Le consommateur :

Exercice 10 : Obélix parle trop.

Alexis VIALATTE

December 17, 2020

Énoncé

Tout le monde sait qu'Obélix aime consommer des sangliers et des litres de cervoise. Notons x_1, la quantité consommée de cervoise et x_2 la quantité consommée de sanglier. La fonction d'utilité d'Obélix est telle que : $\mathcal{U}(x_1; x_2) = min\{x_1 + 1; x_2 + 2\}$. La monnaie est le sesterce : $\mathcal{S}$.

Sommaire

Question 1

Tracer des courbes d'indifférence.

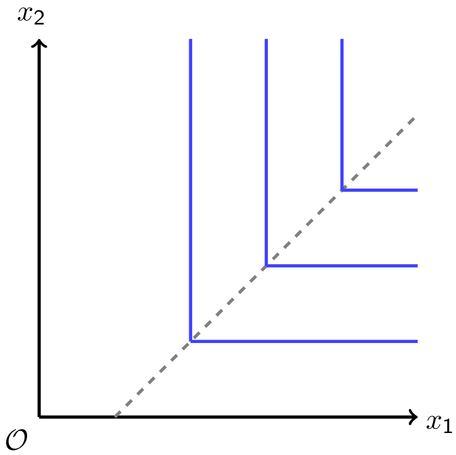
Question 1

Tracer des courbes d'indifférence.

Nous allons chercher la bissectrice entre $x_1 + 1$ et $x_2 + 2$.

$$x_1 + 1 = x_2 + 2 \iff x_2 = x_1 - 1 \tag{1}$$

Question 1



Question 2

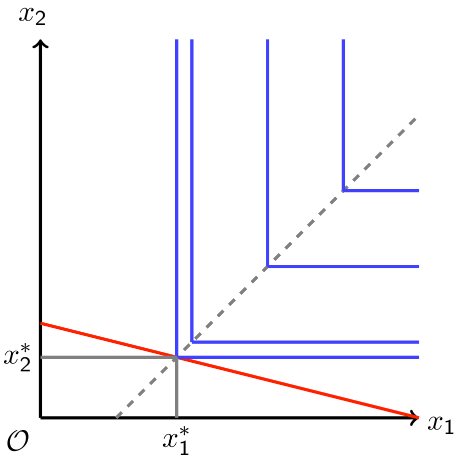
Sachant que le prix d'un litre de cervoise p_1 est de $1\mathcal{S}$, le prix d'un sanglier p_2 est de $4\mathcal{S}$ et le revenu $\mathcal{M}$ d'Obélix est égal à $1\mathcal{S}$, déterminer le panier de consommation qui maximise l'utilité d'Obélix.

Question 2

Sachant que le prix d'un litre de cervoise p_1 est de $1\mathcal{S}$, le prix d'un sanglier p_2 est de $4\mathcal{S}$ et le revenu $\mathcal{M}$ d'Obélix est égal à $1\mathcal{S}$, déterminer le panier de consommation qui maximise l'utilité d'Obélix.

$$\mathcal{P}^{\mathsf{C}}_{\underset{x_1,x_2}{\mathsf{max}}} \begin{cases} \mathcal{U}(x_1, x_2) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathcal{M} \end{cases} \tag{2}$$

Question 2



Question 2

Calculs 1

Nous remplaçons l'équation 1 dans la contrainte budgétaire pour trouver x_1^* puis nous remplaçons x_1^* dans l'équation 1 pour trouver x_2^* :

$$p_1x_1 + p_2(x_1 - 1) = \mathcal{M} \iff p_1x_1 + p_2x_1 - p_2 = \mathcal{M}$$

$$x_1(p_1 + p_2) - p_2 = \mathcal{M} \iff x_1^* = \frac{\mathcal{M} + p_2}{p_1 + p_2}$$

$$x_2^* = x_1^* - 1 \iff x_2^* = \frac{\mathcal{M} + p_2}{p_1 + p_2} - 1$$

Question 2

Nous avons :

$$\mathcal{P}^{C}_{\underset{x_1,x_2}{max}} \begin{cases} x_1^* = \frac{\mathcal{M}+p_2}{p_1+p_2} \\ x_2^* = \frac{\mathcal{M}-p_1}{p_1+p_2} \end{cases} \tag{3}$$

