수학 2 채점기준

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) f는 (0,0)에서 연속인지 판정

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{4(|x|+|y|)} = \frac{1}{4}(|x|+|y|)$$

(by 산술-기하)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}(|x|+|y|) = 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

따라서 (0,0) 에서 연속.

※ 계산실수 및 부등식 오류시 부분점수 없음.

ex) i) $\dfrac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \dfrac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|xy|}$

↳ 분모 0가능 틀린식.

ii) $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ ← $x\geq 0, y\geq 0$ 일때만 성립.

iii) $|x|+|y| \geq |x+y|$

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{|xy|}{|x+y|}$$ ← 분모 0가능 틀린식.

iv) $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{|r|\,(|\sin\theta|+|\cos\theta|)} = \lim_{r\to 0} |r| \frac{\sin\theta\cos\theta}{|\sin\theta|+|\cos\theta|}$ → 유계 임을 안보이면 0점.

(b). f는 $(0,0)$ 미분가능한지 판정.

①. $(1,1)$에서 방향미분 계산.

$$D_{(1,1)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2|t|}$$: 발산 (좌극한과 우극한이 다름)

따라서 미분 불가능하다. ┘ 8점.

②

미분가능하다면 방향벡터 V에 대해

$\mathrm{grad}\, f(0,0) \cdot V = D_V f(0,0)$ 이 성립 ┘ 4점

$D_1 f(0,0) = 0$ $\quad D_2 f(0,0) = 0$.

$V = (a,b)$ 일때

$$D_V f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ab}{|a|+|b|} \cdot \frac{t}{|t|}$$

$a, b \neq 0$ 이면 $D_V f(0,0)$; 발산! $\mathrm{grad}\, f(0,0) \cdot V = 0$ 이므로

f는 원점에서 미분불가능 ┘ 8점

③ f가 미분가능하다면 모든 벡터 V에 대해

$$\lim_{|V|\to 0} \frac{|f((0,0)+V) - f(0,0) - a\cdot V|}{|V|} = 0$$ 인 a가 존재 ┘ 4점

$a = \mathrm{grad}\, f(0,0) = (0,0)$ 이므로

$$\lim_{|V|\to 0} \frac{|f(V)|}{|V|} = 0$$ 이어야 미분가능.

$V = (a,b)$ $\quad \lim_{|V|\to 0} \frac{|f(V)|}{|V|} = \lim_{|V|\to 0} \frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot(|a|+|b|)}$

$a=b$라 하면 $\longrightarrow = \lim_{|a|\to 0} \frac{a^2}{2\sqrt{2}\, a^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$. 따라서 미분불가. ┘ 8점.

※ 계산 실수 시 4점감점

i) $\lim_{|v|\to 0} \frac{|f(v)|}{|v|} = \lim_{|v|\to 0} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}\,(|a|+|b|)}$ ← 절댓값빠진경우

ii) $\lim_{t\to 0} \frac{t}{2|t|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & t>0 \\ -\frac{1}{2} & t<0 \end{cases}$ 이라고 서술하는경우.

iii) $D_{(1,1)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{\sqrt{2}\,t}$

불필요한 $\sqrt{2}$ 붙는경우.

문제 2

풀이 직선의 방정식이 $x-2 = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = z$ 이므로,

방향벡터는 $\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-4$ 라 두면, $\mathrm{grad}\, f \parallel \left(1,-\frac{1}{2},1\right)$ 이다.

+4

$\Rightarrow \mathrm{grad}\, f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z) = k\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$

$\Rightarrow x = \frac{k}{2}$, $y = -\frac{1}{4}k$, $z = -\frac{k}{2}$ 를 $f(x,y,z)$에 대입하면.

$\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}k\right)^2 - \left(-\frac{k}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 8$

$\Rightarrow x = \pm 4$, $y = \mp 2$, $z = \mp 4$

$\Rightarrow$ 접점 $P_1 = (4, -2, -4)$ & $P_2 = (-4, 2, 4)$ +2

따라서 평면의 방정식은 $\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$을 법선벡터로 가지고,

P_1 또는 P_2를 지나는 것이므로,

$\alpha: (x-4) - \frac{1}{2}(y+2) + (z+4) = 0$

$\beta: (x+4) - \frac{1}{2}(y-2) + (z-4) = 0$ +4.

