2023년 2학기 수학2

제10장 다변수함수

2023년 8월 24일

차 례

차 례 1
1 그래프와 등위면 1
2 연속함수 3
3 방향미분과 편미분 4
4 미분가능함수 6
5 연쇄법칙 9
6 기울기벡터와 등위면 10

1 그래프와 등위면

다변수 함수 : 다변수함수란

$$f(x,y) = xy \ : \ \begin{cases} \text{2변수 함수} \\ \text{정의역 : } \mathbb{R}^2 \end{cases} , \qquad f(x,y,z) = e^{x+y} + \ln z \ : \ \begin{cases} \text{3변수 함수} \\ \text{정의역 : } \mathbb{R}^3 \text{ 에서 } z>0 \text{ 인 부분.} \end{cases}$$

와 같이 실수인 변수가 여러 개이고 실수를 함수값으로 갖는 함수이다. 함수값이 실수라는 점을 강조해서 다변수 실함수 라고도 부른다. 정의역은 $\mathbb{R}^n$ 의 부분집합이다.

Example.

- $f(t) = t^2 + i\sin t$: 실변수 복소함수.
  $F(x,y) = \big(xy, x+y, \sin(x^2+y)\big)$: 다변수 벡터함수.
  $f(z) = z^2 \sin z \ (z \in \mathbb{C})$: 복소변수 복소함수 (줄여서 그냥 '복소함수' 라고 한다.)
- $f(x,y) = \sin xy$: 다변수 실함수. (2변수 실함수, 정의역은 $\mathbb{R}^2$ 전체이다.)
- $f(x,y,z) = \ln x \ln y \ln z$: 다변수 실함수. (3변수 실함수, 정의역은 $\mathbb{R}^3$ 의 일부이다.)

정의 1.1. 그래프(graph) : 다변수 실함수 $f : U(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 가 있다. 함수 f 의 그래프 는 $\text{graph}(f)$ 라고 표시하고

$$\text{graph}(f) = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

로 정의한다.

Example.

- $f(x) = \sin x$: 익히 보던것이다.
- $f(x,y) = -x-y$: $f(x,y) = z$ 라 하면

$$\text{graph}(f) = \{(x,y,-x-y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x-y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

- $f(x,y) = ax + by + c$ 를 2변수 일차함수 또는 그냥 일차함수라 한다. 그래프는 평면이다.
- $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ 를 n변수 일차함수 또는 그냥 일차함수라 한다. 그래프는 초평면이다.
- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$
- $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

등위면 다변수 함수 f 의 c-등위면 $f^{-1}(c)$는 다음과 같이 정의한다.

$$f^{-1}(c) := \{\boldsymbol{x} \in U \subset \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

- 그래프는 $\mathbb{R}^{n+1}$ 의 초곡면이고 등위면은 $\mathbb{R}^n$ 의 초곡면이다.
- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$
- $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

등위면(또는 등위선)을 그릴수 있다면 그래프의 모양을 짐작하는데 도움이 될 수 있다. 또한 단면을 그려보아도 도움이 될 수 있다. '도움이 될 수 있다' 라고 말한 이유는 그래프를 그리는 일반적인 방법은 없다는 뜻이다. 현대에선 컴퓨터가 그려주지만 컴퓨터가 없던 시절에 그래프의 모양을 알아내는 일은 케바케로 작업하는 쉽지 않은 일이었다.

일차함수의 그래프와 기울기벡터

- 다음과 같은 함수를 일차함수라 한다.

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b. \quad (\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n),\ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n))$$

여기에서 벡터 $\boldsymbol{a}$를 기울기벡터라 한다. 기호로 다음과 같이 표시한다.

$$\boldsymbol{a} = \nabla f \quad \text{또는} \quad \boldsymbol{a} = \mathrm{grad} f.$$

(보기) 기울기 벡터가 (a, b, c) 이고 $f(1, 2, 3) = 4$ 인 일차함수는?

(답) $f(x, y, z) = a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) + 4.$

- 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에서 a를 기울기라 한다. 그 의미는 변수 x에 대한 함수값의 변화율이다.

