2023년2학기 수학2
제13장 벡터장과 선적분

2023년 9월 27일

1 벡터장 (vector field)

다음과 같이 정의공간과 공역공간의 차원이 같은 연속인 다변수 벡터함수를 벡터장 (vector field)이라 부른다.

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

- 벡터장은 정의역 위의 각 점에 붙어있는 화살표들의 집합으로 묘사할 수 있다.
- (상수벡터장, 단위벡터장)
- (p559 **기본단위벡터장**)

$$\hat{x} = \boldsymbol{i} = (1,0), \quad \hat{y} = \boldsymbol{j} = (0,1),$$

$$\hat{x} = \boldsymbol{i} = (1,0,0), \quad \hat{y} = \boldsymbol{j} = (1,0,0), \quad \hat{z} = \boldsymbol{j} = (0,0,1).$$

- (p558 **위치벡터장**)
  - $\boldsymbol{r}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ 또는 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$.
  - 위치벡터와 나란한 단위벡터장 : $\hat{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$
  - 위치벡터 화살표를 90도 회전시킨 화살표 : $\boldsymbol{r}^*(x,y) = (-y,x)$. $\quad |\boldsymbol{r}^*| = |\boldsymbol{r}|, \quad \boldsymbol{r}^* \cdot \boldsymbol{r} \equiv 0$.
- (p572 **각원소벡터장**)

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}^*. \quad \text{또는} \quad \boldsymbol{a}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x). \quad \text{Observe that} \quad |\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})| = \frac{1}{|\boldsymbol{X}|}.$$

  이 벡터장은 앞으로 배울 이론의 좋은 예와 좋은 반례를 만들어주기 때문에 교육적 관점에서 꽤 중요한 벡터장이다.

- **n차원 공간속의 입체각벡터장 (n차원 입체각벡터장)**.

$$A_n(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{r^n}\,\boldsymbol{r} = \frac{1}{|\boldsymbol{X}|^n}\,\boldsymbol{X}. \quad (\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\})$$

  This vector field is a radial divergence free vector field. Later, we will see that a radial divergence free vector field is unique up to constant multiplication.

- 점질량에 의한 중력가속도장, 줄여서 중력장

질량인 m(kg) 이고 원점에 위치한 점질량이 생성하는 중력가속도장은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{g} = -Gm\boldsymbol{A}_3 = -Gm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -Gm\frac{\hat{r}}{r^2} \ (\text{m/sec}^2 = \text{N/kg}).$$

케플러는 행성의 운동 관측자료를 통해 케플러 법칙들을 만들어 냈다. Newton 선생님께서는 3차원 중력장이 "역제곱법칙"을 만족해야 한다는 강한 심증을 가지고 계셨고 마침 케플러법칙을 알고 나신후에 "역제곱법칙"이 타당하다는 것을 케플러3법칙에 의거하여 증명하셨다. 하지만 케플러 법칙들 자체가 귀납적이고 근사적인 명제이기 때문에 케플러와 뉴톤 선생님 모두 아무것도 증명하지 않으셨다. 단, 만유인력 법칙을 "가설"로서 받아 들인다면 뉴톤선생님은 케플러법칙들을 수학적으로 완벽하게 증명하신 것이다. 과학역사에서 손꼽히는 빅히트를 치신 것이다. 그것도 더 이상 아름다울 수 없는 논리로. 놀라지 말라. 뉴톤 선생님은 화성의 궤도가 타원임(케플러 제1법칙)을 증명하실 때 미분을 직접적으로 사용하지 않으셨다.

- 점전하에 의한 전기장

원점에 위치한 점전하(qC)가 test 전하에 미치는 영향인 전기장 $\boldsymbol{E}$는 매질과 관련이 있고 진공의 경우

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.$$

이라고 한다. 위에서 ϵ_0를 진공의 유전율(permeability)이라 하고

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.987551787 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9\ (N\,m^2/C^2)$$

를 쿨롱상수라 한다. 전기장의 벡터를 1C의 test전하가 받는 힘으로 묘사를 하는데 사실 전기장의 단위는 N/C이다.

- (내 생각) 뉴톤의 중력장과 쿨롱의 전기장은 우주가 평평하다는 가설에 의거한 가설이다. 평평한 우주인 $\mathbb{R}^3$ 위의 Radial divergence free vector field를 채택한 것 뿐이다.

