Análisis de Series Temporales

Clase 3 - Modelos ARMA(p,q)

Rodrigo Del Rosso
RDelRosso-ext@austral.edu.ar

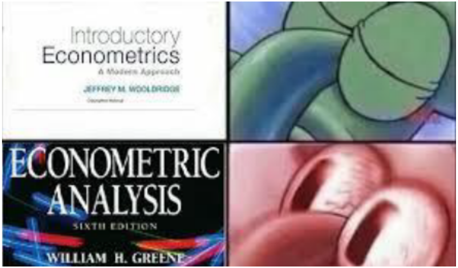
16 de Octubre de 2021

UNIVERSIDAD AUSTRAL | INGENIERÍA

CIENCIA DE DATOS
Maestría en Ciencia de Datos

Agenda

- Repaso de conceptos de $AR(1)$ y $MA(\infty)$
- Representación de procesos $ARMA(p, q)$
- Estacionariedad e Invertibilidad
- Funciones de Autocovarianzas y Autocorrelaciones



Repaso de conceptos anteriores

Recordemos: Condiciones de estacionariedad e invertibilidad – $AR(p)$

Supongamos un proceso que admite una representación:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Utilizando el operador "lag" podemos escribir:

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p\right) Y_t = \left[\Phi\left(L\right)^{-1}\right] \varepsilon_t = \Psi\left(L\right) \varepsilon_t$$

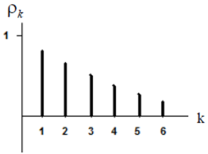
Dónde $\Phi(L)$ denota el operador autorregresivo de orden p. Entonces... la condición de estacionariedad está relacionada con que $\Psi\left(L\right)$ converja para $|L| \leq 1$ $\rightarrow \boxed{Y_t = \left[\Phi\left(L\right)^{-1}\right] \varepsilon_t = \Psi\left(L\right) \varepsilon_t}$

Como los ϕ_j pueden ser positivos o negativos, una condición suficiente para la misma propiedad es que: $|\phi_1| + |\phi_2| + \ldots + |\phi_p| < 1 \rightarrow$ es decir, $\boxed{|\phi_j| < 1 \quad \forall j}$

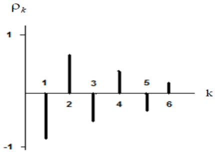
Recordemos: Modelos Autorregresivos de primer orden – $AR(1)$

CORRELOGRAMA: Es la representación gráfica de la FAC. Para el caso de un $AR(1)$ estacionario se tienen dos formas posibles de correlograma, según cuál sea el signo de la raíz de su EC (que en este caso coincide con el coeficiente del modelo):

Si la raíz de la EC es positiva, es decir, si $0 < \phi < 1$: Al ser ϕ positivo e inferior a la unidad, el correlograma muestra un decrecimiento exponencial monótono y se observa memoria infinita (como en todo proceso AR)



Si la raíz de la EC es negativa, es decir, si $-1 < \phi < 0$: Al ser ϕ negativo y, en valor absoluto, inferior a la unidad, el correlograma describe un decrecimiento oscilante y mantiene la memoria infinita (como en todo proceso AR)



Nota: El aspecto común que caracteriza al correlograma de todo proceso autorregresivo está dado por su "memoria infinita" (lo cual permitirá diferenciarlos de los modelos de Medias Móviles, MA)

Recordemos: Modelos de Medias Móviles (MA)

Un modelo de medias móviles de orden q, o abreviadamente un modelo $MA(q)$, se define de la siguiente forma:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \ \varepsilon_{t-q}$$

Conviene señalar que los coeficientes van precedidos por el signo negativo, por cuestión meramente de conveniencia en la notación.

Utilizando el operador polinominal de retardos: $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q$

El modelo de medias móviles se puede expresar de forma compacta:

$$\boxed{Y_t = \theta(L) \ \varepsilon_t}$$

La media de un modelo MA es cero, cualesquiera que sean los valores de θ:

$$E[Y_t] = \theta(L) \ E[\varepsilon_t] = 0$$

Recordemos: Estacionariedad e invertibilidad

ESTACIONARIEDAD

Los modelos MA son **SIEMPRE** estacionarios con independencia de los valores de los coeficientes, ya que son combinaciones lineales de errores ruido blanco.

