PRÁCTICA 1 - Números Complejos

1. Calcular:

a) $(6,2)-(3,\frac{2}{3})$ c) $(1+i)^2$ e) $1_{\frac{\pi}{2}}1_{\frac{3\pi}{2}}$

b) $(4,-1)\cdot(-2,3)$ d) $\frac{(3+i)^2+(1-i)^2-2\cdot(2+i)}{4+2i}$ f) $3_{\frac{\pi}{5}}:4$

2

a), b), d) y f) Las resoluciones están en los videos del aula virtual.

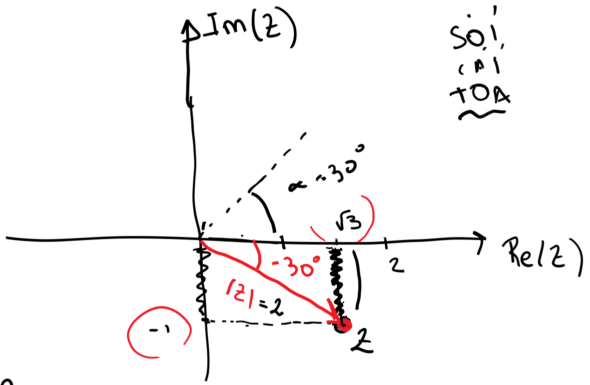
2. Representar gráficamente y escribir en forma polar y trigonométrica cada uno de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3}-i$ c) -1

b) $\frac{1+i}{1-i}$ d) $-2+6i^{10}$

a) $z=\sqrt{3}-i$ forma binómica

$Re(z)=\sqrt{3}$ $Im(z)=-1$.



SOH CAH TOA

Forma polar. $z=|z|_{\alpha}$

$\bullet\ |z|=\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2.$

$\bullet\ tg(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha=\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30° \rightsquigarrow \pi/6.$

Un argumento para z es $-30°$,

y $arg(z)=-30°+360°=330°$

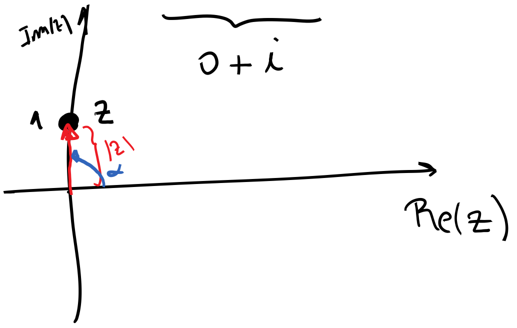
$$\boxed{\begin{array}{l}\therefore\ z=2_{-30°}\\ z=2_{330°}\end{array}}$$

Recordar $\{\ 0\leq arg(z)<2\pi$

Forma trigonométrica: $z=2(\cos 330°+i\,\text{sen}\,330°)$
$=2(\cos\frac{11}{6}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi).$

b) $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1^2+(-1)^2}=\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{2}$

$= \frac{2i}{2} = \boxed{i}$ $\underbrace{}_{0+i}$ $\qquad Re(z) = 0 \quad ; \quad Im(z) = 1.$



Forma Polar: $z = |z|_\alpha$

$|z| = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2} = \arg(z). \qquad 0 \leq \frac{\pi}{2} < 2\pi$

$$\boxed{z = 1_{\pi/2}}$$

Forma trigonométrica: $\boxed{z = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \pi/2\right)}$

d) $z = -2 + 6\, i^{10}$

$= -2 + 6 \cdot i^{2}$

$= -2 + 6 \cdot (-1)$

$= -2 - 6 = -8 = -8 + 0i$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$n \,\underline{|\, 4}$

$\cancel{r} \quad c$

$0 \leq r \leq 3$

$n = 4.c + r$

$10 \,\underline{|\, 4}$

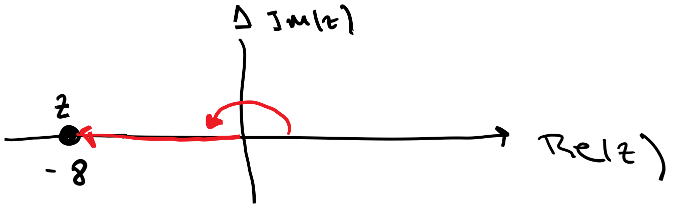
$\cancel{2} \quad 2$

$10 = 4.2 + 2$ ✓

$Re(z) = -8 \qquad Im(z) = 0$

$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r$

$= 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$



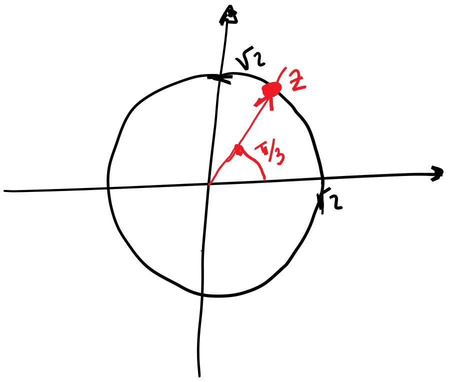
Forma polar: $z = 8_\pi \qquad 0 \leq \arg(z) = \pi < 2\pi.$

