Lógica

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2023

Proposiciones

Son proposiciones

Son oraciones declarativas que tienen un valor de verdad: son verdaderas (valor 1) o falsas (valor 0), pero NO ambas. Por ejemplo:

- p : Hoy es lunes
- q : José Hernández escribió el Martín Fierro
- $r : 1 + 3 = 5$

No son proposiciones

Afirmaciones exclamativas, imperativas o preguntas. Ejemplos:

- ¡Qué lindo día!
- No salgan de casa
- $x^2 + 1 = 0$

Conectores lógicos

Son operadores que sirven para formar nuevas proposiciones a partir de proposiciones dadas $p, q, r, \ldots$

Negación

La negación de p es $\neg p$ y se lee "no p". El valor de verdad de $\neg p$ es el opuesto al valor de verdad de p. Esto puede resumirse usando las llamadas *tablas de verdad*.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Conjunción

La conjunción de las proposiciones p y q es $p \wedge q$ y se lee "p y q". La conjunción es verdadera solamente cuando las dos proposiciones que la conforman son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción

- La disyunción (inclusiva) de p y q es $p \vee q$, se lee "p o q" y es verdadera cuando alguna de las dos proposiciones que la componen es verdadera (en particular, si ambas son verdaderas la disyunción es verdadera).
- La disyunción exclusiva se denota $p \veebar q$ y es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones que la compone son verdaderas.

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Implicación

La implicación $p \to q$, se lee "p implica q". A veces también se lee

- Si p, entonces q.
- p es *condición suficiente* para q
- q es *condición necesaria* para p
- etc.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

En la implicación $p \to q$, p se llama la *hipótesis* y q se llama la *conclusión*. La tabla de verdad anterior tiene la siguiente interpretación: no se puede tener una conclusión falsa con una hipótesis verdadera.

Bicondicional

La proposición $p \leftrightarrow q$ es el bicondicional de p y q. Se lee:

- p si y sólo si q, a veces abreviado p sii q.
- p es condición necesaria y suficiente para q.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ejemplo

- La proposición "si $1+1=3$, entonces $2+3=7$" es verdadera.
- La proposición "$1+1=3$ si y sólo si $2+3=7$" es verdadera.

Proposiciones primitivas

Son las proposiciones que no se pueden formar a partir de otras proposiciones utilizando los operadores lógicos anteriores.

Ejemplo

Proposiciones primitivas:

- s: Felipe saldrá a dar un paseo.
- t: La luna está brillando.
- u: Está nevando.

Proposiciones compuestas:

- $(t \wedge \neg u) \rightarrow s$: Si la luna está brillando y no está nevando, entonces Felipe saldrá a dar un paseo.
- $t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$: Si la luna está brillando, entonces si no está nevando, Felipe saldrá a dar un paseo. El operador $\neg$ tiene precedencia sobre $\rightarrow$: o sea $\neg u \rightarrow s$ significa $(\neg u) \rightarrow s$ y no $\neg(u \rightarrow s)$.

Order of precedence [edit]

As a way of reducing the number of necessary parentheses, one may introduce precedence rules: ¬ has higher precedence than ∧, ∧ higher than ∨, and ∨ higher than →. So for example, $P \vee Q \wedge \neg R \rightarrow S$ is short for $(P \vee (Q \wedge (\neg R))) \rightarrow S$.

Here is a table that shows a commonly used precedence of logical operators.[15]

Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

However, not all compilers use the same order; for instance, an ordering in which disjunction is lower precedence than implication or bi-implication has also been used.[16] Sometimes precedence between conjunction and disjunction is unspecified requiring to provide it explicitly in given formula with parentheses. The order of precedence determines which connective is the "main connective" when interpreting a non-atomic formula.

Ejemplo

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Luego tiene sentido hablar de la proposición $p \wedge q \wedge r$ sin ambigüedad. En otras palabras, la conjunción es asociativa. (Volveremos sobre esto más adelante)

Ejercicio

Probar que la disyunción es asociativa.

Ejemplo

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Luego, no tiene sentido escribir $p \vee q \wedge r$ (salvo que aclaremos de antemano cómo se debe evaluar esta expresión).

Ejemplo

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$\neg p$	$p \wedge \neg p \wedge q$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Definición

Una proposición compuesta es una *tautología* (resp. *contradicción*) si es verdadera (resp. *falsa*) para todas las asignaciones de verdad de las proposiciones que la componen.

