

# Deducción de las fórmulas de Black-Scholes mediante valor esperado del pago futuro \*

Alexis Sánchez Tello de Meneses

4 Septiembre 2014

## 1 Abstract

Se desarrollará a partir del modelo de evolución *log-normal* para un subyacente, las fórmulas de Black-Scholes para el precio de opciones plain vanilla (call/put) europeas, así mismo, mediante derivación directa de las fórmulas con respecto a sus parámetros obtendremos las griegas más representativas.

## 2 Modelo *log-normal* del subyacente.

Se asume que la evolución del precio del subyacente (precio de una acción en el mercado de renta variable),  $S$ , es un proceso estocástico continuo y *log-normal*. La descripción matemática de este proceso queda recogida en la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Aquí,  $dS_t$  es  $S_{t+dt} - S_t$ . La deriva del proceso sería  $\mu$ , que coincidirá con el tipo de interés continuo y anual libre de riesgo de la cuenta bancaria, escogiéndose esta como numerario, para que el proceso del logaritmo del subyacente sea una martingala. La volatilidad anualizada del subyacente será  $\sigma$ , siendo  $dW_t$  un salto gaussiano de media cero y desviación típica  $\sqrt{dt}$ .

Si incorporamos a (1) los pagos de dividendo, de manera continua, con una tasa anual  $\delta$ , el subyacente, al pasar del valor  $S_t$  en  $t$  al valor  $S_{t+dt}$  en  $t + dt$ , disminuye su valor en la cuantía  $\delta S_t$ , que es justamente el dividendo que se acaba de repartir. La ecuación (1) corregida con el pago de dividendos, quedaría de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt - \underbrace{\delta S_t dt}_{\text{dividendo}} + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

---

\* $\text{\LaTeX}$

## 2.1 Integración por el lema de Îto

Para obtener la evolución del subyacente en función del tiempo y de la variable aleatoria normal estándar, efectuaremos el cambio de variable  $S'_t = \ln S_t$  en la ecuación (2), y aplicaremos el lema de Îto para calcular la diferencial de la nueva variable.

El lema de Îto para una función que sólo depende del subyacente em (i.e.  $S'_t = f(S_t)$ ) tendría la siguiente forma:

$$dS'_t = \frac{df}{dS_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS_t^2} dS_t^2 + \dots \quad (3)$$

Usando  $S'_t = f(S_t) = \ln(S_t)$  en el desarrollo en serie, y quedándonos hasta términos de segundo orden en  $dS_t$ :

$$\begin{aligned} dS'_t &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} dS_t^2 + \dots \\ &= (\mu - \delta) dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dW_t^2 + \dots \\ &= \left( \mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \quad (4)$$

Usando el anterior cambio de variable reducimos la ecuación diferencial estocástica log-normal a una ecuación, de saltos normales de desviación típica  $\sigma\sqrt{dt}$ . Esta ecuación se puede *integrar* directamente dando como resultado la evolución temporal del logaritmo del subyacente. (Sabido que en el sentido de variables aleatorias, a efectos prácticos de valores esperados y momentos, se cumple que  $\sigma dW_t \simeq \sigma\sqrt{dt}X(0,1)$ , siendo  $X(0,1)$ , la variable aleatoria normal estándar). Sustituyéndolo en la ecuación anterior, proporciona...).

$$S'_T = S'_t + \left( \mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma\sqrt{\tau}X(0,1) \quad (5)$$

Aquí  $T$  representa el tiempo final de la evolución de la función de cambio de variable del subyacente, y aquí  $\tau$  es  $T - t$ .

Deshaciendo el cambio de variable en (5), obtenemos la evolución del subyacente.

$$S_T = S_t e^{\left( \mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma\sqrt{\tau}X(0,1)} \quad (6)$$

### 3 Valoración de una Call Europea

El precio de una call europea lo deducimos como el valor esperado del pago a vencimiento, descontando desde su fecha hasta la fecha de valoración. Supongamos que el vencimiento es en  $T$  y la fecha de valoración es  $t$ , denotemos  $\tau = T - t$ . El valor esperado del pago futuro sera

$$E\left(e^{-r\tau} [S_T - K]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau} [S_T - K]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (7)$$

Aquí  $r$  es el interés libre de riesgo y  $[S_T - K]^+$  representa la función de pago en tiempo  $T$ , que será  $S_T - K$  si  $S_T - K > 0$  o 0 en caso contrario.

