Recherche Opérationnelle

Chaînes de Markov finies et homogènes à temps discret

Jean-François Hêche

Institut de Mathématiques

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Les chaînes de Markov finies et homogènes à temps discret

- Les processus stochastiques : définition et classification
- La propriété de Markov et les processus markoviens
- Les chaînes de Markov finies et homogènes à temps discret
  - Probabilités de transition et matrices de transition
  - Équations de Chapman-Kolmogorov
  - Graphes représentatifs et classification
  - Distribution initiale et comportement transitoire
  - Comportement asymptotique des chaînes irréductibles
  - Comportement asymptotique des chaînes absorbantes

Les processus stochastiques

Un **processus stochastique** $\{X_t, t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Le paramètre t est généralement interprété comme le temps et appartient à un ensemble ordonné T.

La variable X_t représente l'**état** du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'**espace des états** du processus et sera noté S.

Classification

Un processus stochastique dont l'ensemble des états S est fini ou dénombrable est appelé une **chaîne**.

Un processus est **à temps continu** lorsque l'ensemble T est non dénombrable. Le plus souvent, on aura alors $T = \mathbb{R}_+$ et le processus sera noté $\{X_t, t \geq 0\}$ ou $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Un processus est **à temps discret** lorsque l'ensemble T est fini ou dénombrable. Le plus souvent, on aura alors $T = \mathbb{Z}_+$ et le processus sera noté $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ ou $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.

L'évolution d'un processus à temps discret est découpée en étapes ou périodes et le processus effectue une transition (peut-être stationnaire) à chaque étape.

Trajectoires et historiques

Tout évènement élémentaire $\omega \in \Omega$ définit une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$ pour tout $t \in T$ (plusieurs ω pouvant définir la même affectation). Ces valeurs représentent une évolution particulière du système appelée **trajectoire** ou **réalisation**.

Trajectoires et historiques

Tout évènement élémentaire $\omega \in \Omega$ définit une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$ pour tout $t \in T$ (plusieurs ω pouvant définir la même affectation). Ces valeurs représentent une évolution particulière du système appelée **trajectoire** ou **réalisation**.

Pour une trajectoire particulière, l'**historique** (ou **histoire**) du processus au temps t n'est rien d'autre que la suite $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$ des valeurs prises par la variable d'état X_t entre l'instant 0 (le début de l'évolution du processus) et l'instant t.

Trajectoires et historiques

Tout évènement élémentaire $\omega \in \Omega$ définit une affectation de valeurs à la variable d'état $X_t = X_t(\omega)$ pour tout $t \in T$ (plusieurs ω pouvant définir la même affectation). Ces valeurs représentent une évolution particulière du système appelée **trajectoire** ou **réalisation**.

Pour une trajectoire particulière, l'**historique** (ou **histoire**) du processus au temps t n'est rien d'autre que la suite $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$ des valeurs prises par la variable d'état X_t entre l'instant 0 (le début de l'évolution du processus) et l'instant t.

Pour $t \in T$ fixé, la fonction (de ω) $X_t = X_t(\omega)$ est une variable aléatoire représentant l'état du processus au temps t.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction (de t) $X_t = X_t(\omega)$ est une trajectoire ou réalisation du processus.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces plusieurs fois et on définit la variable d'état X_n comme la différence entre le nombre de résultats pairs et impairs après n lancés. La suite $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ est un processus stochastique à temps discret (on pose naturellement $X_0 = 0$). L'espace des états de ce processus est $S = \mathbb{Z}$.

L'évènement $\omega = (3, 5, 2, 2, 6, \ldots)$ définit la réalisation

$$\{X_n, n = 0, 1, \ldots\} = \{0, -1, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$$

et les évènements $\omega = (2, 1, 2, 6, 2, \ldots)$ et $\omega = (6, 5, 6, 4, 6, \ldots)$ définissent la réalisation

$$\{X_n, n = 0, 1, \ldots\} = \{0, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

La propriété de Markov et les processus markoviens

Un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ défini sur un espace d'états S satisfait la **propriété de Markov** si, pour tout instant $t \geq 0$ et tout sous-ensemble d'états $I \in S$, il est vrai que

$$P\left[X_{t+\Delta} \in I \mid X_u, 0 \leq u \leq t\right] = P\left[X_{t+\Delta} \in I \mid X_t\right] \qquad \forall\, \Delta > 0.$$

Un processus stochastique vérifiant la propriété précédente est appelé un **processus de Markov** ou **processus markovien**.

En mots, un processus est markovien si, pour tout instant t, l'état courant X_t résume, à lui seul, tout l'historique du système susceptible d'influencer son évolution future.