Notación

- Usaremos la notación T_0 para una tautología (también se usa $\top$)
- Usaremos la notación F_0 para una contradicción (también se usa $\perp$)

Equivalencia lógica

Definición

Dos proposiciones s_1 y s_2 son *lógicamente equivalentes*, y escribimos $s_1 \iff s_2$, si s_1 y s_2 tienen las mismas tablas de verdad. Dicho de otro modo, s_1 y s_2 toman los mismos valores de verdad para todas las posibles asignaciones de valores de verdad de las proposiciones primitivas que las componen.

Ejemplo

Proposiciones como s_1: "Hoy es lunes" y s_2: "No está lloviendo" no son lógicamente equivalentes, aunque en el momento de escribir esto el bicondicional $s_1 \leftrightarrow s_2$ sea verdadero.

Importante

- Si $s_1 \iff s_2$ entonces $s_1 \leftrightarrow s_2$ es una tautología.
- Recíprocamente, si $s_1 \leftrightarrow s_2$ entonces $s_1 \iff s_2$.

Ejemplo

$p \iff \neg\neg p$

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

Ejemplo (Importante)

$(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Ejemplo

$(p \leftrightarrow q) \iff (p \to q) \land (q \to p)$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ejemplo (Leyes de De Morgan)

- $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Notar que las leyes de De Morgan nos dicen que $\neg$ se "distribuye" en $\vee$ y $\wedge$.

Ejemplo (Leyes distributivas)

- $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Hacer el otro caso como ejercicio.

Teorema (Leyes de la lógica)

Sean p, q, r proposiciones primitivas, T_0 una tautología y F_0 una contradicción. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\neg\neg p \iff p$ *(Ley de doble negación)*
2. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
   $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ *(Leyes de De Morgan)*
3. $p \vee q \iff q \vee p$
   $p \wedge q \iff q \wedge p$ *(Leyes conmutativas)*
4. $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
   $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$ *(Leyes asociativas)*
5. $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(Leyes distributivas)*
6. $p \vee p \iff p$
   $p \wedge p \iff p$ *(Leyes idempotentes)*
7. $p \vee F_0 \iff p$
   $p \wedge T_0 \iff p$ *(Leyes de neutro)*

Teorema (cont.)

8. $p \vee \neg p \iff T_0$
   $p \wedge \neg p \iff F_0$ *(Leyes inversas)*
9. $p \vee T_0 \iff T_0$
   $p \wedge F_0 \iff F_0$ *(Leyes de dominación)*
10. $p \wedge (p \vee q) \iff p$
    $p \vee (p \wedge q) \iff p$ *(Leyes de absorción)*

Demostración.
Ejercicios (varias de estas propiedades ya han sido demostradas). $\square$

Observación

La equivalencia lógica tiene las siguientes propiedades.

- $s \iff s$
- Si $s_1 \iff s_2$, entonces $s_2 \iff s_1$.
- Si $s_1 \iff s_2$ y $s_2 \iff s_3$, entonces $s_1 \iff s_3$.

Luego, la equivalencia lógica es lo que se conoce como una relación de equivalencia (volveremos sobre esto más adelante en la materia).

Reglas de sustitución

1. Supongamos que una proposición compuesta P es una tautología y que p es una proposición primitiva que aparece en P. Si reemplazamos *cada* ocurrencia de p en P por la *misma* proposición q, entonces la proposición resultante P_1 también es una tautología.
2. Sea P una proposición compuesta y p una proposición arbitraria que aparece en P. Sea q una proposición tal que $p \iff q$. Supongamos que reemplazamos en P una o mas ocurrencias de p por q y llamemos P_1 a la proposición obtenida. Entonces $P \iff P_1$.

Ejemplo

$[(r \wedge s) \to q] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee q]$ es una tautología. Para probar esto no es necesario hacer la tabla de verdad (tendría 8 filas), basta con observar que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ es una tautología y sustituir todas las ocurrencias de p por $r \wedge s$.

Ejemplo

Negar y simplificar la proposición compuesta $(p \vee q) \rightarrow r$.

$$
\begin{aligned}
\neg[(p \vee q) \rightarrow r] &\iff \neg[\neg(p \vee q) \vee r] && \text{1ra regla sust.} \\
&\iff \neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r && \text{De Morgan} \\
&\iff (p \vee q) \wedge \neg r && \text{Doble negación}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

A partir de una implicación $p \to q$ podemos formar las siguientes proposiciones:

- La *recíproca*: $q \to p$
- La *inversa*: $\neg p \to \neg q$
- La *contrapositiva*: $\neg q \to \neg p$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p$$

$$q \to p \iff \neg p \to \neg q$$

Esto se usa mucho en las llamadas demostraciones por el absurdo.