Sustituyendo  $S_T$  por la expresión de su evolución en función de  $\tau = T - t$ , y teniendo en cuenta que  $x$  es  $X(0, 1)$ , esto es, la variable aleatoria normal estándar de media 0 y desviación típica 1, obtenemos:

$$E\left(e^{-r\tau} [S_T - K]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau} \left[ S_t e^{\left(\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}x\right)} - K \right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (8)$$

Forzamos que el parámetro  $\mu$  del modelo sea igual a  $r$  para evitar oportunidad de arbitraje. Por tanto la ecuación anterior queda de la forma:

$$E\left(e^{-r\tau} [S_T - K]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta\tau} \left[ S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - K e^{-(r-\delta)\tau} \right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (9)$$

El dominio de integración de (9) se puede descomponer en dos intervalos; uno en el que la función valor positivo es distinta de cero, y otro en el que es cero, con lo cual, como límite inferior de integración sustituimos  $-\infty$  por  $x_0$ , que es como denominamos al valor que divide la recta real en los dos intervalos. Vamos a calcular  $x_0$ .

$$S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - K e^{-(r-\delta)\tau} \geq 0 \quad (10)$$

Veamos a partir de que valor de  $x$  se cumple (10). Tomando logaritmos y reordenando la inecuación...

$$\begin{aligned} \ln S_t + x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq \ln K - (r - \delta)\tau \\ x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq -\ln S_t + \ln K - (r - \delta)\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq -\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \ln\left(e^{(r-\delta)\tau}\right)\right) \\
x &\geq -\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

El término derecho de (10) es el valor frontera  $x_0$  buscado. Por tanto la integral (9) se reduce al intervalo de  $x_0$  a  $-\infty$ .

$$E\left(e^{-r\tau}[S_T - K]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_0}^{+\infty} e^{-\delta\tau} \left[S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - Ke^{-(r-\delta)\tau}\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{12}$$

Esto se descompone en la suma de dos integrales que pasamos a llamar  $I_1$  e  $I_2$ .

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{-\delta\tau} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}x^2 - \sigma\sqrt{\tau}x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right)} dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-r\tau} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}_{I_2} \tag{13}$$

Resolvemos primero  $I_2$ :

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-r\tau} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{-x_0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx
\end{aligned} \tag{14}$$

El último paso en el desarrollo de arriba es debido a que el integrando es una función par. Denotemos  $d_- = -x_0$ . Entonces.

$$d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \tag{15}$$

Por tanto tenemos que

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{16}$$

Pero  $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$  es la función distribución normal estándar de  $d_-$ . Finalmente queda:

$$I_2 = -K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \tag{17}$$

Sólo queda calcular  $I_1$  para obtener el precio de la opción. En (13) se ve claramente que  $x^2 - 2\sigma\sqrt{\tau}x + \sigma^2\tau = (x - \sigma\sqrt{\tau})^2$ , quedando:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{-\delta\tau} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{\tau})^2} dx \quad (18)$$

En (18) efectuamos el cambio de variable  $x' = (x - \sigma\sqrt{\tau})$  con  $dx' = dx$ , pasando a ser el límite inferior de la integral  $x_0 - \sigma\sqrt{\tau}$ .

$$I_1 = S_t e^{-\delta\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0 - \sigma\sqrt{\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \quad (19)$$

Como  $e^{-\frac{1}{2}x'^2}$  es una función par, podemos cambiar los signos y el orden de los límites de integración. Haciendo  $d_+ = -x_0 + \sigma\sqrt{\tau}$ , nos queda

$$\begin{aligned} I_1 &= S_t e^{-\delta\tau} \Phi(d_+) \\ I_2 &= -K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \\ d_{\pm} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (20)$$

EL precio de la call europea en tiempo  $t$  es:

$$C(S_t) = S_t e^{-\delta\tau} \Phi(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \quad (21)$$

Realizando el desarrollo anterior, pero utilizando el payoff de la put en tiempo  $T$ ,  $[K - S_T]^+$ , obtenemos la fórmula del precio en tiempo  $t \leq T$ .

$$P(S_t) = K e^{-r\tau} \Phi(-d_-) - S_t e^{-\delta\tau} \Phi(-d_+) \quad (22)$$

## 4 Cálculo directo de las griegas más importantes

### 4.1 Delta

Es la variación del precio de la opción frente al subyacente (valor spot). Esto es, la derivada parcial del precio con respecto a  $S_t$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S_t} &= e^{-\delta\tau} \Phi(d_+) + S_t e^{\delta\tau} \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial S_t} - K e^{-r\tau} \Phi'(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial S_t} \\
&= e^{-\delta\tau} \Phi(d_+) + \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} \left[ S_t d^{-\delta\tau} \Phi'(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi'(d_-) \right]
\end{aligned}$$

