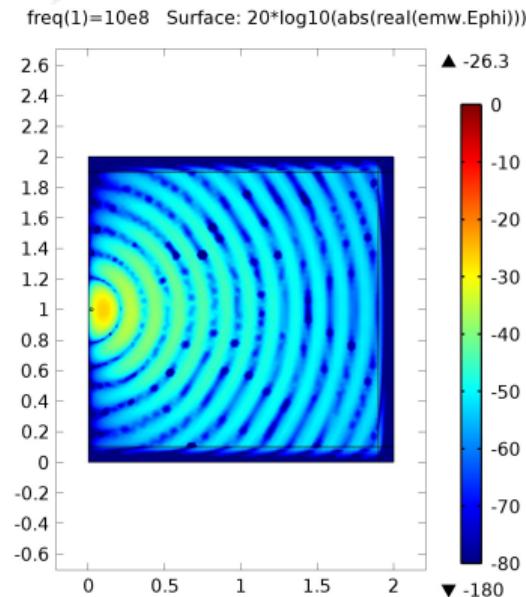
$$\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_m(\vec{r}) e^{j\varphi(\vec{r})}$$

Lorsque l'on utilise la représentation complexe, le temps n'intervient plus. Mais toutes les grandeurs ont une phase!

Représentation d'un champ complexe

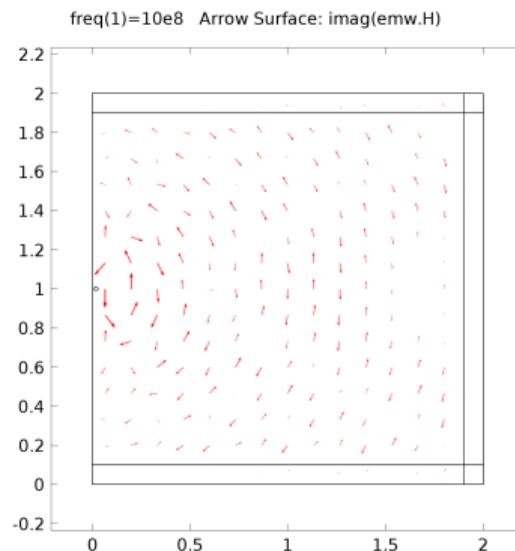
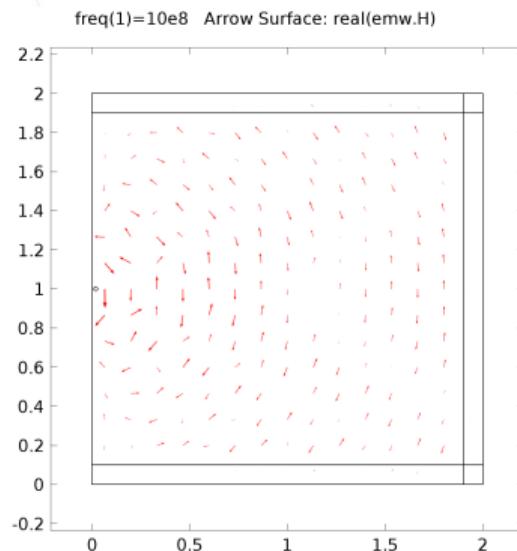
On peut uniquement représenter la partie réelle (composante en phase), et la partie imaginaire des champs (composante en quadrature).

Représentation en amplitude de E_{phi} (symétrie cylindrique):



Représentation d'un champ complexe

Représentation vectorielle:



Équations de Maxwell dans un milieu homogène et isotrope

En milieu homogène et isotrope, les constantes caractéristiques du matériau (ϵ , μ , σ) sont indépendantes du point et de la direction d'observation. Les équations deviennent alors:

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)) &= -j \omega \mu \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t) \\ \vec{\text{rot}}(\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t)) &= \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}, t) + j \omega \epsilon \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Et en l'absence de sources (c'est à dire en l'absence de courant extérieur):

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)) &= -j \omega \mu \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t) \\ \vec{\text{rot}}(\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t)) &= j \omega \epsilon \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Puissance “rayonnée” à travers une surface

Soit S_a une surface fermée. La puissance traversant cette surface est donnée par:

Vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

$$P = \operatorname{Re}(\iint_{S_a} \vec{P} \cdot d\vec{S})$$

Cette formule “fonctionne” aussi pour des surfaces ouvertes. Elle permet, par exemple, de calculer la puissance injectée dans un four à micro-ondes, en calculant cette intégrale surfacique, sur la surface de “sortie” du guide d’onde alimentant le four.

La même formule peut être utilisée en optique pour calculer, par exemple, la puissance transmise par un “faisceau” lumineux.

Ondes planes

En l'absence de source (ou à une distance très grande des sources), les équations de Maxwell permettent de déduire l'équation de propagation du champ électromagnétique:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{H} - \epsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ces solutions particulières sont les **ondes planes** et peuvent être exprimées par:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0) e^{-jk\vec{u} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(0) e^{-jk\vec{u} \cdot \vec{r}}$$

\vec{u} est un vecteur unitaire $||\vec{u}|| = 1$

La constante $\vec{k} = k\vec{u}$ est appelée vecteur d'onde de l'onde plane.

