Laser Physics Assignment 7

2018-12432, Electrical and Computer Engineering department, ParkJeonghyun

5/2/2020

1 Problem 16

1.1 i

Optical Bloch equation은 (1)~(3)과 같다.

$$\dot{S}_1 = -\gamma_{ab} S_1 + \Delta S_2 \tag{1}$$
$$\dot{S}_2 = -\gamma_{ab} S_2 - \Delta S_1 + \Omega S_3 \tag{2}$$
$$\dot{S}_3 = -\Gamma_0(1 + S_3) - \Omega S_2 \tag{3}$$

Relaxation time $T_1 = 1/\gamma_{ab}$, $T_2 = 1/\Gamma_0$이 충분히 커 Rabi frequency Ω가 γ_{ab}, Γ_0보다 매우 크다고 가정하자. $\gamma_{ab}\tau_{1,2} << 1$을 만족하는 매우 작은 시간 τ_1의 시간 동안 field가 작용하면 dephasing에 의한 효과는 매우 작아지므로 optical Bloch equation은 (4)~(6)와 같이 변형된다.

$$\dot{S}_1 \simeq \Delta S_2 \tag{4}$$
$$\dot{S}_2 \simeq -\Delta S_1 + \Omega S_3 \tag{5}$$
$$\dot{S}_3 \simeq -\Omega S_2 \tag{6}$$

Vector형태로 쓰면 (7)과 같아진다.

$$\dot{\vec{S}} = -\vec{K} \times \vec{S} \tag{7}$$

이 때 $\vec{K} = (\Omega, 0, \Delta)$ 이며 $\vec{K}$을 z축으로 하고 기존의 y축과 동일한 y축을 가지는 좌표계 (x',y',z')에서 식 (4)~(6)은 (8)~(10)와 같다.

$$\dot{S}'_1 = KS_2 \tag{8}$$
$$\dot{S}'_2 = -KS_1 \tag{9}$$
$$\dot{S}'_3 = 0 \tag{10}$$

(8), (9)의 해는 $A\cos t + B\sin t$형태이며 초기조건을 $\vec{S}'(-\tau_1)$으로 두고 $\dot{S}_1(-\tau_1)' = KS_2(-\tau_1)$, $\dot{S}'_2(-\tau_1) = -KS_1(-\tau_1)$ 을 이용하여 $t = 0$일 때의 해를 정리하면 (11)~(13)와 같다. 이 때 $\beta = K\tau_1 = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}\tau_1$이다.

$$S'_1(0) = \cos\beta S'_1(-\tau_1) + \sin\beta S'_2(-\tau_1) \tag{11}$$
$$S'_2(0) = \cos\beta S'_2(-\tau_1) - \sin\beta S'_1(-\tau_1) \tag{12}$$
$$S'_3(0) = S'_3(-\tau_1) \tag{13}$$

기존의 좌표축(x,y,z)에 대한 변환된 좌표계 (x',y',z')로의 수동 변환 행렬은 아래와 같다. 이 때 $\alpha = \arctan\frac{\Omega}{\Delta}$이다.

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{14}$$

이를 이용해 $\vec{S}'$을 계산하면 아래와 같다.

$$\vec{S}'(-\tau_1) = U\vec{S}(-\tau_1) \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(-\tau_1) \\ S_2(-\tau_1) \\ S_3(-\tau_1) \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha S_1(-\tau_1) + \sin\alpha S_3(-\tau_1) \\ S_2(-\tau_1) \\ -\sin\alpha S_1(-\tau_1) + \cos\alpha S_3(-\tau_1) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$\vec{S}(0)$을 계산하면 아래와 같다.

$$\vec{S}(0) = U^{-1}\vec{S}'(0) \tag{18}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta S_1'(-\tau_1) + \sin\beta S_2'(-\tau_1) \\ \cos\beta S_2'(-\tau_1) - \sin\beta S_1'(-\tau_1) \\ S_3'(-\tau_1) \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta S_1'(-\tau_1) + \cos\alpha\sin\beta S_2'(-\tau_1) - \sin\alpha S_3'(-\tau_1) \\ \cos\beta S_2'(-\tau_1) - \sin\beta S_1'(-\tau_1) \\ -\sin\alpha\cos\beta S_1'(-\tau_1) + -\sin\alpha\sin\beta S_2'(-\tau_1) + \cos\alpha S_3'(-\tau_1) \end{pmatrix} \tag{20}$$

식 (17)을 대입하면 아래와 같이 변환된다.

