Números complejos

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

El cuerpo de los números complejos

- Un **número complejo** es toda expresión de la forma $z = a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i se define por la relación $i^2 = -1$. A esta forma de representar un número complejo se la conoce como **forma binómica**.

- El conjunto de todos los números complejos se representa por $\mathbb{C}$, es decir

$$\mathbb{C} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Al número real a se lo llama **parte o componente real** de z y se denota por $a = Re(z)$; al número real b se lo llama **parte o componente imaginaria** de z y se denota por $b = Im(z)$.

Igualdad de números complejos. Operaciones: suma y producto

Considerando dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Se dice que z_1 y z_2 son **iguales**, y se denota $z_1 = z_2$, si tienen iguales las partes real e imaginaria, es decir,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

- Se define la **suma** entre z_1 y z_2, y se denota $z_1 + z_2$, como la expresión

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

- Se define el **producto** entre z_1 y z_2, y se denota $z_1 \cdot z_2$ o $z_1 z_2$, como la expresión

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Observaciones:

1. La suma y el producto de números complejos pueden obtenerse formalmente manipulando los términos como si sólo tuvieran números reales, y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

2. El símbolo i recibe el nombre de **unidad imaginaria**.

3. Los números complejos de la forma $a + i0$ se representan simplemente por a. Es evidente que forman un subconjunto de $\mathbb{C}$ algebraicamente identico a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, tales números serán números reales.

4. Los números complejos de la forma $0 + ib$ se representan simplemente por ib y se llaman **imaginarios puros**. El número $0 + i0$, aunque también responde a esta descripción se representa por 0, como en el caso anterior.

El cuerpo de los números complejos

Teorema (1)

Sean z, u, w números complejos cualesquiera. Entonces valen:

a) **Clausura de la suma y del producto**: $z + w \in \mathbb{C}$, $zw \in \mathbb{C}$.

b) **Ley conmutativa de la suma y del producto**: $z + w = w + z$, $zw = wz$.

c) **Ley asociativa de la suma y del producto**: $z + (u + w) = (z + u) + w$, $z(uw) = (zu)w$.

d) **Ley distributiva del producto respecto de la suma**: $z(u + w) = zu + zw$.

e) **Existencia de elemento neutro para la suma y elemento identidad para el producto**: *Existen $0 \in \mathbb{C}$ y $1 \in \mathbb{C}$ tales que $0 + z = z$ y $1 \cdot z = z$.*

f) **Existencia de elemento opuesto**: *Si $z = a + ib$, existe $-z = -a - ib \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$.*

g) **Existencia de elemento inverso**: *Si $z = a + ib \neq 0$, existe $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ tal que $zz^{-1} = 1$.*

Demostración del Teorema (1).

Las demostraciones de los ítems del a) al d) no entran. Las demostraciones de los ítems e),f) y g) quedan como ejercicio. □

Definición (Resta y división entre números complejos)

Se consideran dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$.
A partir de la existencia de elemento opuesto y elemento inverso en $\mathbb{C}$, quedan definidas las operaciones:

- **resta** entre z_1 y z_2, que se denota $z_1 - z_2$, como $z_1 + (-z_2)$ donde $-z_2$ es el elemento opuesto de z_2. Es decir

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

- **división** entre z_1 y $z_2 \neq 0$, que se denota $\frac{z_1}{z_2}$, como $z_1 z_2^{-1}$ donde z_2^{-1} es el elemento inverso de z_2. Es decir

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (a_1 + ib_1)\left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Definición (Potencia entera de un número complejo)

Primero, para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos $z^0 = 1$, $z^1 = z$ y si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ utilizamos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$z^n = z^{n-1} \cdot z.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, entonces para todo $z \neq 0$, definimos $z^k = (z^{-1})^{-k}$.

La potencia entera de complejos así definida goza de las siguientes propiedades (análogas a las de los números reales).

Teorema (2)

Sean z, $w \in \mathbb{C}$, n, $k \in \mathbb{Z}$. *Entonces:*

a) $z^k z^n = z^{k+n}$

b) $(z^k)^n = z^{kn}$

c) $(zw)^n = z^n w^n$

d) *Si* $w \neq 0$, $(\frac{z}{w})^n = \frac{z^n}{w^n}$

La demostración se verá en la unidad de inducción matemática.