Nous remplaçons les valeurs paramètriques de l'équation 3 par les valeurs numériques de la Question 2 :

$$\mathcal{P}^{C}_{\underset{x_1,x_2}{max}} \begin{cases} x_1^* = 4 \\ x_2^* = 3 \end{cases}$$

Question 3

Déterminer pour chaque cas, le revenu qui permet d'atteindre le panier de consommation obtenu à la question précédente, sachant que les prix des biens sont :

- $p_1 = 2\mathcal{S}$ et $p_2 = 2\mathcal{S}$
- $p_1 = 4\mathcal{S}$ et $p_2 = 1\mathcal{S}$
- $p_1 = \frac{1}{2}\mathcal{S}$ et $p_2 = 4\mathcal{S}$

Question 3

Calculs 2

Nous réécrivons l'équation 3 pour trouver $\mathcal{M}$ dans chacun des cas :

$$\begin{matrix} x_1^* = \frac{\mathcal{M}+p_2}{p_1+p_2} \\ x_2^* = \frac{\mathcal{M}-p_1}{p_1+p_2} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \mathcal{M} = x_1^*(p_1+p_2) - p_2 \\ \mathcal{M} = x_2^*(p_1+p_2) + p_1 \end{matrix}$$

Question 3

Nous remplaçons les valeurs paramétriques par les valeurs numériques de la Question 3 dans chacun des cas :

- $\mathcal{M} = 14$ si $p_1 = 2$ et $p_2 = 2$
- $\mathcal{M} = 19$ si $p_1 = 4$ et $p_2 = 1$
- $\mathcal{M} = 14$ si $p_1 = \frac{1}{2}$ et $p_2 = 4$

Question 4

Définir et déterminer la courbe de demande de sanglier sachant que :

- $p_1 = 1\mathcal{S}$ et $\mathcal{M} = 16\mathcal{S}$
- p_1 et $\mathcal{M}$ sont quelconques (Tracez cette demande)

Question 4

Nous reprenons l'équation 3 :

- $\mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = \frac{15}{1+p_2}$
- $\mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = \frac{\mathcal{M}-p_1}{p_1+p_2}$

Question 4

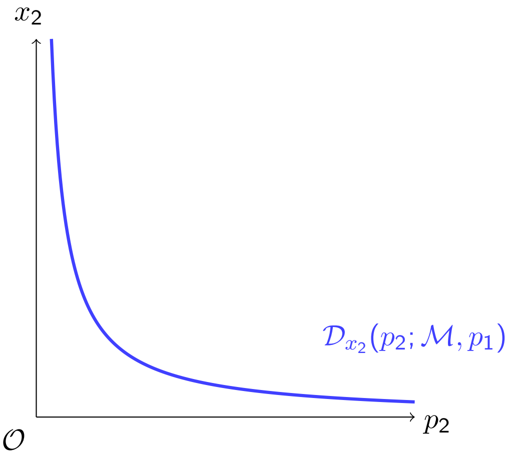
Calculs 3

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)}{\partial p_2} = -\frac{\mathcal{M} - p_1}{(p_1 + p_2)^2} \iff \frac{\partial \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)}{\partial p_2} < 0$$

$$\lim_{\overrightarrow{+\infty}}^{p_2} \frac{\partial \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)}{\partial p_2} = 0 \qquad \lim_{\overrightarrow{0}}^{p_2} \frac{\partial \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)}{\partial p_2} = +\infty$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}_{x_2}(\bullet)}{\partial p_2^2} = \frac{-2(p_1 + p_2)(p_1 - \mathcal{M})}{(p_1 + p_2)^4} \iff \frac{\partial^2 \mathcal{D}_{x_2}(\bullet)}{\partial p_2^2} > 0$$

Question 4



Question 5

Définir et calculer l'élasticité de la demande de sanglier par rapport au prix de ce bien lorsque :

- $p_1 = 1\mathcal{S}$ et $\mathcal{M} = 16\mathcal{S}$
- p_1 et $\mathcal{M}$ sont quelconques, avec $p_1 < \mathcal{M}$

$$\xi_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = \frac{\partial \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)}{\partial p_2} \frac{p_2}{\mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)} \tag{4}$$