$$S_1(0) = \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha S_1(-\tau_1) + \sin\alpha S_3(-\tau_1)) + \cos\alpha\sin\beta S_2(-\tau_1) - \sin\alpha(-\sin\alpha S_1(-\tau_1) + \cos\alpha S_3(-\tau_1)) \tag{21}$$

$$= (\cos^2\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha)S_1(-\tau_1) + \cos\alpha\sin\beta S_2(-\tau_1) - \cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\beta)S_3(-\tau_1) \tag{22}$$

$$S_2(0) = \cos\beta S_2(-\tau_1) - \sin\beta(\cos\alpha S_1(-\tau_1) + \sin\alpha S_3(-\tau_1)) \tag{23}$$

$$= -\sin\beta\cos\alpha S_1(-\tau_1) + \cos\beta S_2(-\tau_1) - \sin\beta\sin\alpha S_3(-\tau_1) \tag{24}$$

$$S_3(0) = -\sin\alpha\cos\beta(\cos\alpha S_1(-\tau_1) + \sin\alpha S_3(-\tau_1)) + \sin\alpha\sin\beta S_2(-\tau_1) + \cos\alpha(-\sin\alpha S_1(-\tau_1) + \cos\alpha S_3(-\tau_1)) \tag{25}$$

$$= -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\beta)S_1(-\tau_1) + \sin\alpha\sin\beta S_2(-\tau_1) + (\sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha)S_3(-\tau_1) \tag{26}$$

행렬을 이용해 표현하면 아래와 같다.

$$\vec{S}(0) = \begin{pmatrix} (\cos^2\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha) & \cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\beta) \\ -\sin\beta\cos\alpha & \cos\beta & -\sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\beta) & \sin\alpha\sin\beta & (\sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha) \end{pmatrix} \vec{S}(-\tau_1) \tag{27}$$

$$= A_1\vec{S}(-\tau_1) \tag{28}$$

따라서 A_1은 아래와 같다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta + \sin^2\alpha(1-\cos\beta) & \cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\beta) \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\beta) & \sin\alpha\sin\beta & 1 - \sin^2\alpha(1-\cos\beta) \end{pmatrix} \tag{29}$$

■

1.2 ii

$$\frac{\sin\left(\varepsilon\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{3!}\left(\varepsilon\sqrt{1+x^2}\right)^3}{\sqrt{1+x^2}} + O(\varepsilon^5) \tag{30}$$

$$= \varepsilon - \frac{1}{3!}\varepsilon^3(1+x^2) + O(\varepsilon^5) \tag{31}$$

$$= \varepsilon - \frac{1}{3!}\varepsilon^3 x^2 + O(\varepsilon^3) \tag{32}$$

$$= \frac{\varepsilon x - \frac{1}{3!}\varepsilon^3 x^3}{x} + O(\varepsilon^3) \tag{33}$$

$$\simeq \frac{\sin\varepsilon x}{x} + O(\varepsilon^3) \tag{34}$$

따라서 $\frac{\sin\left(\varepsilon\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$와 $\frac{\sin\varepsilon x}{x}$ 사이에는 ε^3에 비례하는 error가 나타난다. ■

1.3 iii

초기 상태의 Bloch vector가 $\vec{S}(-\tau_1) = (0,0,-1)$과 같으면 $S_3(0)$은 아래와 같다.

$$S_3(0) = -1 + \sin^2\alpha(1-\cos\beta) \tag{35}$$

$$= -1 + 2\sin^2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2} \tag{36}$$

$$= -1 + 2\frac{\Omega^2}{\Omega^2+\Delta^2}\sin^2\left(\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\frac{\tau_1}{2}\right) \tag{37}$$

$$= -1 + 2\frac{1}{1+\Delta^2/\Omega^2}\sin^2\left(\sqrt{1+\Delta^2/\Omega^2}\,\Omega\frac{\tau_1}{2}\right) \tag{38}$$

$$= -1 + 2\left(\frac{\sin\left(\sqrt{1+\Delta^2/\Omega^2}\,\Omega\frac{\tau_1}{2}\right)}{\sqrt{1+\Delta^2/\Omega^2}}\right)^2 \tag{39}$$

(ii)의 근사를 이용하면 아래와 같아진다.

$$S_3(0) \simeq -1 + 2\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta}{\Omega}\Omega\frac{\tau_1}{2}\right)}{\Delta/\Omega}\right)^2 \tag{40}$$

$$= -1 + \frac{(\Omega\tau_1)^2}{2}\left(\frac{\sin\left(\Delta\frac{\tau_1}{2}\right)}{\Delta\frac{\tau_1}{2}}\right)^2 \tag{41}$$

$$= -1 + \frac{(\Omega\tau_1)^2}{2} sinc^2\left(\Delta\frac{\tau_1}{2}\right) \tag{42}$$

Field가 없는 경우 optical bloch equaiton은 (43)~(45)와 같아진다.

$$\dot{S}_1 = -\gamma_{ab}S_1 + \Delta S_2 \tag{43}$$

$$\dot{S}_2 = -\gamma_{ab}S_2 - \Delta S_1 \tag{44}$$

$$\dot{S}_3 = -\Gamma_0(1+S_3) \tag{45}$$

식 (43), (44)에 $\exp\{\gamma_{ab}t\}$를 곱하고 $Z_1(t) = e^{\gamma_{ab}t}S_1(t)$, $Z_2(t) = e^{\gamma_{ab}t}S_2(t)$와 같이 정의하면 식은 (46), (47)와 같아진다.

