PRÁCTICA 6 - El principio de inducción matemática

1. Calcular

   a) $\sum_{r=0}^{4} r.$ b) $\prod_{i=1}^{5} i.$ c) $\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}.$ d) $\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}.$

2. Dado un natural m, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$; $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

   a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$. c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

3. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$.
   b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

4. Calcular

   a) $2^5 - 2^4$.
   b) $2^{n+1} - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $(2^2)^n + (2^n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
   d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Probar que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.
   b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
   c) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n \cdot (n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
   d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.
   e) $\sum_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n + 1)! - 1$.

6. Analizar a veracidad de las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $8|(3^{2n} - 1)$.
   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^n$.

7. Demostrar que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) Suma de una **Progresión aritmética**:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d) = \frac{[a + (a + (n - 1)d)]n}{2}$$

b) Suma de una **Progresión geométrica**: si $r \neq 1$,

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

8. Probar las siguientes propiedades de los símbolos sumatoria y productoria: sean $x_0, x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ valores reales dados. Entonces:

   a) $\sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + y_i) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$.

   b) Si $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\sum_{i=j+1}^{n+j} x_{i-j} = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

   c) (Propiedad telescópica) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0$.

   d) $\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i$.

   e) $\prod_{i=1}^{n} c \cdot x_i = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$.

9. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $x > -1 \Rightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

   b) Si $n \geq 2$, entonces $1 + 2^2 + ... + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3} < 1 + 2^2 + ... + (n + 1)^2$.

10. ¿Para qué valores naturales de n resulta $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$? Demostrar.

11. Dada la proposición: $P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$, demostrar que si $P(k)$ es verdadera para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $P(k + 1)$ es verdadera. Analizar luego si esta propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

12. Observemos que:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

    Conjeturar una ley que generalice estos casos particulares y demostrarla utilizando el principio de inducción matemática.

13. Leer la siguiente demostración por inducción de la siguiente proposición:

    Todo conjunto de n bolas de billar está formado por bolas del mismo color.

    Base de la inducción: para $n = 1$ la afirmación es trivialmente verdadera.

    Paso de inducción: supongamos que tenemos $k + 1$ bolas de billar que numeramos $1, 2, ..., k, (k + 1)$. De acuerdo con la hipótesis de inducción, las bolas $1, 2, 3, ..., k$ son del mismo color; además, por la misma razón, las bolas $2, 3, ..., k, (k + 1)$ son del mismo color.

    En consecuencia, las bolas $1, 2, 3, ..., k, (k + 1)$ son del mismo color.

    ¿Dónde está el error en esta demostración?

14. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a) $n = n^2$. *b*) $n = n + 1$. *c*) $3^n = 3^{n+2}$. *d*) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

15. Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

   a) Demostraremos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Supongamos que $5k + 3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k + 3 = 5p$. Probemos que $5(k + 1) + 3$ es múltiplo de 5: como

$$5(k + 1) + 3 = (5k + 5) + 3 = (5k + 3) + 5 = 5p + 5 = 5(p + 1),$$

   entonces obtenemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo $n, a^n = 1$.
   Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces

$$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

   Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo entero no negativo n.