

PRÁCTICA 3 - Relaciones, Funciones y Operaciones

Relaciones

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ y $C = \{3, 4, 7\}$, determinar los siguientes conjuntos, graficarlos como subconjuntos del plano y hallar dominio e imagen:

- a) $A \times B$ c) $(A \times A) \cup (B \times C)$ e) $(A \times C) \cup (B \times C)$
b) $B \times A$ d) $(A \cup B) \times C$

2. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, $C = (\frac{3}{2}, 3) \subseteq \mathbb{R}$. Determinar gráficamente en \mathbb{R}^2 :

- a) $A \times C$ c) $(A \cup B) \times C$ e) $(A \cap C) \times C$
b) $B \times C$ d) $(A \times C) \cup (B \times C)$

En cada caso determinar un punto del plano que pertenezca al conjunto dado y uno que no.

3. Sean A, B, C, D subconjuntos no vacíos de un universo U . Demostrar que

- a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
b) $A \times B \subseteq C \times D$ si y sólo si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

4. a) ¿Para qué conjuntos $A, B \subseteq U$ se verifica $A \times B = B \times A$?
b) ¿Existe alguna relación entre $P(A \times B)$ y $P(A) \times P(B)$?

5. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ dar ejemplos de:

- a) Tres relaciones binarias no vacías de A en B . Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
b) Tres relaciones binarias no vacías en A . Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, expresar por extensión el subconjunto R de $A \times B$ definido por:

- a) $(x, y) \in R$ si y sólo si $x+y$ es múltiplo de 3. b) xRy si y sólo si $y-x$ es primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión el subconjunto R de $A \times A$ definido por las relaciones siguientes:

- a) $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 6$. b) $x R y$ si $x = y - 1$.

8. Esbozar la gráfica de cada una de las relaciones siguientes de A en B y determinar su imagen.

- a) $\{(x, y)/x < y \leq 0\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$.

- b) $\{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
 c) $\{(x, y)/0 \leq x < 1, y \geq x\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$.
 d) $\{(x, y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$.
 e) $\{(x, y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\}$ $A = \mathbb{N}$ $B = \mathbb{R}$.
 f) $\{(x, \sqrt{x}), x \in \mathbb{R}\}$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}_0^+$.

9. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar $R(1)$, $R(3)$, $R^{-1}(4)$, $R^{-1}(5)$.

10. Con referencia a las relaciones del ejercicio 8, hallar:

- a) En (a), $R((-1, \frac{1}{2}))$, $R([-3, 5])$, $R(\mathbb{Z})$, $R^{-1}([-4, 2])$, $R^{-1}(\{-7\})$, $R^{-1}(\mathbb{N})$.
 b) En (b), $R(\{5\})$, $R(\{2, 3, 5\})$, $R()$, $R^{-1}(\{1, 3\})$, $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}()$.
 c) En (d), $R((5, 6))$, $R([3, 5])$, $R((3, 5))$, $R^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$, $R^{-1}((-4, 4])$, $R^{-1}((1, \frac{12}{10}))$.

11. Sean A , B y C conjuntos, R una relación de A en B y S una relación de B en C . Hallar, en cada caso $S \circ R$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$ sus dominios e imágenes.

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$.
 $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$
 b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{s, t, u\}$.
 $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$, $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$
 c) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{s, t, u, v\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 $R = \{(a, s), (a, t), (c, v), (d, u)\}$, $S = \{(s, 2), (t, 1), (t, 4), (u, 3)\}$

12. Sean $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ y sean $R = \{(1, 3), (1, 4), (4, 4)\}$ una relación de A en B y $S = \{(1, 1), (3, 4), (3, 2)\}$ una relación de B en A . Hallar:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $S \circ R$ | d) $Dom(R \circ S)$ |
| b) $R \circ S$ | e) $Im(S \circ R)$ |
| c) $Dom(S \circ R)$ | f) $Im(R \circ S)$ |

Relaciones en un conjunto

13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación R definida en \mathbb{Z} es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. Para los casos a, b, c, d y e determinar $R(1)$ y $R^{-1}(1)$.

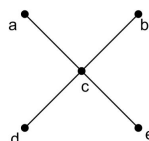
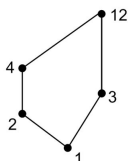
- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $(x, y) \in R$ si $x = y^2$; | d) $(x, y) \in R$ si $x + y$ es par; | f) $(x, y) \in R$ si $x^3 + y^3$ es par. |
| b) $(x, y) \in R$ si $x > y$; | e) $(x, y) \in R$ si $x - y$ es im- | |
| c) $(x, y) \in R$ si $x \geq y$; | par; | |

14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Proporcionar ejemplos de relaciones en A que tengan las propiedades especificadas en cada caso.