※ 직선의 방정식을 내적의 형태로 올바르게 구한 후, 전개과정에서 사소한 계산실수가 있는 경우에는 감점하지 않음.

3.

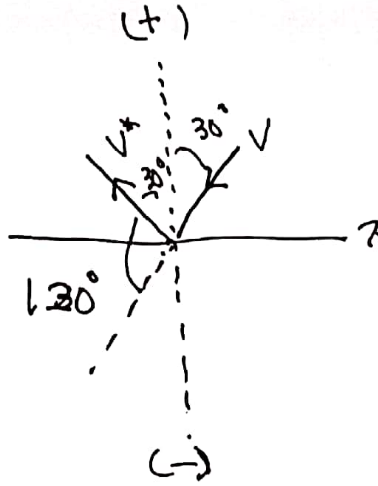
f 가 원점을 제외한 공간에서 일급 (C^1) 이므로 미분가능하고.

따라서 $D_{v^*} f(p) - D_v f(p) = D_{v^*-v} f(p) = \text{grad}\, f(p) \cdot (v^* - v)$.

⌜ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 이라 두고, $\text{grad}\, f(p) = \left(\frac{x}{r} \sinh r ,\ \frac{y}{r} \sinh r ,\ 2z \right)_p$

$= \left(\frac{1}{2} \sinh(\log 3) ,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(\log 3) ,\ \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$

$= \left[\left(\frac{2}{3} ,\ \frac{2}{\sqrt{3}} ,\ \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \right]$ +5점. ⌟



⌜ v^* 와 v 의 각이 120° 이고,

$\text{grad}\, f(p) \cdot v = D_v f(p) < 0$,

$\text{grad}\, f(p)$ 와 접평면이 수직.

즉 그림에서 $\text{grad}\, f(p)$ 는 (+) 방향이고, ⌟ +5점. $\left[v^* - v = \sqrt{3} \cdot \frac{\text{grad}\, f(p)}{|\text{grad}\, f(p)|} \right]$

$|\text{grad}\, f(p)| = \frac{8}{3}$ 이고, $\cancel{D_{v^*-v} f}$

$\text{grad}\, f(p) \cdot (v^* - v) = \sqrt{3} \cdot |\text{grad}\, f(p)| = \frac{8}{\sqrt{3}}$, +5점.

※. 대괄호로 표시된 부분은 답안에 필수적이지 않음.

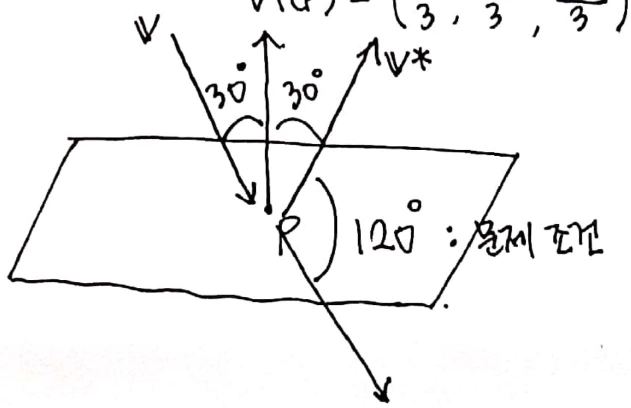
즉, $v^* - v = \frac{\text{grad}\, f(p)}{|\text{grad}\, f(p)|}$ 로 주장하여도, (+) 방향에 해당하는 5점 부여.

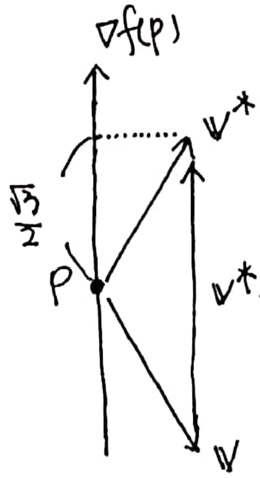
※. $\sinh(\log 3) = \frac{4}{3}$ 를 계산하지 않고 sinh 로 ~~[illegible]~~ 나타내도 무방함.

