2023년 2학기 수학2

제11장 최대최소문제와 고계미분

2023년 9월 12일

1 적분기호 속의 미분 (라이프니츠 적분 규칙 Leibniz integral rule)

미적분학 기본정리 Fundamental Theorem of calculus

$$\text{함수 } f \text{ 가 연속} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

(증명).

$$\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

구간 $[x, x+h]$에서 함수 f의 최소, 최대값을 m, M이라 하자. (최대최소값정리)

$$mh \le \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \le Mh \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \le M$$

Since both of m and M tend to $f(x)$ as h approaches to 0, the proof is completed. □

위 정리로 부터 다음 사실은 바로 나온다.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a), \quad \text{with } F' = f.$$

(증명).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F'(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + c.$$

양변에 $x = a$를 대입하면 $c = -F(a)$임을 안다. □

개선된 미적분학 기본정리

$$\text{함수 } f \text{ 가 연속, } a(x),\ b(x) \text{ 미분가능} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

(증명). Let $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 즉, $F'(x) = f(x)$. Then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{F(b(x)) - F(a(x))\} = F'(b(x))\,b'(x) - F'(a(x))\,a'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

□

라이프니츠 적분 규칙

$$\text{함수 } f \text{ 가 일급} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

즉, 피적분함수가 좋은 함수라면 정적분과 미분은 교환할 수 있다.

(증명). Let $F(x) := \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$. 구간 $[x, x+h]$ 에서 함수 f 에 평균값 정리를 사용하자.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{for some } c \in (x, x+h).$$

그러므로
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\mathrm{d}t.$$
함수 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 는 연속함수이므로, h 가 한 없이 작으면 $\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ 는 한 없이 작아진다. 그러므로
$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\mathrm{d}t\le(b-a)\epsilon\to 0.$$
이렇게 증명이 얼추 되었다. 얼추 되었다고 한 이유는 이 증명은 완벽하지 않기 때문이다. 위에서 h 가 한 없이 작으면 $\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ 는 한 없이 작아진다고 했는데 이 작아지는 정도가 x 와 t 값에 무관하게 작아져야 한다. 이것을 논증하려면 부록의 증명에 언급되었듯이 고른연속(uniformly continuous)라는 개념이 개입하여야 한다. 하지만 이에 대한 설명은 지금 하기 곤란하다. □

어떤 학생들은 다음과 같은 증명을 떠올렸을 수도 있다.

(증명). Let $F(x) := \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
$$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
□

두번째 증명의 문제점은 극한과 적분기호를 바꿀수 있느냐 하는것이다. 극한이 항상 적분기호를 넘어 들어갈 수 있는것은 아니다. 이 경우엔 가능하긴한데 그 사실을 설명하기 위해선 함수의 극한을 함수열의 극한으로 바꿔야 하고 고른 수렴(uniformly convergent)의 개념을 알아야 한다. 앓느니 차라리 죽고마는 방향으로 가는것이다. 라이프니츠 적분규칙을 다른말로 하면 lim과 $\int_a^b$ 를 바꿀수 있다는 말이다. 다시말해, 이 증명은 '그러니까 그렇다' 라고 말 한것에 불과하다 ㅎㅎ.

완벽하게 보여주진 못했지만 첫번째 증명이 손이 덜가는 좋은 증명이다.

정리해서 얘기하자면 우리가 라이프니츠 정리를 엄격하게 증명하진 않았지만 적당히 인정하고 외우자는 것이다. 17세기의 인물인 라이프니츠(1646.7.1-1716.11.14) 또한 증명을 엄격하게 하지 않았다는 것에 10000원을 건다.

개선된 라이프니츠 적분 규칙

$$\text{함수 } f \text{ 가 일급} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t=f(x,b(x))\,b'(x)-f(x,a(x))\,a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
이 공식의 우변에 있는 적분항은 좀 의외이다. 뜨문뜨문 생각하면 빼먹기 십상이다. 아래의 증명을 외우면 공식을 외우는데 도움이 될 듯 하다.

(증명). Let c be a constant and let
$$F(x,u)=\int_c^u f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
미적분학 기본정리와 라이프니츠 적분규칙에 의해
$$\frac{\partial}{\partial u}F(x,u)=f(x,u)\quad\text{and}\quad\frac{\partial}{\partial x}F(x,u)=\int_c^u\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
그러므로 다변수함수의 합성함수 미분법에 의해
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{u(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,u(x))\\&=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\\&=f(x,u(x))\,u'(x)+\int_c^{u(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Hence
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\int_c^{b(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_c^{a(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t\right\}\\&=f(x,b(x))\,b'(x)+\int_c^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t-f(x,a(x))\,a'(x)-\int_c^{a(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\\&=f(x,b(x))\,b'(x)-f(x,a(x))\,a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$\square$

혹시 이런 증명을 생각한 학생들도 있을수 있겠다.