Ejemplo

Calcular $(1+i)^{-2}$.

<u>Solución</u>: Notemos primero que $(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1+i)^2}$ y como

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

entonces se tiene que

$$(1+i)^{-2} = \frac{1}{2i} \underbrace{=}_{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} \frac{0}{2^2} + i\frac{-2}{2^2} = -i\frac{1}{2}$$

Potencias de la unidad imaginaria i

Se puede comprobar fácilmente que las sucesivas potencias de la unidad imaginaria i se repiten periódicamente con período 4:

$$i^0 = 1; \quad i^1 = 1; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 i = -i; \quad i^4 = i^3 i = -ii = 1; \quad i^5 = i^4 i = 1i = i$$

$$i^6 = i^5 i = ii = -1; \quad i^7 = i^6 i = -1i = -i; \quad i^8 = i^7 i = -ii = 1; \quad i^9 = i^8 i = 1i = i; \quad \ldots$$

Teorema (3)

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división entera de n por 4.

La demostración no la veremos.

Raíz cuadrada de un número real negativo

Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es la **raíz cuadrada** de $w \in \mathbb{C}$ si $z^2 = w$. Resulta entonces que dado $a \in \mathbb{R}$ con $a < 0$, se tiene

$$z^2 = a \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{|a|}i$$

Así, por ejemplo, las raíces cuadradas de -4 son $2i$ y $-2i$, y las raíces cuadradas de -9 son $3i$ y $-3i$.

Utilizando la resolvente, tenemos que las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es un número real negativo, tenemos dos soluciones complejas.

Ejemplo

Hallar las soluciones de la ecuación $-2x + x^2 + 5 = 0$.

Solución: Reconociendo que $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, planteamos

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{(-16)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{|-16|}i}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}i}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

Así, encontramos que las soluciones de la ecuación dada son $x_1 = 1 + 2i$ y $x_2 = 1 - 2i$.

Forma de par ordenado de un número complejo

Los números complejos pueden ser identificados como el conjunto de **pares ordenados** $z = (a, b)$ de números reales donde $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$. Con ellos se definen:

Igualdad: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.
Suma: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
Producto: $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Según esta definición se establece una correspondencia biunívoca entre los pares $(a, 0)$ y los números reales a. De esta manera el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ se identifica con un subconjunto $\mathbb{C}_0$ de $\mathbb{C}$ y esta correspondencia se establece también, entre sumas en $\mathbb{R}$ y sumas en $\mathbb{C}_0$ y entre productos en $\mathbb{R}$ y productos en $\mathbb{C}_0$. Diremos que $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ vía la identificación

$$a \in \mathbb{R} \longleftrightarrow (a, 0) \in \mathbb{C}$$

De esta manera, $0 \longleftrightarrow (0, 0)$, $1 \longleftrightarrow (1, 0)$, $-1 \longleftrightarrow (-1, 0)$, etc.

La unidad imaginaria

La unidad imaginaria se define por $i = (0,1)$, que verifica

$$i^2 = i.i = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$

con las identificaciones anteriores.
Observemos además que

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi.$$

Esta última igualdad muestra la equivalencia entre dos formas de expresión de un mismo número complejo, como **par ordenado** $z = (a,b)$ y en **forma binómica** $z = a + ib$.

Observación

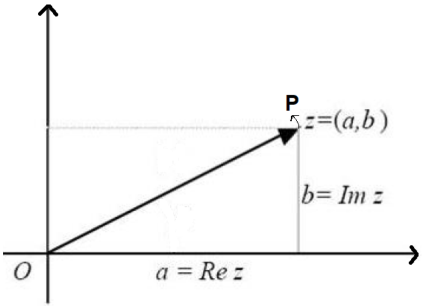
$\mathbb{C}$ no son un cuerpo ordenado con la relación de orden $\leq$ que se conoce en $\mathbb{R}$.

Representación geométrica de los números complejos en el plano complejo

En virtud de la correspondencia biunívoca entre puntos del plano y números complejos, se identifica a $\mathbb{C}$ con el plano, que por este motivo se llama **plano complejo**.