벡터장의 평행이동

$$F(\boldsymbol{X}) \quad \rightsquigarrow \quad G(\boldsymbol{X}) = F(\boldsymbol{X} - P).$$

2 선적분

(질문) 미분이 어려운가? 적분이 어려운가?
(답) 적분이 어렵다. 여기에서 적분이 어렵다 함은 계산이 어렵다는것만을 의미 하지 않는다. 적분은 그 정의를 이해하는것이 본질적으로 어려운 것이다. 우리는 1학기에 실함수의 선적분을 배웠다. 지금부터 다양한 형태의 적분들을 배우는데 그 정의를 잘 정리해서 외워둬야 한다. 적분은 스토리라인을 외우지 않으면 말짱 황이다. 적분의 정의를 잘 외운 다음에 할 일은 그 적분을 수행함에 있어서 적용할 수 있는 아름다운 정리를 익히고 외우는 것이다. 적분의 정의는 기본적으로 구분구적법이고 이것은 고대시절 (아르키메데스 시절) 부터 알고 있었다. 하지만 구분구적법에 따라 적분을 하는것은 고통스러운 일이며 아르키메데스 선생께서는 고작

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

정도만 알고 계셨다. 이 정도만 아시고도 아주 자랑스러워 하셨다. 적분의 아름다운 정리는 이미 고등학교 때 배웠다. 뉴톤 선생님께서 인류에게 선물하신 미적분학의 기본정리가 그것이다[1]. 구분구적법 하지 말고 미분과 적분의 관계가 있으니 그걸 사용하면 계산이 쉽다고 가르쳐 주셨다. 이후, 미적분학의 기본정리와 철학을 공유하는 아름다운 정리들이 발견된다. 그 중에 으뜸은 제 17장에서 배우는 Gauss 선생님의 **발산정리** 이다. 지금부터 적분의 늪에 빠져 보자.

(복습) 실함수의 선적분

$$I \xrightarrow{X} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int_C f\,\mathrm{d}s := \lim_{\text{무한세분}} \sum_{\text{유한합}} f(X_i) \times (\text{i-th 선분의 길이}).$$

그리고 계산법은 다음과 같다. 그리고 이 계산은 곡선의 매개화 $\boldsymbol{X}(t)$와 무관하다.

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{X}(t))|X'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

여기에서 표현상 주목할 점은

$$\mathrm{d}s = \text{'무한히 짧은 곡선조각의 길이' 이고 이것은}$$

$$\mathrm{d}s = |X'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{즉,} \quad \text{속력} \times \text{'무한히 짧은 시간' 을 의미한다.}$$

이와 같이 우리는 곡선위에서 정의된 실함수의 정의를 안다. 나중에 우리는 곡면위에서의 실함수의 적분도 배우는데 그 적분의 정의도 위와 다르지 않다. 그리고 제13장의 목표는 곡선위에서의 벡터장의 적분을 정의하고 익히는것인데 그 어떤 적분을 하던 실함수의 적분이 기본이다.

곡선을 따르는 벡터장 화살표(!)가 곡선에 붙어 있는것을 말한다. 어떤 영역위에 벡터장이 주어져 있고 그 영역위에 곡선이 있다면 곡선을 따르는 벡터장은 자연스럽게 정의된다.

- 곡선 $C : x^2 + y^2 = 1$ 이고 $F(x, y) = x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} = (x, y^2)$. Then 곡선 C를 따르는 벡터장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(t) = (\cos t, \sin^2 t).$$

  이 말은 곡선 C를 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$로 매개화 하였다는것을 의미한다.

[1]데카르트, 갈릴레오, 케플러, 아이작 배로 등의 거인들이 어깨를 내주었기에 가능했다.

- **단위접벡터장(unit tangent vector field).** 곡선에 의해 자연스럽게 정의되는 벡터장1. 어떤 미분 가능한 곡선의 미분가능 정규매개화(differentiable regular parametrization)가 주어졌을 때,

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{1}{|\boldsymbol{X}'(t)|}\boldsymbol{X}'(t).$$

곡선의 단위접벡터장은 몇개가 있는가? (답) 두 개.

- **평면곡선의 단위법벡터장(unit normal vector field).** 곡선에 의해 자연스럽게 정의되는 벡터장2.
이 벡터장은 곡선이 평면위의 곡선일 때만 자연스럽게 정의된다. (why?)
평면곡선의 단위법벡터장은 몇개가 있는가? (답) 두 개.

벡터장의 선적분 n-공간에 곡선이 주어져 있고 이 곡선을 따르는 벡터장 F가 주어져 있다. 이 곡선을 따라 이 벡터장을 적분하고 싶다. 이 적분은 곡선과 주어진 벡터장에 의해서만 결정되어야 하고 우리가 아는것은 곡선위에서의 실함수의 적분이다. 주어진 곡선과 그 곡선을 따르는 벡터장이 주어졌을 때 그와 관련된 실함수는 무엇이 있겠는가? 떠오르는것은 이것 뿐이다.

$$F\cdot\boldsymbol{t} \quad \text{and} \quad F\cdot\boldsymbol{n}$$

이 실함수들을 적분하는것이다. 이 적분들은 수학적으로 자연스러울 뿐 아니라 물리적으로도 구체적 의미가 있다.
그리고 벡터장의 성분별로 적분하기가 있는데 이것은 힘의 합성등을 나타낸다.

