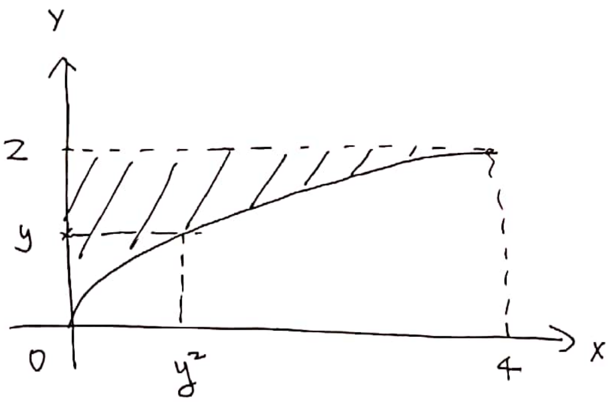
수학 2 채점기준

문제 1.



푸비니 정리에 의해

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{x}{y^5+1}\, dx\, dy$$

10점.

$$= \int_0^2 \frac{y^4}{2(y^5+1)}\, dy = \frac{1}{10} \ln(y^5+1) \Big|_0^2$$

$$= \frac{\ln 33}{10}$$

5점.

영역을 정확하게 표현하여 푸비니 정리를 적용한 경우, 10점

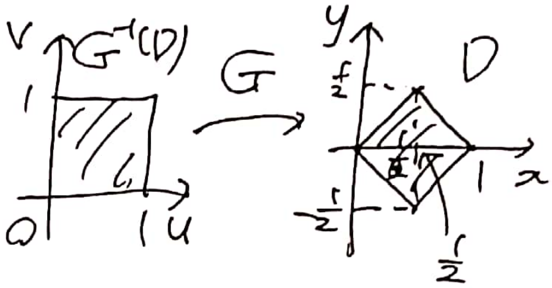
정답을 계산하였으면 5점 (부분점수 없음)

2. (풀이 1)

• $u = x-y$, $v = x+y$ 라 하면, 변환 $G\left((u,v) \mapsto (x,y)\right)$ 는

$G(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), -\frac{1}{2}(u-v)\right)$ 인 일급 가역사상이다.

$$G'(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$ 이므로



$$\iint_D (x-y)e^{y^2-x^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{G^{-1}(D)} ue^{-uv} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{u}{2}e^{-uv}\,dv\,du$$ +15.

G'(u,v)에 사소한 실수가 있을 경우 −5점

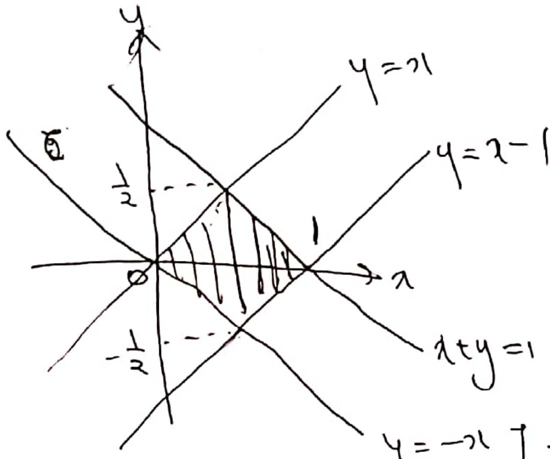
$$= \int_0^1 -\frac{1}{2}\left[e^{-uv}\right]_0^1 du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-e^{-u})\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[1+e^{-u}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2e}$$ +5.

(풀이 2)

$$I=\iint_D (x-y)\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy = \iint_D x\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy - \iint_D y\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy.$$



대칭성에 의해, $\iint_D y\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy = 0$.

$$I=\iint_D x\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac12}\int_y^{1-y} x\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy + \int_{-\frac12}^{0}\int_{-y}^{1+y} x\,e^{y^2-x^2}\,dx\,dy.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{y^2-x^2} = -2x\,e^{y^2-x^2}\right)$$

$$= \int_0^{\frac12}\left[-\frac12 e^{y^2-x^2}\right]_{x=y}^{x=1-y} dy + \int_{-\frac12}^{0}\left[-\frac12 e^{y^2-x^2}\right]_{x=-y}^{x=1+y} dy$$

$$= \int_0^{\frac12} -\frac12\left(e^{2y-1}-1\right)dy + \int_{-\frac12}^{0} -\frac12\left(e^{-2y-1}-1\right)dy$$

$$= \frac12 - \frac12\left[\frac{e^{2y-1}}{2}\right]_0^{\frac12} - \frac12\left[-\frac{e^{-2y-1}}{2}\right]_{-\frac12}^{0} = (2e)^{-1}.$$

+20.