Reglas de inferencia

- Las reglas de inferencia nos permiten decidir cuándo un argumento es válido sin tener que recurrir a extensas tablas de verdad (es lo que usamos en la práctica, de manera más coloquial cuando demostramos teoremas o resolvemos ejercicios).
- Un *argumento válido* es una tautología

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k) \to q$$

  - premisas: $p_1, p_2, \ldots, p_k$
  - conclusión: q
- En un argumento válido, si sabemos que todas las premisas son verdaderas, automáticamente sabremos que la conclusión es verdadera.

Ejemplo

Demostrar la siguiente implicación lógica:

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \implies \neg p.$$

- Hay que probar que el condicional

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \to \neg p \qquad (*)$$

  es una tautología.
- Si usáramos tablas de verdad, necesitaríamos $2^5 = 32$ filas y varias columnas...
- Sin embargo, podemos tratar de probar que (*) siempre toma el valor verdadero sin usar tablas de verdad.

Ejemplo (cont.)

- Para que (*) sea falso debemos tener que el *antecedente* es verdadero y el *consecuente* es falso:
  - $(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u$ es verdadero, o sea,

    $$p \to r, \qquad r \to s, \qquad t \vee \neg s, \qquad \neg t \vee u, \qquad \neg u$$

    son todas verdaderas.
  - $\neg p$ falso, o sea p verdadero.
  - Si p verdadero y $p \to r$ verdadero, r debe ser verdadero.
  - Si r verdadero y $r \to s$ verdadero, dice que s verdadero.
  - s verdadero dice que $\neg s$ es falso, y como $t \vee \neg s$ es verdadero, t debe ser verdadero.
  - Ídem, t verdadero y $\neg t \vee u$ verdadero nos dice que u es verdadero.
  - Luego tenemos que u y $\neg u$ deben ser ambas verdaderas, lo cual sabemos que no es cierto.
- Es decir, no hay ninguna posibilidad de que si hiciéramos la tabla de verdad, en la última columna nos aparezca algún falso, ¡en ninguna fila!

Modus Ponens

Sabemos (ejercicio) que

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

es una tautología. Esto nos dice que si sabemos que p es verdadera y $p \to q$ es verdadera, entonces q debe ser verdadera. Esta *regla de inferencia* suele representarse con una tabla:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

A veces también se escribe como

$$p \to qpq$$

Modus Tollens

- Regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

- Tautología asociada: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ (ejercicio).
- Para probar que el condicional anterior es una tautología podemos usar las reglas de sustitución con la equivalencia lógica $(p \rightarrow q) \iff (\neg q \rightarrow \neg p)$ y luego la regla de inferencia Modus Ponens.
- Informalmente el Modus Tollens se usa del siguiente modo: cuando queremos probar la implicación lógica $p \implies q$, uno supone que q es falso y prueba que p es falso también.

Más reglas de inferencia

Ley de silogismo

- Regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

- Tautología asociada

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

Reglas de conjunción/disyunción

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \land q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \lor q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Reglas de inferencia sobre bicondicionales

Introducción del bicondicional

- Regla de inferencia

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to p \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array}$$

- Tautología asociada: $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \to (p \leftrightarrow q)$

Eliminación del bicondicional

- Reglas de inferencia:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \vee q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

- Tautologías asociadas: ejercicio.

Reducción al absurdo

- Regla de inferencia:

$$\frac{p \to F_0}{\neg p}$$

- Tautología asociada: $(p \to F_0) \to \neg p$

p	F_0	$p \to F_0$	$\neg p$
0	0	1	1
1	0	0	0

- Este tipo de argumentos son muy comunes en matemática: cuando queremos probar que “algo” es cierto, suponemos que es falso y tratamos de llegar a una contradicción.

Ejemplo

Las reglas de inferencia se pueden combinar para obtener argumentos válidos. Volvamos al ejemplo que dimos al principio de esta sección.

$$[(p \to r) \land (r \to s) \land (t \lor \neg s) \land (\neg t \lor u) \land \neg u] \implies \neg p$$

Usando las reglas de inferencia y las reglas de sustitución lo podemos pensar del siguiente modo.