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t} = a.$$

- 2변수 일차함수 $f(x, y) = ax + by + c$ 에서 벡터 (a, b) 를 일차함수 f 의 기울기벡터(gradient vector)라 한다. 기울기벡터의 성분 a, b 는 각각 변수 x, y에 대한 함수값의 변화율임을 쉽게 확인할 수 있다:

$$\frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = a, \quad \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t} = b.$$

- 기울기 벡터의 기하적 의미는 무엇일까?

  (답) 2변수 일차함수를 생각해 보자. 이 일차함수의 그래프는 경사면이고 기울기 벡터의 방향은 경사면을 가장 가파르게 올라가는 방향을 의미하고 그 크기는 가장 가파른 방향으로의 기울기를 의미한다. 이 사실에 대한 직관적 관찰은 스스로 해 보기로 하자. 나름 꼼꼼한 증명은 잠시후에...

정의 1.2. 방향 변화율 : 일차함수 $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b$의 $\boldsymbol{v}$-방향 변화율 $D_{\boldsymbol{v}} f$는

$$D_{\boldsymbol{v}} f := \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

로 정의된다. (주어진 일차함수에 대하여 이 값은 $\boldsymbol{x}$와 0 아닌 실수 t에 무관하다. 즉, $\boldsymbol{v}$ 에만 의존한다.)

다음에 기술되는 사실들은 상당히 중요한 의미를 갖는다.

- (p415의 정리 1.3.2) 일차함수 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b$ 에 대하여

$$D_{\boldsymbol{v}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}.$$

  (증명)

$$D_{\boldsymbol{v}} f = \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) + b - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b)}{t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}.$$

- $D_{k\boldsymbol{v}} f = k D_{\boldsymbol{v}} f$ and $D_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}} f = D_{\boldsymbol{v}} f + D_{\boldsymbol{w}} f.$

- 함수값이 가장 빠르게 증가하는 방향은 그래디언트 방향이고 그래디언트 벡터의 크기가 그 방향으로의 함수값의 증가율이다.

  (증명) 먼저 $\nabla f = \boldsymbol{0}$ 일때 그래프는 horizontal 하므로 더 따져볼 필요가 없다.

  그러하지 않은 경우.

  단위벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 대하여 그 방향 변화율은 $D_{\boldsymbol{v}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{v} = |\nabla f||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ 이고 이 것은 $\theta = 0$ 일 때, 최대값 $|\nabla f|$를 갖는다.

- 그래디언트 벡터는 등위면에 수직이다.

2 연속함수

3 방향미분과 편미분

미분 계수(Differential coefficient) 1변수 함수 $f(x)$ 의 점 $x = p$ 에서의 미분계수는 잘 아시다시피 변수 x에 대한 함수값의 순간변화율이다.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+t)-f(p)}{t}.$$

편미분 계수(Partial Differential coefficient) 2변수 함수 $f(x,y)$에 대해, 점 $(x,y) = (a,b)$ 에서의 각 각의 변수에 대한 순간변화율인 두 개의 값을 고려해 볼 수 있다. 이것들을 편미분계수(Partial Differential coordinate)라 한다. 물론 극한이 존재해야 편미분계수가 있는것이다.

- 첫번째 편미분계수, x에 대한 편미분계수, x로 미분한 미분계수 :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ := \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}$$

  이 극한을 잘 보면 y-좌표는 b로 고정시켜놓고 x-좌표만 a 근방에서 변화시키며 순간변화율을 구하는것이다.

- 두번째 편미분계수, y에 대한 편미분계수, y로 미분한 미분계수 :

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \ := \lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}$$

- 표현법은 다양하다

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \ = \ \frac{\partial}{\partial x}f(a,b) \ = \ \frac{\partial}{\partial x}|_{(a,b)}f \ = \ D_1 f(a,b) \ = \ (D_1 f)(a,b) \ = \ f_x(a,b)$$

- 변수가 많은 경우에도 똑같이 정의한다 : $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \ := \lim_{t\to 0}\frac{f(a,b,c+t)-f(a,b,c)}{t}$

편도함수(Partial Derivative) 2변수 함수 $f(x,y)$ 의 편도함수는 두 개가 있는데 다음과 같이 정의한다. 물론 극한이 존재해야 편미분계수가 있는것이다.

