

Vectores

Recta en el Plano

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

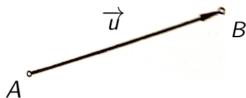
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2023

Vectores

Definiciones

- ▶ cantidades como el *área*, el *volumen*, la *temperatura*, la *masa* y el *tiempo*, pueden caracterizarse mediante un único número real, son **magnitudes escalares**.
- ▶ otras, como la *fuerza* y la *velocidad*, contienen magnitud, dirección y sentido, y no pueden ser caracterizados mediante un único número real, **magnitudes vectoriales**,
- ▶ un **vector** es un segmento orientado, esto es, un par ordenado de puntos (A, B)
- ▶ se lo representa gráficamente mediante una flecha, se lo nota \overrightarrow{AB} o \vec{u}



- ▶ A es el **origen** y B el **extremo** del vector
- ▶ **vector nulo**: se reduce a un punto, no es propiamente un vector, pero se acepta que sí, $\vec{0}$

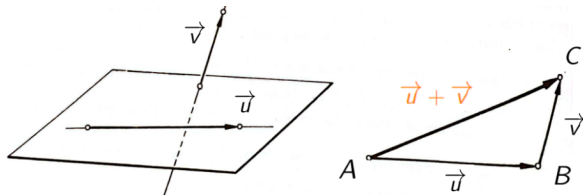
- ▶ un vector no nulo se caracteriza por su
 - ▶ **dirección**, dada por la recta que lo contiene o una paralela cualquiera
 - ▶ **sentido**, dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos)
 - ▶ **módulo**, igual a la longitud del segmento que define al vector, $|\vec{u}|$

$$|\vec{u}| \geq 0 \quad y \quad |\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

- ▶ dos vectores no nulos son **iguales** si tienen misma dirección, sentido y módulo.
- ▶ la igualdad caracteriza a los **vectores libres**
- ▶ los vectores pueden ser trasladados de manera que tengan un origen común, en ese caso, un vector y sus iguales tendrán un solo representante con origen en el punto acordado
- ▶ dos vectores son **paralelos** o **colineales** si tienen igual dirección
- ▶ dado $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, el vector \overrightarrow{BA} es el **opuesto** a \vec{u} , notado $-\vec{u}$.
- ▶ si \vec{u} es no nulo entonces \vec{u} y $-\vec{u}$ tienen igual módulo y dirección pero sentidos opuestos, el vector nulo es igual a su opuesto.

Suma de Vectores

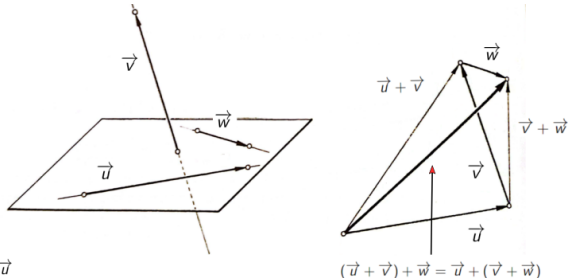
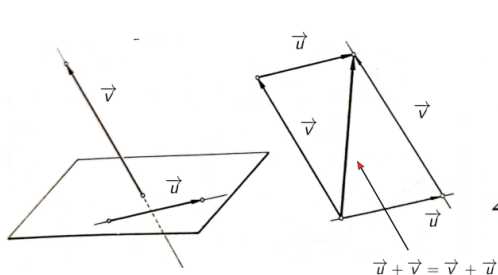
- ▶ dados \vec{u} y \vec{v} , y un punto A , quedan determinados B y C / $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
- ▶ el vector \overrightarrow{AC} es la suma de \vec{u} y \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$.



- ▶ El vector $\vec{u} + \vec{v}$ es independiente de la elección de A .
- ▶ se extiende a cualquier número de sumandos, llevando sucesivamente cada uno a continuación del precedente y uniendo, al final, el origen del primero con el extremo del último, **método de la poligonal**.