Forma trigonométrica: $z = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi).$

3. Representar gráficamente y escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

a) 3 b) $1_{-45°}$ c) $\sqrt{2}_{420°}$ d) $3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6})$

c) $z = \sqrt{2}_{420°}$ (Forma polar)



Sabemos: • $|z| = \sqrt{2}$ (Trazo una circunferencia de radio $\sqrt{2}$).

• Un argumento de z es $420°$

Para graficar busco su argumento Principal, $0 \leq \arg(z) < 2\pi$

$\arg(z) = 420° - 360° = 60° \rightsquigarrow \pi/3$. (grafico)

Para escribir la forma binómica, considero primero su forma Trigonométrica y resuelvo algebraicamente:

$z = \sqrt{2}(\cos \pi/3 + i \,\mathrm{sen}\, \pi/3) \longrightarrow$ forma Trigonométrica.

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2.3}}{2}$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}}{2}} \longrightarrow \text{forma binomica.}$$

4. ¿Cuántos números complejos verifican $Re(z) = 2\sqrt{3}$ y $|z| = 9$? ¿Cuáles son? Expresarlos en forma binónica, polar y trigonométrica.

La resolución está en el video del aula virtual.

5. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

   a) Si $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|a| \leq |z|$.

   b) $arg(z) = arg(\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

   c) $\exists z \in \mathbb{C}\ /\ arg(z) = arg(\bar{z})$.

   d) Si $z = -4(\cos\frac{7\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{3})$ entonces $arg(z) = \frac{7\pi}{3}$.

c) $\exists z \in \mathbb{C}\ /\ arg(z) = arg(\bar{z})$

Es verdadero porque $\exists z = 3$ donde $\bar{z} = 3$

y $arg(z) = arg(\bar{z}) = 0$.

d) Si $z = -4\left(\cos \frac{7}{3}\pi + i \,\mathrm{sen}\, \frac{7}{3}\pi\right)$ entonces $arg(z) = \frac{7}{3}\pi$.

Es falso porque $\frac{7}{3}\pi \notin [0, 2\pi)$

$$arg(z) = \frac{7}{3}\pi - 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

6. Expresar en forma polar los resultados de las operaciones indicadas:

   a) $2 \cdot (2\sqrt{3} - 2i) \cdot (1 + i)$

   b) $(-1 + \sqrt{3}i)^6$

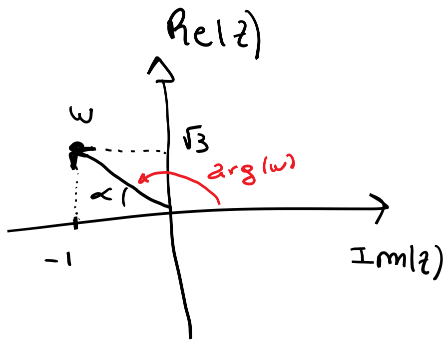
   c) $2_{30^\circ} + 5_{315^\circ}$

   d) $\dfrac{6_{60^\circ}\,\frac{1}{2}_{30^\circ}}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}}$

b) $z = (-1 + \sqrt{3}i)^6$

Sea $w = -1 + \sqrt{3}\,i$, $z = w^6$; $z = ?$

Escribimos a w en forma polar:



$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$$

Luego:

$$\arg(w) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \boxed{w = 2_{\frac{2\pi}{3}}}$$

$$z = w^6 = \left(2_{\frac{2}{3}\pi}\right)^6 = 2^6_{\frac{2}{3}\pi \cdot 6^2} = 64_{4\pi}$$

Obs: $\arg(z) = 0$

$$\boxed{\therefore z = 64}$$

d) $$\frac{6_{60^\circ} \cdot \frac{1}{2}_{30^\circ}}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}\,(60^\circ + 30^\circ)}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{3_{90^\circ}}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{3_{\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{4}_{\frac{\pi}{4}}} = \left(\frac{3}{\frac{1}{4}}\right)_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = 12_{\frac{2\pi - \pi}{4}} = \boxed{12_{\frac{\pi}{4}}}$$