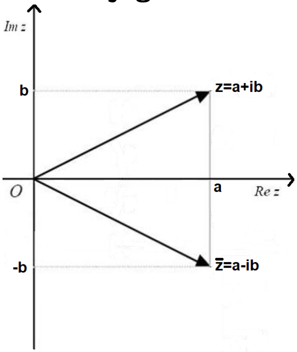
En este plano, el eje x de las abscisas se llama **eje real** y el eje y de las ordenadas, se llama **eje imaginario**.

A cada número complejo $z = a + ib = (a, b)$ corresponde el vector $\overrightarrow{OP}$ como muestra la figura:



Conjugado de un número complejo

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se denomina **conjugado de z** al número complejo $\overline{z} = a - bi$.



Teorema (4)

Sean z, $w \in \mathbb{C}$, entonces vale que:

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$

c) $\overline{z} = z$ *si y solo si* $z \in \mathbb{R}$

d) $z.\overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$.

Demostración del Teorema (4).

Propiedades a),c) y d) quedan como ejercicio.

b) Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Entonces, por un lado, tenemos que

$$\overline{z.w} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i. \quad (1)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{z}.\overline{w} &= \overline{(a+bi)}.\overline{(c+di)} = (a-bi).(c-di) = \\ &= (ac-bd)+(-ad-bc)i = (ac-bd)-(ad+bc)i. \quad (2) \end{aligned}$$

Claramente, (1) coincide con (2).

□

La propiedad $z.\overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$ sirve para calcular el recíproco de un número complejo. En efecto, sea $z = a + bi \neq 0$, entonces vale que:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

que es la expresión que ya conocíamos para el **inverso** de z.

De la misma manera procedemos para calcular el cociente entre dos números complejos, esto es, multiplicamos y dividimos por el conjugado del divisor.

Ejemplo

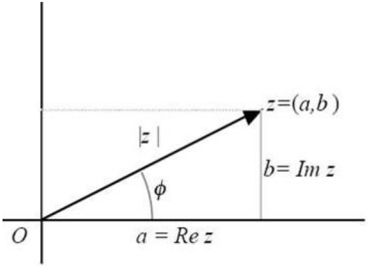
Si $z = 2 + i$ y $w = 3 - 4i$, entonces $\overline{w} = 3 + 4i$ y así:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{(2+i)}{(3-4i)}\cdot\frac{(3+4i)}{(3+4i)} \\ &= \frac{2+11i}{3^2+(-4)^2} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

Módulo y argumento de un número complejo

Dado un complejo $z = a + bi$.

- Se denomina módulo de z, y se denota $|z|$ a la longitud del segmento OP, donde P es el punto del plano asociado a z.
- Si $z \neq 0$ entonces se denomina **argumento** de z, y se denota $Arg(z)$, al conjunto de todos los ángulos que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el eje positivo de las abscisas.



Observación

1. El número complejo $z = 0$ no tiene argumento.
2. Un número complejo no nulo tiene infinitos argumentos, dependiendo de cuántas "vueltas" demos alrededor del origen para medir el ángulo. Si ϕ y θ son dos argumentos del mismo complejo z debe valer $\phi = \theta + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Existe un único argumento ϕ de z que verifica $-\pi < \phi \leq \pi$, se denomina **argumento principal** y se denota por $arg(z)$. Luego,

$$-\pi < arg(z) \leq \pi.$$

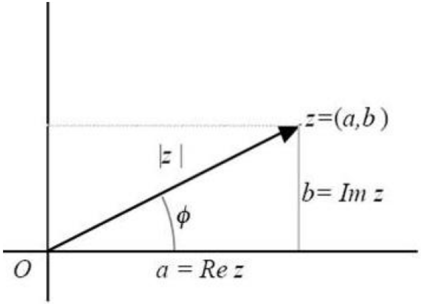
Notar además que $Arg(z) = \{arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo

Si $z = 2 + 2i$ entonces $\theta = \frac{9\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ y $\gamma = \frac{17\pi}{4}$ son argumentos de z, pero ϕ es el argumento principal. Esto es, $arg(z) = \frac{\pi}{4}$ y $Arg(z) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

¿Cómo se calculan el módulo y el argumento principal de un complejo?