별해

1. 그림을 활용하여 v^*-v를 바로 구한 경우

$$\nabla f(P) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$





$$v^*-v = \sqrt{3}\cdot\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$$

$$\therefore D_{v^*-v} f(P) = \nabla f(P)\cdot(v^*-v)$$

$$= \nabla f(P)\cdot\sqrt{3}\,\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \sqrt{3}\,|\nabla f(P)|$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{8}{3}$$

2. 공식을 활용해 v^*를 v와 $\nabla f(P)$로 표현해서 구한 경우

$v^* = v - 2\dfrac{v\cdot N}{N\cdot N}N$ 에서 N은 $\nabla f(P)$가 돼야 한다.

$$\therefore v^*-v = -2\,\frac{|\nabla f(P)|\cos 150^\circ}{|\nabla f(P)|^2}\nabla f(P)$$

$$= \sqrt{3}\,\nabla f(P)/|\nabla f(P)|$$

$$\Rightarrow D_{v^*-v} f(P) = \nabla f(P)\cdot(v^*-v)$$

$$= \nabla f(P)\cdot\left\{\sqrt{3}\,\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}\right\}$$

$$= \sqrt{3}\,|\nabla f(P)| = \sqrt{3}\cdot\frac{8}{3}$$

※ v와 N 사이의 각을 오인한 경우
방향이 맞다면 5점, 다르면 ~~문제가 의도한~~
문제의 의도와 다르기 때문에 0점.

3. v^*와 v에서의 방향도함수를 각각 따로 구한 경우.

$$D_v f(P) = |\nabla f(P)|\cdot\cancel{|v|}^{1}\cdot\cos\frac{5}{6}\pi$$

$$D_{v^*} f(P) = |\nabla f(P)|\cdot\cancel{|v^*|}^{1}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

#4. $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y-1}$ 에 대하여 $D^4_{(a,b)}(0,0)$ 을 구하시오.

(풀이 1) $D^4_{(a,b)}(0,0) = \dfrac{d^4}{dt^4}\Big|_{t=0} f(at, bt)$ — 5점

$$= \frac{d^4}{dt^4}\Big|_{t=0}\left(\frac{1}{(a-b)t-1}\right)$$

$$= \frac{24(a-b)^4}{((a-b)t-1)^5}\Bigg|_{t=0} \quad \text{5점}$$

$$= -24(a-b)^4 \quad \text{5점}$$

(풀이 2) $f(x,y)$ 는 원점에서 무한 급 함수이므로, 오일러 편미분 교환법칙에 의해

$$D^4_{(a,b)}(0,0) = a^4 D_1^4(0,0) + 4a^3b D_1^3D_2(0,0) + 6a^2b^2 D_1^2D_2^2(0,0) + 4ab^3 D_1D_2^3(0,0) + b^4 D_2^4(0,0)$$

5점.

$f(x,y)$ 를 미분하면 $D_1^4(x,y) = D_2^4(x,y) = D_1^2D_2^2(x,y) = \dfrac{24}{(x-y-1)^5}$

$D_1^3D_2(x,y) = D_1D_2^3(x,y) = -\dfrac{24}{(x-y-1)^5}$

5점.

위의 결과에 $(x,y)=(0,0)$ 을 대입하면,

$$D^4_{(a,b)}(0,0) = -24a^4 + 96a^3b - 144a^2b^2 + 96ab^3 - 24b^4 = -24(a-b)^4$$

5점.

(풀이 3) $f(x,y) = -\dfrac{1}{1-(x-y)} = -\left\{1 + (x-y) + (x-y)^2 + (x-y)^3 + (x-y)^4\right\} + O((x^2+y^2)^2)$

5점

한 편, 원점에서 $v=(x,y)$ 방향 테일러 다항식은

$$T_4 f((0,0), v) = f(0,0) + D_v f(0,0) + \frac{1}{2!}D_v^2 f(0,0) + \frac{1}{3!}D_v^3 f(0,0) + \frac{1}{4!}D_v^4 f(0,0)$$

테일러 전개의 유일성에 의해, 4차 항을 비교하면

$$\frac{1}{4!}D_v^4 f(0,0) = -(x-y)^4$$

5점

$$\therefore D^4_{(a,b)} f(0,0) = -24(a-b)^4$$

5점

* 테일러전개의 유일성은 설명하지 않고 풀거나 나머지항 $O((x^2+y^2)^2)$ 을 실수한 경우 −3점
* 잘못된 식을 전개하여 푼 경우, 2 뒤로 점수 없음