마지막 계산에서 사소한 실수가 있는 경우 전체 문제에 +10점 부여.

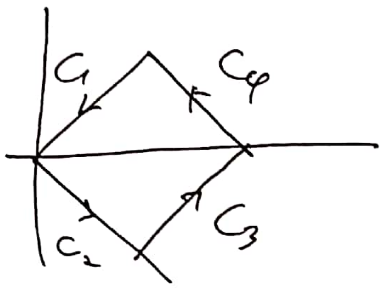
(풀이 3).

$\mathbb{F} = -\frac{1}{2} e^{y^2-x^2}(1,\ 1)$ 이라 하면,

$(x-y)e^{y^2-x^2} = \mathrm{div}\,\mathbb{F}$ 이므로

주어진 적분은, 발산정리에 의해

$\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\,ds$ 가 된다.



C_1과 C_3의 법벡터와 $\mathbb{F}$가 수직이므로 $\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot n\,ds = 0$. —— ① +5

C_4에서 $\int_{C_4} \mathbb{F}\cdot n\,ds$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(1-x)^2-x^2}\cdot\sqrt{2}\,dx$$ —— ② +5

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

C_2에서 $\int_{C_2} \mathbb{F}\cdot n\,ds = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot dx = \frac{1}{2}$ —— ③ +5.

$\therefore$ 답은 $\frac{1}{2e}$ +5.

문제 3.

$$\varphi'(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} f\,ds\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,d\theta\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \quad (\because \text{라이프니츠 정리})$$

┘ +5점

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{grad}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta))\cdot(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta \quad (\because \text{연쇄 법칙})$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(\mathrm{grad}\, f)\cdot(\cos\theta, \sin\theta)\; r\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r}(\mathrm{grad}\, f)\cdot\vec{n}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)\,dx\,dy \quad (\because \text{발산 정리})$$

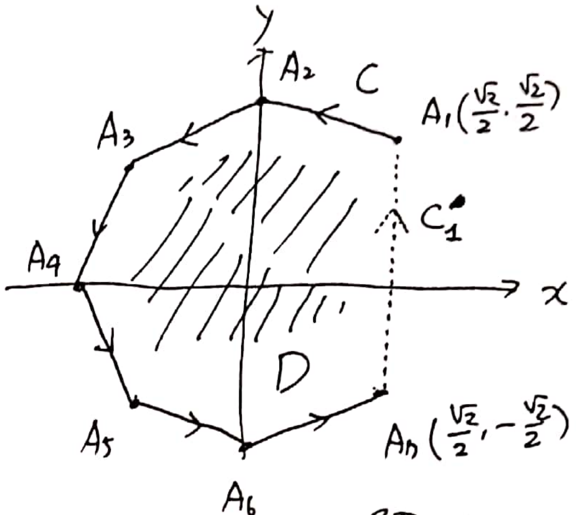
$$= \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

┘ +15점.

※ 이중적분 $\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy$ 를 발산정리/그린 정리를 써서
C_r 위에서의 적분으로 올바르게 변형했을 경우 +10점.
(단, 발산 정리/그린 정리에 대한 언급이 없을 경우 −3점.)
(단, 적분 영역을 잘못 표기한 경우 그 개수와 관계 없이 −3점.)

#4. $\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)dy$

$= \int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \quad + \int_c x\,dy$



① $\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ 는 각원소 벡터장의 적분이므로 그 값은 $\frac{3\pi}{2}$.

(+8)

② 그림과 같이 A_7에서 A_1을 y축과 평행하게 이은 곡선을 C_1 이라 하자.

$\int_{c+c_1} x\,dy = \text{Area}(\text{Int}(C+C_1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

($C+C_1$은 폐곡선이므로 $\text{Int}(C+C_1)$을 생각할 수 있고 그 영역은 D 이다.)

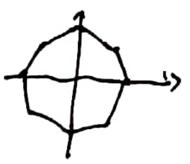
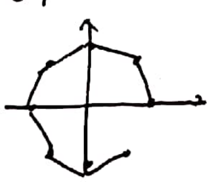
$\int_{c_1} x\,dy = \int_{c_1} \frac{\sqrt{2}}{2}dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1.$

$\therefore \int_c x\,dy = \int_{c+c_1} x\,dy - \int_{c_1} x\,dy = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.$

(+12)

$\therefore$ 주어진 선적분 $= \underline{\frac{3\pi}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}$

<채점기준>

- 주어진 곡선 C를 잘못 본 경우. (단, C를 풀기위해 정의하는 C_1은 무엇이든 상관없음.)
  - C를  ,  등 정팔각형 내에서 잘못 보고 계산한 경우, 사소한 실수로 보고, 잘못 본 곡선 하에서 답이 맞으면 ①에서 +4점, ②에서 +6점 부여. 답 틀리면 부분점수 부여 X.