- 첫번째 편도함수, x에 대한 편도함수, x로 미분한 도함수 :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ := \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}$$

  이 극한을 잘 보면 y는 고정시켜놓고 x-좌표만 변화시키며 순간변화율을 구하는것이다. 이것은 x와 y의 함수이다. y는 고정시켰는데 y에도 의존하는 함수라고? 그렇다. 무리가 없다.

- 표현법은 다양하다

  $$\frac{\partial f}{\partial x} \ = \ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \ = \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ = \ \frac{\partial}{\partial x}f \ = \ D_1 f(x,y) \ = \ f_x(x,y) \ = \ f_x$$

- 변수가 많은 경우에도 똑같이 정의한다 : $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \ := \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y,z+t)-f(x,y,z)}{t}$

Example.

- $f(x,y) = x^2y$

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f(2+t,3)-f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(2+t)^2 3 - 2^2 3}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{3t^2+12t}{t} = 12.$$

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(x+t)^2y - x^2y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{yt^2+2xyt}{t} = 2xy.$$

- 그런데 편도함수를 구하는 극한을 보면 y는 변화하지 않으므로 상수취급하면 됨을 알 수 있다. 그러므로 우리가 알고 있는 도함수 공식을 적용하면 된다.

  $$\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial(\sin xy^2 + e^{\cos xy})}{\partial y} = \cos xy^2(2xy) + e^{\cos xy}(-\sin xy)x.$$

- 그런데 함수가 조각적으로 정의 되어 있을때 경계점에선 공식을 사용하면 안된다. 미분계수의 정의에 따라 계산해야 한다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\{(0+t)+0\}^2}{\sqrt{(0+t)^2+0^2}}\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{|t|t}$$

  좌우극한이 달라서 $(0,0)$에서 첫번째 편미분계수는 존재하지 않는다.

  이 함수의 경우, $(0,0)$에서 두번째 편미분계수도 존재하지 않음을 관찰하기는 어렵지 않다.

- 편미분 계수는 기하적으로 어떤 의미가 있을까?

  (답)제한된 함수의 그래프에서 접선의 기울기이다. 또는, 각 변수에 대한 순간변화율이다.

방향미분계수, 방향도함수(directional differential coefficient, directional derivative) 편미분계수가 좌표축에 평행한 방향으로 움직일 때의 순간변화율이라면 방향미분계수는 주어진 방향으로 움직일 때의 순간변화율이다.

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P) := \lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\boldsymbol{v})-f(P)}{t}.$$

Example.

- $f(x,y) = x^2y$, $P = (4,5)$, $\boldsymbol{v} = (2,3)$

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\boldsymbol{v})-f(P)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(4+2t,5+3t)-f(4,5)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(4+2t)^2(5+3t)-(4^2 5)}{t}$$

- 극한계산을 일일이 하고 싶지 않다. 편미분계수나 편도함수를 구할 때 처럼 쓱싹 하는 방법이 있지 않을까? 일변수 함수에 대해선 기울기 벡터와 방향백터의 내적이었는데 말이지...

기울기 벡터, 그래디언트 벡터 (gradient vector) 그래디언트 벡터의 정의는 다음과 같다. 다변수 함수 f에 대해,

$$f'(p) = \text{grad} f(P) := (D_1f(P),\ldots,D_nf(P)).$$

각 변수에 대한 순간변화율(편미분계수)을 나열한 벡터이다. 당연하게도, 이 값은 점 P에 의존한다.

- 그래디언트는 다르게도 표시한다.

$$\text{grad} f = \nabla f = f'.$$ [1]

  그리고 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 으로 쓰고 기억하면 좋다.

  grad와 ∇ 중에 어느기호가 더 좋을까? 답은 취존이다. 대부분의 물리책과 공학책에선 ∇ 을 사용한다.

  그리고 나는 ∇ 가 더 좋다.

  그리고 영문 wikipedia에서 'del'을 꼭 검색해서 함 구경이나 하기 바란다 ㅋㅋ.