※5. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}$: 임계점을 모두 구하고, 분류

Sol $\nabla f(x,y) = e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\left((2-(x^2+y^2))x,\ (2+(x^2+y^2))y \right)$

따라서 (x,y): 임계점 $\Longleftrightarrow \begin{cases} (2-(x^2+y^2))\cdot x = 0 \\ (2+(x^2+y^2))\,y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y=0 \\ x=0,\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$

∴ 임계점 $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ ① 각 +1

$$f''(x,y) = e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\begin{pmatrix} x^4+x^2y^2-5x^2-y^2+2 & -x^3y-xy^3 \\ -x^3y-xy^3 & y^4+x^2y^2+5y^2+x^2+2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 양정치 $\Rightarrow$ 극소점

$f''(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{4}{e} \end{pmatrix} = f''(-\sqrt{2},0) \rightarrow \det\begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{4}{e} \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ 안장점 ② 각 +4

채점기준

① ∇f 와 임계점 3개를 맞게 구하면 임계점 하나당 1점

② $f''(x,y)$ 와 극소, 안장을 $f''(0,0)$, $f''(\pm\sqrt{2},0)$ 까지 맞게 구해서 판정하면 각각 +4 점

③ ① 의 결과가 맞아야 ② 에서 점수를 줄 수 있다. 즉, 틀리게 구한 임계점에, (바르게) 판정을 해도 점수는 얻지 없다.

④ 헤세 판정을 쓰지 않고 맞는 논리를 써서 판정하면 점수 인정.

(ex, $(0,0)$ 은 $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$ 이므로 극소.)

#6. (풀이 1)

① $S=\{x,y,z\geq 0 \mid ax^2+by^2+cz^2=1\}$은 유계 닫힌 집합이므로, 영역 S에서 $x^r y^s z^t$는 최댓값을 갖는다. (최대최소 정리에 의해) +2

$f(x,y,z)=x^r y^s z^t$, $g(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ 이라 하자.

② S위의 점들 중 x,y,z 중 하나가 0 이라면 $f(x,y,z)=0$ 이다. +3

③ x,y,z가 모두 양수인 경우, g의 1-등위면 상에서의 f의 최댓값을 구하는 상황이므로 라그랑주 승수법을 적용할 수 있다. 또한 $x,y,z>0$ 일때 $\text{grad}\, g(x,y,z)=(2ax,2by,2cz)\neq(0,0,0)$ 이므로, f의 최댓값을 (x,y,z)에서 가진다면 $\text{grad} f(x,y,z)=\lambda\, \text{grad}\, g(x,y,z)$ 가 성립. (어떤 상수 λ에 대해) +4

$$\text{grad} f(x,y,z) = x^r y^s z^t \left(\frac{r}{x},\frac{s}{y},\frac{t}{z}\right)$$
$$\text{grad} g(x,y,z) = 2(ax,by,cz)$$
$$\therefore ax:by:cz=\frac{r}{x}:\frac{s}{y}:\frac{t}{z}$$

$$\therefore x=\sqrt{\frac{r}{a}}k,\quad y=\sqrt{\frac{s}{b}}k,\quad z=\sqrt{\frac{t}{c}}k.$$

$ax^2+by^2+cz^2=1$ 임에서 $k=\sqrt{\frac{1}{r+s+t}}$.

$$\Rightarrow f(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\cdot k\right)^r\left(\sqrt{\frac{s}{b}}\cdot k\right)^s\left(\sqrt{\frac{t}{c}}\cdot k\right)^t$$
$$=\sqrt{\frac{r}{a}}^{\,r}\sqrt{\frac{s}{b}}^{\,s}\sqrt{\frac{t}{c}}^{\,t}\cdot\sqrt{\frac{1}{r+s+t}}^{\,r+s+t}.$$ +4.

④ ②와 ③의 값들 중 최댓값은 ③의 값이므로,

$x^r y^s z^t$의 최댓값은 $\sqrt{\frac{r}{a}}^{\,r}\sqrt{\frac{s}{b}}^{\,s}\sqrt{\frac{t}{c}}^{\,t}\sqrt{\frac{1}{r+s+t}}^{\,r+s+t}$ 이다. +2.

-※ (풀이 1)의 채점기준.