- a) Reflexiva, simétrica y no transitiva. c) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.
b) Reflexiva, no simétrica y no antisimétrica. d) No reflexiva, simétrica y transitiva.
15. Sean R_1 y R_2 relaciones reflexivas en un conjunto A . Determinar si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta:
- a) $R_1 \cup R_2$ es reflexiva; c) $R_1 \circ R_2$ es reflexiva.
b) $R_1 \cap R_2$ es reflexiva;
16. Repetir el ejercicio anterior cambiando "reflexiva" por simétrica, antisimétrica o transitiva.
17. Sea A un conjunto finito no vacío con $|A| = n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.
- a) Si R es una relación reflexiva sobre A , entonces $|R| \geq n$.
b) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si R_1 es reflexiva (simétrica, antisimétrica o transitiva), entonces R_2 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica o transitiva).
c) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si R_2 es reflexiva (simétrica, antisimétrica o transitiva), entonces R_1 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica o transitiva).

Relaciones de orden

18. Determinar el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$, con $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
19. Sea $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ y R la relación en A dada por $x R y$ si x divide a y . Mostrar que es una relación de orden y trazar el diagrama de Hasse correspondiente.
20. Los siguientes son diagramas de Hasse correspondientes a un conjunto parcialmente ordenado (A, R) . Determinar A y R en cada caso.



21. Definimos en \mathbb{C} la relación $z_1 R z_2$ si $|z_1| \leq |z_2|$. ¿Es una relación de orden? Determinar sus propiedades. Dado z_0 fijo, determinar geoméricamente el conjunto $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : z R z_0\}$ y $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : z_0 R z\}$.
22. Determinar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos de cada una de las relaciones de los ejercicios 18, 19 y 20.
23. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado (A, \subseteq) , con $A = \mathcal{P}(X)$. Para cada uno de los siguientes subconjuntos B de A , determine el ínfimo y el supremo de B .

- a) $B = \{\{1\}, \{2\}\};$ d) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\};$
 b) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\};$ e) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\};$
 c) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\};$ f) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$

24. Definimos en \mathbb{Z} la relación \mathbb{R} por $x R y$ si $x - y$ es un entero par no negativo. Probar que R es un orden parcial en \mathbb{Z} . ¿Es un orden total?
25. Dados dos conjuntos X_1 y X_2 , sean R_1 un orden parcial en X_1 y R_2 un orden parcial sobre X_2 . Probar que R es un orden parcial en $X_1 \times X_2$, donde

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \text{ si } x_1 R_1 y_1 \text{ y } x_2 R_2 y_2.$$

26. Probar que (\mathbb{R}, \leq) es totalmente ordenado. ¿Lo es (\mathbb{R}^2, R) , donde R es la relación definida en el ejercicio 25?

27. Sea (X, R) un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq X$.

- a) Mostrar que $R_B = (B \times B) \cap R$ define un orden parcial en B .
 b) Mostrar que si (X, R) es totalmente ordenado, entonces (B, R_B) es totalmente ordenado.
 c) Si (X, R) no es totalmente ordenado, ¿implica esto que (B, R_B) no es totalmente ordenado?

28. Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que (A, R) es un *retículo* si dados $x, y \in A$ cualesquiera, $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en A .

- a) Mostrar que (\mathbb{R}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{N}, \leq) son retículos.
 b) Mostrar que si $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo.
 c) Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados del ejercicio 20 son retículos.
 d) Probar que todo orden total es un retículo. ¿Es un retículo un conjunto totalmente ordenado?

29. Sean (X_1, R_1) , (X_2, R_2) conjuntos parcialmente ordenados y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(X_1 \times X_2, R)$ definido en el ejercicio 25. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

- a) Si x_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_1, R_1) e y_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un elemento maximal (o minimal) para $(X_1 \times X_2, R)$.
 b) Si x_0 es máximo (o mínimo) para (X_1, R_1) e y_0 es un máximo (o mínimo) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un máximo (o mínimo) para $(X_1 \times X_2, R)$.
 c) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son totalmente ordenados, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es totalmente ordenado.
 d) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es cota superior (o inferior) de B_1 y b_2 es cota superior (o inferior) de B_2 , entonces (b_1, b_2) es cota superior (o inferior) de $B_1 \times B_2$.
 e) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es supremo (o ínfimo) de B_1 y b_2 es supremo (o ínfimo) de B_2 , entonces (b_1, b_2) es supremo (o ínfimo) de $B_1 \times B_2$.
 f) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son retículos, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es un retículo.