- (**일 적분(work integral)의 정의**.)

$$\int_C F\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C F\cdot \mathbf{ds} := \int_C F\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s.$$

계산법은 다음과 같고 이것은 곡선의 향에 의존하고 동일한 향을 갖는 매개화에 대해 적분값이 같다.

$$\int_C F\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_C F\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s = \int_a^b F(X(t))\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{X}'(t)|}\boldsymbol{X}'(t)|\boldsymbol{X}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(X(t))\cdot\boldsymbol{X}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

여기에서 표현상 주목할 점은

$\mathrm{d}\vec{s}$ = '미소변위벡터' 즉 '곡선위의 점의 위치가 미소하게 변화한 것'을 벡터 로 나타낸 것이고 이것은

$\mathrm{d}\vec{s} = X'(t)\,\mathrm{d}t$ 즉, 속도 벡터 × '무한히 짧은 시간' 을 의미한다.

이 적분을 work integral 이라 하는 이유 주어진 벡터장을 "힘"이라 하자. 변함없는 힘을 질량을 가진 점에 가했더니 이 점이 직선을 따라 움직였을 때 ,

일 work = 힘 · 변위벡터

임을 물리시간에 배웠다. 그렇다면 힘이 변함이 있고 점이 움직인 자취가 직선이 아닐 땐, 점의 자취를 세분하여 각 세분에서는 직선운동을 하고 힘은 변함이 없다고 보아서 각 세분에서의 일을 모으면 된다. 그것이 적분임은 우리는 잘 이해하고 있다. 요약하면 이 적분은 힘 F가 질점에 가해지고 질점이 움직였을 때 힘 F가 한 일의 양을 뜻한다. 그리고 질점의 운동은 모종의 이유에 의해 힘의 방향과 다르게 움직일 수도 있다.

- (**평면곡선을 통과하는 플럭스 적분, Flux integral**) 평면곡선 위의 단위법벡터장 $\boldsymbol{n}$에 대해 이 곡선위의 벡터장 F의 플럭스 적분의 정의는 다음과 같다. 이 적분에 대해선 중간고사 이후에 다룬다. 하여간 정의는 다음과 같다. 뭐겠나? 이거겠지.

$$\int_C F\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s.$$

곡선을 따르는 플러스 적분은 평면곡선에 대해서만 정의된다.
3공간에서의 플러스적분은 당연히(!) 뭐겠나? 그것은 곡면을 따르는 적분이다. 하여간 나중에 배운다.

- (**성분별로 적분하기 : 연속적으로 분포하는 힘을 더하기**)

$$F = (f_1, f_2, f_3) \text{ 일 때 } \int_C F\ \mathrm{d}s := \left(\int_C f_1\ \mathrm{d}s, \int_C f_2\ \mathrm{d}s, \int_C f_3\ \mathrm{d}s\right).$$

(Example)

- 곡선 $C : x^2+y^2=1$ 이고 $F(x,y)=x\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}=(x,y^2)$. $\int_C F\cdot\, \mathrm{d}\vec{s}$를 구하라.
  (풀이)
  0. 일단 문제가 제대로 주어지지 않았다.$\rightsquigarrow$ 곡선의 향과 어떤 부분인지를 말해줘야 한다. 그래서 출제자는 잘못을 인정하고 '$(1,0)$에서 출발하여 반시계 두 바퀴' 라는 조건을 추가해 준다.
  1. 계산을 위해선 곡선의 매개화가 제일 먼저 할 일이다:
  $$\boldsymbol{X}(t)=(\cos t,\sin t)\ \ 0\le t\le 4\pi.$$
  2. 속도 벡터를 구한다.
  $$\boldsymbol{X}'(t)=(-\sin t,\cos t)$$
  이 매개화의 향이 주어진 향과 일치하는지 확인한다.
  3. 외운 공식에 넣는다.
  $$\int_C F\cdot\,\mathrm{d}\vec{s}=\int_0^{4\pi}(\cos t,\sin^2 t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{4\pi}(-\cos t\sin t+\sin^2 t\cos t)\,\mathrm{d}t$$
  4. 마지막 적분을 스스로 하던가 과외 하는 고등학생에게 시킨다.

