Quiz 4 (11월 28일 금 7, 8 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 곡선 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

2. (7점) 원점에서 반지름의 길이가 3 인 공 $x^2 + y^2 + (z-4)^2 \le 3^2$ 을 바라본 입체각을 구하시오.

3. (7점) 곡선 $X(t) = (2\cos t, \sin t)$, $(0 \le t \le \pi)$ 와, 벡터장

$$\mathbf{A}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

에 대해,

$$\int_X \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

를 구하시오. (단, $\mathbf{n}$ 은 X 를 따르는 단위법벡터장이고, $\mathbf{n}$ 의 y 축 방향 성분은 항상 0 이상이다.)

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1. 그린정리를 써서 구한다. 주어진 영역을 D 라고 쓰면,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y dx + x dy \quad (3\text{점}) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^3 t(3\sin^2 t\cos t) - \sin^3 t(-3\cos^2 t\sin t)dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3}{8}\pi \quad (6\text{점})
\end{aligned}$$

2. 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 구면 중에서 $z \geq \frac{\sqrt{7}}{4}$ 인 부분이다. 아르키메데스의 원리에 의해 이 부분의 넓이는 $2\pi\left(1-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ 이다. (7점)

3. 원점 주변에 반지름이 c 인 조그만 반원을 그리고, 이 반원의 바깥, 곡선의 안쪽, $y \geq 0$ 으로 둘러싸인 영역을 D 라 하자.
D 에서 $\mathbf{A}$ 는 잘 정의된 일급벡터장이고, $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ 이므로 발산정리에 의해

$$\iint_D \mathrm{div}\mathbf{A}\; dV_2 = 0$$

이다.
∂D 는 X 와, 반원의 경계 Y 와, 두 개의 선분 Z_1, Z_2 로 이루어져 있다. 선분에서의 적분값이 0 임은 쉽게 알 수 있다.
따라서 구하는 값은 반원의 경계에서 y 축의 양의 방향으로 법선을 준 $\mathbf{n}$ 에 대해 $\displaystyle\int_Y \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\; ds$ 을 구한 것과 같다. 이 값은 π 다.

(채점 기준)

• $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ 임을 보이면 2점.

• 발산 정리를 써서 주어진 선적분이 반지름의 길이가 충분히 작은 반원 위에서의 선적분과 같음을 잘 보이면 5점.

• 올바른 선적분 값을 계산해 내면 7점.