

# Deducción de las fórmulas de Black-Scholes mediante valor esperado del pago futuro \*

Alexis Sánchez Tello de Meneses

4 Septiembre 2014

## 1 Abstract

Se desarrollará a partir del modelo de evolución *log-normal* para un subyacente, las fórmulas de Black-Scholes para el precio de opciones plain vanilla (call/put) europeas, as mismo, mediante derivación directa de las fórmulas con respecto a sus parámetros obtendremos las griegas más representativas.

## 2 Modelo *log-normal* del subyacente.

Se asume que la evolución del precio del subyacente (precio de una acción en el mercado de renta variable),  $S$ , es un proceso estocástico continuo y *log-normal*. La descripción matemática de este proceso queda recogida en la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Aquí,  $dS_t$  es  $S_{t+dt} - S_t$ . La deriva del proceso sería  $\mu$ , que coincidirá con el tipo de interés continuo y anual libre de riesgo de la cuenta bancaria, escogiéndose esta como numerario, para que el proceso del logaritmo del subyacente sea una martingala. La volatilidad anualizada del subyacente será  $\sigma$ , siendo  $dW_t$  un salto gaussiano de media cero y desviación típica  $\sqrt{dt}$ .

Si incorporamos a (1) los pagos de dividendo, de manera continua, con una tasa anual  $\delta$ , el subyacente, al pasar del valor  $S_t$  en  $t$  al valor  $S_{t+dt}$  en  $t + dt$ , disminuye su valor en la cuantía  $\delta S_t$ , que es justamente el dividendo que se acaba de repartir. La ecuación (1) corregida con el pago de dividendos, quedaría de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt - \underbrace{\delta S_t dt}_{\text{dividendo}} + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

---

\* $\text{\LaTeX}$

## 2.1 Integración por el lema de Îto

Para obtener la evolución del subyacente en función del tiempo y de la variable aleatoria normal estándar, efectuaremos el cambio de variable  $S'_t = \ln S_t$  en la ecuación (2), y aplicaremos el lema de Îto para calcular la diferencial de la nueva variable.

El lema de Îto para una función que sólo depende del subyacente em (i.e.  $S'_t = f(S_t)$ ) tendría la siguiente forma:

$$dS'_t = \frac{df}{dS_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS_t^2} dS_t^2 + \dots \quad (3)$$