(증명).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{u(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_c^{u(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{u(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_c^{u(x)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t + \int_{u(x)}^{u(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{u(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\int_c^{u(x)} \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{u(x)}^{u(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad \left(\text{적분의 평균값정리}, u(x)\le k\le u(x+h)\right) \\
&= \int_c^{u(x)} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}t + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{u(x+h)-u(x)\}f(x+h,k)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_c^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + u'(x)f(x,u(x)).
\end{aligned}$$

$\square$

이 증명 또한 극한을 적분의 안쪽으로 집어 넣는 짓을 아무 거리낌 없이 저질렀다. 제일 위에서 보여준 순서대로 하는것이 가장 죄책감이 덜한 증명이다.

Example

2 이계미분

이계미분과 고계미분

다변수 함수 f가 있다. 이 함수를 두번 편미분한 함수를 이계미분이라 한다. 예를 들어 f가 이변수 함수라면 이계미분은 D_1D_1f, D_1D_2f, D_2D_1f, D_2D_2f 네 개가 있다. 그리고 n변수 함수라면 n^2개의 이계미분이 있다. 함수를 더 여러번 편미분할 수도 있다. k번 편미분한 함수를 k계 편도함수라 말한다.물론 k계 편도함수는 n^k 개가 있다.

표현

$$D_1D_1f = {D_1}^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad D_1D_2D_3f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}, \quad D_1{D_2}^2D_3f = \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^2\partial z}$$

이급함수, k급함수, 무한급함수

이급함수란 모든 이계편도함수들이 존재하고 연속인 함수를 말한다.

헤세행렬

이계미분들을 나열하려면 아래와 같이 행렬의 형태로 나열 하는것이 좋겠다. 그리고 이 행렬을 f의 헤세 행렬

(*Hessian matrix*)이라 부르고 f'' 으로 표시한다.

$$f'' = \begin{bmatrix} D_1D_1f & D_1D_2f & \cdots & D_1D_nf \\ D_2D_1f & D_2D_2f & \cdots & D_2D_nf \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_nD_1f & D_nD_2f & \cdots & D_nD_nf \end{bmatrix}$$

예를들어,

$$f(x,y,z) = x^2 \sin yz \quad \Rightarrow \quad f' = (D_1f, D_2f, D_3f) = (2x \sin yz, x^2 z \cos yz, x^2 y \cos yz)$$

$$\Rightarrow \quad f'' = \begin{bmatrix} D_1D_1f & D_1D_2f & D_1D_3f \\ D_2D_1f & D_2D_2f & D_2D_3f \\ D_3D_1f & D_3D_2f & D_3D_3f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin yz & 2xz\cos yz & 2xy\cos yz \\ 2xz\cos yz & & \\ 2xy\cos yz & x^2\cos yz - x^2zy\sin yz & \end{bmatrix}$$

위 행렬은 대칭행렬임을 관찰할 수 있다. 아래에 기술된 편미분 교환법칙에 의해, 이것은 이급함수의 경우 일반적인 현상이다.

편미분교환법칙 (Euler)

정리 2.1. (*p473*)(편미분교환법칙) 함수 f가 이급이면 모든 i, j에 대해 $D_iD_jf = D_jD_if$ 이다.

따름정리 2.2. (편미분교환법칙) 함수 f가 k급이면 모든 k계 편도함수는 미분순서에 상관없이 같다.

방향미분작용소

함수 f가 일급 $\Rightarrow$ 미분가능 $\Rightarrow$ $D_{\boldsymbol{v}}f = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$ 임을 배웠다. $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ 이면

$$D_{\boldsymbol{v}}f = \nabla f \cdot \boldsymbol{v} = (D_1f, \dots, D_nf) \cdot (v_1, \dots, v_n) = v_1D_1f + \cdots + v_nD_nf.$$

여기에서 $D_{\boldsymbol{v}}$는 함수를 넣어서 함수가 나오는 작용소로서 미분작용소라고 한다. 미분작용소로서 다음과 같이 표시됨을 알 수 있다.

$$D_{\boldsymbol{v}} = v_1D_1 + \cdots + v_nD_n$$

함수 f가 이변수 이급이면

$$D_{(a,b)}{}^2 f = (aD_1 + bD_2)(aD_1f + bD_2f) = a^2D_1{}^2f + abD_1D_2f + baD_2D_1f + b^2D_2{}^2f = a^2D_1{}^2f + 2abD_1D_2f + b^2D_2{}^2f$$

이고 충분히 여러번 편미분할 수 있다면, 이항정리 또는 파스칼 삼각형 공식에 의해, 다음과 같은 등식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$D_{(a,b)}{}^2 f = (a^2D_1{}^2 + 2abD_1D_2 + b^2D_2{}^2)f$$

$$D_{(a,b)}{}^3 f = (a^3D_1{}^3 + 3a^2bD_1{}^2D_2 + 3ab^2D_1D_2{}^2 + b^3D_2{}^3)f$$

$$D_{(a,b)}{}^4 f = (a^4D_1{}^4 + 4a^3bD_1{}^3D_2 + 6a^2b^2D_1{}^2D_2{}^2 + 4ab^3D_1D_2{}^3 + b^4D_2{}^4)f$$

$$\vdots$$

$$D_{(a,b)}{}^k f = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(aD_1)^{k-i}(bD_2)^i f = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i D_1{}^{k-i}D_2{}^i f$$

합성함수를 여러번 미분하기와 방향미분작용소를 여러번 적용하기.

