

## 수학 2 중간고사 시험지

**시험일정:** 2021년 7월 10일 (토) 10:10 – 11:40(90분)

**모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점: 150점)**

**문제 1.** [15점] 다음 함수에 대하여 각 물음에 답하시오.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin^3 x + x \sin^3 y}{x^3 - y^3}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

- (a) (5점)  $D_1 f(0, 0)$  과  $D_2 f(0, 0)$  를 구하시오.
- (b) (10점)  $(0, 0)$ 에서 미분가능한지 판정하시오.

**문제 2.** [20점]  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  일 때, 다음 함수의 최댓값을 구하시오.

$$f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \left( \frac{1 + xh}{2 + yh} \right)^{3+zh} - \frac{1}{8} \right)$$

**문제 3.** [20점] 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 미분가능이면, 함수  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 의 그래프의 임의의 점에서의 접평면은 모두 한 점에서 만남을 보이시오.

문제 4. [10점] 단위원 내부  $U: x^2 + y^2 < 1$  에서 정의된 함수  $F(x, y) = (x^2 + 3y^2, 6xy)$  에 대하여, 영역

$$S = \{(x, y) \in U \mid F'(x, y) > 0\}$$

의 넓이를 구하시오.

**문제 5.** [15점]  $f(x, y) = \log(x + e^y)$ 에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

(a) (7점) 원점에서  $f$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

(b) (8점) (a)의 결과를 사용하여  $f(0.01, 0.01)$ 의 일차근삿값을 구하고, 오차가  $2 \times 10^{-4}$ 이하임을 보이시오.

**문제 6.** [15점] 함수  $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y^2 - 3x$  의 임계점을 모두 구하고, 그 점들을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

**문제 7.** [15점]  $x^2 + y^2 + xy = 3$  일 때  $x^2 + y^2$  의 최솟값을 구하시오.



**문제 8.** [10점] 함수  $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$  는 다음 식을 만족하는 일급 벡터함수이다.

$$F(1, 2, 3) = (1, 2), \quad \text{grad } f(1, 2, 3) = (2, 3, 4), \quad \text{grad } g(1, 2, 3) = (3, 4, 5)$$

$H(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$  일 때  $(H \circ F)'(1, 2, 3)$  을 구하시오.

**문제 9.** [15점] 벡터장  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  와 곡선

$$X(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t), \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

에 대하여 선적분  $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  을 구하시오.

**문제 10.** [15점] 곡선  $X(t) = (t - \sin t - \frac{\pi}{2}, 1 - \cos t)$ ,  $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여 선적분

$$\int_X \frac{x^3 + xy^2 + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2y + y^3 - x}{x^2 + y^2} dy$$

을 구하시오.