Question 5

Calculs 4

Nous utilison l'équation 4 :

$$-\frac{\mathcal{M}-p_1}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_2}{\frac{\mathcal{M}-p_1}{p_1+p_2}} \iff -\frac{\mathcal{M}-p_1}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_2(p_1+p_2)}{\mathcal{M}-p_1}$$

$$-\frac{\mathcal{M}-p_1}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_2(p_1+p_2)}{\mathcal{M}-p_1} \iff -\frac{p_2}{p_2+p_1}$$

Question 5

Nous remplaçons les valeurs paramètriques par les valeurs numériques de la Question 5 :

- $\xi_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = -\frac{p_2}{p_2+1}$
- $\xi_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = -\frac{p_2}{p_2+p_1}$

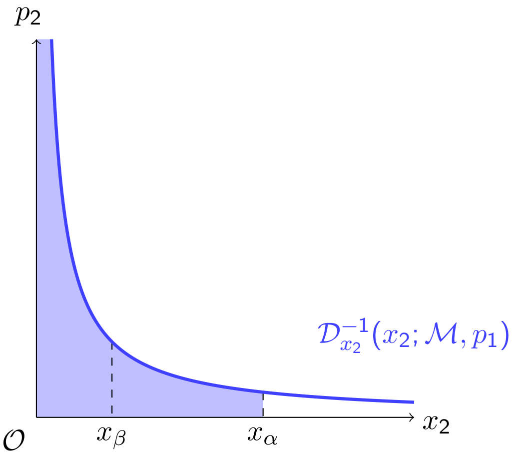
Question 6

Calculez la perte de surplus brut et net d'Obélix lorsque le prix du sanglier sur le marché passe de 4$\mathcal{S}$ à 14$\mathcal{S}$ par unité, dans le cadre de la question 4.1. Déterminez l'effet revenu et l'effet substitution.

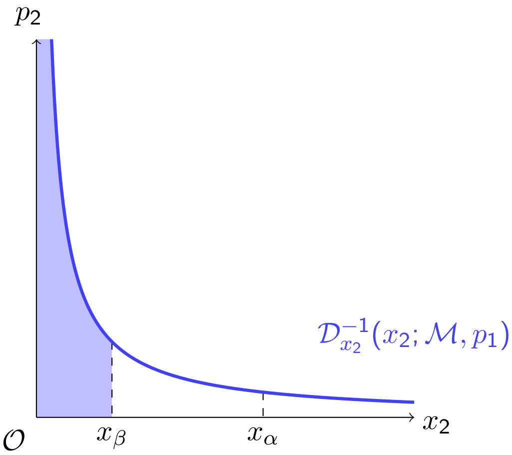
$$\Delta \mathbb{S}_B^C = -\int_{x_\beta}^{x_\alpha} \mathcal{D}_{x_2}^{-1}(x_2; \mathcal{M}, p_1) dx_2 \qquad (5)$$

$$\Delta \mathbb{S}_N^C = -\int_{p_\alpha}^{p_\beta} \mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) dp_2 \qquad (6)$$