- (Example) $f(x,y) = x^2y$, $P = (4,5)$ 일 때 점 P에서의 그래디언트 벡터를 구하시오 : 편미분계수를 모두 구하면 되는데 편미분계수는 편도함수를 구할 수 있다면 그것들을 먼저 구하고 점 P를 대입하는것이 현명한 일이다.

$$D_1f = 2xy,\ D_2f = x^2 \quad \Rightarrow \quad D_1f(4,5) = 40,\ D_2f(4,5) = 16 \quad \Rightarrow \quad \text{grad} f(4,5) = (40,16)$$

- 기하적의미는? 그래프(곡면)에의 접평면이 존재 하는 경우, 그 접평면을 그래프로 하는 일차함수의 기울기 벡터이다.

  (주의)그래디언트 벡터는 정의역에 놓여진 화살표이다.

  그래디언트는 정의공간 $\mathbb{R}^n$ 속의 놓여져 있고 점 P를 시점으로 하는 벡터이다.

  접평면의 법벡터는 그래프가 그려지는 공간인 $\mathbb{R}^{n+1}$ 위의 벡터이다.

[1] 기호 ∇ 는 델del 또는 나블라nabla 라고 읽는다. 참고로 그리스문자 Δ 는 델타이다. 나블라는 고대 로마시대 영화에 나오는 옆구리에 끼고 연주하는 미니 하프라고 한다.

- (공식)

$$D_{\boldsymbol{v}} f(P) = \mathrm{grad} f(P) \cdot \boldsymbol{v}$$

(잘 외우도록)

위 공식은 그래프의 접평면이 존재하는 함수에 대하여 성립하는 식이고 접평면을 고려하면 직관적으로 납득이 된다. 접평면이 존재한다는것은 그래프가 매끈한 곡면이라는 말과 같다. 이와 관련된 주제는 다음절에서 다룬다. 위 공식의 증명 또한 다음절에서 한다.

기울기벡터장, 그래디언트벡터장 (gradient vector field) 그래디언트 벡터장이란 그래디언트 벡터 $\nabla f(P)$와 같이 점 P를 특정하지 않는것을 뜻한다.

$$\nabla f(x, y, z) = \mathrm{grad} f(x, y, z) := (D_1 f(x, y, z), D_2 f(x, y, z), D_2 f(x, y, z))$$

각 성분을 다변수 함수로 가지는 벡터함수이다.
왜 벡터장인가?
그래디언트벡터 $\nabla f(x, y, z)$는 정의역 상의 점을 시점으로 하는 화살표(벡터)로 보면 된다. 정의역상의 점을 특정하지 않는다면 벡터들이 막 널려 있는 것이니까 field를 갖다 붙였다.

Example.

- $f(x, y) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \nabla f = (2xy, x^2)$ 이다
- (p431의 보기) $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla f = 2\boldsymbol{x}$
- $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = \dfrac{(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$ (단순작업이니 각자 꼭 해볼것!)
- 연습문제 제10장 3절의 문제 4번 5번 6번 7번은 중요하므로 꼭 풀어 볼것.

4 미분가능함수

일변수 함수 $f(x)$의 그래프 $y = f(x)$를 생각하자.
이 곡선위의 어떤 점 $(p, f(p))$ 에서의 non-vertical 접선이란 무엇일까?
일단, 점 $(p, f(p))$를 지나는 non-vertical 직선의 식은

$$y = a(x - p) + f(p)\ ,\ a \in \mathbb{R}$$

이다. 이 직선이 그래프에의 접선이라는 말은 다음 성질을 만족하는 것을 의미한다.

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \{a(x - p) + f(p)\}}{x - p} = 0.$$

즉 접선이란 그래프에 한 없이 가까운 직선을 의미하고 접선은 존재할 수도 있고 존재 하지도 않을수도 있다. 위 식이 성립한다면 다음식이 성립하는것은 쉽게 관찰할 수 있다.

$$a = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p).$$

즉, 접선이 존재한다면 유일하고 접선의 존재성은 미분계수 $f'(p)$의 존재성과 동치이다. 직관에 호소하여, 그래프위의 모든점에서 접선이 존재한다면 그 그래프는 매끈하다. 그래서 우리는 고등학교 때 아래의 말들이 다 같은 말이라고 배웠다.
미분가능 $\Leftrightarrow$ 그래프가 매끈 $\Leftrightarrow$ 그래프의 접선이 존재

다변수 함수의 경우에도, 그래프 $z = f(\boldsymbol{X})$ 위의 점 $\boldsymbol{X} = P$ 에서의 접평면의 식이 $z = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{X} - P) + f(P)$ 라는 것은 다음식을 만족한다는 말이다.

$$\lim_{\boldsymbol{X} \to P} \frac{f(\boldsymbol{X}) - f(P) - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{X} - P)}{|\boldsymbol{X} - P|} = 0.$$

다변수 함수가 미분가능이라는 것은 그래프위의 접평면이 존재한다는 뜻으로 정의한다. 직관적으로, 이 말은 그래프가 매끈하다는 것으로 이해해도 된다.