- ① 에서 "유계", "닫힌", "최댓값을 가진다"라는 말이 없으면 2점 부여 X
- 라그랑주 승수법 (grad $f = \lambda$ grad g)을 적용하기 전에 ②의 case (S의 경계)를 고려하지 않은 경우, 답이 맞아도 ③에서 최대 4점만 부여하고 ④의 점수부여X

(라그랑주 승수법을 적용한후 단순 계산의 이유로 $x=0$ or $y=0$ or $z=0$ 의 case를 나눈 경우, 또는 grad$f=0$, grad $g=0$ 의 case를 나눈경우 마찬가지로 점수 없음)

(라그랑주 승수법을 적용하려면 515p. 정리 6.0.2.의 조건에 나와 있듯이 f와 g의 정의역은 열린 집합 (경계가 없는 집합) 이어야 함.
지금의 경우 $U=\{(x,y,z) \mid x, y, z>0\}$이어야 열린 집합이 됨.)

(풀이 2)

가중치 산술 기하 부등식을 적용하면 $u+v+w=1$을 만족하는 양수 u, v, w 와 양수 A, B, C에 대해

$$uA+vB+wC \ge A^u B^v C^w \quad (\text{등호조건} : A=B=C)$$

가 성립. $u=\frac{r}{r+s+t}$, $v=\frac{s}{r+s+t}$, $w=\frac{t}{r+s+t}$, $A=\frac{ax^2}{r}$, $B=\frac{by^2}{s}$, $C=\frac{cz^2}{t}$ 대입.

$$\Rightarrow \frac{1}{r+s+t}(ax^2+by^2+cz^2) \ge \left[\left(\frac{ax^2}{r}\right)^r\left(\frac{by^2}{s}\right)^s\left(\frac{cz^2}{t}\right)^t\right]^{\frac{1}{r+s+t}}$$

$$\Rightarrow x^r y^s z^t \le \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^r\left(\frac{s}{b}\right)^s\left(\frac{t}{c}\right)^t \cdot \frac{1}{(r+s+t)^{r+s+t}}} \quad \cdots (*)$$

등호조건이 존재하므로 $\left(\frac{ax^2}{r}=\frac{by^2}{s}=\frac{cz^2}{t}\right.$, 즉 $x=\sqrt{\frac{r}{a(r+s+t)}}$, $y=\sqrt{\frac{s}{b(r+s+t)}}$, $\left.z=\sqrt{\frac{t}{c(r+s+t)}}\right)$

(*)가 최댓값이 된다. +15.

-※ r, s, t가 정수라고 가정한 경우 $\left(\text{ex. } ax^2=\underbrace{\frac{ax^2}{r}+\cdots+\frac{ax^2}{r}}_{r\text{개}}\right)$, 등호조건이 명확하지 않은 경우, 가중치 산술기하 부등식을 명확하게 적지 않은 경우 모두 0점.

7. (풀이 1) 함수 $h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 를 $h_1(t) = (t, 1)$ 로 정의하고

함수 $h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 를 $h_2(s) = (1, s)$ 로 정의하자.

연쇄법칙에 의해

$$\left((G\circ F)(t,1)\right)' = \left((G\circ F)\circ h_1\right)'(t) = (G\circ F)'(t,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4t^3\\2t\end{pmatrix}$$

$$\left((G\circ F)(1,s)\right)' = \left((G\circ F)\circ h_2\right)'(s) = (G\circ F)'(1,s)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4s^3\\+2s\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (G\circ F)'(1,1) = \begin{pmatrix}4 & -4\\2 & 2\end{pmatrix}$$ ㉠ +6 (행렬을 전치행렬로 쓴 경우 3점만 부여)

($(G\circ F)'(t,s) = \begin{pmatrix}4t^3 & -4s^3\\2t & 2s\end{pmatrix}$ 등 0점부여)

다시 연쇄법칙에 의해

$$(G\circ F)'(1,1) = G'(F(1,1))\cdot F'(1,1) = G'(2,0)\cdot F'(1,1)$$

그런데 $G'(x,y) = \begin{pmatrix}y & x\\1 & 0\end{pmatrix}$ 이므로 $G'(2,0) = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$ ㉡ +6

