El Principio de Inducción

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2023

Bibliografía

- Kisbie-Miatello, Álgebra I - Matemática Discreta I, Cáp. 1
  - https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/941/CMat32.pdf
- Grimaldi, Secc. 4.1 y 4.2

Motivación

Idea general: el principio de inducción matemática sirve para demostrar enunciados del siguiente estilo:

$$\forall n, P(n)$$

donde $P(n)$ es una proposición abierta que depende del número natural n.
Por ejemplo, consideremos la proposición $P(n)$ que dice que "la suma de los primeros n números naturales es igual a $n(n+1)/2$".

- Es decir, queremos probar que cualquiera sea n natural,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Podríamos chequear casos particulares
  - Para $n = 1$ es cierto: $1 = 1 \cdot 2/2$ ✓
  - Para $n = 2$ es cierto: $1 + 2 = 3 = 2 \cdot 3/2$ ✓
  - Para $n = 3$ es cierto: $1 + 2 + 3 = 6 = 3 \cdot 4/2$ ✓
  - Para $n = 2$ es cierto: $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 \cdot 5/2$ ✓
- Pero esto no significa que hayamos probado la afirmación para TODO n.

Principio del buen orden

Sabemos que $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$,$(\mathbb{N}, \leq)$. son conjuntos parcialmente ordenados. Algunos de ellos verifican la siguiente propiedad:

Definición

- Un subconjunto de A de $\mathbb{R}$ tiene *primer elemento* si existe $a \in A$ tal que

$$a \leq x \qquad \text{para todo } x \in A$$

  y en tal caso decimos que a es ***el*** primer elemento de A.
- Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío de A tiene primer elemento.

PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN DE LOS ENTEROS POSITIVOS:
Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ tiene primer elemento.

Observación

- $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ ***no es bien ordenado***, ya que si se supone que q es su primer elemento, llegamos a un absurdo ya que $0 < \frac{q}{2} < q$, y $\frac{q}{2} \in \mathbb{Q}^+$.
- cualquier subconjunto ***finito*** y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene primer elemento.
- Si $a < b$ entonces los intervalos
  - (a, b) y $(a, b]$ no tienen primer elemento
  - $[a, b]$ y $[a, b)$ sí tienen primer elemento
  - ***Ninguno de estos cuatro intervalos es un conjunto bien ordenado***.
  - El conjunto vacío está bien ordenado (aunque no tenga primer elemento).
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n : -n \in \mathbb{N}\}$ no tiene primer elemento (en consecuencia, no está bien ordenado).

Principio de inducción matemática

Usando el principio de buena ordenación podemos demostrar

Teorema (Principio de Inducción)

Sea $P(n)$ una proposición abierta que depende del número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que

1. $P(1)$ *es verdadera;*
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad [P(k) \implies P(k+1)]$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

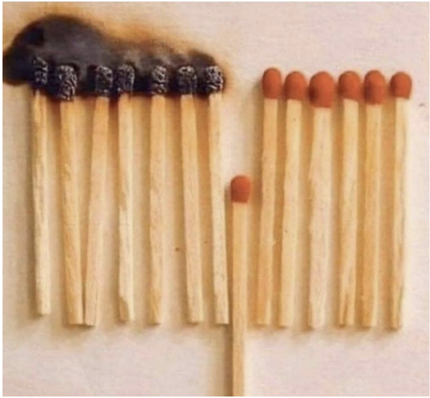
- Consideramos $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es falsa}\}$ (deberíamos probar que este conjunto es vacio). Supongamos que $H \neq \emptyset$. Luego, por ser $H \subset \mathbb{N}$ (y suponer H no vacío), H tiene primer elemento, digamos m. Entonces, $P(m)$ es falso y se tiene que $P(m-1)$ es verdadero.
- Notemos que el ítem 1 nos dice que $1 \notin H$, luego $m \geq 2$ y $m-1 \geq 1$.
- El ítem 2 nos dice que si $P(m-1)$ es verdadero entonces $P(m)$ es verdadero. Entonces $m \in H$ y $m \notin H$. CONTRADICCION.