정의 4.1. (다변수) 함수 f가 점 P에서 미분가능 $\Leftrightarrow$ $\lim_{X\to P} \frac{f(X)-f(P)-\boldsymbol{a}\cdot(X-P)}{|X-P|} = 0$ 가 되는 벡터 $\boldsymbol{a}$ 가 존재.

위의 미분가능의 정의에서 그러한벡터 $\boldsymbol{a}$가 존재한다면 그것은 과연 무엇일까?
접평면의 기울기 벡터를 직관적으로 떠올려 보면 이 질문의 답을 할 수가 있다. 그래디언트벡터 $\nabla f(P)$ 가 답이다. 다음 정리에서 꼼꼼하게 기술하였다.

정리 4.2. 함수 f가 P에서 미분가능
$\Rightarrow$ (1) P에서 연속
(2) P에서 모든 방향미분계수를 가지고 $D_{\boldsymbol{v}} f(P) = \nabla f(P)\cdot \boldsymbol{v}$
(3) $\boldsymbol{a} = \nabla f(P)$.

(증명). (1) 당연하다.
(2),(3) 주어진 non-zero 벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 대하여 $\boldsymbol{X} = P + t\boldsymbol{v}$로 놓자. 그러면 $\boldsymbol{X} \to P$ 라는 말은 $t \to 0$ 라는 말과 같으므로 다음식이 성립한다.

$$\lim_{X\to P} \frac{f(X)-f(P)-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{X}-P)}{|\boldsymbol{X}-P|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v})-f(P)-\boldsymbol{a}\cdot(t\boldsymbol{v})}{|t\boldsymbol{v}|} = 0.$$

양변에 $\pm|\boldsymbol{v}|$를 곱하면

$$\lim_{t\to 0-,0+} \frac{f(P+t\boldsymbol{v})-f(P)-\boldsymbol{a}\cdot(t\boldsymbol{v})}{t} = 0.$$

즉,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v})-f(P)}{t} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}.$$

즉,

$$D_{\boldsymbol{v}} f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}.$$

한편 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$로 두면 $D_{\boldsymbol{e}_i} f(P) = D_i f(P)$ 이므로

$$D_i f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i = \text{벡터 } \boldsymbol{a} \text{ 의 } i\text{번째 성분}$$

이 되어 $\boldsymbol{a} = \nabla f(P)$ 임을 안다. □

위 정리로 부터, 미분가능함수에 대하여 다음 사실이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$D_{a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}} f(P) = aD_{\boldsymbol{v}} f(P) + bD_{\boldsymbol{w}} f(P).$$

미분가능한 함수의 gradient 벡터의 성질
일단 그래디언트 벡터는 정의역에 놓여진 화살표임을 잊지말자.

- (일차근사) 정의역 위의 점 P 근방에서 함수 f에 가장 가까운 일차함수의 기울기 벡터이다.

  $$f(\boldsymbol{X}) \approx \operatorname{grad} f(P)\cdot(\boldsymbol{X}-P) + f(P) = \nabla f(P)\cdot(\boldsymbol{X}-P) + f(P) = f'(P)\cdot(\boldsymbol{X}-P) + f(P).$$

  (**그래디언트는 가로, 위치벡터는 세로**) 표현의 형식은 생각 이상으로 중요하다. 여러 교과서에서 위치벡터를 가로로 쓰는 이유는 벡터를 세로로 쓰면 지면을 많이 잡아먹기 때문이다.
  그래디언트는 가로 벡터로, 위치 벡터는 세로로 표현하는것이 좋다. 그러면 윗 식에서 내적기호 dot을 쓰지 않아도 된다. 내적기호 dot의 역할을 행렬곱이 하는것이다. 물론, 단지 dot을 쓸 필요가 없다는것이

주된 잇점은 아니다.

$$(a,b,c)\cdot(d,e,f)=(a,b,c)\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$$

$$f(X)\approx \operatorname{grad}f(P)(X-P)+f(P)=\nabla f(P)(X-P)+f(P)=f'(P)(X-P)+f(P).$$

- 함수가 가장 빠르게 증가 하는 방향이다. 그리고 그 크기는 그 방향으로의 단위벡터에 대한 순간변화율이다.

