Demostraciones Pendientes de la Unidad 7

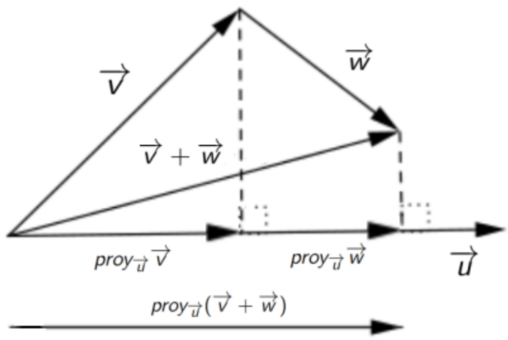
En este documento se presentarán las demostraciones de dos resultados de la unidad de Vectores, referidos a las propiedades distributivas del producto escalar y del producto vectorial, respecto de la suma de vectores. Las mismas se harán bajo la suposición de que todos los vectores intervinientes son no nulos, siendo los casos en que alguno lo sea, de prueva inmediata.

La primera de ellas consiste entonces en demostra que, para $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores, vale

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) \ = \ \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \ .$$

Para ello, conviene primero notar la siguiente propiedad de los vectores proyección, comprobable gráficamente,

$$\mathrm{proy}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \mathrm{proy}_{\vec{u}}\vec{v} + \mathrm{proy}_{\vec{u}}\vec{w} \ ,$$



la cual implica, recordando la definición de la cantidad proyección escalar, que

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\vec{u}} = \vec{v}_{\vec{u}} + \vec{w}_{\vec{u}} \ .$$

Con estos elementos, siendo $\vec{u} \times \vec{x} = |\vec{u}|\,|\vec{x}|\,\cos(\widehat{\vec{u},\vec{x}}) = |\vec{u}|\,\vec{x}_{\vec{u}}$, se concluye la identidad deseada,

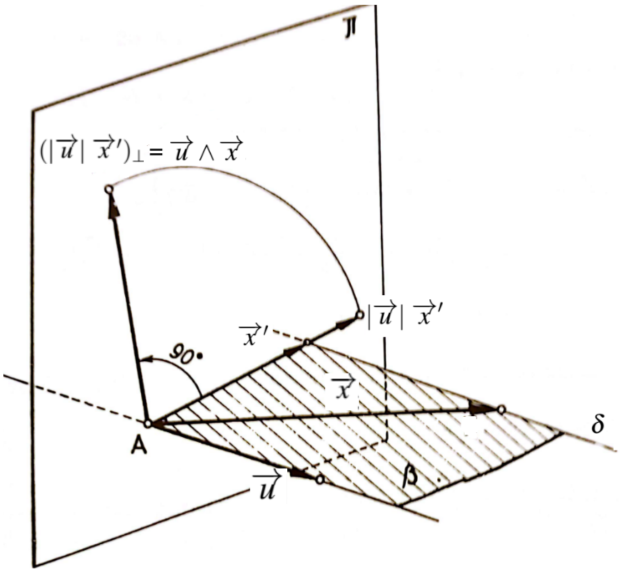
$$\begin{aligned}\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= |\vec{u}|\,(\vec{v} + \vec{w})_{\vec{u}} = |\vec{u}|\,(\vec{v}_{\vec{u}} + \vec{w}_{\vec{u}}) \\ &= |\vec{u}|\,\vec{v}_{\vec{u}} + |\vec{u}|\,\vec{w}_{\vec{u}} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \ .\end{aligned}$$

Para mostrar las propiedades distributivas del producto vectorial respecto de la suma, puede elegirse mostrar sólo una, por ejemplo,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \ ,$$

y la otra seguirá casi inmediatamente. Para mostrar la propuesta, primero se verá otra forma de encontrar el producto vectorial entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{x}$, que consiste en comenzar aplicando ambos vectores en un punto A, y considerar el plano π, perpendicular a $\vec{u}$ en A, para luego (ver segunda imagen)

1. proyectar a $\vec{x}$ sobre π, y obtener el vector $\vec{x}\,'$,
2. multiplicar a $\vec{x}\,'$ por $|\vec{u}|$, y obtener el vector $|\vec{u}|\,\vec{x}\,'$,
3. girar a $|\vec{u}|\,\vec{x}\,'$ sobre π un ángulo de $90°$ en sentido antihorario, y obtener el vector $(|\vec{u}|\,\vec{x}\,')_\perp$.



Se afirma que habiendo hecho esto, resulta $(|\vec{u}|\ \vec{x}\,')_\perp = \vec{u} \wedge \vec{x}$. En efecto,

$$|(|\vec{u}|\ \vec{x}\,')_\perp| \ = \ ||\vec{u}|\ \vec{x}\,'| \ = \ |\vec{u}|\,|\vec{x}\,'| \ = \ |\vec{u}|\,|\vec{x}|\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{x}) \ = \ |\vec{u} \wedge \vec{x}|\,,$$

siendo además $(|\vec{u}|\ \vec{x}\,')_\perp$ perpendicual a $\vec{u}$ por pertenecer a π, y perpendicular a $\vec{x}$ por ser perpendicular al plano β que determinan $\vec{x}\,'$ y la recta δ, y por pertenecer $\vec{x}$ a β, concluyendo misma dirección para $(|\vec{u}|\ \vec{x}\,')_\perp$ y $\vec{u} \wedge \vec{x}$, y mismo sentido, dada la orientación antihoraria del giro propuesto.

Teniendo en cuenta esta construcción para el producto vectorial, la propiedad de ser el vector proyección de una suma igual a la suma de los vectores proyección antes vista, que permite garantizar bajo la notación propuesta, que para $\vec{x}$, $\vec{y}$, la igualdad

$$(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}\,' + \vec{y}\,'\,,$$

y también que el vector obtenido al girar en un ángulo dado, un vector suma de otros dos, es igual al vector obtenido si primero se rotan los originales y luego se los suma, para el caso de interés de la forma

$$(\vec{x} + \vec{y})_\perp = \vec{x}_\perp + \vec{y}_\perp\,,$$

se concluye la propiedad distributiva buscada

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (|\vec{u}|\ (\vec{v} + \vec{w})')_\perp = (|\vec{u}|\ (\vec{v}\,' + \vec{w}\,'))_\perp = (|\vec{u}|\ \vec{v}\,' + |\vec{u}|\ \vec{w}\,')_\perp$$

$$= (|\vec{u}|\ \vec{v}\,')_\perp + (|\vec{u}|\ \vec{w}\,')_\perp = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}\,.$$

Como se dijo, habiendo probado ésta, la otra sale de manera casi inmediata,

$$(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})) = -(\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$= \cdots = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (-(\vec{u} \wedge \vec{w})) = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$