Quiz 4 (11월 29일 금 3, 4 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) xy-평면에서 직선 $y = x$ 과 $x = 1$, 그리고 x 축에 의해 둘러싸인 유계인 영역을 D 라 하고, 그 경계를 C 라 하자. 다음 적분을 구하시오.

$$\int_C (\log(1 + x^3) + \cos y)\, dx + (x \sin y + \sqrt{1 + e^y})\, dy$$

2. (7점) 평면 $z = x$ 의 일부분 중에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 내부에 있는 영역을 S 라고 하자. S 의 밀도함수가

$$\mu(x, y, z) = x + 1$$

로 주어졌을 때, S 의 질량을 구하시오.

3. (7점) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ 가 곡면

$$S : z = x^2 + y^2 \qquad (x^2 + y^2 \le 1)$$

을 빠져나가는 양을 구하시오. (이 때, 곡면의 향을 정하는 단위법벡터장 $\mathbf{n}$ 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \le 0$ 이 되도록 주어진다.)

Quiz 4 모범답안 및 채점기준

1. 구하고자 하는 선적분은 그린 정리에 의해

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x\sin y + \sqrt{1+e^y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\log(1+x^3)+\cos y) \right\} dxdy \\
&= 2\int_0^1 \int_0^x \sin y \, dydx && (3점) \\
&= 2(1-\sin 1) && (6점)
\end{aligned}$$

이다.

2. 곡면 S 를 $\mathbb{R}^2$ 의 영역 $D : 2x^2 + y^2 \le 1$ 에서 $X(x,y) = (x,y,x)$ 로 매개화하면 면적소는

$$dS = |X_x \times X_y| \, dxdy = |(1,0,1)\times(0,1,0)| \, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$$

이므로, 질량 M 은

$$M = \iint_S \mu \, dS = \iint_{2x^2+y^2\le 1} (x+1)\sqrt{2}\, dxdy$$

이다. 이제 $(x,y) = \left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}, r\sin\theta\right)$, $(0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$ 로 치환하면,

$$\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

이고, 따라서

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta + 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} r\sqrt{2}\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta && (4점) \\
&= \pi && (7점)
\end{aligned}$$

이다.

3. 곡면 S 를 $X(x,y)=(x,y,x^2+y^2),\ (x^2+y^2\le 1)$ 으로 매개화 하면, 주어진 조건에 의해 곡면 S 의 법벡터장은 $\mathbf{N}=-X_x\times X_y=(2x,2y,-1)$ 이다. 따라서 구하는 플럭스는

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dxdy\\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1}(2x^2+2y^2-xy)\,dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1(2-\cos\theta\sin\theta)r^3\,drd\theta && (4점)\\ &= \pi && (7점)\end{aligned}$$

이다.