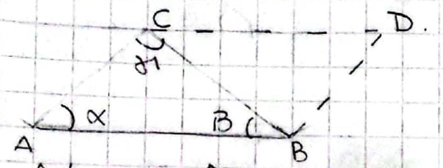
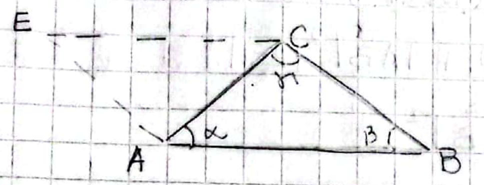
Teorema del seno:



Dado el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ y el Paralelogramo ABDC

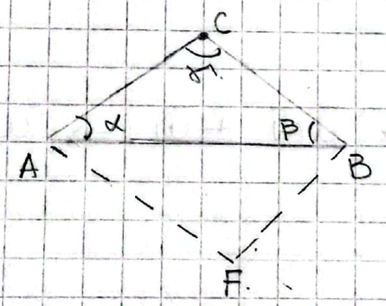
Observemos que. Área $(A\overset{\triangle}{B}C) = \dfrac{\text{Área }(ABDC)}{2}$. luego:

$$\text{Área}(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{\text{Área }(ABDC)}{2} = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{2} = |\vec{AB}|\,|\vec{AC}|\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2} \qquad (1)$$



Sean $A\overset{\triangle}{B}C$ y ABCE.

$$\text{Área}(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{\text{Área }(ABCE)}{2} = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{BC}|}{2} = |\vec{AB}|\,|\vec{BC}|\,\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{2} \qquad (2)$$



Sea $A\overset{\triangle}{B}C$ y AFBC

$$\text{Área}(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{\text{Área }(AFBC)}{2} = \frac{|\vec{AC} \wedge \vec{CB}|}{2} = |\vec{AC}|\,|\vec{BC}|\,\frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{2} \qquad (3)$$

Por (1) y (2),

$$\cancel{|\vec{AB}|}\,|\vec{AC}|\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cancel{2}} = \cancel{|\vec{AB}|}\,|\vec{BC}|\,\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cancel{2}} \underset{|\vec{AB}| \neq 0}{\Rightarrow} |\vec{AC}|\operatorname{sen}(\alpha) = |\vec{BC}|\operatorname{sen}(\beta)$$

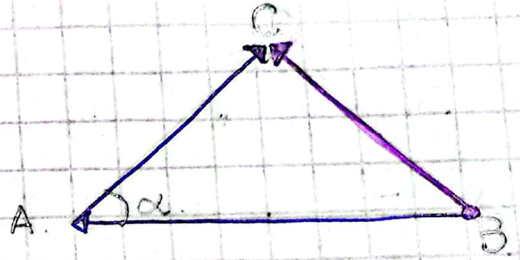
$$\Rightarrow \frac{|\vec{AC}|}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{|\vec{BC}|}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

Por (1) y (3) y haciendo el mismo procedimiento se tiene que

$$\frac{|\vec{AB}|}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{|\vec{BC}|}{\operatorname{sen}(\alpha)}. \qquad \text{(HACERLO!!)}$$

Teorema del coseno:

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2|\vec{AC}||\vec{AB}|\cos(\alpha)$$



Recordemos: $|\vec{BC}|^2 = \vec{BC} \times \vec{BC}$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

Luego, $|\vec{BC}|^2 = \vec{BC} \times \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \times (\vec{AC} - \vec{AB}) \overset{\text{Prop. distributiva}}{=} \vec{AC} \times \vec{AC} -$

$$- \vec{AB} \times \vec{AC} - \vec{AC} \times \vec{AB} + \vec{AB} \times \vec{AB} = |\vec{AC}|^2 - 2\,\vec{AC} \times \vec{AB} + |\vec{AB}|^2$$

$$\overset{\text{def. x}}{=} |\vec{AC}|^2 - 2|\vec{AC}|\,|\vec{AB}|\cos(\widehat{\vec{AC},\vec{AB}}) + |\vec{AB}|^2 =$$

$$= |\vec{AC}|^2 - 2|\vec{AC}||\vec{AB}|\cos(\alpha) + |\vec{AB}|^2$$

$$\therefore\ |\vec{BC}|^2 = |\vec{AC}|^2 + 2|\vec{AC}||\vec{AB}|\cos(\alpha) + |\vec{AB}|^2$$