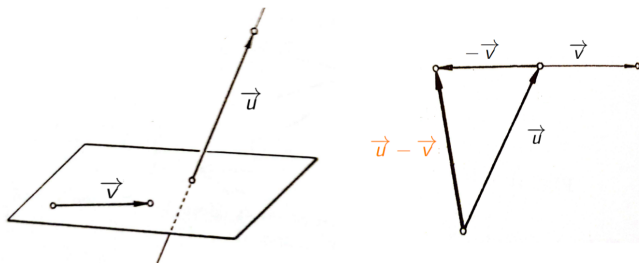
Teorema 1 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, vectores, se tienen las propiedades para la suma

1. conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
 2. asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
 3. existencia de elemento neutro: existe $\vec{0}$ / $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
 4. existencia de elemento opuesto: dado \vec{u} , existe $-\vec{u}$ / $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- propiedades 1 y 2 resoluciones gráficas, 3 y 4, inmediatas



Vector Diferencia y Producto por Escalar

- \vec{u} y \vec{v} , **vector diferencia** entre \vec{u} y \vec{v} $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



- \vec{u} vector y α escalar (número real), el **producto por escalar** de α con \vec{u} , $\alpha\vec{u}$, es un vector tal que
- $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, (luego, $\alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} = \vec{0}$)
 - $\alpha\vec{u}$ tiene misma dirección y sentido que \vec{u} si $\alpha > 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$
 - $\alpha\vec{u}$ tiene misma dirección y sentido opuesto que \vec{u} si $\alpha < 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$

Teorema 2 \vec{u}, \vec{v} vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valen, para el producto por escalar, las propiedades

1. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$ y $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
2. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ y $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
3. $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$

► demostración, ejercicio

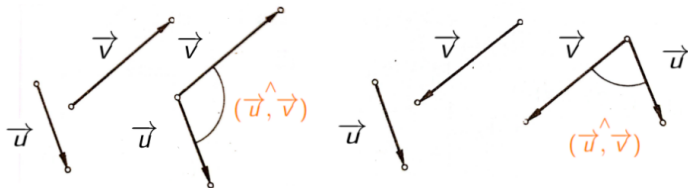
Teorema 3 \vec{u} y \vec{v} , no nulos, entonces $(\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \text{existe } \alpha \neq 0 / \alpha \vec{u} = \vec{v})$

\Leftarrow) si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha \vec{u} = \vec{v}$, como \vec{u} paralelo a $\alpha \vec{u}$, por definición, \vec{u} y \vec{v} son paralelos

\Rightarrow) si \vec{u} y \vec{v} (no nulos) son paralelos, eligiendo $\alpha = |\vec{v}| / |\vec{u}|$ si \vec{u} y \vec{v} de mismo sentido, o $\alpha = -|\vec{v}| / |\vec{u}|$ si \vec{u} y \vec{v} de sentido opuesto, queda $\alpha \vec{u} = \vec{v}$ (ejercicio, chequear)

Ángulos entre Vectores y Versores

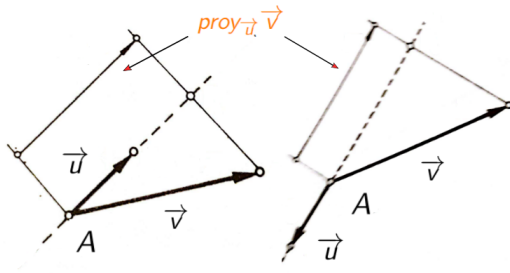
- ▶ Dados \vec{u} y \vec{v} no nulos, el **ángulo** entre ambos es el ángulo convexo determinado cuando sus orígenes se aplican en un punto común.



- ▶ $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$ y $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi$
- ▶ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ (no hay ángulos negativos entre vectores)
- ▶ **versor** o **vector unitario**, vector de módulo uno
- ▶ **versor asociado** a \vec{u} , \vec{u}_0 , versor de igual sentido que \vec{u} .
- ▶ $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$

Proyección de un Vector sobre otro

- ▶ \vec{u}, \vec{v} no nulos y con origen en A, **vector proyección ortogonal** de \vec{v} sobre \vec{u} , $proj_{\vec{u}} \vec{v}$, vector con origen en A y extremo en el punto de intersección de la recta sostén de \vec{u} y la perpendicular a ella que contiene al extremo de \vec{v}
- ▶ Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$, o $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $proj_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$



