Deducción de las fórmulas de Black-Scholes mediante valor esperado del pago futuro *

Alexis Sánchez Tello de Meneses

4 Septiembre 2014

1 Abstract

Se desarrollará a partir del modelo de evolución *log-normal* para un subyacente, las fórmulas de Black-Scholes para el precio de opciones plain vanilla (call/put) europeas, así mismo, mediante derivación directa de las fórmulas con respecto a sus parámetros obtendremos las griegas más representativas.

2 Modelo *log-normal* del subyacente.

Se asume que la evolución del precio del subyacente (precio de una de acción en el mercado de renta variable), S, es un proceso estocástico continuo y *log-normal*. La descripción matemática de este proceso queda recogida en la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$

Aquí, dS_t es $S_{t+dt} - S_t$. La deriva del proceso sería μ, que coincidirá con el tipo de interés continuo y anual libre de riesgo de la cuenta bancaria, escogiéndose esta como numerario, para que el proceso del logaritmo del subyacente sea una martingala. La volatilidad anualizada del subyacente será σ, siendo dW_t un salto gaussiano de media cero y desviación tíca $\sqrt{dt}$.

Si incorporamos a (1) los pagos de dividendo, de manera continua, con una tasa anual δ, el subyacente, al pasar del valor S_t en t al valor S_{t+dt} en $t+dt$, disminuye su valor en la cuantía δS_t, que es justamente el dividendo que se acaba de repartir. La ecuación (1) corregida con el pago de dividendos, quedaría de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt - \underbrace{\delta S_t dt}_{dividendo} + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

*LaTeX

2.1 Integración por el lema de Îto

Para obtener la evolución del subyacente en función del tiempo y de la variable aletoria normal estándar, efectuaremos el cambio de variable $S_t^{'} = \ln S_t$ en la ecuación (2), y aplicaremos el lema de Îto para calcular la diferencial de la nueva variable.

El lema de Îto para una función que sólo depende del subyacente em (i.e. $S_t^{'} = f(S_t)$) tendría la siguiente forma:

$$dS_t^{'} = \frac{df}{dS_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS_t^2} dS_t^2 + \ldots \tag{3}$$

Usando $S_t^{'} = f(S_t) = \ln(S_t)$ en el desarrollo en serie, y quedándonos hasta términos de segundo orden en dS_t:

$$\begin{aligned} dS_t^{'} &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} dS_t^2 + \ldots \\ &= (\mu - \delta)\, dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dW_t^2 + \ldots \\ &= \left(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \tag{4}$$

Usando el anterior cambio de variable reducimos la ecuación diferencial estocástica log-normal a una ecuación, de saltos normales de desviación típica $\sigma\sqrt{dt}$. Esta ecuación se puede *integrar* directamente dando como resultado la evolución temporal del logaritmo del subyacente. (Sabiendo que en el sentido de variables aleatorias, a efectos prácticos de valores esperados y momentos, se cumple que $\sigma dW_t \simeq \sigma\sqrt{dt}X\left(0,1\right)$, siendo $X\left(0,1\right)$, la variable aleatoria normal estándar). Sustituyéndolo en la ecuación anterior, proporciona...).

$$S_T^{'} = S_t^{'} + \left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}X(0,1) \tag{5}$$

Aquí T representa el tiempo final de la evolución de la funcion de cambio de variable del subyacente, y aqui τ es $T - t$.

Deshaciendo el cambio de variable en (5), obtenemos la evolución del subyacete.

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}X(0,1)} \tag{6}$$

3 Valoración de una Call Europea

El precio de una call europea lo deducimos como el valor esperado del pago a vencimiento, descontando desde su fecha hasta la fecha de valoración. Supongamos que el vencimiento es en T y la fecha de valoración es t, denotemos $\tau = T - t$. El valor esperado del pago futuro sera

$$E\left(e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{7}$$