Quiz 1 (9월 14일 금요일 5, 6교시)

[2018년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 25점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (13점) 다음 함수에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) (6점) 함수 f가 원점에서 연속인지 판별하고 이유를 설명하시오.

   (b) (7점) 함수 f가 원점에서 미분가능한지 판별하고 이유를 설명하시오.

2. (6점) 평면의 점 (x,y)에서의 온도가 일급함수 $f(x,y)$와 같다고 하자. 이때, 점 $(0,1)$에서 $(1,0)$ 방향으로 움직일 경우 순간 온도변화율이 1이고, $(0,1)$ 방향으로 움직일 경우 순간 온도변화율이 -1이다. 점이 곡선

$$\alpha(t) = (\sin t,\, e^t)$$

   를 따라 움직일 때, 점 $(0,1)$에서의 순간 온도변화율을 구하시오.

3. (6점) xyz-좌표공간에서 이변수함수 $f(x,y) = 4 - y^2$의 그래프와 타원포물면 $z = x^2 + 3y^2$이 교차하는 곡선의 한 점 $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{7}{2}\right)$에서 이 곡선에 접하는 벡터를 구하시오.

Quiz 1 답안 및 채점기준 예시

1. (a) $|f(x,y)| = y^2|x-y|/(x^2+y^2) \leq |x-y|$ 이므로 원점에서 연속
   (b) $D_{(x,y)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} f(t(x,y))/t = f(x,y)$
   $\nabla f(0,0)\cdot(x,y) = -y$
   따라서, $(x,y) = (1,1)$ 이면 $D_{(1,1)}f(0,0) = f(1,1) = 0 \neq -1 = \nabla f(0,0)\cdot(1,1)$ 이다. 따라서 원점에서 미분가능하지 않다 .

2. $\alpha'(t) = (\cos t, e^t)$ 이고,
   $\alpha(t) = (0,1)$ 이려면, $t = 0$.
   $\dfrac{df(\alpha(t))}{dt} = \nabla f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$
   $\left.\dfrac{df(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = \nabla f(0,1)\cdot\alpha'(0) = (1,-1)\cdot(1,1) = 0.$

3. 함수 f 의 그래프는 $g(x,y,z) := 4-y^2-z$ 의 0-등위면이고 타원포물면은 $h(x,y,z) := x^2+3y^2-z$ 의 0-등위면이므로 구하는 접벡터는 두 등위면의 기울기벡터에 동시에 수직인 벡터

$$\nabla g\times\nabla h = (0,-2y,-1)\times(2x,6y,-1)$$

   이고 주어진 점 $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 7/2)$ 에서 이 벡터는 $(0,-\sqrt{2},-1)\times(2\sqrt{2},3\sqrt{2},-1) = (4\sqrt{2},-2\sqrt{2},4)$