- ▶ $\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cos(\angle \vec{u}, \vec{v})$, **proyección escalar** de \vec{v} sobre \vec{u} , $proj_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v}_{\vec{u}} \vec{u}_0$

Producto Escalar

- \vec{u}, \vec{v} **producto escalar** (o producto interno) de \vec{u} y \vec{v} , $\vec{u} \times \vec{v}$, número real

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

- $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ y $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$

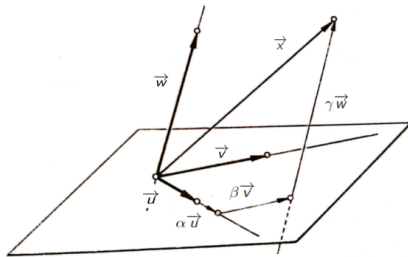
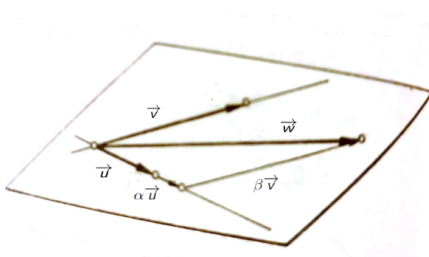
Teorema 4 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valen las propiedades para el producto escalar

1. conmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$
2. distributiva respecto de la suma: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
4. $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$ y $(\vec{u} \times \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0})$

1. inmediata, notando que $\cos(\vec{u}^\wedge, \vec{v}) = \cos(\vec{v}^\wedge, \vec{u})$
2. ver en documento anexo
3. sigue de observar que
 - ▶ para $\alpha > 0$: $|\alpha \vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha \vec{u}^\wedge, \vec{v}) = \alpha |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}^\wedge, \vec{v})$
 - ▶ y para $\alpha < 0$: $|\alpha \vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha \vec{u}^\wedge, \vec{v}) = (-\alpha) |\vec{u}| |\vec{v}| (-\cos(\vec{u}^\wedge, \vec{v}))$
4. si $\vec{u} = \vec{0}$, es claro que $\vec{u} \times \vec{u} = 0$, y si fuera $\vec{u} \neq \vec{0}$ pero $\vec{u} \times \vec{u} = 0$, entonces sería $(\vec{u}^\wedge, \vec{u}) = \frac{\pi}{2}$, lo cual es absurdo.
 - ▶ \vec{u} y \vec{v} no nulos, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u}^\wedge, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$.

Descomposición de un Vector, Bases y Componentes

- ▶ En adelante, se distinguirán a los vectores según sean de una recta, de un plano o del espacio, siendo
 - ▶ \mathbb{V}_1 : conjunto de los vectores de una recta.
 - ▶ \mathbb{V}_2 : conjunto de vectores de un plano
 - ▶ \mathbb{V}_3 : conjunto de los vectores del espacio.
- 1. ▶ Fijado $\vec{u} \in \mathbb{V}_1$ no nulo, para cualquier \vec{v} de \mathbb{V}_1 , existe único $\alpha \in \mathbb{R} / \vec{v} = \alpha \vec{u}$
 - ▶ esa forma de escribir a \vec{v} es su **descomposición** en la **base** $\{\vec{u}\}$ y α es la **componente escalar** de \vec{v} en esa base
- 2. ▶ Fijados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_2$ no nulos ni paralelos, cualquier $\vec{w} \in \mathbb{V}_2$ del mismo plano puede ser descompuesto según las direcciones de \vec{u} y \vec{v}
 - ▶ existen únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$
 - ▶ \vec{w} es **combinación lineal** de los vectores \vec{u} y \vec{v} con los escalares α y β
 - ▶ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una **base** para \mathbb{V}_2 y α y β son las **componentes** de \vec{w} en esa base.