(아래의 식을 관찰하고 의미를 명확하게 하기 위해 괄호를 쳐 보아라.)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(P+t\boldsymbol{v}) &= D_{\boldsymbol{v}}f(P+t\boldsymbol{v})\\
\frac{d^2}{dt^2}f(P+t\boldsymbol{v}) &= D_{\boldsymbol{v}}{}^2 f(P+t\boldsymbol{v})\\
\frac{d^3}{dt^3}f(P+t\boldsymbol{v}) &= D_{\boldsymbol{v}}{}^3 f(P+t\boldsymbol{v})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(증명) 합성함수 미분법 $\frac{d}{dt}f(X(t)) = \operatorname{grad} f(X(t))\cdot X'(t)$ 을 떠올리자.

$$\begin{aligned}
(P+t\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{v} \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}f(P+t\boldsymbol{v}) = (\operatorname{grad} f)(P+t\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} = (D_{\boldsymbol{v}}f)(P+t\boldsymbol{v})\\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}f(P+t\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}\{(D_{\boldsymbol{v}}f)(P+t\boldsymbol{v})\} = (D_{\boldsymbol{v}}D_{\boldsymbol{v}}f)(P+t\boldsymbol{v}) = (D_{\boldsymbol{v}}{}^2 f)(P+t\boldsymbol{v})\\
&\Rightarrow \quad \cdots
\end{aligned}$$

자 그러면, 위의 빨간색 식에 $t=0$을 대입하면 다음과 같이 되는가?

$$\frac{d^2}{dt^2}f(P) = D_{\boldsymbol{v}}{}^2 f(P)$$

이건 말도 안된다. 맞는답은

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}f(P+t\boldsymbol{v})\right)(0) = D_{\boldsymbol{v}}{}^2 f(P).$$

3 테일러 전개와 근사값 이론

일차근사값

다변수함수 f의 점 P 근방에서의 일차근사함수는 다음과 같다는것은 이미 얘기한 바 있다. 즉, 점 P에 가까운 X에 대해 함수 f는 다음과 같은 일차근사값을 갖는다.

$$f(X) \approx f'(P)\cdot(X-P) + f(P).$$

이 때 크기가 작은 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대해 $X = P+\boldsymbol{v}$ 라는 말과 같고 $X-P=\boldsymbol{v}$, $f'(P)\cdot\boldsymbol{v} = D_{\boldsymbol{v}}f(P)$ 이므로

$$f(P+\boldsymbol{v}) \approx f(P) + D_{\boldsymbol{v}}f(P).$$

여기에서 우변을 $f(P+\boldsymbol{v})$의 일차근사값이라 부른다.

(p481의 보기를 각자 보시오. 꼭 보시오.)

일변수 함수의 평균값정리와 테일러 정리

$$\begin{aligned}
\text{평균값 정리} \;:\; & g(t) = g(0) + g'(t^*)t \text{ 가 되는 } t^* \text{ 가 } 0 \text{ 과 } t \text{ 사이에 존재.}\\
\text{테일러-라그랑주 정리} \;:\; & g(t) = g(0) + g'(0)t + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + \frac{g^{(k)}(t^*)}{k!}t^k\\
& \text{가 되는 } t^* \text{ 가 } 0 \text{ 과 } t \text{ 사이에 존재.}
\end{aligned}$$

다변수 함수의 테일러 정리

정리 3.1. (p482, 정리 3.0.3)

$$f(P+\boldsymbol{v}) = f(P) + D_{\boldsymbol{v}} f(P) + \frac{1}{2!}{D_{\boldsymbol{v}}}^2 f(P) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}{D_{\boldsymbol{v}}}^{k-1} f(P) + \frac{1}{k!}{D_{\boldsymbol{v}}}^k f(P+t^*\boldsymbol{v}).$$

가 되는 t^* 가 0 과 1 사이에 존재.

(증명). Let $g(t) = f(P+t\boldsymbol{v})$. Then

$$g(1) = g(0) + g'(0)1 + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}1^{k-1} + \frac{g^{(k)}(t^*)}{k!}1^k$$

그런데

$$g(1) = f(P+\boldsymbol{v}),\ g(0) = f(P),\ g'(0) = D_{\boldsymbol{v}} f(P),\ g''(0) = {D_{\boldsymbol{v}}}^2 f(P),\ \cdots,\ g^{(k)}(t^*) = D_{\boldsymbol{v}}^k f(P+t^*\boldsymbol{v}).$$