  (증명) 임의의 단위벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P)=\nabla f(P)\cdot\boldsymbol{v}=|\nabla f(P)||\boldsymbol{v}|\cos\theta\le|\nabla f(P)|.$$

- 등위면에 수직이다. (이 사실 또한 직관적으로 납득이 된다. 증명은 잠시 뒤에 한다.)
- 등위면의 밀도가 높은 지점에서 그래디언트 벡터의 크기는 크다.

세 가지 질문

질문1 일변수함수의 경우, 접선이 존재한다는 말은 미분계수가 존재한다는 말과 같다. 그렇다면 혹시, 다변수함수의 경우에 다음과 같은 명제가 성립할까?

어떤 점에서 모든 편미분계수가 존재 $\Rightarrow$ 그 점에서 미분가능?

위의 명제는 거짓이다. 예를 들어

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x\le 0\\ y & \text{if } x>0.\end{cases}$$

이 함수는 $(0,0)$에서 편미분계수가 둘 다 존재한다. 하지만 그래프위의 점 $(0,0,0)$에서 그래프가 찢어져 있다. 접평면이 존재하지 않는다. 이 예는 아주 단순무식한 예이다. 원점에서 두 개의 편미분계수는 존재하지만 다른 방향의 방향미분계수는 존재하지 않는다.

질문2 다음 명제는 참일까?

모든 점에서 모든 방향미분계수가 존재 $\Rightarrow$ 미분가능?

위의 명제 또한 거짓이다. 예를 들어

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\ne(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

일 때,

1. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

2. $D_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}f(0,0)=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$

3. $\nabla f(0,0)\cdot(a,b)=a.$

질문3 다음 명제는 참일까?

모든 방향에 대해 $D_{\boldsymbol{v}}f(P)=\nabla f(P)\cdot\boldsymbol{v}$ $\Rightarrow$ 미분가능?

이 명제 또한 놀랍게도 거짓이다. 반례는 어딘가 있겠지만 찾아보지 않았다.

미분가능의 필요조건(예를들어, $D_{\mathbf{v}}f(P) = \nabla f(P)\cdot \mathbf{v}$)은 살펴본 바 있다. 위에서 살펴 보았듯이 모든 방향미분계수의 존재성은 미분가능의 충분조건이 아니다. 그렇다면 미분가능의 적당한 충분조건이 있을까? 그 해답은 다음 정리이다.

일급함수:(정의)모든 편도함수가 존재하고 그 편도함수들이 모두 연속인 함수

정리 4.3. (*p441*) 일급 $\Rightarrow$ 미분가능.

증명은 조금(?) 어렵다. 교과서의 부록에 증명이 있고 나는 생략할 것이며 여러분은 굳이 읽지 않아도 행복하게 살 수 있다. 그리고 위 정리의 역은 성립하지 않는다. 반례는 오묘하다. 이 또한 굳이 알려 하지 말자.

5 연쇄법칙

(1변수 함수의 연쇄법칙)

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \ : \ g(f(t)) \quad \Rightarrow \quad g(f(t))' = g'(f(t))f'(t) \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt}g(f(t)) = g'(f(t))f'(t).$$

(Recall) $\operatorname{grad} f = \nabla f = f'$

정리 5.1. (다변수 함수의 연쇄법칙)

$$I \xrightarrow{X} U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \ : \ f(X(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}f(X(t)) = f'(X(t))\cdot X'(t) = \operatorname{grad} f(X(t))\cdot X'(t) = \{(\operatorname{grad} f)(X(t))\}\cdot X'(t).$$