Les chaînes de Markov finies et homogènes à temps discret

Une **chaîne de Markov à temps discret** est un processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ à temps discret, défini sur un espace d'états dénombrable et vérifiant la propriété de Markov

$$P\left[X_n = i \mid X_0, \ldots, X_{n-1}\right] = P\left[X_n = i \mid X_{n-1}\right]$$

pour tout $i \in S$ et quel que soit $n \geq 1$.

Une chaîne de Markov à temps discret est **homogène** (dans le temps) si, pour tout paire d'états (i, j) et tout instant n,

$$P\left[X_n = j \mid X_{n-1} = i\right] = P\left[X_{n+k} = j \mid X_{n+k-1} = i\right]$$

quel que soit $k \geq 0$.

Hypothèse

Dès à présent et pour le reste de ce chapitre, le terme chaîne de Markov (CM) désignera (sauf mention contraire explicite) une chaîne de Markov à temps discret, définie sur un ensemble d'états S fini et homogène dans le temps.

Notons que les résultats que nous allons présenter s'appliquent le plus souvent tels quels aux chaînes de Markov à temps discret, homogènes mais définies sur un espace d'états dénombrable (par exemple lorsque $S = \mathbb{Z}$). Cette classe de processus comprend, cependant, des cas pathologiques nécessitant une analyse plus fine sans grand intérêt pour la plupart des applications pratiques.

Probabilités de transition et matrice de transition

Pour une chaîne de Markov homogène $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, on a

$$P\left[X_n = j \mid X_{n-1} = i\right] = P\left[X_1 = j \mid X_0 = i\right] \qquad \forall\, n \geq 1.$$

On peut donc définir la **probabilité de transition (en 1 étape) de i à j** comme

$$p_{ij} = P\left[X_1 = j \mid X_0 = i\right] \qquad \forall\,(i, j) \in S^2.$$

En mots, la probabilité p_{ij} est égale à la probabilité conditionnelle que le système se retrouve dans l'état j à l'étape suivante sachant qu'il se trouve actuellement dans l'état i.

Si la chaîne possède $s = |S|$ états, les probabilités précédentes peuvent être rangées dans une **matrice de transition** $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ de taille $s \times s$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de S.

Matrices stochastiques

Une matrice carrée $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ est **stochastique** si

1) ses éléments sont non négatifs : $p_{ij} \geq 0$ pour tout i et j ;

2) la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à 1 : $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout i.

Propriété 1. *Une matrice de transition est une matrice stochastique.*

Propriété 2. *Soit $\boldsymbol{P}$ une matrice stochastique de taille s finie, alors toute puissance $\boldsymbol{P}^m$, $m \geq 0$, de $\boldsymbol{P}$ est une matrice stochastique.*

Preuve. Par induction, le résultat est vrai pour $m = 0$ ($\boldsymbol{P}^0 = \boldsymbol{I}$ pour tout $\boldsymbol{P}$ carrée) et $m = 1$. Pour $m \geq 1$, on a $(\boldsymbol{P}^m)_{ij} \geq 0, \forall\, i, j$ et, $\forall\, i$,

$$\sum_j (\boldsymbol{P}^m)_{ij} = \sum_j \sum_k (\boldsymbol{P}^{m-1})_{ik} p_{kj} = \sum_k \left[(\boldsymbol{P}^{m-1})_{ik} \sum_j p_{kj} \right] = 1.$$

Probabilités de transition en m étapes

La probabilité conditionnelle d'aller de i à j en m étapes exactement est

$$p_{ij}^{(m)} = P\left[X_m = j \mid X_0 = i\right] = P\left[X_{n+m} = j \mid X_n = i\right] \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Cette probabilité est indépendante de n car le processus est homogène et est appelée la **probabilité de transition en m étapes de i à j**.

La matrice $\boldsymbol{P}^{(m)}$ dont l'élément (i, j) est égal à $p_{ij}^{(m)}$ est appelée la **matrice de transition en m étapes**.

Remarque. On a évidemment $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ et $\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P}$.

Convention. On adoptera la convention naturelle $\boldsymbol{P}^{(0)} = \boldsymbol{I}$, c.-à-d.

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Théorème 1. *Pour tout $m \geq 0$, la probabilité $p_{ij}^{(m)}$ de transition de i à j en m étapes est donnée par l'élément (i, j) de la matrice $\boldsymbol{P}^m$.*

Sous forme matricielle ce résultat s'écrit : $\boldsymbol{P}^{(m)} = \boldsymbol{P}^m$, pour tout $m \geq 0$.

Théorème 1. *Pour tout $m \geq 0$, la probabilité $p_{ij}^{(m)}$ de transition de i à j en m étapes est donnée par l'élément (i, j) de la matrice $\boldsymbol{P}^m$.*

Sous forme matricielle ce résultat s'écrit : $\boldsymbol{P}^{(m)} = \boldsymbol{P}^m$, pour tout $m \geq 0$.

