Quiz 4 (11월 28일 금 5, 6 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 벡터장
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
와 영역
$$R : \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1$$
에 대하여 그린정리가 성립함을 보이시오.

2. (7점) 곡면 $x^2 + y^2 - z = 0$ 을 평면 $z = 4$ 로 잘랐을 때 이 평면 아래에 있는 부분의 넓이를 구하시오.

3. (6점) 영역 D 는 $r = 1 + \cos\theta$ 의 내부와 $r = 1$ 의 외부의 교집합일때 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y + 2x, -xy^2)$에 대하여 다음을 구하시오.
$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$
(단, $\mathbf{n}$ 은 D 의 경계에서 D 외부로 향하는 단위법벡터장이다.)

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1. $M := \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $N := \dfrac{x}{x^2+y^2}$ 이라고 하자. 그러면 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 이다.
따라서 $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dV_2 = 0$ 이다. (3점)
한편 R 의 경계 C 는 반지름이 1 과 $\dfrac{1}{2}$ 인 두 개의 원 C_1, C_2 로 구성되어있다.(C_1, C_2 는 양의 방향으로 향이 주어져 있다.) 그러므로

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi - 2\pi = 0$$

이다. 따라서 그린정리가 성립한다. (7점)

2. $f(x,y) = x^2+y^2$ 으로 두면 $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$ 이 된다.
따라서 구하고자 하는 부분의 넓이 A 는

$$A = \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\ dxdy$$

이 된다. (3점)
치환적분을 이용하여 주어진 적분을 구하면 $\dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$이 된다. (7점)

3. div $\mathbf{F} = 2xy+2-2xy = 2$ 이므로, (3점) 발산정리에 의하여,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ ds = \iint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\ dV_2$$

$$= \iint_D 2\ dV_2$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1+\cos\theta} 2r\ drd\theta - 2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2\ d\theta - \pi$$

$$= 4+\frac{\pi}{2} \quad (6점)$$