(증명). 책의 증명이 깔끔하다. 하지만 부연설명을 하려면 길다. 나는 대충 설명 해 보고자 한다. 먼저 미분가능성에 의해, 작은 Δt 에 대해

$$f(X(t+\Delta t)) - f(X(t)) \approx f'(X(t))\cdot(X(t+\Delta t) - X(t))$$

이다. 양변을 크기가 작은 Δt 로 나누어도 근사식이 성립한다.(why?) 그리고 극한을 취하면 원하는 결과가 나온다.
다음과 같은 직관적인 설명 또한 가능하다.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(X(t+\Delta t)) - f(X(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(X(t) + X'(t)\Delta t) - f(X(t))}{\Delta t} = D_{X'(t)}f(X(t)) = \operatorname{grad} f(X(t))\cdot X'(t).$$

□

- $X(t) = (\cos t, \sin t)$ and $f(x,y) = x^2y$

$$X'(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad f' = \operatorname{grad} f = \nabla f = (2xy, x^2).$$

- 다른 표현으로 하면, $f(x(t), y(t))$가 있다고 할 때

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

-

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(-r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f \end{cases}$$

여기에서 $\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$ 와 $-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$ 를 **미분작용소 (differential operator)**라 부른다.

- 위 관계들을 다시 표현하면 (p447 연습문제1번)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{역행렬공식 기억나요?}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

6 기울기벡터와 등위면

앞에서 이야기 한 사실을 증명해 보자.

일급함수 f 에 대하여 $\nabla f(P)$ 는 등위면 $S := \{\boldsymbol{X} \in U \,|\, f(X) = f(P)\}$ 에 수직이다.

(증명). 등위면 S 위의 곡선으로서 점 P를 지나는 곡선 $\boldsymbol{X}(t)$ ($\boldsymbol{X}(0) = P$) 를 생각하자. 이 때, 합성함수 $f(\boldsymbol{X}(t))$ 는 상수 함수이다:

$$f(\boldsymbol{X}(t)) \equiv f(P).$$

양변을 t로 미분하면

$$f'(\boldsymbol{X}(t)) \cdot \boldsymbol{X}'(t) \equiv 0$$

가 되어 증명이 된다.(why?) □

- 지형도를 본 적이 있는가?
- 데카르트 곡선 $x^3 + y^3 = 3xy$ 위의 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선식을 구하라.
  (답) 이 곡선은 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 의 0-등위면이다.
  $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) \quad \Rightarrow \quad \nabla f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = c(1, 1)$. 그러므로 접선식은

$$(1, 1) \cdot \left\{(x, y) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\} = 0.$$

- 2차곡면 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 위의 점 (x_0, y_0, z_0) 에서의 접평면식.
  (답) $f(x, y, z) = ax^2+by^2+cz^2-1 \quad \Rightarrow \quad \nabla f = (2ax, 2by, 2cz) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 2(ax_0, by_0, cz_0)$.
  그러므로 접평면식은 $(ax_0, by_0, cz_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ 이다. 정리하면 다음식이 답이다.

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1.$$

- 점 $(2, 3, 4)$ 에서 원점을 향해 쏜 빛이 타원면 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$ 에 반사되어 나가는 방향을 구하라.
  (답) 1. 빛이 타원면과 만나는 점은 $P = \frac{1}{3}(2, 3, 4)$ 이다.

  2. $\nabla f(P) = \frac{2}{3}(1, 1, 1)$.

  3. $\boldsymbol{v} = (-2, -3, -4)$, $\boldsymbol{N} = (1, 1, 1)$ 이라 하면 $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - 2\,\dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N}}\boldsymbol{N} = (4, 3, 2)$.

- (타원의 많은 성질 중 제일 유명한것 : 타원의 한 초점에서 쏜 빛은 타원에 반사된후 다른 초점을 향해 간다.)

  (증명) $f(\boldsymbol{X}) = |\boldsymbol{X} - F_1| + |\boldsymbol{X} - F_2| - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \dfrac{\boldsymbol{X} - F_1}{|\boldsymbol{X} - F_1|} + \dfrac{\boldsymbol{X} - F_2}{|\boldsymbol{X} - F_2|}$ 가 되어 증명끝이다.(why?)

- (기본연습문제 6.0.7) 쌍곡선에 대해서도 비슷한(실은, 본질적으로 같은) 성질이 있다.