$$\dot{Z}_1 = \Delta Z_2 \tag{46}$$

$$\dot{Z}_2 = -\Delta Z_1 \tag{47}$$

각각에 대한 일반해는 $A\cos\Delta t + B\sin\Delta t$와 같다. 초기조건 $Z_1(0) = S_1(0)$, $Z_2(0) = S_2(0)$, $\dot{Z}_1(0) = \Delta S_2(0)$, $\dot{Z}_2(0) = -\Delta S_1(0)$을 이용해 Z_1, Z_2를 구하고 S_1, S_2로 변환하면 해를 계산할 수 있으며 $0 \sim T$의 시간 동안 field가 없었던 경우 $\vec{S}(T)$는 아래와 같아진다. 이 때 $\gamma = \Delta T$이다.

$$S_1(T) = e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma S_1(0) + e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma S_2(0) \tag{48}$$

$$S_2(T) = -e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma S_1(0) + e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma S_2(0) \tag{49}$$

$$S_3(T) = -1 + \exp(-\Gamma_0 T) + S_3(0)\exp(-\Gamma_0 T) \tag{50}$$

$S_3(0) = -1 + \frac{(\Omega\tau_1)^2}{2} sinc^2(\Delta\frac{\tau_1}{2}) \simeq -1$이므로 $S_3(T) \simeq -1 \simeq S_3(0)$이다. 따라서 아래와 같아진다.

$$\begin{pmatrix} S_1(T) \\ S_2(T) \\ S_3(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma & e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma & 0 \\ -e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma & e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{S}(0) \tag{51}$$

$$= A_2\vec{S}(0) \tag{52}$$

$T \sim T+\tau_2$의 시간 동안 Rabi frequency Ω에 해당하는 field가 가해지면 (i)의 결과를 이용해 해는 아래와 같아짐을 알 수 있다. 이 때 $\delta = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}\tau_2$이다.

$$\vec{S}(T+\tau_2) = \begin{pmatrix} \cos\delta + \sin^2\alpha(1-\cos\delta) & \cos\alpha\sin\delta & -\cos\alpha\sin\alpha(1-\cos\delta) \\ -\cos\alpha\sin\delta & \cos\delta & -\sin\alpha\sin\delta \\ -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\delta) & \sin\alpha\sin\delta & 1-\sin^2\alpha(1-\cos\delta) \end{pmatrix}\vec{S}(T) \tag{53}$$

$$= A_3\vec{S}(T) \tag{54}$$

따라서 $\vec{S}(T+\tau_2) = A_3A_2A_1\vec{S}(-\tau_1)$을 만족한다. ■

1.4 iv

식 (53)을 변환하면 아래와 같아진다.

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\delta + 2\sin^2\alpha(\sin^2\delta) & \cos\alpha\sin\delta & -2\cos\alpha\sin\alpha(\sin^2\delta) \\ -\cos\alpha\sin\delta & \cos\delta & -\sin\alpha\sin\delta \\ -2\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\delta) & \sin\alpha\sin\delta & 1-2\sin^2\alpha(\sin^2\delta) \end{pmatrix} \tag{55}$$

$\delta << 1$이므로 (56)은 아래와 같아진다.

$$A_3 \simeq \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha\sin\delta & 0 \\ -\cos\alpha\sin\delta & 1 & -\sin\alpha\sin\delta \\ 0 & \sin\alpha\sin\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

마찬가지 방법으로 A_1을 근사하면 결과는 아래와 같아진다.

$$\begin{aligned}
\vec{S}(T+\tau_2) &= A_3 A_2 A_1 \vec{S}(-\tau_1) && (57)\\
&= A_3 A_2 \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha\sin\beta & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & 1 & -\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & \sin\alpha\sin\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} && (58)\\
&= A_3 \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma & e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma & 0 \\ -e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma & e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha\sin\beta \\ -1 \end{pmatrix} && (59)\\
&= A_3 \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ -1 \end{pmatrix} && (60)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha\sin\delta & 0 \\ -\cos\alpha\sin\delta & 1 & -\sin\alpha\sin\delta \\ 0 & \sin\alpha\sin\delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{ab}T}\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ e^{-\gamma_{ab}T}\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ -1 \end{pmatrix} && (61)
\end{aligned}$$

식 (61)에서 z축 항만을 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
S_3(T+\tau_3) &= -1 + e^{-\gamma_{ab}T}\sin^2\alpha\sin\beta\sin\delta\cos\gamma && (62)\\
&= -1 + e^{-\gamma_{ab}T}\frac{1}{\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}}\sin\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\tau_1 \frac{1}{\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}}\sin\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\tau_2\cos\Delta T && (63)
\end{aligned}$$

(ii)의 근사 결과를 이용하면 아래와 같아진다. 이 때 $\Theta_1 = \Omega\tau_1$, $\Theta_2 = \Omega\tau_2$이다.

$$\begin{aligned}
S_3(T+\tau_3) &\simeq -1 + e^{-\gamma_{ab}T}\frac{\Omega\tau_1}{\Delta\tau_1}\sin\Delta\tau_1\frac{\Omega\tau_2}{\Delta\tau_2}\sin\Delta\tau_2\cos\Delta T && (64)\\
&= -1 + e^{-\gamma_{ab}T}\Theta_1\Theta_2 sinc\Delta\tau_1 sinc\Delta\tau_2\cos\Delta T && (65)
\end{aligned}$$

■