2023년 2학기 수학2
제12장 다변수 벡터함수

2023년 9월 23일

1 야코비 행렬

다음과 같은 함수를 다변수 벡터 함수라 부른다.

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \quad F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Recall : $f(\boldsymbol{X}) \approx f'(P)(\boldsymbol{X} - P) + f(P) = (\text{가로벡터})\begin{pmatrix} \text{세} \\ \text{로} \\ \text{벡} \\ \text{터} \end{pmatrix} + \text{실수}.$

그러므로

$$F(\boldsymbol{X}) \approx \begin{pmatrix} f_1{}'(P)(\boldsymbol{X} - P) + f_1(P) \\ \vdots \\ f_m{}'(P)(\boldsymbol{X} - P) + f_m(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1{}'(P) \\ \vdots \\ f_m{}'(P) \end{pmatrix}_{(m\times n)} (\boldsymbol{X} - P)_{(n\times 1)} + \begin{pmatrix} f_1(P) \\ \vdots \\ f_m(P) \end{pmatrix}_{(m\times 1)} := F'(P)(\boldsymbol{X} - P) + F(P).$$

이 때, 행렬 $F'(P)$를 점 P에서 함수 F의 야코비 행렬 (Jacobi matrix)라 부른다.

(표현)

$$F' = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(m\times n)}$$

(야코비행렬의 사이즈)

(성분함수의 갯수) × (변수의 갯수) = (공역공간의 차원) × (정의역공간의 차원) = (뒤) × (앞)

(야코비행렬의 행과 열)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- (p537)

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F' = \frac{\partial(e^x \cos y, e^x \sin y, x+y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx F'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

이래 놓고 보니 non-linear 함수인 F를 점 $(0,0)$ 근방에서 선형변환과 평행이동의 합성으로 근사하였다. 이것이 미분의 본연의 목표인것이고 *Newton* 선생님의 로망인 것이다. 이래서 선형변환의 수학인 선형대수를 수학의 절반 이라고 하는것이다.

- $F = AX$ 인 선형변환으로 주어져 있다.

$$\Rightarrow \quad F'(X) \equiv A.$$

선형변환 복습, 정의

선형변환 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 은

$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y), \quad \Leftrightarrow \quad L(x) = Ax, \text{ for some } (m \times n) \text{ matrix } A.$$

이 때, 행렬 A는 기본단위벡터들의 상을 세로로 써서 나열한 것이다:

$$A = \begin{pmatrix} L(e_1) & L(e_2) & \cdots & L(e_n) \end{pmatrix}$$

선형변환의 기하적 성질

1. 평평한 object → 평평한 object.
2. colinear 한 세 점의 거리비를 보존한다.
3. 평행성을 보존한다.

정사각행렬

정의공간과 공역공간의 차원이 같은 선형변환 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 에 대응되는 행렬은 정사각행렬이다.

- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc. \qquad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} =$

- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ 역행렬 A^{-1}가 존재 $\quad \Leftrightarrow \quad$ 넓이 또는 부피가 있는 물건 $\to$ 넓이 또는 부피가 있는 물건
  정사각형 → 평행사변형, 정육면체 → 평행육면체

- $\det A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ 향orientation을 보존. 즉, 상image는 거울상이 아니다.

- $|\det A|$ = 부피의 변화율.

야코비행렬식(Jacobian determinant or Jacobian)과 국소적 부피변화율.(p539)

일차근사 = 선형변환과 평행이동의 합성.

그러므로 함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$에서

$$F : \quad \text{점 } P \text{ 의 (한없이) 작은 근방} \;\to\; \text{점 } F(P) \text{ 의 (한없이) 작은 근방}$$

인데 이 때, 국소적 부피 변화율은 $|\det F'(P)|$이다.

중요한 예들 이 예들은 제14장 다중적분 에서 치환적분을 할 때 중요한 예 들이다.