Preuve. Le résultat est vrai pour $m = 0$ et 1. Supposons-le vrai pour $m - 1$. Utilisant la loi des probabilités totales, nous obtenons, pour tout $i, j \in S$,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m)} &= P\left[X_m = j \mid X_0 = i\right] \\ &= \sum_{k \in S} P\left[X_m = j \mid X_{m-1} = k\right] P\left[X_{m-1} = k \mid X_0 = i\right] \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)}\, p_{ik}^{(m-1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m-1)}\, p_{kj} \\ &= \sum_{k \in S} \left(\boldsymbol{P}^{m-1}\right)_{ik} (\boldsymbol{P})_{kj} = \left(\boldsymbol{P}^m\right)_{ij}. \end{aligned}$$

Équations de Chapman-Kolmogorov

Corollaire 1. *Soit $\boldsymbol{P}^{(n)}$, $n \geq 0$, la matrice de transition en n étapes d'une chaîne de Markov. Alors pour tout entier non négatif l et m*

$$\boldsymbol{P}^{(l+m)} = \boldsymbol{P}^{(l)}\boldsymbol{P}^{(m)}$$

ce qui sous forme développée s'écrit

$$p_{ij}^{(l+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(l)}\, p_{kj}^{(m)} \qquad \forall\, i, j \in S.$$

Graphes représentatifs

La matrice de transition $\boldsymbol{P}$ d'une chaîne de Markov peut être représentée par un graphe orienté $G = (V, E)$ dont les sommets correspondent aux états de la chaîne et où un arc relie les sommets associés aux états i et j si la probabilité de transition de i à j est positive, c.-à-d. si $p_{ij} > 0$.

Le graphe ainsi défini est appelé le **graphe représentatif**, ou **graphe de transition**, de la chaîne de Markov.

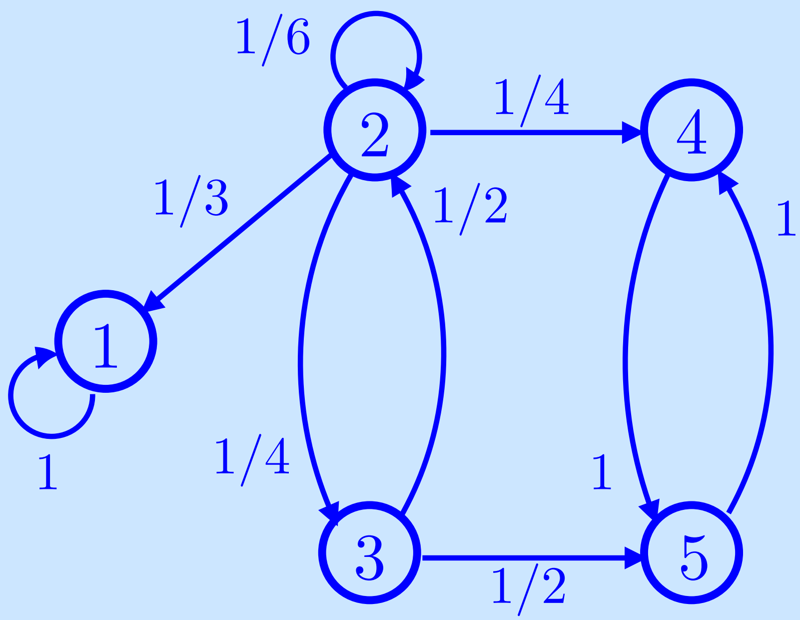
Remarque. Les sommets du graphe représentatif G d'une chaîne étant en bijection avec les états de cette dernière, nous parlerons souvent de l'état i de G tout en gardant à l'esprit qu'une telle expression désigne, en fait, le sommet de G associé à l'état i.

Exemple

Matrice de transition $\boldsymbol{P}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe représentatif G



Remarque. L'ensemble des états de la chaîne est $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Classes et graphe réduit

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov et $G = (V, E)$ le graphe représentatif de $\boldsymbol{P}$.

L'état j est **accessible** depuis l'état i s'il existe, dans G, au moins un chemin de i à j.

Remarque. Tout état j est accessible depuis lui-même.

Propriété 3. *L'état j est accessible depuis l'état i si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Classes et graphe réduit

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov et $G = (V, E)$ le graphe représentatif de $\boldsymbol{P}$.

L'état j est **accessible** depuis l'état i s'il existe, dans G, au moins un chemin de i à j.

Remarque. Tout état j est accessible depuis lui-même.

Propriété 3. *L'état j est accessible depuis l'état i si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Les états i et j **communiquent** s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre.

Propriété 4. *Les états i et j communiquent si et seulement s'il existe $n \geq 0$ et $m \geq 0$ tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$.*

La relation « i et j communiquent » est une relation d'équivalence dont les classes correspondent aux composantes fortement connexes de G. Ainsi, les états i et j communiquent si et seulement s'ils appartiennent à la même composante fortement connexe de G.