INVERTIBILIDAD

Dado que los modelo MA son estacionarios, pueden ser invertible en un AR(∞) bajo ciertas condiciones. La invertibilidad se puede evaluar ya sea a partir de las raíces de la Ecuación Característica (EC) como a partir de las raíces del Polinomio Característico (PC).

$$|Raices\ EC| < 1$$

$$|Raices\ PC| > 1$$

A diferencia de los modelos AR, los modelos de Medias Móviles tiene **memoria finita**.

Procesos $ARMA(p, q)$

Introducción a Modelos $ARMA(p, q)$

Definición

Los modelos mixtos autorregresivos-medias móviles, $ARMA(p, q)$, vienen definidos de la siguiente forma:

$$Y_t - \phi_1 \; Y_{t-1} - \ldots - \phi_p \; Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \; \varepsilon_{t-q}$$

Donde el lado izquierdo de la igualdad describe un proceso AR y el lado derecho, un proceso MA. Es un tema de conveniencia nomás... tranquilamente se puede escribir Y_t de lado derecho todo el $ARMA(p, q)$ del lado derecho de la igualdad.

Utilizando los operadores polinomiales de retardo, el modelo queda expresado en forma compacta del siguiente modo:

$$\boxed{\phi\,(L) \;\; Y_t = \theta\,(L) \;\; \varepsilon_t}$$

Introducción a Modelos $ARMA(p, q)$

Para que el modelo sea **ESTACIONARIO** se requiere que las raíces de la ecuación polinomial caigan fuera del círculo unitario:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1\, L - \phi_2\, L^2 - \ldots - \phi_p\, L^p = 0$$

Por lo tanto, como un proceso MA es siempre estacionario, para evaluar la estacionariedad de los modelos $ARMA(p, q)$ **solo basta con probar la estacionariedad de su parte autorregresiva**.

- ✓ Si se cumplen las condiciones de estacionariedad, el modelo $ARMA(p, q)$ se puede expresar como un $MA(\infty)$.
- ✓ Si se cumplen las condiciones de invertibilidad, el modelo $ARMA(p, q)$ se puede expresar mediante un $AR(\infty)$.

Estacionariedad e Invertibilidad

Estacionariedad

Si se cumplen las condiciones de Estacionariedad entonces es posible transformar a un proceso finito en un $MA(\infty)$. Formalmente,

$$ARMA\,(p,q) \rightarrow \; MA(\infty)$$

Invertibilidad

Si se cumplen las condiciones de Invertibilidad entonces es posible transformar a un proceso finito en un $AR(\infty)$. Formalmente,

$$ARMA\,(p,q) \rightarrow \; AR(\infty)$$

Invertibilidad de un $ARMA(p, q)$ en un $MA(\infty)$

Sea $\{Y_t\}$: $ARMA(p, q)$ una combinación de los procesos $AR(p)$ y $MA(q)$. En términos formales,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right) Y_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) \epsilon_t$$

$$\Phi\,(B)\; Y_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

Donde $\Phi\,(B)$ y $\Theta(B)$ representan los polinomios de grado p y q de las representaciones AR y MA respectivamente.

$$Y_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\epsilon_t = \frac{1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q}{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}\epsilon_t = \frac{1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q}{\left(1-G_1^{-1}B\right)\left(1-G_2^{-1}B\right)\ldots(1-G_p^{-1}B)}\epsilon_t$$

$$\therefore\; Y_t = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{\left(1-G_i^{-1}B\right)}\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \epsilon_t = \psi(B)\epsilon_t$$

Donde $\psi(B)$ es el operador polinómico de la representación $MA(\infty)$ resultante.

$$\psi\,(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

Invertibilidad de un $ARMA(p,q)$ en un $MA(\infty)$

Si partimos de la misma igualdad

$$\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\epsilon_t = \psi(B)\,\epsilon_t$$

Existe una identidad en la igualdad anterior, $\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \equiv \psi(B)$

A partir de la identidad anterior es posible obtener los coeficientes de la representación infinita.

$$\Theta(B) = \Phi(B)\,\psi(B)$$

$$(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q) = (1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p)(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots)$$

Se pueden deducir un conjunto de ecuaciones que permiten obtener los ψ_j en función de los ϕ_j y θ_j.