□

테일러 정리가 어떤 의미인지 보자. 예를 들어 f가 이변수 함수라 하고

$$P = (0,0) \quad \boldsymbol{v} = (x,y)$$

라 놓자. 그러면

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + D_{(x,y)} f(0,0) + \frac{1}{2!}{D_{(x,y)}}^2 f(0,0) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}{D_{(x,y)}}^{k-1} f(0,0) + \frac{1}{k!}{D_{(x,y)}}^k f(0,0) + \cdots \\ &= f(0,0) + (xD_1 + yD_2) f(0,0) + \frac{1}{2!}(xD_1+yD_2)^2 f(0,0) + \frac{1}{3!}(xD_1+yD_2)^3 f(0,0) + \cdots \\ &= \\ &= \text{상수항} + (ax+by) + (cx^2+dxy+ey^2) + \cdots \end{aligned}$$

즉, 주어진 함수를 다항식으로 근사시킬 수 있다.

이 때

$$x^p y^q \text{ 항의 계수는 } \frac{1}{(p+q)!}\binom{p+q}{p}{D_1}^p {D_2}^q f(0,0)$$

이다.

- $f(x,y) = e^x \cos y + xy$ 일 때 원점($P = (0,0)$)에서 2차 근사다항식을 구하라.

  (풀이) 이 문제는

  $$f(0,0) + (xD_1 f(0,0) + yD_2 f(0,0)) + \frac{1}{2}(x^2 {D_1}^2 f(0,0) + 2xyD_1D_2 f(0,0) + y^2 {D_2}^2 f(0,0))$$

  를 구하라는 문제이다. 그러려면 먼저 편도함수들을 차근차근 구해야 한다.

  $$D_1 f = e^x \cos y + y,\ D_2 f = -e^x \sin y + x \quad \Rightarrow \quad D_1 f(0,0) = 1,\ D_2 f(0,0) = 0$$

  $$\begin{pmatrix} D_1D_1 f & D_1D_2 f \\ D_2D_1 f & D_2D_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y + 1 \\ -e^x \sin y + 1 & -e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} D_1D_1 f(0,0) & D_1D_2 f(0,0) \\ D_2D_1 f(0,0) & D_2D_2 f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  그러므로 답은

  $$1 + x + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy - y^2\right).$$

근사다항식과 잉여항

$$f(P+\boldsymbol{v}) = f(P) + D_{\boldsymbol{v}} f(P) + \frac{1}{2!}{D_{\boldsymbol{v}}}^2 f(P) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}{D_{\boldsymbol{v}}}^{k-1} f(P) + \frac{1}{k!}{D_{\boldsymbol{v}}}^k f(P+t^*\boldsymbol{v}).$$

4 임계점 정리

다변수 함수 f가 주어졌을때 그 함수의 최대값과 최소값이 무엇인지는 설명할 필요가 없겠죠?

극소점 local minimum : 국소적으로 최소인 점. 더 엄밀하게 말하자면 점 P가 함수 f의 극소점이라는것은

점 P를 내부에 포함하는 열린 영역이 존재하여 그 영역에서 함수 f는 최소값 $f(P)$를 갖는다.

는 것이다.

극대점 local maximum : 국소적으로 최대인 점.

극점 local extremum : 극소점 또는 극대점.

임계점 critical point : 미분가능한 함수의 임계점이란 모든 방향 $\boldsymbol{v}$에 대해 $D_{\boldsymbol{v}}f(P) = 0$이 되는 점 P를 말한다. 이 말은 , 미분가능함수에 대하여, $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ 라는 말과 동치이다.

잘못된 정의: 일변수함수 f 가 있다. $x = p$가 극소점이면 어떤 구간 $(p-\epsilon, p)$에서 함수 f는 감소인가? 답은 '아니다' 이다. 예전 고등학교 교과서에서, 극소점을 '감소상태에서 증가상태로 바뀌는 점' 이라고 정의해 놓았는데 이 말은 적절한 말이 아니다. 극소점은 '국소적으로 최소인 점' 이라고 정의해야 적절하다. 다음 함수는 $x = 0$에서 최소값을 갖지만 ϵ값이 아무리 작아도 구간 $(-\epsilon, 0)$ 에서 감소가 아니다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2\sin(1/x), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

정리 4.1. (*p 501*) n-공간의 열린 집합에서 정의된 미분가능한 함수의 극점은 임계점이다.

(증명). (교과서의 증명은 다소 중언부언한 감이 있다.) 이 정리는 직관적으로 당연하다. 하지만 굳이 엄격하게 증명을 하고자 한다면 다음과 같다.

점 P가 극소점이라 하자. 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 대하여

$$0 \le \lim_{t\to 0+} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \lim_{t\to 0-} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} \le 0$$

이므로 $D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\boldsymbol{v} = 0$ 이고 벡터 $\boldsymbol{v}$ 가 임의 이므로 $\boldsymbol{v} = \nabla f(P)$ 라 하면

$$\nabla f(P)\cdot\nabla f(P) = |\nabla f(P)|^2 = 0$$

이 되어 $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ 라는 결론을 얻는다. 점 P가 극대점인 경우도 동일한 논리로 증명된다. □

미분가능한 함수의 임계점을 찾는 문제는

$$\nabla f(P) = \operatorname{grad} f(P) = \mathbf{0}$$

가 되는 점을 찾는 문제이다.