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ t \lor \neg s \\ \neg t \lor u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to s \\ s \to t \\ t \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to t \\ t \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array}$$

Usamos: Ley de silogismo, las Leyes lógicas $p' \lor q' \iff q' \lor p'$ y $p \to q \iff \neg p \lor q$ y finalmente Modus Tollens

Ejemplo de la vida real

Analicemos la demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

- Queremos ver $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Suponemos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- Escribimos $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, fracción irreducible.
- Caso 1: m impar, sigue que $m^2 = 2n^2$ es par. Absurdo.
- Caso 2: m par, sigue que n es impar (pues la fracción es irreducible) y que m^2 es múltiplo de 4, pero $m^2 = 2n^2$ no es divisible por 4. Absurdo.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies F_0$
- Concluimos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. QED

- $\dfrac{\neg p \to F_0}{p}$
- Reglas de sustitución
- Análisis por casos

$$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ p \vee q \\ \hline r \end{array}$$

Ejercicio: probar que esta es una regla de inferencia válida.

- Ley de silogismo

Cuantificadores

Recordemos que al principio dijimos que oraciones del estilo $x^2 + 1 = 0$ no son consideradas proposiciones (a menos que sepamos qué valor toma x). En este caso x se considera una *variable* y a continuación estudiaremos este tipo de situaciones.

Definición

Una afirmación es una *proposición abierta* si

- contiene una o más variables;
- no es una proposición, pero
- se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen se reemplazan por ciertos "valores permitidos".

Notación para proposiciones abiertas

$p(x)$, $q(x)$, $r(x, y)$, $\neg p(x)$, $p(x) \to q(x)$, etc.

Ejemplo

Sigamos con nuestro ejemplo, $p(x) : x^2 + 1 = 0$.

- $p(1) = 0$ es FALSA
- "Hay un número real x tal que $p(x)$" es (una proposición y es) FALSA
- $p(i)$ es VERDADERA
- "Hay un número complejo z tal que $p(z)$" es VERDADERA
- "Todo número complejo z satisface $p(z)$" es FALSA

Cuantificador existencial

$\exists x\, p(x)$ (existe un x tal que $p(x)$ es VERDADERA)

Cuantificador universal

$\forall x\, p(x)$ (para todo x, $p(x)$ es VERDADERA)

Ejemplo

Consideremos las siguientes proposiciones abiertas con $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) : x \geq 0 \qquad q(x) : x^2 \geq 0$$

$$r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad s(x) : x^2 - 3 > 0$$

- $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)]$ es VERDADERA (por ejemplo $x = 1$)
- $\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$ es VERDADERA
- $\forall x\,[q(x) \rightarrow s(x)]$ es FALSA (contraejemplo: $x = 0$)
- $\forall x\,[r(x) \rightarrow p(x)]$ es FALSA (contraejemplo: $x = -1$)

Importante

Siempre hay que prestar atención al contexto para determinar en qué *universo* toman valores nuestras variables. Por ejemplo,

$$\exists x \, x^2 + 1 = 0$$

es una ambigüedad, pues si x toma valores en $\mathbb{R}$ es FALSA pero si x toma valores en $\mathbb{C}$ entonces es verdadera. Es común expresar el universo después del cuantificador:

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ (FALSO)
- $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0$ (VERDADERO)

Implicación lógica

Es un concepto análogo a la equivalencia lógica. Decimos que p *implica lógicamente* q, en símbolos, $p \implies q$, si $p \to q$ es una tautología.

Ejemplo

- $\forall x\, p(x) \implies \exists x\, p(x)$ (sutileza: en este caso hay que suponer que el universo para x es no vacío)
- $\exists x\, p(x)$ no implica lógicamente $\forall x\, p(x)$ (en general)

Ejemplo (Cuantificadores implícitos)

Consideremos las proposiciones (informales) sobre el universo de los números reales

- Si un número es racional, entonces es real
- Si x es racional, entonces x es real

Podemos formalizar estos enunciados (equivalentes) usando el cuantificador universal: consideramos las proposiciones

$$p(x) : x \in \mathbb{Q} \qquad\qquad q(x) : x \in \mathbb{R}$$

Una versión más precisa de lo anterior es

$$\forall x \, [p(x) \to q(x)]$$

Ejemplo (cont.)