- 위치벡터장 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y)$ 를 포물선 $C : y=x^2$ 을 따라 원점에서 점 $(1,1)$까지 적분하라.
  (풀이)
  $$\boldsymbol{X}(t)=(t,t^2),\ 0\le t\le 1.\quad \boldsymbol{X}'(t)=(1,2t).$$
  $$\Rightarrow\quad \int_C F\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_0^1(t,t^2)\cdot(1,2t)\mathrm{d}t=\int_0^1(t+2t^3)\mathrm{d}t$$

각원소 벡터장. 각원소 벡터장을 각원소 벡터장이라 부르는 이유.
각원소 벡터장 $\boldsymbol{a}(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$ 를 곡선

$$\boldsymbol{X}(t)=r(t)(\cos\theta(t),\sin\theta(t)),\quad t_0\le t\le t_1$$

을 따라 적분하라.

(풀이)

$$\boldsymbol{X}'(t)=r'(t)(\cos\theta(t),\sin\theta(t))+r(t)\theta'(t)(-\sin\theta(t),\cos\theta(t))=r'(\cos\theta,\sin\theta)+r\theta'(-\sin\theta,\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}&\int_X \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\frac{r(-\sin\theta,\cos\theta)}{r^2}\cdot\{r'(\cos\theta,\sin\theta)+r\theta'(-\sin\theta,\cos\theta)\}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{rr'(-\sin\theta,\cos\theta)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)}{r^2}+\frac{rr\theta'(-\sin\theta,\cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)}{r^2}\right\}\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\theta'\,\mathrm{d}t\\ &=\theta(t_1)-\theta(t_0).\end{aligned}$$

위의 결과를 기하적으로 해석해 보라.
(답) 각원소 벡터장의 선적분은 곡선위의 점을 원점에서 바라 보았을 때, 바라 보는 각도의 변화량을 의미한다.
그래서 각원소 벡터장 이다.

3 기울기 벡터장과 잠재 함수

3.1 잠재함수와 보존장

잠재함수 potential function
함수의 그래디언트는 벡터장이다. 역으로

$$F(\boldsymbol{X})=\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{X})\quad \text{for some function } \varphi$$

일 때, 함수 φ를 벡터장 F의 잠재함수potential function이라 한다.

$$\text{함수 } \varphi \xrightarrow{\text{grad}} \text{벡터장 } F = \text{grad}\varphi$$
$$\text{potential function of } F \longleftrightarrow \text{gradient of } \varphi$$

- 영벡터장 $F = (0, \ldots, 0)$ 의 잠재함수는 상수함수이다.
  (증명)

- 잠재함수는, 존재한다면, 상수더하기를 제외하고 유일하다(unique up to constant addition).

- $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\varphi = (x + 2y, 2x + 1)$.

- Vector field $F = (x + 2y, 2x + 1)$의 잠재함수는? (답) $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y + C$.

- 근데 이건 답을 미리 알려준거자나.
  (sol) 잠재함수를 $\varphi(x, y)$라 하면 $\text{grad}\varphi = (\varphi_x, \varphi_y) = F = (x + 2y, 2x + 1)$
  $$\varphi_x = x + 2y, \quad \varphi_y = 2x + 1$$
  가 되는 $\varphi(x, y)$를 구하는 문제이다.
  $$\varphi_x = x + 2y \xrightarrow{\text{x로 적분}} \varphi = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + h(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \varphi_y = 2x + h'(y) \xrightarrow{\varphi_y = 2x+1} h'(y) = 1,\ h(y) = y + c$$
  가 되어 답은 $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y + c$ 이다.

- Vector field $F = (x + 2y, x + 1)$의 잠재함수는?
  (sol) $u_x = x + 2y \xrightarrow{\text{x로 적분}} u = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + h(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} u_y = 2x + h'(y) \xrightarrow{u_y = x+1} \text{impossible}$
  가 되어 답은 잠재함수는 없다 이다.

- Vector field $F = (y\cos z - yze^x\ ,\ x\cos z - ze^x + 1 + z\ ,\ -xy\sin z - ye^x + y)$의 잠재함수는?
  (sol)
  $$u_x = y\cos z - yze^x \xrightarrow{\text{x로 적분}} u = xy\cos z - yze^x + h(y, z) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} u_y = x\cos z - ze^x + h_y$$
  $$\xrightarrow{u_y = x\cos z - ze^x + 1 + z} h_y = 1 + z \xrightarrow{\text{y로 적분}} h(y, z) = y + yz + k(z), \quad u = xy\cos z - yze^x + y + yz + k(z)$$
  $$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} u_z = -xy\sin z - ye^x + y + k'(z) \xrightarrow{u_z = -xy\sin z - ye^x + y} k'(z) = 0, \quad k(z) = c.$$

- $\boldsymbol{a}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad \text{and} \quad \text{grad}\left\{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = \boldsymbol{a}(x, y)$

- 그렇다면, '각원소벡터장 $\boldsymbol{a}$의 잠재함수는 $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 이다' 라고 하면 옳은 말일까?