(행렬을 전치행렬로 쓴 경우 3점만 부여)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot F'(1,1) = \begin{pmatrix}4 & -4\\2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore F'(1,1) = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & -4\\2 & 2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -4\\2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}$$ ㉢ +3

(㉠, ㉡에서 전치행렬로 쓴 경우에도 계산이 맞으면 3점 부여)

* ㉠ 또는 ㉡ 에서 0점을 받은 경우 ㉢에 점수없음

* $(G\circ F)'(t,s)$, $F'(t,s)$ 등의 일반적인 경우에 대한 논증은 불가능하다

예를들어, $F(t,s) = (t^2+s^2+(s-1)(t-1),\ t^2-s^2)$ 이면, $F(1,1) = (2,0)$

$(G\circ F)(t,s) = (t^4-s^4+(t^2-s^2)(s-1)(t-1),\ t^2+s^2+(s-1)(t-1))$ 이므로

$(G\circ F)(t,1) = (t^4-1,\ t^2+1)$, $(G\circ F)(1,s) = (-s^4+1,\ s^2+1)$ 을 만족한다

그러나 $(G\circ F)'(t,s) \neq \begin{pmatrix}4t^3 & -4s^3\\2t & 2s\end{pmatrix}$ 이며 $F'(t,s) \neq \begin{pmatrix}2t & 2s\\2t & -2s\end{pmatrix}$

(풀이 2) $G(F(t,1)) = (t^4-1, t^2+1)$

$G(F(1,s)) = (-s^4+1, s^2+1)$ 이므로

$F(t,1) = (t^2+1, t^2-1)$, $F(1,s) = (s^2+1, -s^2+1)$ 이다.

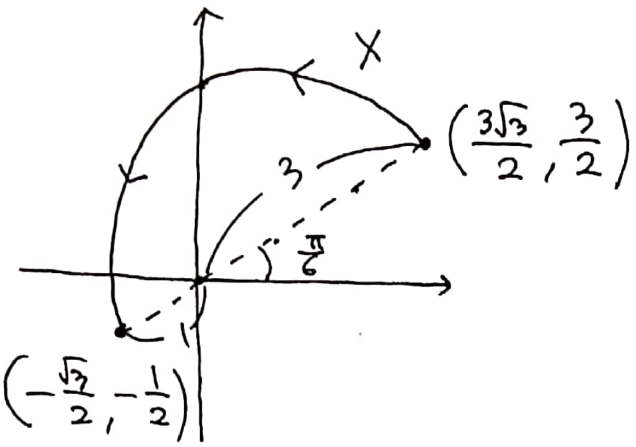
$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} F(t,1) = (2t, 2t)\Big|_{t=1} = (2,2)$$ +6

※ $F(t,s) = (t^2+s^2, t^2-s^2)$ 라 가정하고 푼 경우 점수 없음.

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=1} F(1,s) = (2s, -2s)\Big|_{s=1} = (2,-2)$$ +6

$$\therefore F'(1,1) = \begin{pmatrix} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=1} F(t,1) & \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=1} F(1,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ +3

8번. 〈끝점 구하기〉



주의: "원점 중심 회전"

끝점: $3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

& $1\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

〈선적분 계산〉

① $\frac{(-y,x)}{x^2+y^2} \Rightarrow$ 각원소 벡터장 : $\int_X \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}\,ds = \underset{(나중)}{\frac{7\pi}{6}} - \underset{(처음)}{\frac{\pi}{6}} = \pi$ (돌아간 각도)

② $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$ 으로 정의하자.

$\rightarrow \nabla\varphi = (x^2+y^2)(x,y)$ $\therefore$ φ는 $(x^2+y^2)(x,y)$의 잠재함수

한편, $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{4}r^4$ (극좌표 (r,θ) 사용시)

$\therefore \int_X (x^2+y^2)(x,y)\,ds = \left[\varphi(r)\right]_{r=3}^{r=1} = \left[\frac{1}{4}r^4\right]_3^1 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -20.$

$\because$ 선적분의 기본정리

By ①, ②, $\int_X F(x,y)\,ds = \boxed{\pi - 20}$.

[별해]

• 회전된 반 타원의 매개화를 잘 구할시 (3점)
(단, 잠재함수 φ 점수 3점과 중복 불가.)

