PROJET ENCOLLEUSE 3D

MATHS - MODELISATION DU DEBIT DE COLLE

31 MARS 2023

Ce document présente le principe du transfert de la colle sur le capot. Il s’agit ici de déterminer l’équation différentielle du système de transfert de colle et l’allure de la courbe de débit déposé.

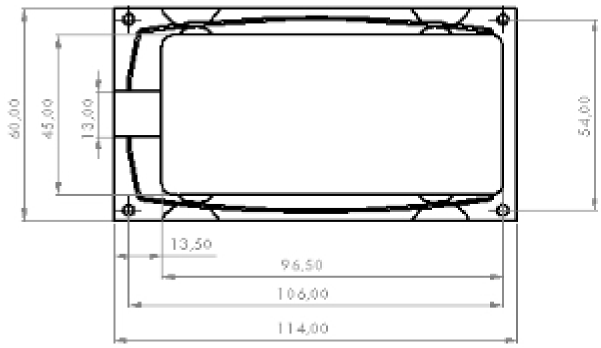
Centre : Nanterre

Equipe : 1

Noms des membres de l’équipe : Alexis Seurin – Clémence Faligot – Joséphine Bonnet - AIDI MOHAMMED-IKBAL

1. CONTEXTE ET DEMARCHE

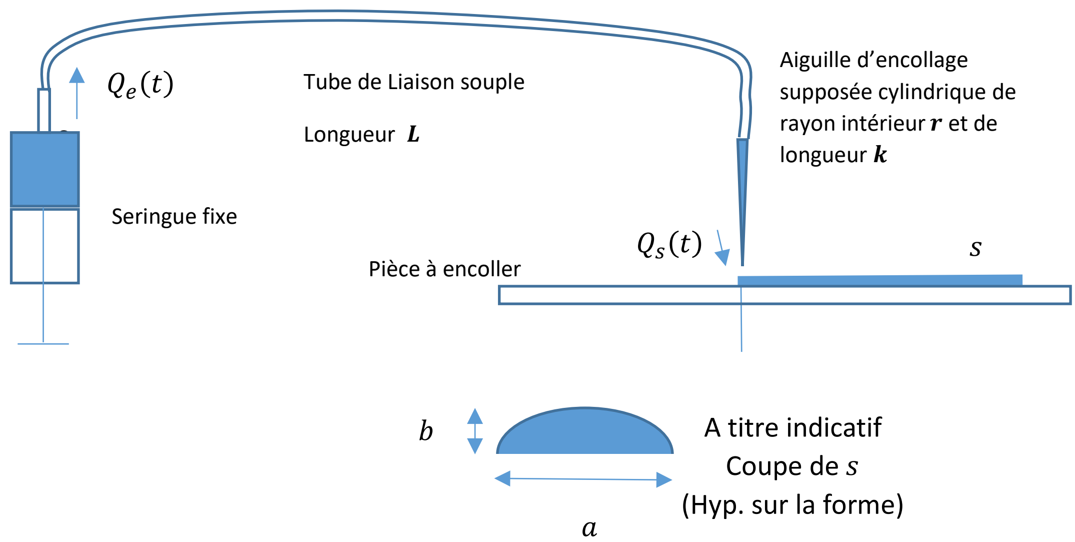
Le but à terme sera de régler et de programmer l'Encolleuse afin de déposer un cordon de colle en une passe sur le pourtour d'un capot de téléphone :



Pour les essais, la colle sera déposée sur le pourtour d'une éprouvette de même dimension que le capot.

1.1. Système de dépôt de colle

La colle est déposée à vitesse constante :



$Q_e(t)$: Débit de colle à l'entrée du tube

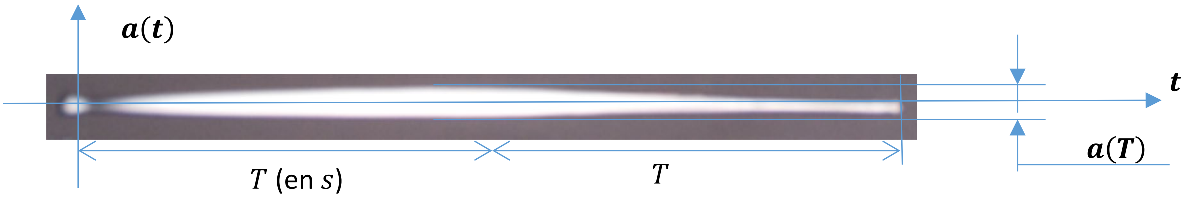
$Q_s(t)$: Débit de colle à la sortie du tube

t : temps d'encollage

1.2. Forme des cordons de colle

Difficultés de réaliser un dépôt constant

Le système de transfert de colle présente globalement une élasticité comme en témoigne l'image d'un cordon de colle en vue de dessus. La colle a été déposée à vitesse constante.