- 그렇다면 정의역을 제한하면 각원소벡터장의 잠재함수는 존재한다고 말할 수 있는가?
  (답) 맞다.

- 그렇다면 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$에서 각원소벡터장의 잠재함수는 존재하는가?
  (답)결론적으론 존재하지 않는다. 하지만 현재로선 왜 그런지 설명할 수 없다. 뭐 그렇다고 크게 어려운 것도 아니다. 다음의 선적분기본정리만 알면된다.

보존장 Conservative Vector field
잠재함수가 존재 하는 벡터장을 보존장 (Conservative Vector field)이라고 한다.

3.2 선적분기본정리

선적분 기본정리(p580)

정리 3.1. n-공간의 열린집합에 U에서 정의된 일급함수 $\varphi : U \to \mathbb{R}$와 U위의 일급곡선 $\boldsymbol{X} : [a,b] \to U$에 대하여

$$\int_X \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varphi(\boldsymbol{X}(b)) - \varphi(\boldsymbol{X}(a)).$$

다시 말해, 보존장의 선적분은 곡선의 끝점과 시작점에서의 잠재함수값의 차이이다.

(증명).

$$\int_X \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{X}(t)) \cdot \boldsymbol{X}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}t = \varphi(\boldsymbol{X}(b)) - \varphi(\boldsymbol{X}(a)).$$

□

순환도와 보존장
닫힌곡선 C위에서의 벡터장의 선적분을 순환도라 하고 닫힌곡선위의 선적분임을 강조하기 위해 다음과 같이 표현한다.

$$\oint_C F \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

따름정리 3.2. n-공간의 열린집합에 U에서 정의된 일급함수 $\varphi : U \to \mathbb{R}$와 U위의 일급곡선 $\boldsymbol{X} : [a,b] \to U$에 대하여

$$\oint_C \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

다시 말해, 보존장의 닫힌곡선위에서의 선적분 0 이다.

잠재함수를 잠재함수라 부르는 이유
일(Work) = 에너지, 선적분 = 한 일의 양= φ값의 증가량 = 잠재적 에너지(potential energy)의 감소량.
즉,

$$\text{잠재에너지 } E_p = -\varphi(\boldsymbol{X}).$$

각원소벡터장은 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$에서 보존장이 아니다. 이제 비로소 이 사실을 증명할 수있다.

3.3 알짜힘장 Net force field, 운동에너지, 역학적 에너지보존 법칙, 탈출속력

Force field F의 선적분 = 힘 F가 한 일

Net force field 의 선적분 = 운동에너지의 변화량
질량 m 인 질점(질량을 가진 점)이 어떤, not necessarily conservative, force field(힘장) F 만의 지배를 받으며 공간속에서 움직이고 있다. 질점의 운동은 매개화 $X(t)$ 로 기술되어 있다. 그러면 뉴톤의 운동 2법칙에 의해 다음 식이 성립한다.

$$F(X(t)) = mX''(t)$$

먼저, 수학1 에서 배운 내적의 미분공식을 떠올리자 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|X'(t)|^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X'(t) \cdot X'(t)\right) = X''(t) \cdot X'(t) + X'(t) \cdot X''(t) = 2X''(t) \cdot X'(t).$$

이제 힘장 F 를 $t=a$ 에서 $t=b$ 동안의 질점의 궤적을 따라 선적분해 보자.

$$\int_X F\cdot d\vec{s} = \int_a^b mX''(t)\cdot X'(t)\,dt = m\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|X'(t)|^2\right)dt = \frac{1}{2}m|X'(b)|^2 - \frac{1}{2}m|X'(a)|^2.$$

즉, 힘 F 가 한 일의 양은 운동에너지의 변화량이다 :

$$\int_X F\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2.$$

사실은 위 식이 $\frac{1}{2}mv^2$ 를 운동에너지(kinetic energy)라고 부르는 이유이다.
- 힘을 적분하는것은 힘이 한 일을 계산하는것이고 이것은 에너지의 변화량이다.
- 그 에너지의 변화량이 $\frac{1}{2}mv^2$ 의 변화량임이 식에 나타나 있다.
- 그런데 $\frac{1}{2}mv^2$ 는 속력에 의존하는 값이다. 즉,운동상태에 의존하는 에너지이므로 운동에너지라고 부르는것이다.

