

Quiz 4 (11월 27일 수 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 영역 $x^2 + y^2 \leq 1$ 중에서 1사분면 부분을 S 라 할 때, S 의 중심의 좌표 (\bar{x}, \bar{y}) 를 구하시오.
2. 곡면 $S : x^2 + y^2 + z^2 = z, \left(z \geq \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.
 - (a) (7점) 원점에 대한 곡면 S 의 입체각을 구하시오.
 - (b) (7점) 위치 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ 가 이 곡면을 빠져 나가는 양을 구하시오. (단, S 의 단위법벡터장 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이도록 주어져 있다.)

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

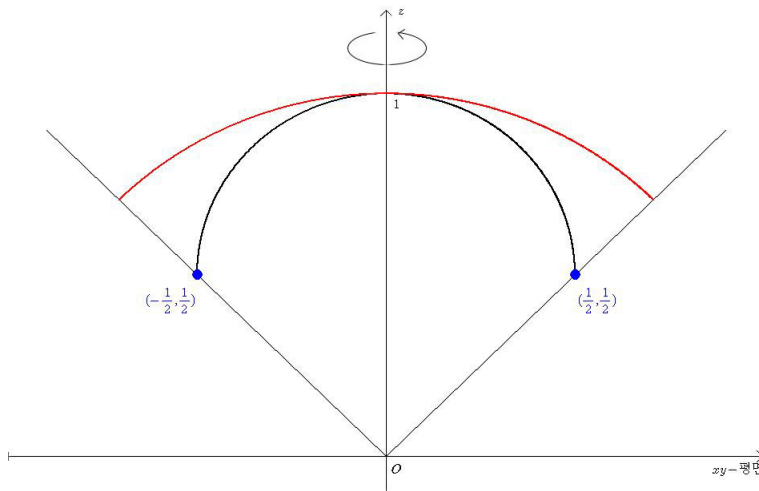
$$1. \iint_S x \, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos \theta \, r \, dr d\theta = \frac{1}{3} \text{ 이고,} \quad (2\text{점})$$

꼭면의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\bar{x} = \frac{4}{3\pi}$ 이다. (3점)

대칭성에 의해 $\bar{y} = \bar{x} = \frac{4}{3\pi}$ 이다. (3점)

* 대칭성을 이용하지 않고 직접 \bar{y} 를 계산한 경우, \bar{x} 와 동일한 기준으로 채점함.

2. (a) 원점에 대한 곡면 S 의 입체각
 $= [S \text{의 상이 원점을 중심으로 하는 단위 구면에 맺힌 넓이}]$ (2점)
 $= [\text{아래 그림의 빨간 곡선을 } z \text{축에 대해 회전시킨 곡면의 넓이}]$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi d\theta \quad (5\text{점})$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (7\text{점})$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad X(\varphi, \theta) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, 1 + \cos \varphi), \\
0 \leq \varphi &\leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi : \text{곡면 } S \text{ 의 매개화} \\
\Rightarrow dS &= \frac{1}{4} \sin \varphi d\varphi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (x, y, z) \cdot 2 \left(x, y, z - \frac{1}{2} \right) dS \\
&= 2 \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{2} \right) dS = \iint_S z dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \frac{1}{4} \sin \varphi d\varphi d\theta && (4\text{점}) \\
&= \frac{3\pi}{8} && (7\text{점})
\end{aligned}$$