(ex.) C를  로 보고 (준식) $= \int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + \int_c x\,dy = 0 + 2\sqrt{2}$ 로 쓴 경우 ①에서 0점, ②에서 6점

- C를 심하게 잘못봐서 정팔각형을 벗어난 경우 0점. (ex.  원의 일부)

  ex.  원 전체..

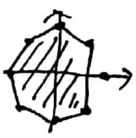
- C를 제대로 본경우.

  - ① 각원소벡터장 적분

    > * 주어진 영역이 원점을 포함한다면 원점에서 각원소벡터장이 정의 안되므로 그린정리 쓸 수 없음
    > * $\arctan\frac{y}{x}$는 $x=0$ 인점에서 정의 안됨

    - +8점 : $\frac{3\pi}{2}$로 답이 나오는경우
    - +4점 : 각원소벡터장에 그린정리를 적용하거나 (rot ω = 0) 잠재함수가 있다고 잘못 주장하는 경우 ($\arctan\frac{y}{x}$ 등..) → $\frac{3\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2} \pm 2\pi$ 로 답을 얻었을때.
    - 0점 : $\frac{3\pi}{2}$와 무관한 값이 나오는 경우.
      폐곡선이 아닌 곡선에 그린정리를 적용해서 0이라고 주장한 경우...

  - ② $\int_C x\,dy$ 적분.

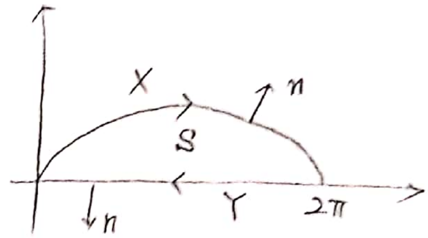
    - +12점 : 답이 옳게 나온경우.
    - +6점 : *그린정리를 사용하여 영역의 넓이를 구해야 한다는 사실까지는 확인했으나 영역의 넓이를 계산하는과정이 틀린경우.
      (ex.  의 내부 넓이 $=2\sqrt{2}$,  의 내부 넓이 $=2\sqrt{2}$ ... 등)
      * $\int_C x\,dy = \int_{C+C_1} x\,dy - \int_{C_1} x\,dy$ ($C+C_1$ 폐곡선) 으로 표현했지만 $\int_{C+C_1} x\,dy$, $\int_{C_1} x\,dy$ 중 하나만 맞은 경우

※ $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)dy = \iint_{int(C)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dV_2$

...와 같이 한꺼번에 그린 정리를 쓴 경우도 ①, ② 나눠서 채점

#5. $X(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$

$Y(t) = (2\pi - t,\ 0) \quad (0 \le t \le 2\pi).$



두 곡선 X, Y로 둘러싸인 영역을 S라 하자.

S와 그 경계에 대하여 발산정리를 적용하면,

$$\iint_S \operatorname{div} F \, dV_2 = \int_X F \cdot n \, ds + \int_Y F \cdot n \, ds$$

+10

(n은 S로부터 빠져나오는 방향의 법선벡터)

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x - x^2 + \sin(y^2+1)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\frac{x}{2} - y + 2xy\right)$$

$$= (1 - 2x) + (-1 + 2x)$$

$$= 0.$$

+5

$$\therefore \int_X F \cdot n \, ds = \iint_S \operatorname{div} F \, dV_2 - \int_Y F \cdot n \, ds$$

$$= -\int_Y F \cdot n \, ds$$

$$= -\int_Y \left(x - x^2 + \sin(y^2+1),\ \sin\frac{x}{2} - y + 2xy\right) \cdot (0, -1) \, ds$$

$$= -\int_0^{2\pi} -\sin\frac{2\pi - t}{2} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} \, dt$$

$$= \left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

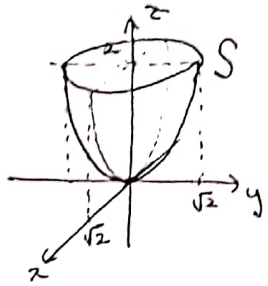
$$= 4.$$

+5

※ 발산정리를 사용하는 부분에서 법선벡터의 방향 언급이 없거나 사소한 부호 실수 등을 한 경우 5점만 부여

※ 정답은 올바른 방법으로 구한 경우에만 점수 부여

#6.