Principio de inducción matemática

Demostración.

(continuación)

- Resulta $H = \emptyset$ y por lo tanto $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$



Ejemplo 1 –aplicando el Principio de inducción matemática

Ejemplo

Probar que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Consideramos

$$P(n): \quad 2^n > n.$$

- $P(1) : 2^1 > 1$ es verdadera.
- Probemos que $P(k) \implies P(k+1)$ para todo $k \geq 1$.
  - Supongamos que $P(k) : 2^k > k$ es verdadera. Esto es lo que se llama la hipótesis inductiva (HI).
  - Para probar que $P(k+1)$ es verdadera, observamos que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot k = k + k \underset{(k \geq 1)}{\geq} k + 1.$$

- Luego por el Principio de Inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Probar que $n^2 + 3 > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Consideramos

$$P(n) : n^2 + 3 > n.$$

- Verificamos $P(1)$. En efecto, $1^2 + 3 = 4 > 1$.
- Dado $n \geq 1$, suponemos que $P(n)$ es cierta y probamos $P(n+1)$. En efecto,

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + 3 &= n^2 + 2n + 1 + 3 \\ &= n^2 + 3 + 2n + 1 \\ &> n + 2n + 1 && \text{(por HI)} \\ &> n + 1\end{aligned}$$

  por ende $P(n+1)$ es cierta.
- Por el Principio de Inducción, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Simbolo sumatoria

Recordamos la notación

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Esta notación se lee sumatoria entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i.
Formalmente, dados n números (reales, complejos, etc.) $x_1, \ldots, x_n$ podemos definir la suma $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right) + x_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Ejemplo 2–Usando el simbolo sumatoria y el P. de inducción matemática

Ejemplo

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $c \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{1}$$

- Probamos para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} c = c = 1 \cdot c$$

- Suponemos cierto para n y probamos para $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} c \underset{\text{def.}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} c \right) + c \underset{\text{HI}}{=} nc + c = (n + 1)c$$

- Por el Principio de Inducción, (1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Volvamos al ejemplo que vimos al principio. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

- Caso $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

- Caso $n \implies$ caso $n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \underset{\text{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Luego por el Principio de Inducción, (2) es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos modificar ligeramente el principio de inducción para demostrar afirmaciones que son verdaderas a partir de un cierto número natural $n_0 \geq 1$.

Teorema

Sea $P(n)$ *una proposición abierta que depende del número natural* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Supongamos que*

1. $P(n_0)$ *es verdadera;*
2. $P(k) \implies P(k+1)$ *para todo* $k \geq n_0$*.*

Entonces $P(n)$ *es verdadera para todo* $n \geq n_0$*.*

Demostración.

- Consideramos $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$.
- Observemos que $Q(1) = P(n_0)$ es verdadera.
- Sea $k \geq 1$ y supongamos $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$ es verdadera.
- Como $n_0 + k - 1 \geq n_0$, sigue que $P(n_0 + k) = Q(k + 1)$ es verdadera.
- Luego, $Q(k) \implies Q(k + 1)$ para todo $k \geq 1$.
- Por el Principio de Inducción $Q(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$, o equivalentemente $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$. $\square$

Ejemplo 3 –aplicando el Principio de inducción matemática

Ejemplo

Probar que $2^n > 2n + 1$ para todo $n \geq 3$.
Consideramos

$$P(n) : 2^n > 2n + 1.$$

- Observemos que
  - $P(1)$: "$2 > 3$" es falsa
  - $P(2)$: "$4 > 5$" es falsa
- $P(3) : 8 > 7$ es verdadera.
- Sea $n \geq 3$, supongamos que $P(n)$ es cierta y probemos $P(n+1)$. En efecto,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot (2n+1) = 2 \cdot (n+1+n) = 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$$

- Así $P(n) \implies P(n+1)$ y por el teorema anterior, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 3$.