30. Sea (A, R) un conjunto totalmente ordenado. Se dice que (A, R) está *bien ordenado* si para todo $B \subseteq A$, con $B \neq \emptyset$, el conjunto totalmente ordenado (B, R_B) definido en el ejercicio 27 tiene un elemento mínimo. Determinar si los siguientes conjuntos totalmente ordenados están bien ordenados.

- a) (\mathbb{N}, \leq) ;
- b) (\mathbb{Z}, \leq) ;
- c) (\mathbb{Q}, \leq) ;
- d) (P, \leq) , donde P es el conjunto de todos los primos;
- e) (A, \leq) , donde A es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} ;
- f) (A, \leq) , donde A es un subconjunto no vacío finito de \mathbb{Z} .

Relaciones de equivalencia

31. Determinar si cada una de las colecciones dadas a continuación es o no una partición del conjunto A dado. Justificar por qué.

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 7\}$.
- b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{1, 3, 4, 7\}$, $A_2 = \{2, 6\}$, $A_3 = \{5, 8\}$.
- c) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- d) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- e) $A = \mathbb{R}$, $A_n = (n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- f) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $A_n = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{B\} \cup \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.
- g) $A = \mathbb{C}$, $A_n = \{z \in \mathbb{C} : n-1 < z \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

32. Analizar, en cada caso, si la relación dada en el conjunto A indicado es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente.

- a) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
- b) $A = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.
- c) $A = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ fijo, $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = kp$.
- d) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$.
- e) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$.
- f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $xRy \Leftrightarrow x = y \text{ o } x + y = 5$.

33. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y R la relación de equivalencia en A que induce la partición $A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$. Dar R por extensión y determinar $R(1)$, $R^{-1}(1)$.

34. En $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tenemos la relación de equivalencia

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

- a) Determinar $[1]$, $[2]$ y $[3]$.
- b) Determinar la partición de A que induce R .
- c) Determinar $R(1)$ y $R^{-1}(2)$.

35. Mostrar que para una relación de equivalencia R en A , para cada $x \in A$ $R(x) = R^{-1}(x) = [x]$.

36. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ y $A_3 = \{5\}$, definimos la relación R en A por

$$x R y \text{ si están en el mismo subconjunto } A_i, \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3\}.$$

¿Es R una relación de equivalencia?

37. Para $A = \mathbb{R}^2$ definimos R en A por $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$.
- Verificar que R es una relación de equivalencia en A .
 - Describir geométricamente las clases de equivalencia y la partición de A inducida por R .
38. Definimos la relación R en \mathbb{N} por $x R y$ si $x/y = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
- Verificar que R es una relación de equivalencia.
 - ¿Cuántas clases distintas encontramos entre $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$?
39. Considerar en \mathbb{Z} la relación de congruencia módulo n , esto es, $x R y$ si $x - y$ es múltiplo de n .
- Mostrar que R es una relación de equivalencia.
 - Mostrar que R induce la partición $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [n-1] = \cup_{i=0}^{n-1} [i]$.

Funciones

1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso de que lo sea, determinar su imagen:

- $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}; y = x^2 + 7\}$, \mathcal{R} es una relación de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} .
- $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; y^2 = x\}$, \mathcal{R} es una relación de \mathbb{R} en \mathbb{R} .
- $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}; y = 3x + 1\}$, \mathcal{R} es una relación de \mathbb{R} en \mathbb{R} .
- $\mathcal{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}; x^2 + y^2 = 1\}$, \mathcal{R} es una relación de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} .

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Sea $f : A \rightarrow B$ la función dada por

$$f = \{(1, 2), (2, 6), (3, 6), (4, 8), (5, 6), (6, 8), (7, 12)\}.$$

Determinar la preimagen de B_1 mediante f en cada uno de los siguientes casos:

- | | | |
|------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $B_1 = \{2\}$ | c) $B_1 = \{6, 8\}$ | e) $B_1 = \{6, 8, 10, 12\}$ |
| b) $B_1 = \{6\}$ | d) $B_1 = \{6, 8, 10\}$ | f) $B_1 = \{10, 12\}$ |

3. Para cada una de las siguientes funciones, determinar $Im(f)$, $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ para los subconjuntos A y B indicados:

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{7, 8, 9\}$.
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - x$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-5, -4, -3\}$.
- $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$, $A = [0, \frac{\pi}{2}]$, $B = [-1, 0]$.
- $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x$, $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [1, +\infty)$, $B = [4, 9]$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & x \leq 0 \\ -2x + 5, & 0 < x < 3 \\ x - 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Determinar la preimagen mediante f de cada uno de los siguientes intervalos

- a) $[-5, -1]$, b) $[-5, 0]$, c) $[-2, 4]$, d) $(5, 10)$, e) $[11, 17]$.

