

Quiz 4 (11월 29일 금 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (10점) 좌표평면에서 반원  $C$  가  $C(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  로 주어지고, 벡터장  $\mathbf{F} = (x^2 - y^3, x^3 - e^y)$  가 주어질 때, 다음 선적분 값을 구하시오.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

2. (10점)  $u^2 + v^2 \leq 1$  을 만족하는  $u, v$  에 대하여,  $x = 2u + v$ ,  $y = 4u + 3v$  일 때, 곡면  $X$  가  $X(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  로 주어져 있다. 벡터장  $\mathbf{F} = (-12x + 6y, 5x - 2y, x^2 + y^2)$  에 대하여 다음 면적분 값을 구하시오. (단, 곡면  $X$  의 향을 정하는 단위법벡터장  $\mathbf{n}$  은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$  으로 주어진다.)

$$\iint_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

#### Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1.  $x$  축 위의 구간  $[-1, 1]$  을  $L$  이라 하자.  $L$  과  $C$  로 둘러싸인 영역  $D$  에 대하여, 그린 정리를 사용하면

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \text{rot} \mathbf{F} \, dV_2 - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3\text{점})$$

$$= \iint_D 3(x^2 + y^2) dV_2 - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6\text{점})$$

$$= \int_0^\pi \int_0^1 3r^3 \, dr d\theta - \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3} \quad (10\text{점})$$

이다.

\*  $\partial D = C$  로 착각했더라도,  $\iint_D \text{rot} \mathbf{F} \, dV_2 = \frac{3\pi}{4}$  를 제대로 계산했다면 3점 인정.

2. 함수  $G(u, v) = (2u + v, 4u + 3v)$ ,  $D : u^2 + v^2 \leq 1$  이라고 하자. 주어진 매개화에 대해  $\mathbf{N} = X_x \times X_y = (-2x, -2y, 1)$  이고, (3점)

$$\det G' = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \text{ 이므로} \quad (2\text{점})$$

$$\begin{aligned} \iint_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{G(D)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dx dy = \iint_{G(D)} (25x^2 - 22xy + 5y^2) \, dx dy \\ &= \iint_D 4(u^2 + v^2) |\det G'| \, du dv = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr d\theta \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

이다. (10점)

\* 처음부터 매개화를  $\tilde{X}(u, v) = (X \circ G)(u, v)$ ,  $u^2 + v^2 \leq 1$  로 생각한 경우,  $\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = (-8u - 4v, -16u - 12v, 2)$  를 제대로 계산하면 5점 인정.