3. ▶ Fijados en el espacio tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ no nulos ni paralelos a un mismo plano, si $\vec{x} \in \mathbb{V}_3$, existen únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$
- ▶ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base para \mathbb{V}_3 , α, β y γ , componentes \vec{x} en esa base

Observación: en \mathbb{V}_2 y \mathbb{V}_3 las bases son conjuntos ordenados, y con esos órdenes se enumeran a las componentes

Bases, Componentes y Combinación Lineal

1. Fijado \vec{u} no nulo de \mathbb{V}_1 , se observa una correspondencia biunívoca entre \mathbb{V}_1 y \mathbb{R} , $\{\vec{u}\}$ es una base de \mathbb{V}_1 y cualquier vector de \mathbb{V}_1 es una única combinación lineal (c.l.) de \vec{u}
 2. Fijados \vec{u} y \vec{v} en \mathbb{V}_2 no nulos ni paralelos, correspondencia biunívoca entre \mathbb{V}_2 y \mathbb{R}^2 , $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es base de \mathbb{V}_2 y cualquier vector de \mathbb{V}_2 es una única c.l. de \vec{u} y \vec{v} .
 3. Fijados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en \mathbb{V}_3 no nulos ni coplanares, correspondencia biunívoca entre \mathbb{V}_3 y \mathbb{R}^3 , $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base de \mathbb{V}_3 y todo vector de \mathbb{V}_3 es una única c.l. de \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} .
- como las operaciones de suma y producto de un escalar por un vector definidas en el conjunto de los vectores geométricos ($\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ o \mathbb{V}_3), verifican las propiedades enunciadas en los **Teoremas 1 y 2** se dice que estos conjuntos, con tales operaciones, forman un **espacio vectorial (e.v.) real**, y al agregarle la operación de producto escalar o interno, se dice que el espacio es **euclideo**
 - en un e.v. un conjunto es una **base**, si cada elemento del espacio se puede escribir de manera única como c.l. de elementos en ese conjunto, se demuestra que todas las bases de un e.v. tienen la misma cardinalidad, y a ese número se lo llama **dimensión** del espacio

Vectores Fundamentales del Plano xy

- ▶ en el plano xy , \vec{i} , \vec{j} , **vectores fundamentales**, vectores de direcciones y sentidos de los de los semiejes positivos x e y
- ▶ $O(0,0)$ y $P(v_1, v_2)$, entonces $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ es el **vector posición** de P
- ▶ $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ y v_1 y v_2 son las componentes de \vec{v} en la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$
- ▶ como par ordenado, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, y en particular, $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$
- ▶ Como $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es base, para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se tiene

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \text{ y } u_2 = v_2$$

Vectores Fundamentales del Espacio

- ▶ con los ejes x, y, z , $\{\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)\}$, base canónica
- ▶ $P(v_1, v_2, v_3)$, queda determinado $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} = (v_1, v_2, v_3)$.
- ▶ $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2 \text{ y } u_3 = v_3$

Teorema 5 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores,

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ y $\alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.

2. $\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3$.

1. se orienta la parte de la suma, se dejan los detalles y la otra como ejercicio

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) + (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \\ &= \dots = (u_1 + v_1) \vec{i} + (u_2 + v_2) \vec{j} + (u_3 + v_3) \vec{k}\end{aligned}$$

2. observando $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ y que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{i}$,

$$\begin{aligned}u \times v &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \times (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \\ &= u_1 v_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + u_1 v_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + u_1 v_3 (\vec{i} \times \vec{k}) \\ &+ u_2 v_1 (\vec{j} \times \vec{i}) + u_2 v_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + u_2 v_3 (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &+ u_3 v_1 (\vec{k} \times \vec{i}) + u_3 v_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + u_3 v_3 (\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_3 v_1 - u_1 v_3.\end{aligned}$$

Una Condición de Paralelismo

- por el **Teorema 3**, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u} \text{ para } \alpha \neq 0 \Leftrightarrow v_1 = \alpha u_1, \quad v_2 = \alpha u_2 \text{ y } v_3 = \alpha u_3, \quad \alpha \neq 0$$

Módulo de un Vector por Componentes y Cosenos Directores

► $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \times \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

- $\vec{u} \neq \vec{0}$, los **cosenos directores** son las componentes del versor asociado, \vec{u}_0

$$\cos(\vec{u}, \hat{i}) = \frac{u_1}{|\vec{u}|}, \quad \cos(\vec{u}, \hat{j}) = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \quad \text{y} \quad \cos(\vec{u}, \hat{k}) = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$$

- si $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 0, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2, 5)$, entonces