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$의 임계점은?

  (풀이) $\operatorname{grad} f = (2x, 2y, 2z) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0)$

- $f(\boldsymbol{X}) = |\boldsymbol{X} - P_1|^2 + \cdots + |\boldsymbol{X} - P_k|^2$

  $\Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = 2(\boldsymbol{X} - P_1)\cdots + 2(\boldsymbol{X} - P_k) = 2(k\boldsymbol{X} - (P_1 + \cdots + P_k)) = \mathbf{0}$

  $\Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \dfrac{P_1 + \cdots + P_k}{k}$ 가 되어 거리의 제곱을 최소(why?)로 하는 점은 평균점이다.

- (p504 연습문제 4번) (유명한 **페르마점** 문제)

  삼각형 $\triangle ABC$의 세 꼭지각이 모두 120도 미만이라 할 때,

  $f(\boldsymbol{X}) = |\boldsymbol{X} - A| + |\boldsymbol{X} - B| + |\boldsymbol{X} - C|$의 최소점은? 즉 세개의 점이 주어져 있을 때 그 점들까지의 거리의 합을 최소로 하는 점은?[1]

[1]이 문제의 풀이는 여러가지가 있는데 수업시간에 재미삼아 몇가지를 소개하겠다. 단지 재미삼아 하는것이니 미적분학을 공부하는 입장에선 심각하게 몰두할 필요는 없다. 다만, 소개된 임계점 풀이는 미적분학 응용의 예로서 적절하다. 타원의 성질을 이용한 풀이는 내가 생각해낸 풀이이다. 하지만 내가 처음이 아니었다ㅠㅠ.

(임계점 풀이) $\operatorname{grad} f = \frac{\boldsymbol{X}-A}{|\boldsymbol{X}-A|} + \frac{\boldsymbol{X}-B}{|\boldsymbol{X}-B|} + \frac{\boldsymbol{X}-C}{|\boldsymbol{X}-C|} = \boldsymbol{0}\ (=(0,0))$.
세 벡터 $\frac{\boldsymbol{X}-A}{|\boldsymbol{X}-A|}, \frac{\boldsymbol{X}-B}{|\boldsymbol{X}-B|}, \frac{\boldsymbol{X}-B}{|\boldsymbol{X}-B|}$ 는 단위벡터이므로 이 세 벡터를 꼬리에 꼬리를 물도록 배치 하면 정삼각형이 만들어진다.

(토리첼리 또는 슈타이너Steiner의 작품으로 여겨지는 풀이) 내심, 외심, 수심등과 같이 삼각형과 관련된 세 선분이 한 점에서 만나는 현상은 세기 힘들만큼 많이 있다. 그 중 하나 이다.

(나의 작품. 그러나 뒷북이었다.) 타원의 성질을 이용한다.

(Mark Levi의 흥미로운 풀이) Mark Levi라는 수학자는 수학문제를 물리적 개념을 이용해 푸는 취미를 갖고 있는데 무릎을 탁 치게 만드는 흥미로운 아이디어들을 보여준다. 하지만 가끔 순환논리에 빠지기도 한다.

5 헤세 판정법

(고등학교) $f'(p) = 0, \quad \begin{cases} f''(p) < 0 & \Rightarrow \quad p\text{는 극대점} \\ f''(p) > 0 & \Rightarrow \quad p\text{는 극소점} \\ f''(p) = 0 & \Rightarrow \quad p\text{는 극대점, 극소점, 변곡점. 즉 판단불가.} \end{cases}$

(보기) $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = 3(x^2 - 4y, -4x + 8y^2) = (0,0)$.
이 연립방정식을 풀면 $(x,y) = (0,0)$ 또는 $(2,1)$ 이다.

이 점들은 극대인가 극소인가 아니면 이도 저도 아닌가? 이런 문제에 대한 해답은 고등학교때와 비슷하게 이계미분에 답이 있다. 그리고 우리는 이변수 함수에 대해서만 생각한다. 3변수 이상의 함수에 대해 이 문제를 생각하는것은 1학년 수학의 범주를 벗어나지만 공대학생들은 공학수학 시간에 배운다. (안 배우기도 한다.)

안장점 (saddle point) : 임계점이면서 극대도 극소도 아닌 점.

어떤 행렬곱

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3$$
$$= a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + (a_{31} + a_{13})x_3x_1.$$

이차형식(quadratic form) : 2차 다항함수로서 일차항과 상수항이 0인것.
ex) $\quad q(x,y) = x^2 + \sqrt{3}xy + 5y^2, \qquad q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5xy + 6yz + 7zx.$

이차형식과 대칭행렬

$$x^2+\sqrt{3}xy+5y^2=(x,y)\begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$x^2+2y^2+3z^2+5xy+6yz+7zx=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2}\\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{6}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{6}{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

이차형식을 행렬곱으로 표현하는 방법은 유일하지 않지만 가운데 행렬을 대칭행렬로 쓰지 않는다면 바보스럽다. 대칭행렬은 예쁘기도 하지만 매우 좋은 성질[2]을 가지고 있기 때문이다. 잘 생기고 성격도 좋은 대칭행렬은 마치 엄친아 같은 행렬이다.