- (극좌표 치환)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

- (기둥좌표 치환)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

- (구면좌표 치환)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2\sin\varphi.$$

2 연쇄법칙

연쇄법칙 (chain rule)

- 종속량 u는 x,y의 함수이고 x,y는 t의 함수이다 :

$$t \mapsto (x,y) \mapsto u.$$

위의 합성함수의 연쇄법칙을 보자.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial(x,y)}\frac{d(x,y)}{dt}.$$

- 종속량 u는 x,y,z의 함수이고 x,y,z는 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 의 함수이다 :

$$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (x,y,z) \mapsto u.$$

위 합성함수 미분법을 잘 적용해 보자.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial\alpha} & \frac{\partial u}{\partial\beta} & \frac{\partial u}{\partial\gamma} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\alpha} & \frac{\partial u}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\beta} & \frac{\partial u}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial\gamma} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial u}{\partial(x,y,z)}\begin{pmatrix} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(x,y,z)}{\partial\beta} & \frac{\partial(x,y,z)}{\partial\gamma} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial u}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}
\end{aligned}$$

- u_1,u_2,u_3 는 x,y,z 의 함수이고 x,y,z 는 α,β,γ 의 함수이다 :

$$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (x,y,z) \mapsto (u_1,u_2,u_3).$$

위 합성함수 미분법을 잘 적용해 보자.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \\ \frac{\partial u_2}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \\ \frac{\partial u_3}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \\ \frac{\partial u_2}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \\ \frac{\partial u_3}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial(x,y,z)} \\ \frac{\partial u_2}{\partial(x,y,z)} \\ \frac{\partial u_3}{\partial(x,y,z)} \end{pmatrix}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \\
&= \frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}
\end{aligned}$$

- 일반적으로 합성

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_l) \mapsto (\beta_1,\ldots,\beta_m) \mapsto (u_1,\ldots,u_n).$$

에 대해

$$\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)} = \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_m)}\frac{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_m)}{\partial(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)}, \quad \big((n\times l) = (n\times m)(m\times l) \big).$$

(증명). 이 사실의 증명은 위에서 이미 했는데 위에서는 쓸데없이 친절하게 한 느낌이 있다. 행렬곱의 규칙과

야코비행렬의 정의와 합성함수 미분법1을 안다면 당연한 것이다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial u_i}{\partial \beta_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_j} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)} \text{ 의 } i\text{-th 가로} \right) \left(\frac{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)}{\partial(\alpha_1,\dots,\alpha_l)} \text{ 의 } j\text{-th 세로} \right).$$

□

주의할 점은 순서를 바꾸면 안된다는 것이다. 일단 두 행렬을 곱하는 순서를 바꾸려 하면 행렬의 사이즈조차 맞지 않는다 : 아래 식의 우변의 두 행렬은 곱할 수 없다. 설령 $l = m = n$ 인 경우라 할지라도, 일단 행렬의 곱하기는 교환법칙이 성립하지 않을뿐 더러 선형사상의 적용순서에 대한 문법에도 맞지 않는다.

$$\frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(\alpha_1,\dots,\alpha_l)} \neq \frac{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)}{\partial(\alpha_1,\dots,\alpha_l)} \frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)}$$

연쇄법칙 (chain rule)을 거칠게 설명하면

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^l \quad \Rightarrow \quad (G \circ F)'(P) = G'(F(P))F'(P)$$

왜냐하면 (아주 거칠게 설명하여)

$$F(\boldsymbol{X}) \approx F'(P)(\boldsymbol{X} - P) + F(P).$$

$$G(F(\boldsymbol{X}) \approx G'(F(P))(F(X) - F(P)) + G(F(P)) \approx G'(F(P))F'(P)(\boldsymbol{X} - P) + G(F(P)).$$

- $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 - y^2,\ x = t + s,\ y = t - s$ 일 때, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}$ 를 구하시오.
  (풀이)
  $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
- $u = xy,\ v = x,\ x = t^2 + s^2,\ y = t^2 - s^2$ 일 때, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}$ 를 구하시오.
  (풀이)
  $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t & 2s \\ 2t & -2s \end{pmatrix}$$
- $u = xy,\ v = x,\ x = t^2 + s^2,\ y = t^2 - s^2$ 일 때, $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\right|_{(t,s)=(3,2)}$ 를 구하시오.
  (풀이)
  $$(t,s) = (3,2) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (13,5).$$
  $$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\right|_{(t,s)=(3,2)} = \left.\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(13,5)} \left.\begin{pmatrix} 2t & 2s \\ 2t & -2s \end{pmatrix}\right|_{(t,s)=(3,2)} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

제12장 끝.