보존적인 알짜힘장과 역학적 에너지 보존 법칙

위에서 힘장 F 가 보존적(conservative)이라 하자. 즉,

$$F = \nabla\varphi.$$

위의 빨간 등식과 선적분 기본정리에 의해

$$\varphi(X(b)) - \varphi(X(a)) = \frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2.$$

이항하면

$$\frac{1}{2}mv(a)^2 - \varphi(X(a)) = \frac{1}{2}mv(b)^2 - \varphi(X(b)).$$

여기에서 a 와 b 는 임의 이므로 다음과 같이 기술되는 역학적에너지 보존 법칙이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \varphi(X(t)) \equiv \text{constant}.$$

즉, 보존적인 힘장에 의해 지배되는 운동에서
운동에너지(kinetic energy) $E_k = \frac{1}{2}mv(t)^2$ 와 포텐셜에너지 $E_p = -\varphi(X(t))$ 의 합 E는 보존된다 :

$$E_k + E_p = E \equiv \text{constant}.$$

그래서 잠재함수가 존재하는 벡터장을 보존장이라 부르는 것이다.

역학적에너지 보존법칙의 결과론적 증명

결과를 다 알려주고 증명하라고 하면 미분하면 된다.

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv(t)^2 - \varphi(X(t))\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mX'(t)\cdot X'(t) - \varphi(X(t))\right\} = mX''\cdot X' - \nabla\varphi(X)\cdot X' = F(X)\cdot X' - F(X)\cdot X' = 0.$$

이 증명은 간단하고 나무랄 곳이 없지만 맹숭맹숭하다.

요약

알짜힘장(net force field)의 선적분이 운동에너지의 변화량이라는 사실과 힘장이 보존적일 때는 이 선적분이 잠재함수값의 변화량이기도 하다라는 사실에 주목해야 뭐가 어떻게 돌아가는 스토리인지 잘 파악한 것이다.

- 벡터장 F가 Force field일 때, $\int_C F\cdot d\vec{s}$: 힘 F가 한 일.
- 벡터장 F가 Net force field일 때, $\int_C F\cdot d\vec{s}$: 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2$ 의 변화량 .
- 벡터장 F가 Conservative force field일 때, $\int_C F\cdot d\vec{s}$: 잠재함수값의 변화량
- 벡터장 F가 Conservative net force field일 때, $\int_C F\cdot d\vec{s}$: 운동에너지의 변화량인 동시에 잠재함수값의 변화량. 그래서 역학적 에너지 보존법칙 성립.

3.4 상수중력장과 뉴턴의 중력장

지표면 근처에서의 근사중력장과 역학적에너지 보존법칙.

$$F \approx -mg\boldsymbol{k} = (0,0,-mg),\quad g = 9.8\,\mathrm{m/sec}^2. \quad\Rightarrow\quad \varphi = -mgz - c \quad\Rightarrow\quad \text{위치에너지} = mgh.$$

(기준면($h=0$)에서의 위치에너지를 0으로 두는것이 현명한 일이다.)
그러므로 다음과 같은 역학적에너지 보존법칙이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh \equiv \text{constant}.$$

이러한 상수중력장 안에선 돌을 아무리 세게 던져도 돌은 지표면에 다시 떨어진다. 물론 작은 범위의 영역에서의 중력장의 근사라는 측면을 고려하면 돌을 아주 세게 던진다는 설정은 적절치 못하다.

입체각 벡터장과 잠재함수

$$\boldsymbol{A}_3 = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \text{ 의 잠재함수는 } \varphi = -\frac{1}{r} + c$$

임을 알고 있죠? 이 때, 상수 c는 편한대로 정하면 된다. 보통 $c=0$로 놓는다. 젤 깔끔하니까.

Newton gravity와 역학적에너지 보존법칙
지구질량 M, 나르는 돌의 질량 m. 지구중심 으로부터의 거리 r.

$$\text{지구의 돌에 미치는 중력 } F = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad F \text{ 의 잠재함수 } \varphi = \frac{GMm}{r}.$$

그러므로 다음과 같은 역학적에너지 보존법칙이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \equiv E(\text{constant}).$$

상수 c는 initial distance from the center r_0와 initial speed v_0에 대해

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GMm}{r_0}.$$

이 때, 돌의 속력 v는 중심거리 r의 함수이며 속도 $\vec{v}$의 방향과 무관하다 :

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + 2E}.$$

원운동속력
질량이 m인 돌이 질량이 M인 중심질량으로 부터 거리 r인 원을 따라 원운동하고 있다.
- 등속력 으로 운동한다. 이 속력을 $v_c = v_c(r)$ 이라 놓자.
- 운동을 매개화 하면 $\boldsymbol{r}(t) = r(\cos\omega t, \sin\omega t)$.
- 속도 $\boldsymbol{r}'(t) = r\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$ and 가속도 $\boldsymbol{r}''(t) = r\omega^2(-\cos\omega t, -\sin\omega t)$.
- $v_c = r\omega$ and $r\omega^2 = \frac{GM}{r^2}$ 이므로 중심과의 거리 r인 원운동속력은