Les **classes** de la chaîne correspondent aux composantes fortement connexes de G.

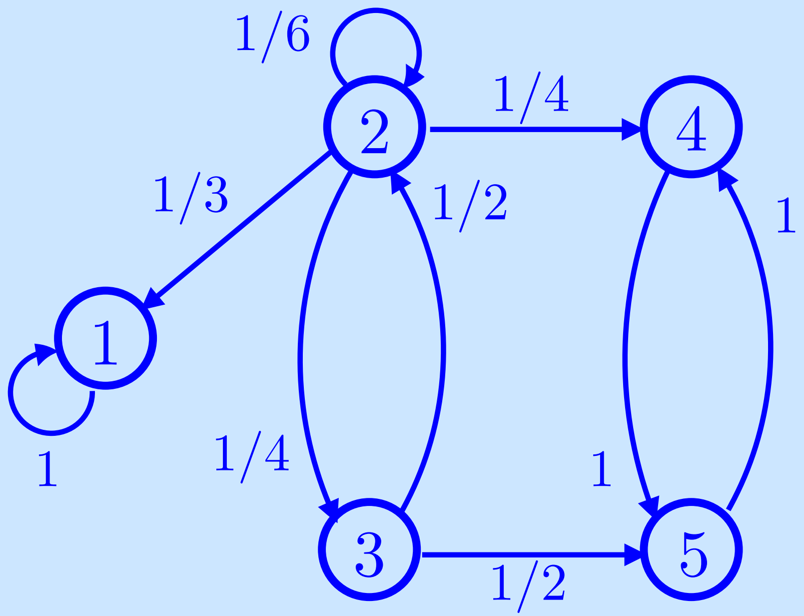
Si $C_1, \ldots, C_r$ dénotent les classes d'une chaîne de Markov, le **graphe réduit** G_R de la chaîne est obtenu en associant un sommet à chaque classe C_i et en reliant les sommets u et v par un arc (u, v) s'il existe $i \in C_u$ et $j \in C_v$ avec $p_{ij} > 0$.

Propriété 5. *Le graphe réduit G_R d'une chaîne de Markov est un graphe sans circuit.*

Exemple

Pour la chaîne de Markov de l'exemple précédent, on a

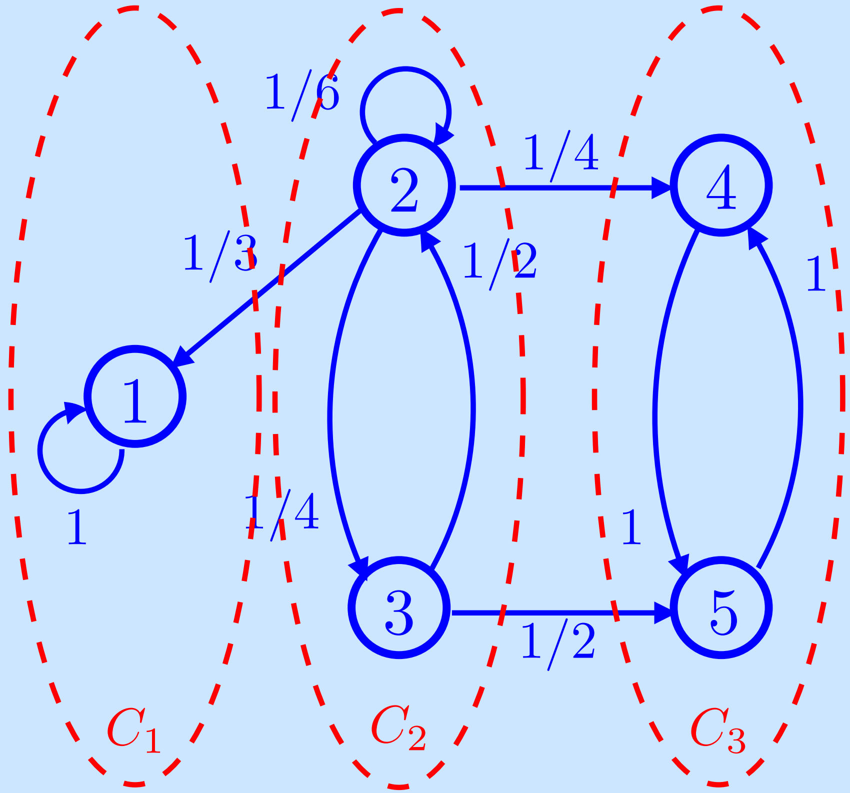
Graphe représentatif



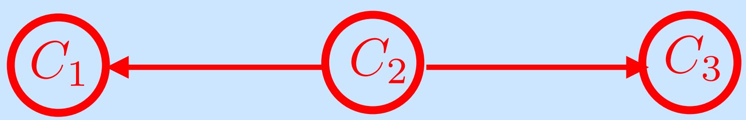
Exemple

Pour la chaîne de Markov de l'exemple précédent, on a

Graphe représentatif



Graphe réduit



Classification des classes et des états

Une classe est **persistante** si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est **transitoire**.