$X(t) = \left(\sqrt{3}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos t + \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\right)$ $(0 \le t \le \pi)$

〈채점기준〉

• 끝점 2개 각각 2점 (총 4점). 답이 맞아야 인정.

• 각원소벡터장 적분 $= \pi$ (3점). 단, 원점을 지나는 적분경로를 설정했을 시 0점.

• 잠재함수 $\varphi(r) = \frac{1}{4}r^4$ (3점)

• 올바른 과정을 통해 "$\pi - 20$"이라는 답을 내린 경우. (5점)
(논리적 오류 발견시 $\pi-20$을 구해도 정답 인정 불가.)

총 15점.

9.

(a) 참.

$\vec{F}$의 잠재함수를 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ 이라 하면 $\vec{F} = \operatorname{grad}\varphi$ 이다.

일급곡선 $X(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 이 닫혀있으므로 $X(a) = X(b)$ 이다.

따라서 선적분 기본정리에 의해

$$\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(X(t)) \cdot X'(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi(X(t)) \cdot X'(t)\,dt = \varphi(X(b)) - \varphi(X(a)) = 0 \text{ 이다.}$$ +6

(b) 거짓.

$\vec{F}(x,y) := \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ 으로 정의하면, +2

$D_2F_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. $D_1F_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow D_2F_1 = D_1F_2$ 이므로 $\vec{F}$는 닫혀있다. +2

그러나 일급곡선 $X(t) := (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ 에 대해

X는 닫힌 곡선이지만 $\int_X \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt = 2\pi \neq 0$ 이어서

(a)에 의해 $\vec{F}$는 잠재함수를 가지지 않는다. +3

(c) 참.

(풀이 1) (b)의 계산에 의해 $\vec{F}$는 닫혀있고, 주어진 U는 열린 볼록집합이므로

푸앵카레 도움정리에 의해 $\vec{F}$는 잠재함수를 가진다. +7

(풀이 2) $\varphi : U \to \mathbb{R}$ 을 $\varphi(x,y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 라 두면 간단한 계산에 의해 $\vec{F} = \operatorname{grad}\varphi$ 이다.

$\therefore$ φ는 $\vec{F}$의 잠재함수이다. +7

[세부 채점 기준] (b) 각원소 벡터장이 아닌 올바른 예시를 들었을 경우, 구체적인 계산이 없을 시 −5

(c) (풀이 1)에서 ($\vec{F}$의 닫힘) 또는 (U의 볼록성) 중 하나가 빠진 경우 −2

[10] $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ 에 대한 선적분

$\int_X yz\,dx - xz\,dy$ 를 구하시오.

(모범답안)

$yz\,dx - xz\,dy$ 에 대응되는 벡터장은

$\mathbb{F}(x, y, z) = (yz,\ -xz,\ 0)$ 이다.

$$\int_X yz\,dx - xz\,dy = \int_X \mathbb{F}(x,y,z)\cdot ds$$

$$\left[\begin{aligned} &\int t^2 \sin t\,dt \\ &= -t^2\cos t + \int 2t\cos t\,dt \\ &\int t\cos t\,dt \\ &= t\sin t - \int \sin t\,dt \\ &= t\sin t + \cos t \end{aligned}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(X(t))\cdot X'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \big((1-\cos t)\cdot t,\ -(t-\sin t)\cdot t,\ 0\big)\cdot \overbrace{(1-\cos t,\ \sin t,\ 1)}^{X'(t)}\,dt$$

+8

$$= \int_0^{2\pi} (2t - 2t\cos t - t^2 \sin t)\,dt$$

$$= \Big[t^2 - 2(t\sin t + \cos t) - \{-t^2\cos t + 2(t\sin t + \cos t)\}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \Big[t^2 + t^2\cos t - 4t\sin t - 4\cos t\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi^2 + 4\pi^2 = 8\pi^2$$

+7

(채점 기준)

선적분 식을 곡선의 매개변수 t에 대한 식으로 맞게 변환한 경우 +8점.

계산을 정확하게 하고 답을 옳게 쓴 경우 + 7점

총 15점.

(*) 만약 $\int_X yz\,dx$ 와 $\int_X xz\,dy$ 를 따로 계산한 경우, 각 경우에 대해 매개변수 t에 대한 변환이 모두 맞는 경우 + 8점.

하나라도 틀린 경우 부분점수 없음.