Si \vec{A} est une onde plane, on montre que:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{A}) &= -j\vec{k} \cdot \vec{A} \\ \text{rot}(\vec{A}) &= -j\vec{k} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

Ondes planes: résultats remarquables

\vec{k} , \vec{E} et \vec{H} forment une trièdre direct, avec:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\eta}(\vec{u} \wedge \vec{E}) \\ \vec{E} &= -\eta(\vec{u} \wedge \vec{H})\end{aligned}$$

$$\frac{||\vec{E}||}{||\vec{H}||} = \eta$$

La longueur d'onde λ est donnée par:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

L'impédance d'onde η est donnée par:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dans le vide: $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$ et $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3.10^8 \text{ m/s.}$

Ondes planes: résultats remarquables

La direction de propagation de l'onde plane est \vec{u} .

Les plans perpendiculaires à \vec{u} sont des plans équiphase.

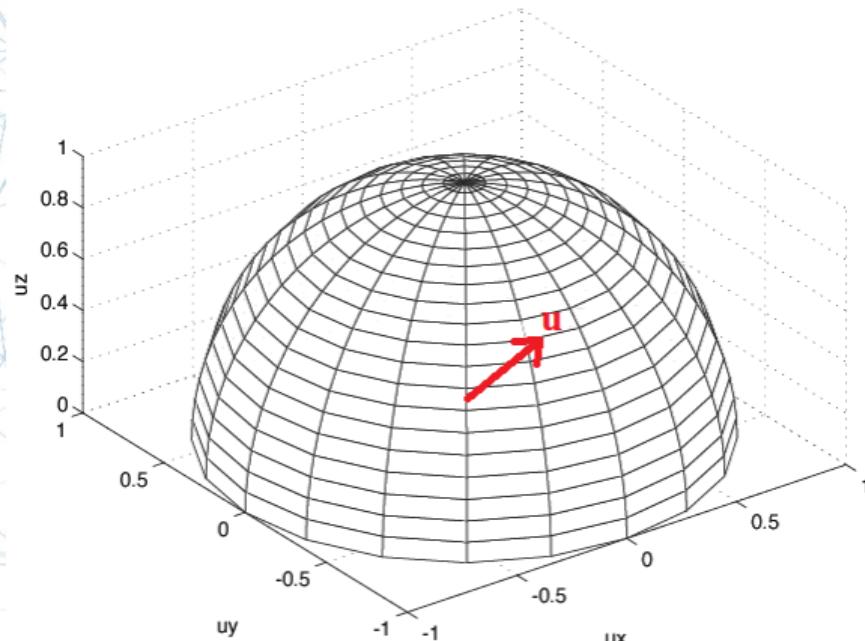
Le vecteur de Poynting est donné par:

$$\vec{P} = \frac{||\vec{E}||^2}{2\eta} \vec{u}$$

Une onde plane est **polarisée**: la direction de \vec{E} est partout la même, et celle-ci est perpendiculaire à \vec{u} .

Le **plan de polarisation** en un point est défini par le plan $(\vec{u}; \vec{E})$.

Relation vecteur u < - > direction d'observation

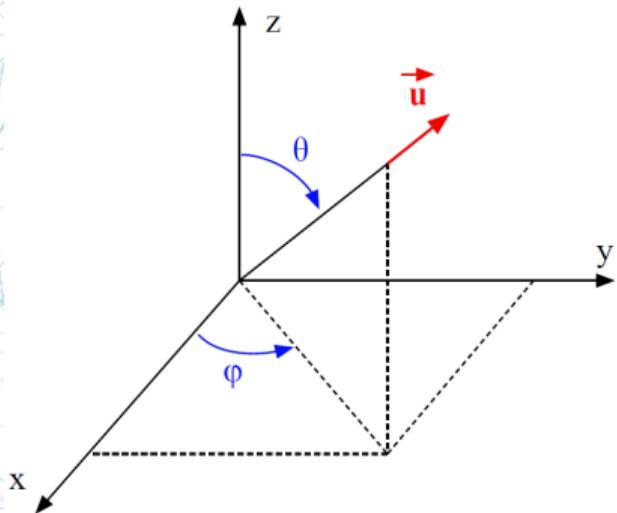


$$u_x = \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$u_y = \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$u_z = \cos(\theta)$$

Coordonnées sphériques



$$\vec{u} = \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_x = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_r + \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_\theta - \sin(\varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_y = \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_r + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_\theta + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_r = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\text{grad}}(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Coordonnées cylindriques

$$\vec{grad}(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Approximation en champ lointain

A l'infini, on peut montrer que les champs électriques et magnétiques sont reliés, localement, par:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

On utilise le terme d'onde *localement* plane, car même si cette relation est valable en chaque point, elle n'implique pas que la direction des champs soit la même partout.

En fait, les champs E et H sont tangents à une sphère centrée sur l'origine:

À direction constante, lorsque r varie, l'amplitude des champs varie en $\frac{1}{r}$ et la phase comme celle de e^{-jkr} .

L'approximation de champ lointain est valable pour une distance

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

, où D est la plus grande dimension de l'antenne.