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

역학적 에너지가 작은 경우와 큰 경우 그리고 탈출속력
Initial distance from the center r_0와 initial speed v_0에 대해

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \equiv E \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + 2E}.$$

1. When $E < 0$. i.e. 초기중심거리 r_0를 고려할 때 초속력 v_0가 작은 경우.

$$\frac{2GM}{r} + 2E \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r \leq \frac{GM}{-E}$$

   - 초속도 $\boldsymbol{v}_0$ 가 radial vector인 경우 :
     - 속력이 0이 되는 순간이 있고 이 때, 돌은 최대거리 $\frac{GM}{-E}$에 도달한다.
   - 초속도 $\boldsymbol{v}_0$ 가 radial vector가 아닌 경우 :
     - 속력은 항상 양수이고 돌은 거리 $\frac{GM}{-E}$에 도달하지 못한다.
     - 돌은 타원궤도를 돈다. 이 사실을 처음 증명하신분은 뉴턴이다. 뉴턴은 처음에 미분방정식을 풀지 않고 타원의 성질을 이용하는 그리스 논증기하만으로 아름답게 풀었다. 이 아름다운 증명은 케플러가 비록 증명은 하지 않았지만 답을 미리 알려줬기 때문에 가능했다. 이 사실을 증명하기 위해서 어떤 미분방정식을 풀어도 된다.

2. When $E > 0$. i.e. 초기중심거리 r_0를 고려할 때 초속력 v_0가 큰 경우.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + 2E} > \sqrt{2E} > 0$$

   이므로 속력의 하한이 양수이다.

- 초속도 $\mathbf{v}_0$ 가 radial vector인 경우 :
  - 돌은 모든 등포텐셜면을 돌파한다.
- 초속도 $\mathbf{v}_0$ 가 radial vector가 아닌 경우 :
  - 이 경우에도 돌은 모든 등포텐셜면을 돌파한다. 왜냐하면 돌의 궤적이 유계라면 돌은 maximal equipotential surface를 touch하고 중심쪽으로 가까워지는데 touch속력이 원운동속력보다 크므로 모순이다.

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r} + 2E} > \sqrt{\frac{GM}{r}} = v_c(r)$$

그러므로 $r = \infty$ 까지 날아가고 속력은 $v_\infty = \sqrt{2E}$ 로 수렴한다.
돌의 궤도는 쌍곡선이다.

3. When $E = 0$. 초속력이 크지도 작지도 않은 경우.

$$v = v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \neq 0.$$

이므로 속력은 항상 양수이고 $\lim_{r\to\infty} v_e(r) = 0$ 이다. 그리고 r은 한 없이 커진다는것을 간단히 논증할 수 있다.

- 초속도 $\mathbf{v}_0$ 가 radial vector인 경우 :
  - 돌은 모든 등포텐셜면을 돌파한다. 왜냐하면 maximal equipotential surface가 존재하면 그곳에서의 속도는 0이 되므로 모순이다.
- 초속도 $\mathbf{v}_0$ 가 radial vector가 아닌 경우 :
  - 이 경우에도 돌은 모든 등포텐셜면을 돌파한다. 왜냐하면 돌의 궤적이 유계라면 돌은 maximal equipotential surface를 touch하고 중심쪽으로 가까워지는데 touch속력이 원운동속력보다 크므로 모순이다.

$$v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} > \sqrt{\frac{GM}{r}} = v_c(r)$$

그러므로 $r = \infty$ 까지 날아가고 속력은 $v_\infty = 0$ 로 수렴한다.
돌의 궤도는 포물선이다.

탈출속력

- $v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ 를 중심거리 r에서의 탈출속력 escape velocity 라고 한다.
- 초속도의 방향과 무관하며 초속도의 방향과 무관하게 돌은 우주의 심원($r = \infty$)까지 날아간다.
- 우주의 심원에서 $E = 0$ and $E_k(\infty) = E_p(\infty) = 0$.
- 초속력이 탈출속력인 돌의 어떤 위치에서의 속력은 그 위치에서의 탈출속력이다. 왜냐 하면 $r = \infty$ 까지 날아가고 속력은 $v_\infty = 0$ 로 수렴하니까.

제1, 제2, 제3우주속력

지구반지름 : $R_e = 6400\text{km}$
지구질량 : M_e
지구와 태양사이의 거리 : $R_{e.o.} = 1\text{AU} = 150,000,000\text{km}$
태양질량 : M_s.