Consideremos la proposición (con universo los naturales):

1729 *se puede expresar como suma de cubos de dos maneras distintas.*

Usando cuantificadores existenciales:

$$\exists m_1, n_1, m_2, n_2 \left[(\{m_1, n_1\} \neq \{m_2, n_2\}) \wedge (m_1^3 + n_1^3 = m_2^3 + n_2^3 = 1729)\right]$$

Btw, la proposición anterior es verdadera: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (es el número de Hardy-Ramanujan)

Definición

Sean $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado.

- Decimos que $p(x)$ y $q(x)$ son *lógicamente equivalentes* cuando el bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadero para cada a en el universo dado. En este caso se escribe

$$\forall x\, [p(x) \iff q(x)]$$

- Decimos que $p(x)$ *implica lógicamente* $q(x)$ si $p(a) \to q(a)$ es verdadera para cada a en el universo dado. En este caso escribimos

$$\forall x\, [p(x) \implies q(x)]$$

Observar que se puede hacer una definición análoga para proposiciones que tengan dos o más variables.

Definición

Para las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ y la proposición cuantificada en forma universal $\forall x\, [p(x) \to q(x)]$ definimos

- La *contrapositiva:* $\forall x\, [\neg q(x) \to \neg p(x)]$
- La *recíproca:* $\forall x\, [q(x) \to p(x)]$
- La *inversa:* $\forall x\, [\neg p(x) \to \neg q(x)]$

Equivalencias e implicaciones lógicas para proposiciones cuantificadas

1. $\exists x\, [p(x) \wedge q(x)] \implies [\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)]$ (no vale la recíproca)
2. $\exists x\, [p(x) \vee q(x)] \iff [\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)]$
3. $\forall x\, [p(x) \wedge q(x)] \iff [\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)]$
4. $[\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)] \implies \forall x\, [p(x) \vee q(x)]$ (no vale la recíproca)

Ejercicio

1. $\forall x\,[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \iff \forall x\,[(p(x) \wedge (q(x)) \wedge r(x)]$
2. $\exists x\,[p(x) \to q(x)] \implies \exists x\,[\neg p(x) \vee q(x)]$
3.
   - $\forall x\,\neg\neg p(x) \iff \forall x\,p(x)$
   - $\forall x\,\neg[p(x) \wedge q(x)] \iff \forall x\,[\neg p(x) \vee \neg q(x)]$
   - $\forall x\,\neg[p(x) \vee q(x)] \iff \forall x\,[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$
4. El ítem anterior también es cierto reemplazando todos los $\forall$ por $\exists$

Negación de cuantificadores

Hay dos reglas fundamentales para negar los cuantificadores existenciales y universales

1. $\neg[\exists x\, p(x)] \iff \forall x\, \neg p(x)$
2. $\neg[\forall x\, p(x)] \iff \exists x\, \neg p(x)$

Ejemplo

Usando las reglas anteriores:

1. $\neg[\exists x\, \neg p(x)] \iff \forall x\, \neg\neg p(x) \iff \forall x\, p(x)$
2. $\neg[\forall x\, \neg p(x)] \iff \exists x\, \neg\neg p(x) \iff \exists x\, p(x)$

Ejemplo

Consideremos la proposición (con universo los enteros):

Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par

la cual en símbolos puede representarse por

$$\forall x\,[p(x) \to q(x)] \qquad \text{en donde } \begin{cases} p(x) : x \text{ es impar} \\ q(x) : x^2 - 1 \text{ es par} \end{cases}$$

Para determinar la negación:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x\,[p(x) \to q(x)]) &\iff \exists x\,\neg[p(x) \to q(x)] \iff \exists x\,\neg[\neg p(x) \vee q(x)] \\ &\iff \exists x\,[\neg\neg p(x) \wedge \neg q(x)] \iff \exists x\,[p(x) \wedge \neg q(x)] \end{aligned}$$

En palabras:

Existe un x tal que x es impar y $x^2 - 1$ es impar.

Observación

Si $p(x, y)$ es una proposición abierta en dos variables, entonces

$$\forall x \, \forall y \; p(x, y) \iff \forall y \, \forall x \; p(x, y)$$

- De hecho, en general simplificamos los cuantificadores anteriores escribiendo simplemente $\forall x, y \; p(x, y)$.
- El resultado anterior también es cierto para cuantificadores universales sobre proposiciones con un número arbitrario de variables (y para cualquier permutación de las variables cuantificadas).
- Ejercicio: ¿es cierto lo anterior para cuantificadores existenciales?