

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

(연습용 여백)

문제 1. [15점] 다음 적분 값을 구하시오.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5 + 1} dy dx$$

문제 2. [20점] 좌표평면에서 네 직선 $y = \pm x$, $y = \pm(x - 1)$ 로 둘러싸인 영역을 D 라 할 때, 다음 적분 값을 구하시오.

$$\iint_D (x - y) e^{y^2 - x^2} dx dy$$

문제 3. [20점] 양수 r 에 대하여, $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 이라고 하고 이것의 경계를 $C_r : x^2 + y^2 = r^2$ 이라 하자. 또, \mathbb{R}^2 에서 정의된 이급함수 $f(x, y)$ 에 대하여 $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f ds$ 를 생각하자.

이때, $\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy$ 임을 보이시오.

문제 4. [20점] 평면 위의 점

$$A_k = \left(\cos \frac{k\pi}{4}, \sin \frac{k\pi}{4} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, 8)$$

에 대해 점 A_1, A_2, \dots, A_8 을 꼭짓점으로 가지는 정팔각형을 생각하자. 점 A_1 에서 출발하여 반시계방향으로 정팔각형의 둘레를 따라 A_7 에 도착하는 곡선을 C 라 할 때,

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2) dy$$

를 구하시오.

문제 5. [20점] 사이클로이드 곡선 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$)의 단위법벡터장 \mathbf{n} 을 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \geq 0$ 이 되도록 정할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - x^2 + \sin(y^2 + 1))\mathbf{i} + \left(\sin \frac{x}{2} - y + 2xy \right) \mathbf{j}$$

에 대하여,

$$\int_X \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

의 값을 구하시오.

문제 6. [25점] 3차원 좌표공간에서 xz -평면 위에 놓인 곡선 $z = x^2$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$)를 z -축 둘레로 회전하여 얻은 회전면의 넓이와 중심을 구하시오.

(연습용 여백)

문제 7. [20점] 곡면 $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ($0 \leq z \leq 1$)의 향을 정하는 단위법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 정의되어있다. 입체각 벡터장 $\mathbf{A} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 가 곡면 S 를 빠져나가는 플럭스(flux)를 구하시오.

문제 8. [20점] 벡터장 $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ 가 표준 단위구면 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 빠져나오는 플럭스(flux)를 구하시오.

문제 9. [20점] 두 벡터장 \mathbf{F}_1 과 \mathbf{F}_2 가 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = (x^2 \cos y, y^2 \cos z, z(1 + 6x^2))$$

$$\mathbf{F}_2(x, y, z) = (x + x^3, x \sin y, y \sin z)$$

3차원 공간의 유계 영역 R 에 대해 다음 두 식이 성립한다.

$$\iint_{\partial R} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{S} = 2, \quad \iint_{\partial R} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{S} = 4$$

이때, 영역 R 의 부피를 구하시오.

문제 10. [20점] 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 와 영역 $x + y + z \geq 2$ 의 공통부분을 S 라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F} = (x + y + 2z, 2x + y + z, x + 2y + z)$$

에 대하여 면적분 $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향은 $\mathbf{n} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{2}}$ 으로 준다.