Les états d'une classe persistante sont **persistants** ou **récurrents** et ceux d'une classe transitoire sont **transitoires**.

Une classe persistante composée d'un seul état est **absorbante** et un état est **absorbant** s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

Propriété 6. *L'état i est absorbant si et seulement si $p_{ii} = 1$ (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall\, j \neq i$).*

Classification des chaînes

Une chaîne de Markov est **irréductible** si elle ne compte qu'une seule classe. Dans le cas contraire, elle est **réductible**.

Propriété 7. *Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.*

Propriété 8. *Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.*

Une chaîne de Markov est **absorbante** si tous ses états persistants le sont.

Période

La **période** d de l'état i d'une chaîne de Markov est égale au plus grand commun diviseur de tous les n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$.

L'état i est **périodique** lorsque $d > 1$ et **apériodique** lorsque $d = 1$.

Propriété 9. *L'état i a période d si et seulement si d est le plus grand commun diviseur des longueurs des circuits (pas forcément élémentaires) du graphe représentatif G passant par i.*

Propriété 10. *Si $p_{ii} > 0$, l'état i est apériodique.*

Théorème 2. *Les états d'une classe ont tous la même période.*

La période étant une propriété de classe, on parlera de classes **périodiques / apériodiques** et de chaînes de Markov irréductibles **périodiques / apériodiques** selon les propriétés de leurs états.

Distribution des états d'une chaîne

La **distribution des états** d'une chaîne de Markov après n transitions est notée $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$. Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable aléatoire X_n

$$\pi_i^{(n)} = P[X_n = i] \qquad \forall\, i \in S.$$

La distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ dépend de la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ mais également de l'état dans lequel le processus a commencé son évolution. De manière générale, cet état est choisi selon une **distribution initiale** $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$.

Remarque. Si l'état initial est connu avec certitude et est égal à i, on a simplement $\pi_i^{(0)} = 1$ et $\pi_j^{(0)} = 0$ pour tout $j \neq i$.

Comportement transitoire

Théorème 3. *Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov et $\pi^{(0)}$ la distribution de son état initial. Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\boldsymbol{P}$$

et

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}^{n}.$$

Preuve. Premièrement, on a, pour tout $j \in S$,

$$\begin{aligned} \pi_j^{(1)} &= P[X_1 = j] = \sum_{i \in S} P[X_1 = j \mid X_0 = i] P[X_0 = i] \\ &= \sum_{i \in S} p_{ij}\pi_i^{(0)} = \sum_{i \in S} \pi_i^{(0)} p_{ij} \end{aligned}$$

et

$$\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}.$$

La chaîne étant homogène, on obtient immédiatement le premier résultat

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\boldsymbol{P} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Pour démontrer le second il suffit de résoudre l'équation de récurrence précédente par substitution. $\square$

Comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que

- la distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ converge-t-elle lorsque $n \to \infty$?
- si la distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ converge lorsque $n \to \infty$, quelle est la limite $\boldsymbol{\pi}^*$ et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$?
- si l'état i est persistant, quelle est la proportion du temps passé dans cet état et quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état ?
- si l'état i est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

Distribution invariante

Une distribution $\boldsymbol{\pi}$ est **invariante** ou **stationnaire** si

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{P}.$$

Propriété 11. *Si* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)}$ *existe, alors la limite est une distribution invariante.*

Les deux résultats suivants sont cités sans preuve.

Théorème 4. *Une chaîne de Markov possède toujours au moins une distribution invariante.*

Théorème 5. *Une chaîne de Markov possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre* 1 *de sa matrice de transition.*

Théorème 6. *La distribution $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ des états d'une chaîne de Markov converge vers une distribution (invariante) $\boldsymbol{\pi}^*$ indépendante de la distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ si et seulement si la suite des puissances de la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ de la chaîne converge vers une matrice (stochastique) $\boldsymbol{P}^*$ dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, si tel est le cas, chaque ligne de $\boldsymbol{P}^*$ est égale à $\boldsymbol{\pi}^*$.*

Preuve. La condition est nécessaire car si, indépendamment de $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^*$, il suffit de considérer successivement les distributions initiales

$$\boldsymbol{\pi}_1 = (1\ 0\ \ldots\ 0\ ) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\pi}_s = (0\ \ldots\ 0\ 1)$$

pour obtenir

$$\boldsymbol{\pi}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{P}^n = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{P}^n)_i = (\boldsymbol{P}^*)_i\,.$$

Ainsi $\boldsymbol{P}^*$ existe et toutes ses lignes sont égales à $\boldsymbol{\pi}^*$.