► $2\vec{u} - 3\vec{v} = (3, -1, 2) - 3(-2, 0, 4) = (6, -2, 4) - (-6, 0, 12) = (12, -2, -8)$

► $\vec{u} \times \vec{w} = (3, -1, 2) \times (3, 2, 5) = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$

► $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Componentes de un Vector a partir de dos Puntos

- dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, y el origen $O(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\end{aligned}$$

Coordenadas del Punto Medio entre dos Puntos

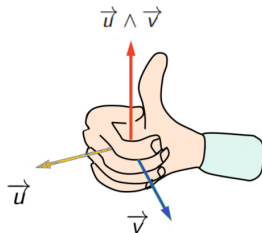
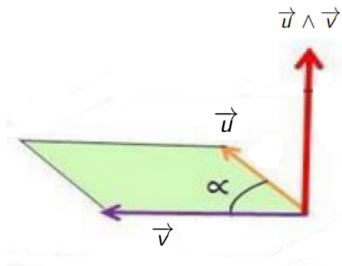
- $M(x, y, z)$ punto medio entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_2} \text{ y } \overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2} \Rightarrow 2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2} \\ \Rightarrow 2(x - x_1, y - y_1, z - z_1) &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2(x - x_1) = x_2 - x_1 \\ 2(y - y_1) = y_2 - y_1 \\ 2(z - z_1) = z_2 - z_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ y = \frac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \\ z = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Producto Vectorial

Si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, el **producto vectorial** entre \vec{u} y \vec{v} , notado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es el vector

- ▶ de dirección simultáneamente perpendicular a las direcciones de \vec{u} y \vec{v} , y el sentido dado por la regla de la mano derecha
- ▶ $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\angle \vec{u} \vec{v})$.



Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Propiedades del Producto Vectorial

- si \vec{u} y \vec{v} no nulos, y $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$, se obtiene otra condición de paralelismo,

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow |\vec{u} \wedge \vec{v}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}\end{aligned}$$

- además $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ y $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

Teorema 6 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las propiedades para el producto vectorial

1. antisimétrica: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. distributivas: $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ y $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
3. $\alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v})$

- las demostraciones de 1 y 3 se dejan como ejercicio, la de 2 en documento anexo

Expresión del Producto Vectorial por Componentes

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \wedge (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \\&= u_1 v_1 (\vec{i} \wedge \vec{i}) + u_1 v_2 (\vec{i} \wedge \vec{j}) + u_1 v_3 (\vec{i} \wedge \vec{k}) \\&\quad + u_2 v_1 (\vec{j} \wedge \vec{i}) + u_2 v_2 (\vec{j} \wedge \vec{j}) + u_2 v_3 (\vec{j} \wedge \vec{k}) \\&\quad + u_3 v_1 (\vec{k} \wedge \vec{i}) + u_3 v_2 (\vec{k} \wedge \vec{j}) + u_3 v_3 (\vec{k} \wedge \vec{k}) \\&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} \\&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$

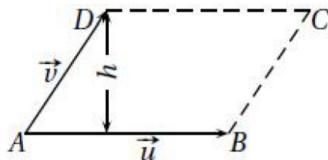
► $\vec{u} = (1, 3, -2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$, queda $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$

$$= (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 1), \quad - (1 \cdot 0 - (-2) \cdot 2), \quad (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)) = (2; -4; -5)$$

Interpretación del Módulo del Producto Vectorial

- El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al área del paralelogramo determinado por ambos vectores:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \wedge \vec{v}| &= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ &= |\vec{u}| h = \text{Area}(ABCD) \end{aligned}$$



- se puede calcular el área de un triángulo determinado por tres puntos:

$$P_1(1, -1, 2), P_2(5, -6, 2), P_3(1, 3, -1) \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = (4, -5, 0) \text{ y } \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 4, -3) \text{ y}$$

$$\text{Area}(P_1 \triangle P_2 P_3) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}| = \dots = \frac{1}{2} |(15, 12, 16)| = 12,5$$

Producto Mixto

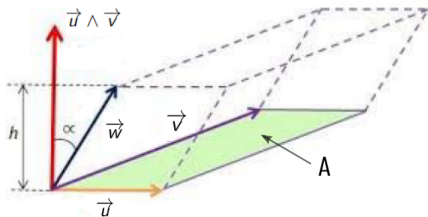
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$, el producto escalar $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ se llama **producto mixto** entre \vec{u} , \vec{v} y \vec{w}

- ▶ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ es un número real.
- ▶ el paréntesis es innecesario, pues no hay otra forma de agrupar los vectores para que la expresión tenga sentido.