Observando la siguiente figura, y teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas, tenemos que:



$$|z|^2 = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = z \cdot \overline{z} \qquad (3)$$

$$\cos(\phi) = \frac{a}{|z|}, \operatorname{sen}(\phi) = \frac{b}{|z|} \text{ y } \tan(\phi) = \frac{b}{a} \qquad (4)$$

En resumen, sea $z = a + ib$, resulta:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$,

$$arg(z) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a = 0,\ b > 0 \\ (-\pi/2) & \text{si } a = 0,\ b < 0 \\ arctan\,(b/a) & \text{si } a \neq 0, \quad z \in I_c \text{ ó } z \in IV_c \\ arctan\,(b/a) + \pi & \text{si } a \neq 0, \quad z \in II_c \\ arctan\,(b/a) - \pi & \text{si } a \neq 0, \quad z \in III_c \end{cases}$$

Ejemplo

$|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $arg(-1 - i) = arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4}$.

Forma trigonométrica de un número complejo.

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C} - \{0\}$. Denotamos por $\rho = |z|$ y φ es un argumento de z (en lo posible el argumento principal).

- Definimos la **forma trigonométrica** de z como

$$z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi). \tag{5}$$

Observemos que esta representación surge de las ecuaciones en (4), despejando a y b del siguiente modo

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \tag{6}$$

Teorema (5)

Sean z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. $|z.w| = |z| \, . \, |w|$;
2. $arg(z) + arg(w)$ *es un argumento de* $z.w$.

Demostración del Teorema (5).

Sean $z = |z| (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $w = |w| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ dos complejos dados en su forma trigonométrica (donde $\varphi = arg(z)$ y $\theta = arg(w)$, respectivamente). Calculemos:

$$\begin{aligned} z.w &= |z| (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \, . \, |w| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= |z| \, |w| ((\cos \varphi \cos \theta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta) + i (\cos \varphi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta)) \\ &= |z| \, |w| (\cos (\varphi + \theta)) + i \operatorname{sen} (\varphi + \theta)) \end{aligned}$$

(en esta prueba hemos usado las conocidas fórmulas para el coseno y el seno del ángulo suma). Ahora, está claro que $|z.w| = |z| \, . \, |w|$ y que $\varphi + \theta = arg(z) + arg(w)$ es un argumento para $z.w$. $\square$

Forma polar de un número complejo

Observando (5), vemos que para definir z solamente necesitamos conocer su módulo $|z| = \rho$ y uno de sus argumentos φ. Resumimos esa información definiendo

- La **forma polar** de z como
$$z = \rho_\varphi. \tag{7}$$

Observación

1. si $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$ entonces $z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \rho &= \delta \\ \varphi &= \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Si z está dado en su forma binómica, obtenemos la forma polar calculando su módulo y su argumento por las fórmulas en la diapositiva 22.
   Si z está dado en forma polar, podemos obtener la forma binómica a partir de la forma trigonométrica (5).

La forma polar nos da una manera muy sencilla de realizar productos, cocientes, y calcular potencias n-ésimas de números complejos. De hecho, tenemos el siguiente teorema cuya demostración se deja como ejercicio (item 3. dejar para luego de ver el capítulo de inducción matemática):

Teorema (6)

Sean $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$ dos complejos dados en forma polar. Entonces:

1. $zw = (\rho\delta)_{\varphi+\theta}$
2. *Si* $w \neq 0$, $\left(\frac{z}{w}\right) = \left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{\varphi-\theta}$
3. $z^n = (\rho^n)_{n\varphi}$

Raíces n-ésimas de un número complejo

Dado un número complejo z, decimos que w es una **raíz n-ésima** de z si $w^n = z$.
El ítem 3 del Teorema (6) nos permitirá calcular de manera fácil raíces n-ésimas.
Comencemos analizando un ejemplo. Supongamos que tenemos $z = 16_{\frac{\pi}{4}}$ y queremos calcular las raíces cuartas de z.
Si $w = \rho_\phi$ es una de esas raíces, debe ser $w^4 = (\rho^4)_{4\phi} = z$.
De la igualdad de complejos dados en forma polar vista en diapositiva 25, obtenemos