On fait l'hypothèse que le débit de colle $\boldsymbol{Q_s(t)}$ à la sortie de la buse a le même sens de variation que la largeur du cordon $\boldsymbol{a(t)}$.

On voit donc apparaître un transitoire $Q_s(t)$ avant d'obtenir un dépôt à Q_s constant !

Au bout de T secondes, lorsque le débit Q_e passe à 0, Q_s baisse progressivement.

Les objectifs du projet sont de modéliser ces transitoires dans le but de maîtriser un **dépôt de colle régulier**. Pour cela il faudra connaître l'équation différentielle du débit de colle $\boldsymbol{Q_s(t)}$ déposée.

On pourra ensuite valider le modèle avec les expériences.

2. DEMARCHE ATTENDUE

2.1. Modélisation

On admettra que la variation de volume du tube est proportionnelle à la pression relative de celui-ci :

$$\boldsymbol{\Delta V = P \cdot K_1}$$

Des résultats connus en mécanique des fluides permettre de faire l'hypothèse que si le rayon r de l'aiguille est petit par rapport au rayon intérieur du tube la pression relative dans le tube est proportionnelle au débit sortant :

$$\boldsymbol{P(t) = Q_s(t) \cdot K_2}$$

ΔV : Variation de volume dans le tube
P : pression relative dans le tube
K_1, K_2 : Constantes qui dépendent uniquement des caractéristiques du tube

En utilisant la loi de conservation des volumes peut-on déterminer **l'équation différentielle de $\boldsymbol{Q_s(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{Q_e(t)}$?**

On sait que :

- V_e : volume d'entrée du tube ;
- V_s : volume de sortie du tube ;
- $P \cdot K_1$: constante supplémentaire dû au problème d'élasticité du tuyau souple (gonflement). Cela provoque une variation du volume de sortie du tube.

On peut dire que :

- Le volume d'entrée du tube : $V_e = V_s + P \cdot K_1$
- Le volume sortant du tube : $V_s = V_e - P \cdot K_1$

La loi de conservation des volumes

Le débit volumique D_v est égal au volume de liquide qui sort du réservoir par unité de temps, c'est-à-dire qu'il est égal au rapport du volume V de liquide qui sort sur la durée Δt mise pour sortir du réservoir.

$$D_v = \frac{V}{\Delta t}$$

D_v : débit volumique en $m^3 \cdot s^{-1}$
V : volumique de liquide qui sort du réservoir $en\ m^3$
Δt : durée en s

Nous allons calculer le débit volumique.

Tout d'abord, nous dérivons puisque la dérivée du volume est le débit : $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V_e}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V_s}(t)}{\mathrm{d}t} + K_1 \frac{\mathrm{dP(t)}}{\mathrm{d}t}$
Nous faisons en sorte de prendre en compte un débit constant.

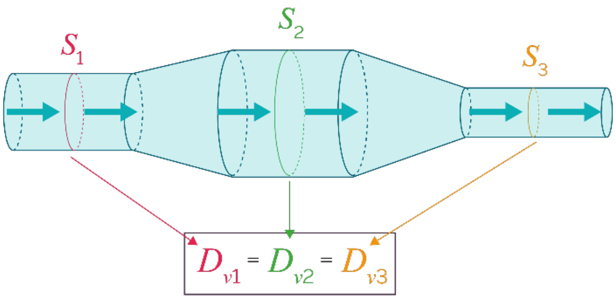


Figure : Conservation du débit volumique (source : Exploiter la conservation du débit volumique - Maxicours)

Débit volumique d'entrée : $Q_\mathrm{e}(t) = Q_\mathrm{s}(t) + K_1 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$

$P(t) = Q_\mathrm{s}(t) \cdot K_2$

$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{s}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot K_2$