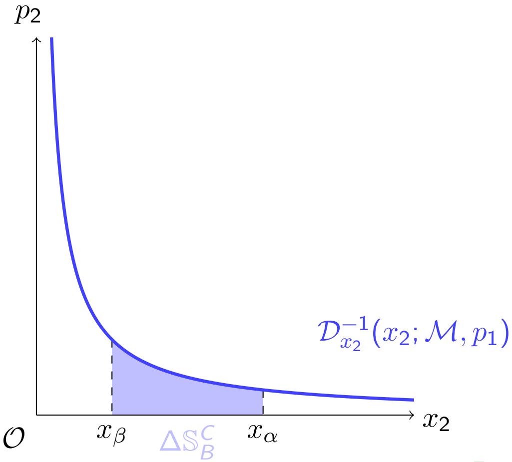
Question 6



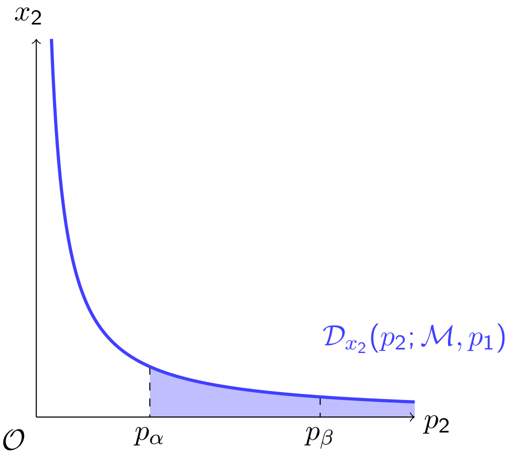
Question 6



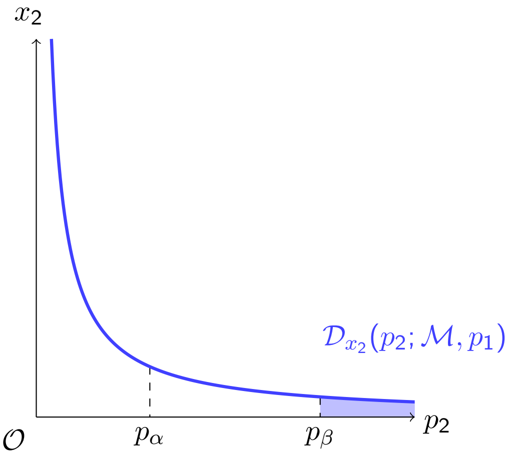
Question 6


p_2
$\mathcal{D}_{x_2}^{-1}(x_2; \mathcal{M}, p_1)$
x_2
$\mathcal{O}$
x_β
$\Delta\mathbb{S}_B^C$
x_α

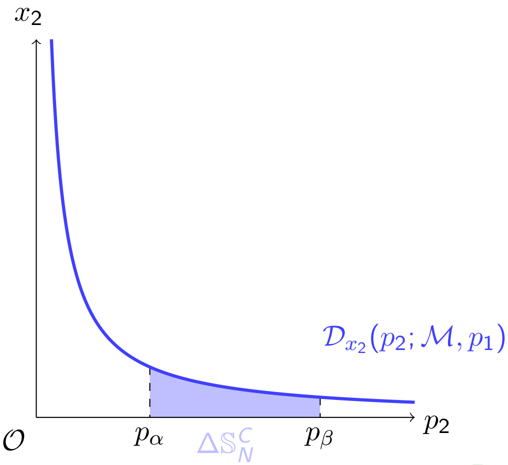
Question 6



Question 6



Question 6


x_2
$\mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1)$
p_2
$\mathcal{O}$
p_α
$\Delta\mathbb{S}_N^C$
p_β

Question 6

Calculs 5

$$\mathcal{D}_{x_2}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = \frac{\mathcal{M} - p_1}{p_2 + p_1} \iff \mathcal{D}_{x_2}(p_2; 16, 1) = \frac{15}{p_2 + 1}$$

$$x_2 = \frac{\mathcal{M} - p_1}{p_2 + p_1} \iff p_2 = \frac{\mathcal{M} - p_1}{x_2} - p_1$$

$$\mathcal{D}_{x_2}^{-1}(p_2; \mathcal{M}, p_1) = \frac{\mathcal{M} - p_1}{x_2} - p_1 \iff \mathcal{D}_{x_2}^{-1}(p_2; 16, 1) = \frac{15}{x_2} - 1$$

Question 6

Calculs 5

Nous utilisons les équations 5 et 6 et nous remplaçons les valeurs paramétriques par les valeurs numériques de la Question 6 :

$$\Delta\mathbb{S}_B^C = -\int_1^3 \left(\frac{15}{x_2} - 1\right) dx_2 \iff \Delta\mathbb{S}_B^C = -\Big[15\ln(x_2) - x_2\Big]_1^3$$

$$\Delta\mathbb{S}_B^C \approx -14,48$$

$$\Delta\mathbb{S}_N^C = -\int_4^{14} \left(\frac{15}{p_2 + 1}\right) dp_2 \iff \Delta\mathbb{S}_N^C = -\Big[15\ln(p_2 + 1)\Big]_4^{14}$$

$$\Delta\mathbb{S}_N^C \approx -16,48$$