Invertibilidad de un $ARMA(1,1)$ en un $MA(\infty)$

Veamos el caso de la invertibilidad de un $ARMA(1,1)$ en un un $MA(\infty)$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B)\, Y_t = (1 - \theta_1 B)\, \epsilon_t$$

$$\Phi\,(B)\, Y_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

Mediante una serie de pasos vistos previamente se llega a la siguiente identidad,

$$\tfrac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \equiv \psi\,(B)$$

$$\Theta\,(B) = \Phi\,(B)\,\psi\,(B)$$

$$(1 - \theta_1 B) = (1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots)$$

Invertibilidad de un $ARMA(1,1)$ en un $MA(\infty)$

Continuando...

$$(1-\theta_1 B) = (1-\phi_1 B)(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots)$$

$$(1-\theta_1 B) = (1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\ldots-\phi_1 B-\psi_1\phi_1 B^2-\psi_2\phi_1 B^3-\ldots)$$

$$1-\theta_1 B = 1+(\psi_1-\phi_1)\,B+(\psi_2-\psi_1\phi_1)\,B^2+(\psi_3-\psi_2\phi_1)\,B^3+\ldots$$

Se plantea un sistema para resolverlo,

$$1 = 1$$

$$-\theta_1 B = (\psi_1-\phi_1)\,B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\psi_1 = \phi_1-\theta_1}$$

$$0B^2 = (\psi_2-\psi_1\phi_1)\,B^2 \quad \Longrightarrow \quad \psi_2 = \phi_1\psi_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\psi_2 = \phi_1(\phi_1-\theta_1)}$$

$$\vdots$$

$$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1-\theta_1)} \qquad (\forall j = 1,2,3,\ldots)$$

Invertibilidad de un $ARMA(p, q)$ en un $AR(\infty)$

Para que el modelo sea invertible se requiere que las raíces de,

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

caigan fuera del círculo unitario.

$$\Phi(B)\, Y_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

Ahora se busca la representación $AR(\infty)$

$$\epsilon_t = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} Y_t$$

$$\epsilon_t = \frac{\Phi\ (B)}{\Theta(B)} Y_t = \frac{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}{1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q} Y_t = \frac{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}{\left(1-H_1^{-1}B\right)\left(1-H_2^{-1}B\right)\ldots\left(1-H_q^{-1}B\right)} Y_t$$

Invertibilidad de un $ARMA(p,q)$ en un $AR(\infty)$

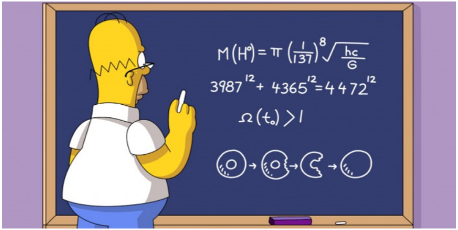
Continuando...

$$\epsilon_t = \frac{\Phi\ (B)}{\Theta(B)} Y_t = \frac{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}{1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q} Y_t = \frac{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}{\left(1-H_1^{-1}B\right)\left(1-H_2^{-1}B\right)\ldots\left(1-H_q^{-1}B\right)} Y_t$$

$$\epsilon_t = \sum_{i=1}^{q} \frac{A_i}{\left(1-H_i^{-1}B\right)} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j Y_t = \pi(B) Y_t$$

Donde $\pi(B)$ es el operador polinómico de la representación $AR(\infty)$ resultante.

$$\boxed{\pi\,(B) = \sum_{j=0}^{\infty}\ \pi_j\ B^j}$$



Invertibilidad de un $ARMA(p,q)$ en un $AR(\infty)$

Continuando...

$$\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \; B^j$$

Entonces, se verifica que para $j > p$ los coeficientes de la representación infinita se pueden calcular de la forma siguiente,

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \ldots + \theta_q \pi_{j-q}$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{llll}
ARMA\,(1,2) & cuando & j > 1 & \Rightarrow \pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} \\
ARMA\,(2,2) & cuando & j > 2 & \Rightarrow \pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} \\
ARMA\,(3,1) & cuando & j > 3 & \Rightarrow \pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} \\
ARMA\,(3,2) & cuando & j > 3 & \Rightarrow \pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2}
\end{array}$$

Esperanza Matemática

Retomemos la expresión del ARMA en término de los polinomios de operadores:

$$\Phi\,(B)\;Y_t\;=\Theta(B)\epsilon_t$$

Aplicamos el operador Esperanza Matemática miembro a miembro de la ecuación anterior,

$$E\left(\Phi\,(B)\;Y_t\right)=E\left(\Theta\,(B)\;\epsilon_t\right)=\Theta\,(B)\;\underbrace{E(\epsilon_t)}_{=0}=0$$

El valor esperado de esta representación es **cero**. Ahora bien, *¿Qué ocurre si la representación no se encuentra en variables centradas?*

$$\Phi\,(B)\;Y_t\;=\phi_0+\Theta\,(B)\;\epsilon_t$$

$$E\left(Y_t\right)=\frac{\phi_0}{\Phi(B)}=\frac{\phi_0}{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p}=\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-\ldots-\phi_p}$$

Recordar:

$\phi_1\;\;B=\phi_1\;\longrightarrow$ aplicar *Backward* a una constante da como resultado la constante.