이계방향미분, 이차형식, 헤세행렬, 테일러 전개

$$f''(x,y):=\begin{pmatrix}{D_1}^2f & D_1D_2f\\ D_2D_1f & {D_2}^2f\end{pmatrix}$$

$$D_{(x,y)}f(P)=\mathrm{grad}f\cdot(x,y)=(D_1f(P),D_2f(P))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$${D_{(x,y)}}^2f(P)={D_1}^2f(P)x^2+2D_1D_2f(P)xy+{D_2}^2f(P)y^2=(x,y)\begin{pmatrix}{D_1}^2f(P) & D_1D_2f(P)\\ D_1D_2f(P) & {D_2}^2f(P)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

임계점에서의 저차 테일러 전개

$$f(P+\boldsymbol{v})=f(P)+D_{\boldsymbol{v}}f(P)+\frac{1}{2}{D_{\boldsymbol{v}}}^2f(P+t^*\boldsymbol{v})\quad \text{인데 점 } P \text{ 가 임계점이라면}$$

$$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\quad\Rightarrow\quad f(P+\boldsymbol{v})-f(P)=\frac{1}{2}(v_1,v_2)\begin{pmatrix}{D_1}^2f(P+t^*\boldsymbol{v}) & D_1D_2f(P+t^*\boldsymbol{v})\\ D_1D_2f(P+t^*\boldsymbol{v}) & {D_2}^2f(P+t^*\boldsymbol{v})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

양행렬(positive definite), 음행렬(negative definite)

(2×2) 대칭행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 가 있다.

1. $\det A=ac-b^2>0$ 이고 $a>0$ 일 때, A를 양행렬 이라 하고 $A>O$로 표시한다.

2. $\det A=ac-b^2>0$ 이고 $a<0$ 일 때, A를 음행렬 이라 하고 $A<O$로 표시한다.

(참고) 일반적 사이즈의 양행렬, 음행렬을 정의하려면 선형대수의 특성값, 특성벡터, 대각화 이론을 알아야 하는데 이것은 1학년 수학의 범주를 벗어나는것이다. 우리는 2×2 행렬만 다룬다.

도움정리 5.1. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$에 대응되는 이차형식

$$q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=(x,y)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

에 대하여

1. $A>O$이면 $(0,0)$는 최소점이다.

2. $A<O$이면 $(0,0)$는 최대점이다.

3. $\det A<0$ 이면 $(0,0)$는 안장점이다.

[2] 대칭행렬은 직교대각화가능(orthogonally diagonalizable) 하다.

(증명).

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left\{\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right\}$$

□

정리 5.2. (헤세판정법) 이급함수 f 의 임계점 P 에서

1. $f''(P) > O$ 이면 P 는 극소점이다.

2. $f''(P) < O$ 이면 P 는 극대점이다.

3. $\det f''(P) < 0$ 이면 P 는 안장점이다.

4. $\det f''(P) = 0$ 이면 판단불가.

(증명).

$$f(P + \boldsymbol{v}) - f(P) = \frac{1}{2}(v_1, v_2)\begin{pmatrix} {D_1}^2 f(P + t^*\boldsymbol{v}) & D_1D_2 f(P + t^*\boldsymbol{v}) \\ D_1D_2 f(P + t^*\boldsymbol{v}) & {D_2}^2 f(P + t^*\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= f(P + \boldsymbol{v}) - f(P) = \frac{1}{2}(v_1, v_2) f''(P + t^*\boldsymbol{v})\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

이계 편도함수 D_iD_jf 의 연속성에 의해, 벡터 $\boldsymbol{v}$ 의 크기가 작으면,

$$f''(P) > O \quad \Rightarrow \quad f''(P + t^*\boldsymbol{v}) > O,$$

and so on. □

(보기)

- $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f = 3(x^2 - 4y, -4x + 8y^2) = (0, 0)$.

  이 연립방정식을 풀면 $(x, y) = (0, 0)$ 또는 $(2, 1)$ 이다.

  $$f'' = 3\begin{pmatrix} 2x & -4 \\ -4 & 16y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f''(0, 0) = 3\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(2, 1) = 3\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$$

- $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f = 4(x^3 - y, -x + y^3) = (0, 0)$.

  이 연립방정식을 풀면 $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ 또는 $(-1, -1)$ 이다.

  $$f'' = 4\begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f''(0, 0) = 4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1, 1) = f''(-1, -1) = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(참고) $f'(P) = \mathbf{0}$ 이고 $\det f''(P) = 0$ 인 경우는 극대 극소 안장점 여부를 당장은 알수 없다. 이것은 마치 일변수함수에서 $f'(p) = 0$ 이고 $f''(p) = 0$ 일 때 극대 극소 변곡점 여부를 알 수 없는 현상과 같다.