Simbolo Productoria

Análogamente la *productoria* $\prod_{i=1}^{n} x_i$ de n números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot x_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Intuitivamente,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$$

Se lee *productoria* entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i.

Ejemplo

Usando la productoria podemos dar la definición de las potencias naturales de un número real. Si $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{R}$, definimos

$$z^n = \prod_{i=1}^{n} z$$

Ejemplo (factorial)

El *factorial* del número natural n, denotado por $n!$, se define como el producto de los primeros n números naturales, es decir,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

En este caso se define además $0! = 1$

Observación

Las definiciones de sumatoria y productoria se extienden para incluir los casos en los que los subíndices se mueven entre dos enteros m y n tales que $m \leq n$.

Por ejemplo,

$$\sum_{i=0}^{5}(2i-1) = -1+1+3+5+7+9 = 21$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=-2}^{1}(k^2+1) &= ((-2)^2+1)((-1)^2+1)(0^2+1)(1^2+1) \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 20 \end{aligned}$$

Usando el simbolo productoria y el P. de inducción matemática

Probar que $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$.

- Notar que la afirmación es cierta para $n = 0$, pues $0! = 1 = 2^0$
- Pero es falsa para $n = 1, 2, 3$:

$$1! = 1 < 2 = 2^1 \qquad 2! = 2 < 4 = 2^2 \qquad 3! = 6 < 8 = 2^3$$

- La afirmación es cierta para $n = 4$. En efecto, $4! = 24 \geq 16 = 2^4$
- Suponemos cierto para n y probamos para $n + 1$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underset{\text{HI}}{\geq} 2^n(n+1) \underset{(n+1 \geq 2)}{\geq} 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

  Importante: en el segundo $\geq$ estamos usando $n + 1 \geq 2$ (lo cual es cierto porque estamos con $n \geq 4$).

- Por lo tanto la afirmación es válida para todo $n \geq 4$.

MISCELÁNEAS

Teorema (Principio de inducción fuerte.)

Sea $P(n)$ una proposición abierta que depende del número natural n tal que

1. *$P(1)$ es verdadera.*
2. *Para todo $k \geq 1$, si $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderas, entonces $P(k+1)$ es verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

- Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falsa}\}$. Queremos ver que $X = \varnothing$.
- Supongamos por el absurdo que $X \neq \varnothing$ y sea n_0 el primer elemento de X. Observar que $n_0 \geq 2$, pues $P(1)$ es verdadera.
- Luego, $1, \ldots, n_0 - 1 \notin X$, o equivalentemente $P(1), \ldots, P(n_0 - 1)$ son verdaderas.
- El ítem 2 implica que $P(n_0)$ es verdadera y por ende $n_0 \notin X$. Absurdo. $\square$

Ejemplo 4-aplicando el P. de inducción matemática a Cardinal de conjuntos

Ejemplo

Probar que si X es un conjunto con n elementos, entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

- Hacemos inducción en $|X| = n$.
- Si $n = 0$, entonces $X = \varnothing$. Luego $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$ y por ende $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$.
- Notemos también que si $|X| = 1$, entonces X tiene un único elemento y por lo tanto $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, X\}$. En este caso también se cumple que $|\mathcal{P}(X)| = 2 = 2^1$.
- Supongamos que la afirmación ya está probada para los conjuntos con n elementos y sea X un conjunto con $n+1$ elementos.
- Podemos fijar un elemento $x_0 \in X$ y escribir

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X - \{x_0\}) \cup \{\{x_0\} \cup A : A \in \mathcal{P}(X - \{x_0\})\}$$

- Como esta unión es disjunta tenemos que

$$|\mathcal{P}(X)| = 2|\mathcal{P}(X - \{x_0\})| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$