5. Dar un ejemplo de una función $f : A \rightarrow B$ y de dos subconjuntos A_1, A_2 de A de modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.
6. Dar, en cada caso, un ejemplo de conjuntos finitos A y B con $|A|, |B| \geq 4$ y una función f tal que
 - a) f no sea inyectiva ni sobre.
 - b) f sea inyectiva pero no sobre.
 - c) f sea sobre pero no inyectiva.
 - d) f sea sobre e inyectiva.
7. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq A$. Demostrar que si f es inyectiva, entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
8. Determinar si cada una de las funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de que no sea sobre, determinar su imagen.

a) $f(x) = x + 7$,	c) $f(x) = 2x - 3$,	e) $f(x) = x^2 + x$,
b) $f(x) = x^2$,	d) $f(x) = -x + 5$,	f) $f(x) = x^3$.
9. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Se denomina *restricción* de f a A_1 a la función $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$ definida por $f|_{A_1}(x) = f(x)$ para cada $x \in A_1$.
 - a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función parte entera. Probar que $f|_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$ donde $1_{\mathbb{Z}}$ es la función identidad en \mathbb{Z} .
 - b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$. Probar que $f|_{\mathbb{Z}}$ es la función constante igual a 1.
10. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente su respuesta.
 - a) Si f es inyectiva, entonces $f|_{A_1}$ es inyectiva.
 - b) Si $f|_{A_1}$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
 - c) Si f es sobre, entonces $f|_{A_1}$ es sobre.
 - d) Si $f|_{A_1}$ es sobre, entonces f es sobre.
11. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ son funciones, definimos $h : A \times C \rightarrow B \times D$ por $h(a, c) = (f(a), g(c))$. Demostrar que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.
12. Sean $f, g, h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ y

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Determinar

- a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $g \circ h$, d) $f \circ (g \circ h)$, e) $(f \circ g) \circ h$.

13. Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(n) = 2n$. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ es la función dada por $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$, encontrar $g \circ f$.

14. Sean S y T conjuntos (fijos) en el universo \mathcal{U} dado. Se define

$$g : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ por } g(A) = T \cap (S \cup A).$$

Demostrar que $g \circ g = g$.

15. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determinar si f es invertible y, si lo es, determinar f^{-1}

a) $f = \{(x, y) : 2x + 3y = 7\},$

b) $f = \{(x, y) : y = x^3\},$

c) $f = \{(x, y) : y = x^4 + x\}.$

16. Sean $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$. Demostrar que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. Es $g = f^{-1}$?

17. Demostrar que $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ es invertible y hallar su inversa.

18. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, \\ -2x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es biyectiva y hallar su inversa.

19. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Demostrar que:

a) $g \circ f : A \rightarrow C$ sobre $\Rightarrow g$ sobre.

b) $g \circ f : A \rightarrow C$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.

Operaciones

1. Para $A = \{a, b, c\}$, sea $f : A \times A \rightarrow A$ la operación binaria cerrada dada en la siguiente tabla:

f	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

Dé un ejemplo para mostrar que f no es asociativa.

2. Defina la operación binaria cerrada $h : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ dada por $h(a, b) = \frac{a}{b}$.

a) Muestre que h no es conmutativa ni asociativa.

b) Determine si h tiene algún elemento neutro.

3. Cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es una operación binaria cerrada en \mathbb{Z} . Determine los casos en los que f es conmutativa o asociativa.

a) $f(x, y) = x + y - xy$

b) $f(x, y) = \max\{x, y\}$, el máximo entre x e y

c) $f(x, y) = x^{|y|}$

d) $f(x, y) = x + y - 3$

4. Determine y justifique cuáles de las operaciones binarias cerradas del ejercicio anterior tienen elemento neutro.
5. Para $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, sean $f, g : A \times A \rightarrow A$ las operaciones binarias cerradas dadas por $f(x, y) = \min\{x, y\}$ y $g(x, y) = \max\{x, y\}$.
- a) Determine si f tiene elemento neutro.
 - b) Determine si g tiene elemento neutro.
6. Sean $A = B = \mathbb{R}$. Determine $\pi_A(D)$ y $\pi_B(D)$ para cada uno de los conjuntos siguientes $D \subseteq A \times B$.
- a) $D = \{(x, y) : x = y^2\}$
 - b) $D = \{(x, y) : y = \sin(x)\}$
 - c) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$