La condition est suffisante. Si $\boldsymbol{P}^*$ existe et si $p_{ij}^* = p_j^*$ pour tout $i \in S$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}^*$$

et la limite $\boldsymbol{\pi}^*$ existe. De plus

$$\pi_j^* = \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} p_{ij}^* = \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} p_j^* = p_j^* \sum_{i\in S} \pi_i^{(0)} = p_j^*$$

et $\boldsymbol{\pi}^*$ est indépendante de $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ et identique à n'importe quelle ligne de $\boldsymbol{P}^*$.
$\square$

Remarque. Si $\boldsymbol{\pi}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^n$, on parlera de distribution **asymptotique**, **stationnaire** ou **invariante**.

Les chaînes irréductibles et apériodiques

Le théorème suivant résume le comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques.

Théorème 7. *Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- *La matrice $\boldsymbol{P}^n$ tend vers une matrice stochastique $\boldsymbol{P}^*$ lorsque n tend vers l'infini.*
- *Les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales entre elles.*
- *$p^*_{ij} > 0$ pour tout $i, j \in S$.*
- *Pour toute distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}^*.$$

- $\boldsymbol{\pi}^*$ *est la solution unique du système*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} & = & \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}\mathbf{1} & = & 1. \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\pi}^*$ *est égal à n'importe quelle ligne de la matrice* $\boldsymbol{P}^*$*.*
- *Pour tout* $i \in S$*,*

$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$$

où μ_i *est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état* i*.*

Remarque. Pour n suffisamment grand, on a $\boldsymbol{\pi}^{(n)} \simeq \boldsymbol{\pi}^*$ et π_i^* « est » la probabilité que la chaîne se trouve dans l'état i à un instant quelconque. Cette valeur représente aussi la proportion du temps passé dans l'état i.

Exemple

Soit la chaîne de Markov irréductible et apériodique définie par la matrice de transition

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution du système

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi P} & = & \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi 1} & = & 1 \end{cases}$$

est

$$\boldsymbol{\pi}^* = (1/4 \quad 3/10 \quad 9/20)\,.$$

Le processus passe donc, en moyenne, 30% du temps dans l'état 2 et il faut, en moyenne, 4 transitions entre deux visites successives de l'état 1.

Les chaînes ergodiques

Une chaîne de Markov est **ergodique** si elle admet une distribution asymptotique, *i.e.* si $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)}$ existe, unique et indépendante de la distribution initiale.

Propriété 12. *Les chaînes irréductibles et apériodiques sont ergodiques.*

Théorème 8. [Théorème ergodique] *Soit $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ une chaîne de Markov ergodique de distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}^*$ et f une fonction réelle définie sur l'espace des états S de la chaîne. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \sum_{i\in S} \pi_i^* f(i)$$

presque sûrement.

Les chaînes irréductibles périodiques

Lemme 1. *Si une chaîne de Markov a période d, l'ensemble S de ses états peut être divisé en d classes disjointes $D_0, D_1, \ldots, D_{d-1}$ de manière à ce que chaque transition se fasse d'une classe D_k à la classe D_{k+1}, les indices étant pris modulo d.*

En (re-)numérotant de manière consécutive les états de chaque classe D_k, la matrice $\boldsymbol{P}^d$ prend la forme

$$\boldsymbol{P}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{P}_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Chaque matrice $\boldsymbol{P}_i$ définit une chaîne irréductible et apériodique sur l'ensemble des états de la classe D_i. Une transition de la chaîne associée à $\boldsymbol{P}_i$ correspond à d transitions de la chaîne initiale.

Convergence au sens de Cesàro

Une suite $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ converge au sens de Cesàro vers X^* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = X^*.$$

La convergence au sens de Cesàro est une convergence en moyenne contrairement à la définition ordinaire qui est une convergence en valeur.

La convergence ordinaire implique la convergence au sens de Cesàro mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple. La suite $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ converge vers $\frac{1}{2}$ au sens de Cesàro.

Comportement asymptotique

En remplaçant la convergence ordinaire par celle au sens de Cesàro, les chaînes de Markov irréductibles présentent toutes les mêmes propriétés asymptotiques, indépendamment de leur période.

En particulier, la suite des puissances de $\boldsymbol{P}$ converge en moyenne vers une matrice stochastique $\boldsymbol{P}^*$ ayant toutes ses lignes égales. De même, la suite des distributions $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ converge, au sens de Cesàro, vers une distribution $\boldsymbol{\pi}^*$, unique et indépendante de la distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$. De plus $\boldsymbol{\pi}^*$ est égal à n'importe quelle ligne de $\boldsymbol{P}^*$.

