

단답형 문제를 제외한 모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오.  
(총점 300점)

〈 연습용 여백 〉

**문제 1.** [20점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점)  $f$ 는 원점에서 연속인지 판정하시오.
- (b) (5점) [단답형]  $\text{grad } f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) (10점)  $f$ 는 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

**문제 2.** [15점]  $f(x, y) = \sinh x \cos y$ 에 대해 물음에 답하시오.

- (a) (7점) [단답형] 원점에서  $f(x, y)$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (8점) 다음 극한값이 존재하는지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - x}{x^2 + y^2}$$

**문제 3.** [15점] [단답형] 함수  $f(x, y) = x^3 - 2x^2 + xy^2$ 의 임계점을 모두 구하고, 예시를 참고하여 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

예시 : 임계점 :  $(a, b)$  분류 : 안장점

**문제 4.** [25점] 점  $(0, 0, 1)$ 에서 다음 곡면까지의 거리를 구하시오.

$$z = x^2y - \frac{1}{4}$$

**문제 5.** [20점] [단답형] 좌표평면에서 정의된 일급함수  $f(x, y), g(x, y)$ 가 두 점  $P = (1, 2), Q = (1, 3)$ 에 대해 다음 표의 내용을 만족한다.

$X$	$f(X)$	$D_1f(X)$	$D_2f(X)$	$g(X)$	$D_1g(X)$	$D_2g(X)$
$P$	2	-3	1	3	-3	2
$Q$	3	-1	-2	4	2	1

이때, 점  $P$ 에서 함수  $F(x, y) = (x, f(x, g(x, y)))$ 의 야코비 행렬을 구하시오.

**문제 6.** [15점] [단답형] 곡선

$$X(t) = (2 + \cos(3t), 4, 1 + \sin(3t)), \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_X \frac{yz}{x^2 + z^2} dx - \frac{xz}{x^2 + z^2} dy - \frac{xy}{x^2 + z^2} dz$$

**문제 7.** [20점] 좌표평면의 점  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\pi, 0), (2\pi, 0), (\pi, \pi)$ 를 꼭짓점으로 가지는 사각형 영역  $R$ 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_R \sin \frac{\pi(x-y)}{x+y} dx dy$$

**문제 8.** [20점] 삼차원 좌표공간에서 두 곡면  $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ 과  $x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 9 = 0$  ( $z \leq 3$ )으로 둘러싸인 영역의 중심을 구하시오.

문제 9. [20점] 좌표평면에서 극좌표계로 주어진 곡선

$$r = 1 + \cos \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

를  $C$ 라 할 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\int_C (x + e^x \sin y) dx + (x + e^x \cos y) dy$$

문제 10. [20점] 좌표평면에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( xy^4 + \frac{2}{3}x^3y^2 \right) \mathbf{i} + x^4y \mathbf{j}$$

가 단위원판  $x^2 + y^2 \leq 1$ 의 경계를 빠져나가는 양(flux)을 구하시오.

문제 11. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 곡면

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad (z \geq 0)$$

을  $S$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 곡면  $S$ 의 넓이  $\text{Area}(S)$ 를 구하시오.

(b) (10점) 곡면  $S$ 의 중심을  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 라 할 때,  $\bar{z} \text{Area}(S)$ 를 구하시오.

문제 12. [25점] 좌표평면의 영역  $U$ 에서 정의된 일급함수  $z = f(x, y)$ 에 대하여,  $f$ 의 그래프로 주어진 삼차원 좌표공간의 곡면

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U$$

을  $S$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. 단, 곡면  $S$ 의 향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 을 만족하도록 정하며, 곡면  $S$ 는 점  $(0, 0, 0)$ 을 포함하지 않는다.

(a) (15점) 다음 면적분을  $U$ 에서의 적분으로 표현하시오.

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

단,  $\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 는 원점을 제외한 삼차원 좌표공간에서 정의된 입체각 벡터장이다.

(b) (10점) 좌표평면의 영역  $x^2 + y^2 \leq 4$ 를  $D$ 라 할 때, (a)를 이용하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 4}{(x^2 + y^2 + (4 - x^2 - y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

문제 13. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ 와 곡면

$$S: z = xe^y, \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$$

에 대하여,  $\mathbf{F}$ 가  $S$ 를 빠져나가는 양(flux)을 구하시오. 단,  $S$ 를 빠져나가는 방향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \leq 0$ 을 만족하도록 정한다.

문제 14. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^z \sin y \mathbf{i} + \sqrt{x^8 + 2} \cos z \mathbf{j} + (x^2 + y^2 + 3) \mathbf{k}$$

와 곡면

$$S: z = (1 - x^2 - y^2)e^{1-x^2-3y^2}, \quad (z \geq 0)$$

에 대하여,  $\mathbf{F}$ 가 곡면  $S$ 를 빠져나가는 양(flux)을 구하시오. 단,  $S$ 를 빠져나가는 방향은  $\mathbf{n}$ 은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 을 만족하도록 정한다.

문제 15. [25점] 곡선

$$C(t) = (\cos t, \sin t, \sin(2t)), \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (e^x + y^3) dx + (\cos y + z^2) dy + (x + \sin z) dz$$