$$\rho^4 = 16 \Rightarrow \rho = 2$$

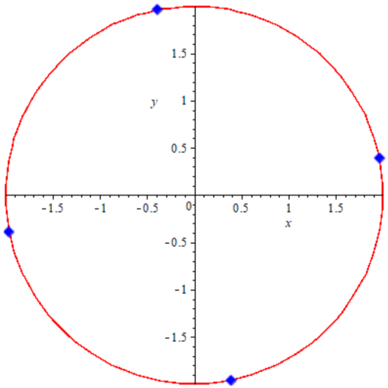
y

$$4\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Si bien en la última expresión k varía en todo $\mathbb{Z}$, solo para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ obtenemos complejos distintos.
De hecho tomando $k = 4$, obtenemos el argumento $\frac{33\pi}{16} = \frac{\pi}{16} + 2\pi$ que es congruente al argumento obtenido para $k = 0$.

Luego las cuatro raíces cuartas de z son $w_0 = 2_{\frac{\pi}{16}}$, $w_1 = 2_{\frac{9\pi}{16}}$, $w_2 = 2_{\frac{17\pi}{16}}$ y $w_3 = 2_{\frac{25\pi}{16}}$.

Si graficamos las cuatro raíces cuartas obtenidas, podemos apreciar que son los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia de radio 2.



Siguiendo exactamente el mismo razonamiento es posible probar el siguiente teorema, denominado **fórmula de De Moivre**:

Teorema (7)

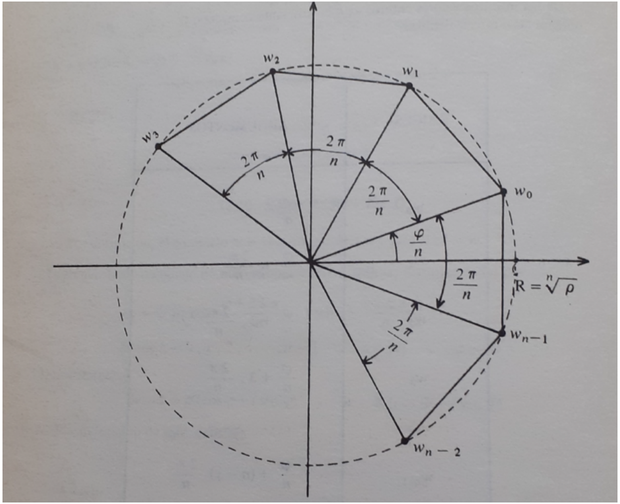
Sea $z = \rho_\phi$ un número complejo en forma polar. Entonces si $w = \delta_\theta$ es una raíz n-ésima de z resulta

$$\delta = \sqrt[n]{\rho} \text{ y } \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \text{ con } k = 0, 1, ..., n-1.$$

Demostración del Teorema (7).

La demostración formal requiere el uso del método de inducción matemática que será abordado hacia el final de este curso, razón por la cual, admitimos el resultado y dejamos su verificación como ejercicio a futuro. □

Si se grafican las n raíces n-ésimas w_0, w_1,..., w_{n-2}, w_{n-1}, puede verse que son los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en una circunferencia de radio $R = \sqrt[n]{\rho}$.



Ejemplo

Calculemos las soluciones de la ecuación $z^3 + 1 = 0$. Como $z^3 = -1$, debemos encontrar las raíces cúbicas de -1, esto es, $z = \sqrt[3]{-1}$. (Verificar que -1, escrito en forma polar, es 1_π).

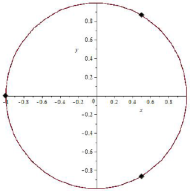
$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ \sqrt[3]{1}_{\frac{\pi+2k\pi}{3}} : k = 0,1,2 \right\} = \left\{ 1_{\frac{(2k+1)}{3}\pi} : k = 0,1,2 \right\}$$

$k = 0 \to 1_{\frac{\pi}{3}}$, $k = 1 \to 1_\pi$, $k = 2 \to 1_{\frac{5\pi}{3}}$

Entonces hallamos que las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_1 &= \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1 \\ w_2 &= \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si graficamos las soluciones obtenidas, apreciamos que yacen en un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio 1.



También a partir de la obtención de raíces de números complejos, podemos resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos. En efecto, puede verse (con la misma demostración que para los coeficientes reales) que las raíces de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, con a, b y $c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$), son

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observemos que aquí no ponemos el símbolo $\pm$ pues todo complejo tiene exactamente dos raíces cuadradas.