Remarque. Si la chaîne a période d, chaque matrice $\boldsymbol{P}_i$ définit une chaîne ergodique possédant une distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}_i^*$. On a alors

$$\boldsymbol{\pi}^* \quad \text{``}{=}\text{''} \quad \frac{1}{d}(\boldsymbol{\pi}_0^* \quad \text{``}{+}\text{''} \quad \ldots \quad \text{``}{+}\text{''} \quad \boldsymbol{\pi}_{d-1}^*).$$

Les chaînes réductibles

Théorème 9. *Pour tout état initial i, la probabilité de se retrouver dans un état persistant à l'étape n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.*

Preuve. Soit $p_i(m) = P[X_m \text{ transitoire} \mid X_0 = i]$. Si $s = |S|$, on a $p_i(s) < 1$ pour tout $i \in S$ car il est possible d'atteindre un état persistant en au plus s transitions depuis n'importe quel état initial. Ainsi

$$p = \max_{i \in S}(p_i(s)) < 1$$

et, pour tout $i \in S$,

$$p_i(2s) = \sum_{j \text{ transitoire}} p_{ij}^{(s)} p_j(s) \leq \sum_{j \text{ transitoire}} p_{ij}^{(s)} p = p_i(s)p \leq p^2.$$

Ainsi $p_i(ks) \leq p^k$ et $\lim_{k\to\infty} p_i(ks) = 0$.

D'autre part, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} p_i(n+1) &= \sum_{j \text{ trans.}} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{j,k \text{ trans.}} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \\ &= \sum_{k \text{ trans.}} p_{ik}^{(n)} \left(\sum_{j \text{ trans.}} p_{kj} \right) \leq p_i(n) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} p_i(n) = 0$. □

Corollaire 2. $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ *pour tout* j *transitoire, quel que soit* i.

Forme canonique

La matrice de transition d'une chaîne de Markov réductible est sous **forme canonique** si

1. les sommets d'une classe (persistante) sont numérotés consécutivement ;
2. les sommets persistants sont numérotés en premier.

Si une chaîne a k classes persistantes, sa matrice sous forme canonique ressemble à

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{P_1} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{P_k} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{R}_1 & \cdots & \boldsymbol{R}_k & \boldsymbol{Q} \end{array}\right).$$

Chaque sous-matrice $\boldsymbol{P}_i$ définit une chaîne de Markov irréductible sur l'ensemble des états de la classe persistante C_i.

Remarque. Pour obtenir une matrice de transition sous forme canonique, il est important de numéroter consécutivement les états de chaque classe persistante.

La matrice de transition, sous forme canonique, d'une chaîne absorbante est

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array} \right).$$

Matrice fondamentale

Lemme 2. *Soit $\boldsymbol{Q}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{0}$, alors*

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n.$$

Preuve. On va utiliser l'identité

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots + \boldsymbol{Q}^{n-1}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n.$$

1. On a $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n) = \boldsymbol{I}$ et, par linéarité du déterminant, $\lim_{n\to\infty} \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$.
2. $\det(\boldsymbol{A})$ étant une fonction continue des éléments de $\boldsymbol{A}$, $\exists\, m$ t.q. $\forall\, n \geq m$, $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n) > 0$ et $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ existe.

3. $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\ldots+\boldsymbol{Q}^{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n) = \boldsymbol{I}$ et $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}^n$.

$\square$

Corollaire 3. *Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition, sous forme canonique, d'une chaîne de Markov absorbante. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n = \lim_{n\to\infty}\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{Q}^k\boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \end{array}\right).$$

La matrice $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ est appelée la **matrice fondamentale** de la chaîne de Markov.

Temps avant absorption

Théorème 10. *Le nombre moyen de périodes séjournées dans l'état transitoire j par une chaîne de Markov débutant sont évolution dans l'état transitoire i est égal à l'élément n_{ij} de la matrice fondamentale $\mathbf{N}$.*

Preuve. Posons $F_j(X_n) = 1$ si $X_n = j$ et $F_j(X_n) = 0$ sinon. Le nombre de visites dans l'état j est

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n)$$

et l'espérance cherchée est

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n) \;\middle|\; X_0 = i\right].$$

Or,

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=0}^{\infty} F_j(X_n) \;\middle|\; X_0 = i\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[F_j(X_n) \mid X_0 = i\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} = n_{ij}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Corollaire 4. *Partant de l'état transitoire i, le nombre moyen de transitions avant d'atteindre un état absorbant (persistant) est égal à la somme des termes de la i^{e} ligne de la matrice fondamentale $\mathbf{N}$.*

Exemple : roulette française

Vous sentant en veine vous avez achetez 3 jetons et vous vous dirigez vers la table de roulette la plus proche. Votre stratégie est simple : vous misez un jeton à chaque jeu et ne sélectionnez que les chances simples (pair/impair, rouge/noir, manque/passe). De plus vous arrêtez de jouer dès que vous avez doublé votre mise initiale ou, mais cela n'arrivera évidemment pas, dès que vous êtes ruiné.