- 제1우주속력 : 지구의 지표면근처에서 원운동하는 돌의 속력 V_1.

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e}} \approx 7.905\,\text{km/sec}$$

- 제2우주속력 : 유명한 속력. 지구의 지표면에서의 지구탈출속력 V_2.

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2}\,V_1 \approx 11.19\,\text{km/sec}$$

- 제3우주속력 : 지구 공전궤도에서의 태양탈출속력 V_3.

$$V_3 = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_{e.o.}}} \approx 42\,\text{km/sec}$$

- 지구의 공전속력 :

$$\frac{V_3}{\sqrt{2}} \approx 29.76\,\text{km/sec}$$

그래서 태양탈출속력을 $(42 - 29.76)\,\mathrm{km/sec}$ 라고 써놓은 블로그도 본 적이 있다.
- 적도에서의 지구 자전속력 :

$$0.460\,\mathrm{km/sec}$$

로케트로 여행을 할 때 연료를 잘 쓰는것이 중요하고 이것은 속도의 변화량 $\Delta\vec{v}$와의 싸움이다. 지구에서 로케트를 쏘아 올릴때 지구 자전속력도 꽤 소중하다고 들었다.

3.5 닫힌 벡터장과 푸앵카레 보조정리

닫힌벡터장 Closed vector field

$$F = (f_1, \dots, f_n) \text{ 이라 하자. 이 때 } D_i f_j = D_j f_i \quad \forall i, j$$

를 만족하면 이 벡터장 F를 닫힌벡터장 이라 부른다.

- 각원소벡터장 $\boldsymbol{a}$, n-차원 입체각벡터장 A_n은 모두 닫힌 벡터장이다. 각자 확인해 보라.

- $F = (x + 2y, 2x + 1)$
- $\boldsymbol{r}^*(x, y) = (-y, x)$, $F = (x + 2y, x + 1)$
- (정리 p588)일급벡터장에 대해

$$\text{Conservative} \quad \Rightarrow \quad \text{Closed.}$$

(증명)편미분교환법칙에 의해 당연.

- 이 정리의 역은 성립할까? 답은 NO! 임을 이미 알고 있다.

정리 3.3. (푸앵카레*Poincare* 보조정리 *1, p590*) **볼록집합(*convex set*)**에서 정의된 벡터장에 대해

$$\text{Closed} \quad \Rightarrow \quad \text{Conservative.}$$

(증명)

정리 3.4. (푸앙카레*Poincare* 보조정리 *2*) **별모양집합(*starlike set*)**에서 정의된 벡터장에 대해

$$\text{Closed} \quad \Rightarrow \quad \text{Conservative.}$$

정리 3.5. (진짜배기 푸앙카레*Poincare* 보조정리) **단순연결집합(*simply connected*)**에서 정의된 벡터장에 대해

$$\text{Closed} \quad \Rightarrow \quad \text{Conservative.}$$

잠재함수의 유일성 벡터장 F의 정의역이 곡선연결집합이다.

$$F = \mathrm{grad}\varphi_1 = \mathrm{grad}\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 \equiv c(\mathrm{constant}).$$

4 전미분과 미분형식

미분 1-형식 n-변수 함수 $f_1, \dots, f_n$에 대하여 다음 형식을 미분 1-형식이라 한다.

$$f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$$

벡터장과 미분 1-형식은 $1-1$ 대응관계가 있다.

$$F = (f_1, \dots, f_n) \quad \longleftrightarrow \quad \omega = f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n.$$

완전형식 Exact form : 잠재함수를 가지는 미분 형식

$$\text{conservative vector field} \quad \longleftrightarrow \quad \text{exact form}.$$

선적분의 표현 : 벡터장의 선적분 = 미분형식의 적분

$$\int_C F \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$$

이 표현은 그럴듯 하다.

1.

$$\int_C F \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b (f_1, \dots, f_n) \cdot ({x_1}'(t), \dots, {x_n}'(t)) \mathrm{d}t = \int_a^b (f_1 {x_1}'(t) + \cdots + f_n {x_n}'(t)) \mathrm{d}t$$

이고

$$\int_C f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \int_a^b f_1 {x_1}'(t) \mathrm{d}t + \cdots + f_n {x_n}'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b \left(f_1 {x_1}'(t) + \cdots + f_n {x_n}'(t)\right) \mathrm{d}t.$$

2. 다소 거칠게 합리화할 수도 있다.

미소 변위 벡터 $\mathrm{d}\vec{s}$ 를 $(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n)$ 이라 볼수 있으므로

$$F \cdot \mathrm{d}\vec{s} = (f_1, \dots, f_n) \cdot (\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n) = f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n.$$