Volumen de un Paralelepípedo

El volumen V del paralelepípedo determinado por los vectores (no nulos ni coplanares) \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h = |\vec{u} \wedge \vec{v}| (|\vec{w}| |\cos \alpha|) \\ &= \left| |\vec{u} \wedge \vec{v}| |\vec{w}| \cos \alpha \right| = |\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}| \end{aligned}$$

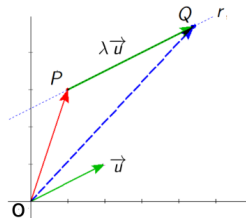


Recta en el Plano

Ecuaciones Vectorial y Paramétrica

- P punto del plano y \vec{u} vector no nulo, la recta r que pasa por P en la dirección de \vec{u} es el lugar geométrico de los puntos Q

$$Q \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u}$$



- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}$, **ecuación vectorial de la recta**
- $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow (x, y) = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u} = (x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2)$
- **ecuaciones paramétricas** de r , x , y se escriben en función del **parámetro** λ ,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

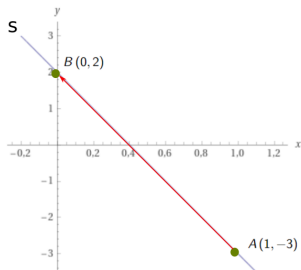
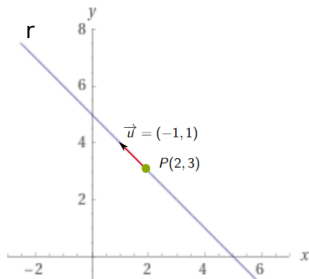
- recta r que pasa por $P(2, 3)$ y es paralela a $\vec{u} = (-1, 1)$,

$$(x, y) = (2, 3) + \lambda(-1, 1) \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda(-1) = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \cdot 1 = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

- recta s que pasa por $A(1, -3)$ y $B(0, 2)$, dirección de s : $\vec{AB} = (0, 2) - (1, -3) = (-1, 5)$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Ecuación Cartesiana

- r de dirección $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$ y punto de paso $P_0(x_0, y_0)$,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- si $u_1 \neq 0$ ($u_2 \neq 0$ es análogo), entonces $\lambda = \frac{x-x_0}{u_1}$ e $y = y_0 + \frac{x-x_0}{u_1} u_2$.
- $u_1 y = u_1 y_0 + (x - x_0) u_2 \Rightarrow u_1 y = u_1 y_0 + u_2 x - u_2 x_0$

$$\underbrace{u_2}_{=a} x + \underbrace{-u_1}_{=b} y + \underbrace{(-u_2 x_0 + u_1 y_0)}_{=c} = 0$$

- ecuación cartesiana general de la recta: $ax + by + c = 0$
- $\vec{n} = (a, b) = (u_2, -u_1)$ vector perpendicular a r

Ejemplo

► $s) \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{3} = t \\ -y + 3 = t \end{cases} \rightarrow \frac{x+2}{3} = -y + 3 \rightarrow x + 3y - 7 = 0$

► otra manera:

► $\vec{u} = (3; -1) \parallel s$, implica $\vec{n} = (1; 3) \perp s$, ecuación de la forma $1x + 3y + c = 0$

► $P_0(-2; 3) \in s$ implica $1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + c = 0$ y luego $c = 7$

Ejemplo

► $r) -2x + y + 4 = 0$,

► $Q(-1; 1) \notin r : -2 \cdot (-1) + 1 + 4 = 7 \neq 0$

► $R(\frac{1}{2}; -3) \in r : -2 \cdot \frac{1}{2} + (-3) + 4 = 0$

► $\vec{n} = (-2; 1) \perp r$, de donde $\vec{u} = (1; 2) \parallel r$, y como $R(\frac{1}{2}; -3) \in r$,

$$r) \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones Normal, Segmentaria y Explícita