Définissant X_n comme votre nombre de jeton après n jeux, la suite $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ est une chaîne de Markov sur l'espace des états $S = \{0, 1, \ldots, 6\}$

Pour $i = 1, \ldots, 5$, on a $p_{i,i+1} = \frac{18}{37}$ et $p_{i,i-1} = \frac{19}{37}$. Pour $i = 0$ ou 6, on a $p_{ii} = 1$. Ces deux états sont absorbants, les autres transitoires et la chaîne est absorbante.

Pour l'ordre des états $\{0, 6, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{P}$ est sous forme canonique

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{37} \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|ccccc} 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 19 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Pour l'ordre des états $\{0, 6, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{P}$ est sous forme canonique

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{37} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccccc} 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 19 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

La matrice fondamentale de la chaîne est

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.67 & 1.3 & .945 & .613 & .298 \\ 1.37 & 2.66 & 1.94 & 1.26 & .613 \\ 1.05 & 2.05 & 2.99 & 1.94 & .945 \\ .72 & 1.4 & 2.05 & 2.66 & 1.3 \\ .37 & .72 & 1.05 & 1.37 & 1.67 \end{pmatrix}$$

et pour $X_0 = 3$, le nombre moyen de jeux est

$$1.05 + 2.05 + 2.99 + 1.94 + .945 = 8.975.$$

Probabilités d'absorption

Théorème 11. *La probabilité d'être absorbé par l'état j partant de l'état transitoire i est donnée par l'élément b_{ij} de la matrice*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R}.$$

Preuve. La probabilité cherchée est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \text{ transitoire}} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \right).$$

Or, $p_{ik}^{(n)} = q_{ik}^{(n)}$ et $p_{kj} = r_{kj}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \text{ trans.}} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \right) = \sum_{k \text{ trans.}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_{ik}^{(n)} \right) r_{kj} = \sum_{k \text{ trans.}} n_{ik} r_{kj} = b_{ij}.$$

Exemple : roulette française (suite)

La matrice des probabilités d'absorption de la chaîne est

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} .855 & .145 \\ .702 & .298 \\ .54 & .46 \\ .37 & .63 \\ .19 & .81 \end{pmatrix}$$

Votre probabilité de finir ruiné est donc de 0.54 et celle de doubler votre mise de 0.46.

Exemple : roulette française (suite)

La matrice des probabilités d'absorption de la chaîne est

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} .855 & .145 \\ .702 & .298 \\ .54 & .46 \\ .37 & .63 \\ .19 & .81 \end{pmatrix}$$

Votre probabilité de finir ruiné est donc de 0.54 et celle de doubler votre mise de 0.46.

Remarque. À la roulette américaine, qui possède non seulement un 0 mais également un 00, votre probabilité de ruine monte à 0.578 ! Pas con l'oncle Sam !

Les chaînes ergodiques (suite)

Une chaîne de Markov à temps discret est ergodique si la distribution de ses états converge vers une distribution stationnaire unique, qui est alors indépendante de la distribution initiale de la chaîne.

Les chaînes irréductibles et apériodiques sont ergodiques mais ce ne sont pas les seules.

En fait une chaîne est **ergodique** si et seulement si

1) elle possède une seule classe persistante ;

2) ses états persistants sont apériodiques.

Étude d'une chaîne réductible

L'étude d'une chaîne de Markov réductible se décompose en deux étapes.

1) Étude des classes persistantes

   On applique les résultats obtenus pour les chaînes irréductibles afin de déterminer la période et la distribution stationnaire de chacune des sous-chaînes associées aux classes persistantes.

2) Étude des classes transitoires

   On rend la chaîne absorbante soit en contractant les classes persistantes en un seul état, soit en rendant absorbants tous les états persistants.

   On calcule ensuite les temps moyens avant absorption (donnés par la matrice fondamentale $\boldsymbol{N}$) et les probabilités d'absorption (données par la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$).

Analyse d'une chaîne de Markov (résumé)

(1) Classification de la chaîne et de ses états

- Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
- Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
- Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

Analyse d'une chaîne de Markov (résumé)

(1) Classification de la chaîne et de ses états

- Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
- Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
- Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

(2) Étude des classes persistantes

Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

- Déterminer sa période en examinant les circuits de G.
- Calculer sa distribution stationnaire en résolvant $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\pi 1} = 1$.

(3) Étude des états transitoires

- Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante (cette transformation n'est pas nécessaire).
- Mettre la matrice de la chaîne sous forme canonique.
- Calculer la matrice fondamentale $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ et la matrice des probabilités d'absorption $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$.