(참고) 이 강좌에서 우리는 2변수 함수에 한정하여 헤세판정법을 배웠다. 그렇다면 변수가 더 많은 경우에는 어찌할 것인가? 헤세행렬을 분석하여 임계점을 분류하는 이론이 있겠는가?
답은 "있긴 있다" 이다. 이것은 선형대수에서 "대각화 diagonalization" 이라는 개념을 배워야 이해할 수 있다.

6 라그랑주 승수법 Lagrange multiplier method

(**문제**) $g(x,y)=x^2+y^2=1$일 때, $f(x,y)=x+y$의 최대 최소값을 구하시오.

(풀이1) Let $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$. Then

$$x+y=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\cos(t+\alpha)\text{ for some }\ \alpha.\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}.$$

(풀이2) 코시 쉬발츠 부등식을 사용

$$(x+y)^2=\{(1,1)\cdot(x,y)\}^2\le(1^2+1^2)(x^2+y^2)=2\quad\Rightarrow\quad -\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}.$$

(풀이3) 위 풀이는 풀이에 적절한 잔머리를 썼다. 잔머리는 아름답지만 잔머리가 항상 통하는것은 아니다. 이런 문제를 푸는 일반적인 이론이 있다. f의 등위면 $f(x,y)=k$와 g의 1-등위면인 $g(x,y)=1$이 접하는 (x,y)를 구하면 된다. $\mathrm{grad}f(P)$는 f의 $f(P)$-등위면에 수직이고 $\mathrm{grad}g(P)$는 g의 $g(P)$등위면에 수직이라는 사실을 우리는 알고 있다. 그러므로 두 등위면이 접한다면 두 기울기벡터는 나란하다.

$$\mathrm{grad}g(x,y)=(2x,2y),\quad \mathrm{grad}f(x,y)=(1,1)\quad\Rightarrow\quad(x,y)=\lambda(1,1)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda\end{cases}$$

연립방정식을 풀어야 하는데 미지수는 3개, 식은 2개여서 식이 하나 부족해 보인다. 근데 식이 하나 더 있다. 그것은

$$g(x,y)=1,\quad\text{즉 }x^2+y^2=1\quad\Rightarrow\quad 2\lambda^2=1\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm1/\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad(x,y)=\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}).$$

경계가 있는 영역 R에서 정의된 다변수 함수 f의

- 영역의 내부 $\mathrm{int}(R)$에서의 임계점을 찾으려면 $\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$가 되는 $\boldsymbol{x}$를 구하면 된다.
- 구한 임계점의 극대, 극소, 안장점 여부를 가려내고자 한다면 헤세판정법을 사용한다.
- 영역 R 전체에서의 최대, 최소값 같은것을 구하고자 한다면 영역의 경계 ∂R에서의 최대, 최소를 구해야 한다. 일변수 함수의 경우 정의역의 경계는 두 점으로 이루어져 있으므로 그 두 점에서의 함수값만 조사하면 되지만 다변수 함수의 경우 영역의 경계는 초곡면이 된다. 그러므로 경계에서의 최대,소 점을 찾는 문제는 간단치 않아 보인다. 이 문제를 공략하는 방법이 라그랑주 승수법 Lagrange multiplier method 이다.
- 라그랑주 승수법은 영역의 경계에서의 임계점을 찾는 방법이라고 해도 되지만 제한 조건(constraint)이 주어졌을 때 함수의 임계점을 찾는 방법이라고 하는것이 더 적합하다.
- 우리는 제한조건이 한 개 주어진 경우만 다룬다.

정리 6.1. (p515 정리 6.0.2)(라그랑주 승수법[3], Lagrange multiplier method)
n-공간의 열린집합 에서 정의된 두 일급함수 f와 g에 대하여 함수 $f(X)$를 함수 g의 등위면 $g(X)=c$에 제한했을 때, 점 P가 f의 극점 이라면

$$\mathrm{grad}f(P),\ \text{와 }\mathrm{grad}g(P)\text{ 는 일차종속이다. 즉, 나란하다.}$$

다시말해

$$\mathrm{grad}f(P)=\lambda\,\mathrm{grad}g(P),\ \text{또는 }\lambda\,\mathrm{grad}f(P)=\mathrm{grad}g(P).$$

(증명). 등위면 $g(\boldsymbol{X})=c$ 위에 있고 $t=0$ 일 때 극점 P를 지나는 매개화된 곡선 $\boldsymbol{X}(t)$를 생각하자. 일변수 함수 $f(\boldsymbol{X}(t))$는 $t=0$일때 미분계수가 0이다:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{X}(t))=\nabla f(\boldsymbol{X}(t))\cdot\boldsymbol{X}'(t)\ \Rightarrow\ \nabla f(P)\cdot\boldsymbol{X}'(0)=0$$