- ▶ $r) ax + by + c = 0$ con $|(a; b)| = 1$, **ecuación normal** de r
- ▶ $r) ax + by + c = 0$, $a, b, c \neq 0$, **ecuación segmentaria**: $\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$
 - ▶ $A(-\frac{c}{a}, 0)$ y $B(0, -\frac{c}{b})$, intersecciones de r con ejes x e y
- ▶ $r) ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, y haciendo $m = -\frac{a}{b}$ y $h = -\frac{c}{b}$, **ecuación explícita** de $r) y = mx + h$
 - ▶ m , **pendiente**, tangente del ángulo que forma r con el semieje positivo x
 - ▶ h , **ordenada al origen**, r corta al eje y en $Q(0; h) \in r$
 - ▶ si $a \neq 0$, se puede explicitar a x en función de y

Ejemplo

- ▶ $r) 2x - y - 2 = 0$,
 - ▶ $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$ ecuación normal
 - ▶ $x - \frac{y}{2} = 1$ ecuación segmentaria, $(1, 0)$ y $(0, -2)$, intersección con los ejes
 - ▶ $y = 2 - 2x$ y $x = \frac{1}{2}y + 1$ ecuaciones explícitas

Recta por Dos Puntos

- ▶ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, recta que contiene a P_1 y P_2
- ▶ ecuaciones paramétricas, con dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$ y punto de paso P_1 ,

$$r) \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- ▶ ecuación cartesiana, si $x_1 \neq x_2$, con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y punto de paso P_1

$$r) y - y_1 = m(x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- ▶ si $x_1 = x_2$, ecuación $r) x = x_1$

Ejemplo

- ▶ $P_1(3, 1)$ y $P_2(-2, 5)$,

$$y - 1 = \frac{5 - 1}{-2 - 3}(x - 3) = -\frac{4}{5}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$$

Posición Relativa de dos Rectas

r_1 y r_2 rectas, o bien

- ▶ son **paralelas**, $r_1 \parallel r_2$, si los vectores dirección o los normales lo son, pudiendo ser
 - ▶ **coincidentes**, $r_1 = r_2$, si siendo paralelas un punto de paso pertenece a la otra
 - ▶ **estrictamente paralelas**, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, si no
- ▶ son **secantes**, vectores dirección o normales no paralelos, se intersecan en un único punto.
- ▶ **ángulo** entre r_1 y r_2 , ángulo agudo o recto que forman, si se cortan o son coincidentes

Ejemplo

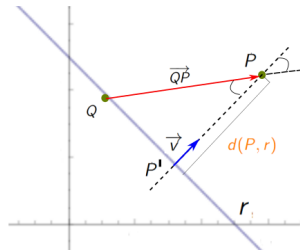
- ▶ $r) 2x + 3y - 1 = 0$ y $s) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$
- ▶ $\vec{n}_1 = (2; 3) \perp r$ y $\vec{u}_2 = (2; -1) \parallel s$, implica $\vec{n}_2 = (1; 2) \perp s$, no paralelos ($\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$)
- ▶ $s) x + 2y - 5 = 0$, $r \cap s \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow (-9, 13)$
- ▶ ángulo $\rightarrow \arccos\left(\frac{(2,3) \times (1,2)}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \approx 0,124$ (en radianes)

Distancia de un Punto a una Recta

- P punto y r recta, la perpendicular a r por P , corta a r en un único punto P' ,
- la **distancia** de P a r , $d(P, r)$ es la distancia entre P' y P , $|\overrightarrow{P'P}|$

$r) ax + by + c = 0$, $P(x_0, y_0)$, si $Q(x', y') \in r \rightarrow ax' + by' + c = 0$

$$\begin{aligned} d(P, r) &= |\overrightarrow{QP}| |\cos(\vec{v}, \overrightarrow{QP})| = |\overrightarrow{QP}| \cdot \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}| |\overrightarrow{QP}|} \\ &= \frac{|(a, b) \times (x_0 - x', y_0 - y')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(x_0 - x') + b(y_0 - y')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + (-ax' - by')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



- $r) ax + by + c = 0$ ecuación normal ($a^2 + b^2 = 1$), entonces $|c| = d(O, r)$