Para utilizarlo en desarrollos posteriores vamos a demostrar que  $S_t e^{-\delta\tau} \Phi'(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi'(d_-)$  es identicamente 0.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( S_t e^{-\delta\tau - \frac{1}{2}d_+^2} - K e^{-r\tau - \frac{1}{2}d_-^2} \right) = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ S_t e^{-\delta\tau - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \right]^2} - K e^{-r\tau - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \right]^2} \right\} = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma^2\tau} \ln^2\left(\frac{S_t}{K e^{(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{1}{4}\sigma^2\tau \right]} \cdot \left[ S_t e^{-\delta\tau - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}}\right)} - K e^{-r\tau + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}}\right)} \right] = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma^2\tau} \ln^2\left(\frac{S_t}{K e^{(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{1}{4}\sigma^2\tau \right]} \cdot \left[ S_t e^{-\delta\tau} \sqrt{\frac{K}{S_t}} e^{-\frac{1}{2}(r-\delta)\tau} - K e^{-r\tau} \sqrt{\frac{S_t}{K}} e^{\frac{1}{2}(r-\delta)\tau} \right] = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma^2\tau} \ln^2\left(\frac{S_t}{K e^{(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{1}{4}\sigma^2\tau \right]} \cdot \sqrt{S_t K} \cdot \underbrace{\left( e^{-\delta\tau - \frac{1}{2}r\tau + \frac{1}{2}\delta\tau} - e^{-r\tau + \frac{1}{2}r\tau - \frac{1}{2}\delta\tau} \right)}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

*Q.E.D*

Por tanto volviendo al cálculo de la delta y usando este resultado intermedio:

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial C}{\partial S_t} = e^{-\delta\tau} \Phi(d_+) \quad (23)$$

## 4.2 Gamma

El cálculo de la Gamma es bastante inmediato, sólo hay que volver a derivar la expresión obtenida de la delta, otra vez, con respecto a  $S$ .

$$\begin{aligned}
\Gamma \equiv \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= e^{-\delta\tau} \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial S_t} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{e^{-\delta\tau}}{S_t} \Phi'(d_+) \quad (24)
\end{aligned}$$

### 4.3 Vega

Es la variación del precio de la opción con respecto a la volatilidad del subyacente.

$$\begin{aligned}
 V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) = \\
 &= S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) \cdot \left[ -\frac{1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right] - \\
 &= K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \cdot \left[ -\frac{1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right] = \\
 &= -\frac{1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}} \right) \cdot \underbrace{\left( S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) - K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right)}_{=0} + \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \left( S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right)
 \end{aligned}$$

Por tanto la vega es igual a:

$$V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \left( S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right) \quad (25)$$

Vamos a desarrollarla el resultado anterior para simplificar la expresión de la vega. Para ello vamos a utilizar  $S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) = 0$  demostrado líneas arriba, en el cálculo de la delta.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sqrt{\tau} \left( S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \left\{ \left[ S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) + K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right] + \underbrace{\left[ S_t e^{-\delta \tau} \Phi'(d_+) - K e^{-r \tau} \Phi'(d_-) \right]}_{=0} \right\} = \\
 &= S_t \sqrt{\tau} \Phi'(d_+) e^{-\delta \tau}
 \end{aligned}$$

Por tanto la Vega vale.

$$V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{\tau} \Phi'(d_+) e^{-\delta \tau} \quad (26)$$

## 4.4 Rho

Representa la sensibilidad del precio de la opción frente a un movimiento en los tipos de interés libres de riesgo.

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \frac{\partial C}{\partial r} = S_t e^{-\delta\tau} \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial r} - K e^{-r\tau} \Phi'(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial r} + \tau K e^{-r\tau} \Phi(d_-) = \\ &\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \underbrace{\left[ S_t e^{-\delta\tau} \Phi'(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi'(d_-) \right]}_{=0} + \tau K e^{-r\tau} \Phi(d_-) = \\ &\tau K e^{-r\tau} \Phi(d_-)\end{aligned}$$

Por tanto la rho vale:

$$\rho = \tau K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \quad (27)$$