즉, 그래디언트 벡터 $\nabla f(P)$는 $\boldsymbol{X}'(0)$와 수직이다. 곡선 $\boldsymbol{X}(t)$의 접벡터 $\boldsymbol{X}'(0)$는 등위면 $g(\boldsymbol{X})=c$의 접벡터이기도 하다. 곡선 $\boldsymbol{X}(t)$는 등위면위에 있고 점 P를 지나는 임의의 곡선이므로 $\nabla f(P)$는 이 등위면에 수직이다. 벡터 $\nabla g(P)$ 또한 등위면 $g(\boldsymbol{X})=c$에 수직이다. 이것으로 증명되었다. □

[3]승수(multiplier)는 '곱하는 수' 라는 뜻이다. 여기에서 곱하는 수는 λ를 지칭한다.

- (p516) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 일 때, $f(x,y,z) = xy + z^2$ 의 최댓값을 구하시오.

- (p516) 반지름 1인 구에 내접하는 직육면체 중 부피가 최대인것은 어떤것인가?

- (p518, 산술평균 기하평균)

  1. $g(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n = 1,\ x_i \geq 0$ 일 때, $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdots x_n$ 의 최대값은?

  2. $a_i \geq 0,\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$

- (p520, 산술평균 ≤ 이차평균)

$$a_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

- (p520, 점과 등위면 사이의 거리)

  곡선

$$C\ :\ g(x,y) = 0$$

  의 점들 중에서 점 (x_0, y_0)와 가장 가까운 점을 구하는 문제이다.

  (풀이) $g(x,y) = 0$ 일 때, $f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ 를 최소로 하는 (x,y)를 구하는 문제이다.

  이것은

  두개의 식 $\mathrm{grad}g(x,y) = \lambda \mathrm{grad}f(x,y) = 2(x - x_0, y - y_0)$ & 다른 한 개의 식 $g(x,y) = 0$.

  을 풀면 된다.

  (보기) 포물선 $y = x^2$ 위의 점들 중, 점 $P = (0,p)$와 가장 가까운 점은?

  (풀이) Let $g(x,y) = x^2 - y = 0$ and $d^2 = f(x,y) = x^2 + (y-p)^2$. 먼저, 함수 f 의 최소점이 있음을 다음과 같이 논술하여야 한다.

  1. 점 P 를 중심으로 하는 충분히 큰 원판 D 를 생각하자.

  2. 원판 D 의 바깥과 포물선의 공통부분에서 함수 f 는 충분히 큰 함수값을 갖는다.

  3. 원판 D 와 포물선의 공통부분은 유계이고 닫힌 집합이므로 연속함수의 최대최소 정리에 의해 그 공통부분의 최소점이 존재하고 이 점이 전체적인 최소점이다.

이제 계산을 해 볼것인데 아래의 풀이에서 주목할 점은 두 함수 f와 g가 2변수함수일 경우에는 multiplier λ를 도입하지 않고 풀 수도 있음을 보여준다는 점이다.

$$\mathrm{grad}g = (2x, -1), \quad \mathrm{grad}f = 2(x, y-p)$$

이고 위 두 벡터가 일차종속이므로

$$\det\begin{pmatrix} 2x & x \\ -1 & y-p \end{pmatrix} = 2x(y-p) + x = x(2y-2p+1) = 0.$$

그러므로

$$x = 0 \quad \text{or} \quad y = p - \frac{1}{2}.$$

그러므로 마지막 방정식 $x^2 - y = 0$ 를 고려 하면 임계점 후보들은 아래와 같고 최솟점은 이 후보점들 중에 있다. 최솟점은 p의 범위에 따라 달라진다.

$$\begin{aligned} p \geq \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad (0,0), \quad \left(\sqrt{p-\frac{1}{2}}, p-\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\sqrt{p-\frac{1}{2}}, p-\frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad f(0,0) = p^2, \ f\left(\pm\sqrt{p-\frac{1}{2}}, p-\frac{1}{2}\right) = p^2 - \frac{1}{4}. \\ p \leq \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad (0,0) \quad \Rightarrow \quad f(0,0) = p^2. \end{aligned}$$

(참고) 점 P를 중심으로 하고 포물선에 접하는 원을 그려보라. $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 일 때의 접원의 반지름이 이 포물선의 원점에서의 곡률반경이다.

(참고) 이 문제를 라그랑주 승수법을 이용하여 푸는것은 소잡는 칼로 쥐를 잡은격이다:
포물선을 (t, t^2)으로 매개화 하자.

$$d^2(t) = t^2 + \left(t^2 - p\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \{d^2(t)\}' = 2t + 2\left(t^2 - p\right)2t = 4t\left\{t^2 - \left(p - \frac{1}{2}\right)\right\} = 0$$

를 풀면

$$\begin{aligned} p \geq \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad t = 0, \ t = \pm\sqrt{p - \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad (0,0), \quad \left(\pm\sqrt{p-\frac{1}{2}}, p-\frac{1}{2}\right). \\ p \leq \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0). \end{aligned}$$