주어진 회전면을 매개화하면

$$X(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2) \quad (0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi).$$

이때 $X_r(r,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2r)$,

$X_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$,

$|X_r\times X_\theta| = |(-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\sin\theta,\ r)| = r\sqrt{4r^2+1}$.

∴ (회전면의 넓이) $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta$ +5 — Ⓐ

$= 2\pi\cdot\int_1^9 \sqrt{u}\ \frac{1}{8}du \quad \begin{pmatrix} 4r^2+1=u \\ 8r\,dr=du \end{pmatrix}$.

$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{13}{3}\pi$ +5 — Ⓑ

주어진 회전면 S의 중심을 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$라 하자. 대칭성에 의해 $\bar{x}=\bar{y}=0$이다. +5 — Ⓒ

한편 $\iint_S z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\cdot r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta$

$= 2\pi\int_1^9 \frac{u-1}{4}\sqrt{u}\ \frac{1}{8}du \quad \begin{pmatrix} 4r^2+1=u \\ 8r\,dr=du \end{pmatrix}$

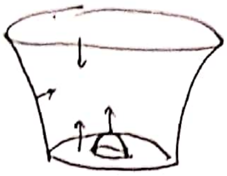
$= \frac{\pi}{16}\left(\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^9 - \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9\right) = \frac{149}{30}\pi$ +5 — Ⓓ

이므로 $\bar{z} = \frac{1}{(\text{S의 넓이})}\iint_S z\,dS = \frac{149\pi/30}{13\pi/3} = \frac{149}{130}$ +5 — Ⓔ

∴ 넓이 $= \frac{13}{3}\pi$, 중심 $= \left(0, 0, \frac{149}{130}\right)$

* Ⓐ의 5점은 넓이를 구하는 식에 대한 점수로 적분범위와 피적분 함수까지 맞게 구했을 때 부여. (가령, $\iint_S 1\,dS$ 만 썼을 시 0점)
* Ⓔ의 5점은 Ⓑ와 Ⓓ의 값을 모두 맞게 구했을 때만 부여.
가령 Ⓑ의 넓이 계산은 틀렸지만 $\bar{z}$ 계산은 (구한 넓이와 일관되게) 바르게 한 경우 Ⓓ의 5점 부여 (Ⓔ는 0점).

※7 답 1



옆면 $S = \{ x^2+y^2-z^2=1,\ 0 \le z \le 1 \}$

윗면 $\{ x^2+y^2 \le 2,\ z=1 \} = S_1$

아래면 $\{ \epsilon \le x^2+y^2 \le 1,\ z=0 \} = S_2$

아래의 윗구면 $\{ x^2+y^2+z^2 \le \epsilon^2,\ z \ge 0 \} = S_3$ $(0 < \epsilon < 1)$

으로 둘러 싸인 영역 R 에 대해 발산정리를 쓰면 (향은 R 안쪽으로)

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} \vec{A}\, dV_3 = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

S_2 의 법선 벡터와 $\vec{A}$ 는 수직이므로, $\iint_{S_2} \vec{A}\, d\vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{A}\cdot dS = -\iint_{S_1} \vec{A}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_3} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$= \left(2\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right) - 2\pi = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

기준 (1) 발산정리를 사용하기 위한 영역을 경계가 원점을 포함하지 않도록 잘 정의 하여 발산정리를 맞게 사용하였을 때 +10

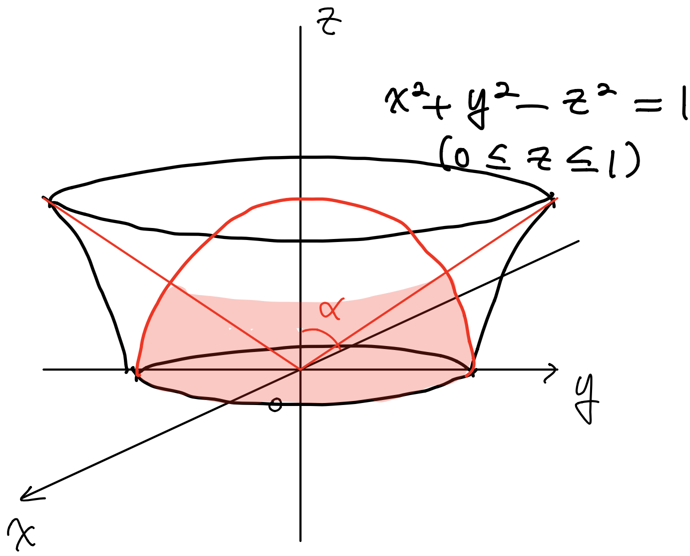
(2). 계산실수 없이 향을 맞춰 값을 각 구하면 +10

(1-1) 원점을 포함할 곡면으로 잡았을 경우, ($\vec{A}$의 S_1에 대한 면적분처럼) 경계를 이루는 곡면의 일부에 관해 면적분이 맞으면 +5점 그리고 (2)의 점수는 X. (따라서 5점)