On a donc : $Q_\mathrm{e}(t) = Q_\mathrm{s}(t) + \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{s}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot K_1 \cdot K_2$

Equation différentielle : $\boldsymbol{Q_s(t) + Q'_s(t) \cdot K_1 \cdot K_2 = Q_e(t)}$

2.2. Détermination de $\boldsymbol{Q_s(t)}$ de 0 à T (régime forcé)

Conditions initiales : On applique un débit d'entrée constant alors :

$Q_e(t) = Q_e = Constante$

$Q_s(0) = 0$

Sachant que notre équation différentielle est $\boldsymbol{Q_e = Q_s(t) + Q'_s(t) \cdot \tau}$, alors on cherche :

$Q_s(t) + Q'_s(t) \cdot \tau = 0$

Puisque $r_0 = -\frac{b}{a}$ alors ici $r_0 = -\frac{t}{\tau}$.

Donc l'équation homogène est $\boldsymbol{y_h = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec C une constante.

On sait que Q_e est une constante et que le second membre est un polynôme de degré 0. Donc $y_p = C$ et $y_p' = 0$. Ainsi $\boldsymbol{y_p = C = Q_e}$.

Au final $\boldsymbol{Q_s(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + Q_e}$.

On sait que $Q_s(0) = 0$.

Ainsi pour $t = 0$ et $Q_s(0)$ on a :

$Q_s(0) = C + Q_e \Rightarrow C = -Q_e$

Donc $\boldsymbol{Q_s(0) = Q_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

$$\boxed{\boldsymbol{Q_s(t) = Q_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}$$

2.3. Détermination de $\boldsymbol{Q_s(t)}$ de T à $2T$ (régime libre)

Conditions initiales : On coupe le débit d'entrée alors :

$Q_e(t) = 0 = Constante$

$Q_s(T) = Q_e$

Sachant que notre équation différentielle est $\boldsymbol{Q_e(t) = Q_s(t) + Q_s'(t) \cdot \tau}$, alors on cherche :

$Q_s(t) + Q_s'(t) \cdot \tau = 0$

La solution est l'équation homogène calculée précédemment : $\boldsymbol{y_h = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec C une constante.

Au final $\boldsymbol{Q_s(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

On sait que $Q_s(T) = Q_e$.

A $t = T$, on a $Q_s(T) = Q_e$ donc :

$Q_s(T) = C \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} \Rightarrow Q_e = C \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} \Leftrightarrow C = Q_e \cdot e^{\frac{T}{\tau}}$

Donc $\boldsymbol{Q_s(t) = Q_e \cdot e^{\frac{(T-t)}{\tau}}}$

$$\boldsymbol{Q_s(t) = Q_e \cdot e^{\frac{T-t}{\tau}}}$$

2.4. Tracé de $Q_s(t)$ (régime forcé + régime libre)

Pour un cordon de forme demi-elliptique avec $a = 3\ mm$, $b = 0{,}75\ mm$, choisir un débit Q_e réaliste et tracer $Q_s(t)$ pour un régime forcé et libre enchaîné. Estimer la constante de temps.

Tracer la courbe sur EXCEL. Analyser la courbe.

Nous allons tout d'abord calculer la surface S_C du cordon de forme **demi-elliptique**.

L'aire du cordon A_C peut se calculer avec deux points : $A_C \ = \pi \cdot a \cdot b$

$$S_C = \frac{\frac{A_C}{2}}{2}$$

$$S_C = \frac{\pi \times 3 \times 0{,}75}{4}$$

$$S_C \approx 1{,}77\ mm^2$$

Maintenant, nous allons estimer des valeurs et choisir un débit Q_e .

Les valeurs choisies sont :

- La longueur du cordon de 100 mm
- Le temps du dépôt de la colle de 5 s

Calcul du volume : $v \ = S_C \times 100 = 177\ mm^3$

Calcul du débit : $Q_e = \frac{177}{5} = 35{,}4\ mm^3 \cdot s^{-1}$

Nous considérons que Q_s atteint 95 % (soit 0,95) de Q_e en 5 s. Nous pouvons donc estimer une constante de temps τ de 1,8 s.

$$35{,}4 \times 0{,}05 \approx 1{,}8\ s$$

$$\tau = 1{,}8$$

Courbe sous Excel