(2-1) 향 실수로 인해 (답이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ 인 경우) 답의 부호만 차이나면 −5 (따라서 15점)

이외의 오답은 −10 (따라서 10점)

7번 (답 2)



$$\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \quad (\vec{n}\cdot\vec{k}\ge 0)$$

= − (곡면 S의 원점에서 바라 본 입체각)

= − (단위 구면 위에 맺히는 상의 넓이)

$$= -\int_0^{2\pi}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} 1^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

(채점 기준) 입체각의 정의를 알고, 입체각 벡터장의 flux를 단위 구면 위의 상의 넓이로 치환하여 잘 계산한 경우 +20.

답의 부호만 틀린 경우 −5

답만 틀린 경우 −10.

7번 (답 3)

곡면 S : $x^2+y^2-z^2=1$, $0\le z\le 1$

을 매개화하면 다음과 같다.

$$X(\rho,\theta) = (\sqrt{\rho^2+1}\cos\theta,\ \sqrt{\rho^2+1}\sin\theta,\ \rho)$$

$$0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$X_\rho\times X_\theta = (-\sqrt{\rho^2+1}\cos\theta,\ -\sqrt{\rho^2+1}\sin\theta,\ \rho)$$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$ 이므로, $d\vec{S} = (X_\rho\times X_\theta)\,d\rho\,d\theta$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{X(\rho,\theta)}{|X(\rho,\theta)|^3}\cdot(X_\rho\times X_\theta)\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

(채점 기준) 매개화를 제대로 한 경우 + 5.

답까지 맞게 계산한 경우 + 15.

이 때, 매개화에는 매개변수로의 표현과 법선벡터가 포함되며, 범위의 오류에 대해서는 채점 기준에 포함하지 않음.

8번. $\operatorname{div} F = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2$

$$\iint_S F \cdot n \, dS \underset{\text{발산 정리}}{=} \iiint_D \operatorname{div} F \, dV \quad \left(D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1 \} \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \quad (\text{구면 좌표계 치환})$$

$$= \frac{12}{5}\pi$$

* $\operatorname{div} F = 3(x^2+y^2+z^2)$ 을 맞게 구한 경우 : 10점

* 답이 $\frac{12}{5}\pi$ 로 올바르게 나와야 만점(20점)

* 그 외 부분점수 없음.

#9

$$\operatorname{div} F_1 = 2x\cos y + 2y\cos z + 1 + 6x^2$$

$$\operatorname{div} F_2 = 1 + 3x^2 + x\cos y + y\cos z$$

2+2

$$\iint_{\partial R} F_1 \cdot dS = \iiint_R \operatorname{div} F_1 \, dV_3$$

$$\iint_{\partial R} F_2 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div} F_2 \, dV_3$$

4

$$2\operatorname{div} F_2 - \operatorname{div} F_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(R) &= \iiint_R dV_3 \\
&= \iiint_R (2\operatorname{div} F_2 - \operatorname{div} F_1)\, dV_3 \\
&= 2\iiint_R \operatorname{div} F_2 \, dV_3 - \iiint_R \operatorname{div} F_1 \, dV_3 \\
&= 2\iint_{\partial R} F_2 \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\partial R} F_1 \, d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

6

$$= 2 \cdot 4 - 2 = 6$$

6

문제10 채점기준 (총 20점)

$D = \{(x,y,z) \mid x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2^2\}$ 라고 하면

스토크스 정리에 의해

$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$ ┘(8점)

$\mathrm{curl}\,\mathbb{F} = (1, 1, 1)$ 이고 ┘(4점)

D 의 향은 $\mathbb{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 이다. ┘(4점)

$$\Rightarrow \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iint_D (1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\, dV$$

$$= \sqrt{3} \iint_D 1\, dV$$

$$= \sqrt{3}\ \mathrm{area}(D)$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

답) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$ ┘(4점)

* $\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} + \iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = 0$ 으로 쓴 경우

$$\iint_S \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = -\iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

$$= -\iint_D \mathrm{curl}\,\mathbb{F} \cdot \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}_{\text{향이 반대방향이어야 한다.}}\, dV$$

* 다른 풀이로 푼 경우 비례도로 채점한다.