Por lo tanto, **el valor esperado en este modelo depende si posee término independiente o no**.

Autocovarianzas

Hasta ahora vemos visto la condición de Estacionariedad, de Invertibilidad y como determinar su valor esperado bajo el cumplimiento de la primera condición. A continuación, se procederá a calcular la FAS y FAC de un modelo $ARMA(1,1)$ para luego generalizarlo para distintos valores de p y de q.

ARMA(1,1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

$$Y_t Y_{t-j} = \phi_1 Y_{t-1} Y_{t-j} + \epsilon_t Y_{t-j} - \theta_1 \epsilon_{t-1} Y_{t-j}$$

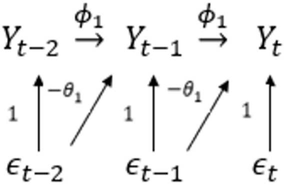
$$\gamma_j(Y) = E\left(Y_t Y_{t-j}\right) = E(\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-j} + \epsilon_t Y_{t-j} - \theta_1 \epsilon_{t-1} Y_{t-j})$$

$$\gamma_j(Y) = \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-j}) + E(\epsilon_t Y_{t-j}) - \theta_1 E(\epsilon_{t-1} Y_{t-j})$$

Autocovarianzas (continuación)

ARMA(1,1)

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1}$ $\gamma_j(Y) = \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-j}) + E(\epsilon_t Y_{t-j}) - \theta_1 E(\epsilon_{t-1} Y_{t-j})$



$j = 0$

$$\gamma_0(Y) = \phi_1 E(Y_{t-1} Y_t) + E(\epsilon_t Y_t) - \theta_1 E(\epsilon_{t-1} Y_t)$$

$$E(\epsilon_t Y_t) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_{t-1} Y_t) = E(\epsilon_{t-1}(\phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1})) = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_\epsilon^2$$

$$\boxed{\gamma_0(Y) = \phi_1 \gamma_1(Y) + \sigma_\epsilon^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_\epsilon^2}$$

Autocovarianzas (continuación)

$j = 1$

$$\gamma_1(Y) = \phi_1 E(Y_{t-1}Y_{t-1}) + E(\epsilon_t Y_{t-1}) - \theta_1 E(\epsilon_{t-1}Y_{t-1})$$

$$E(\epsilon_{t-1}Y_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2$$

$$E(\epsilon_t Y_{t-1}) = 0$$

$$\boxed{\gamma_1(Y) = \phi_1\gamma_0(Y) + 0 - \theta_1\sigma_\epsilon^2}$$

$j \geq 2$

$$\gamma_j(Y) = \phi_1 E(Y_{t-1}Y_{t-j}) + E(\epsilon_t Y_{t-j}) - \theta_1 E(\epsilon_{t-1}Y_{t-j})$$

$$\boxed{\gamma_j(Y) = \phi_1\gamma_{j-1}(Y)}$$

Cuando se supera el orden de la componente MA, en este caso de orden 1, queda únicamente el comportamiento recursivo dado por el modelo AR.

Autocovarianzas (continuación)

Ahora bien tenemos el siguiente problema,

$$\gamma_0\left(Y\right) = f\left(\gamma_1\left(Y\right)\right)$$

$$\gamma_1\left(Y\right) = f\left(\gamma_0\left(Y\right)\right)$$

Es decir, la autocovarianza de orden 0 depende de la autocovarianza de orden 1 y está última depende de la primera.

$$\begin{cases} \gamma_0\left(Y\right) = \phi_1\gamma_1\left(Y\right) + \sigma_\epsilon^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_\epsilon^2 \\ \\ \gamma_1\left(Y\right) = \phi_1\gamma_0\left(Y\right) - \theta_1\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

Pueden resolver por cualquier método que hayan visto de **resoluciones de ecuaciones** (Eliminante, Cramer, etc. Elijan la que les guste más!!!!).

Autocovarianzas (continuación)

Acá tienen un método simple...

$$\begin{cases} \gamma_0(Y) = \phi_1\gamma_1(Y) + \sigma_\epsilon^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_\epsilon^2 & (1) \\ \\ \gamma_1(Y) = \phi_1\gamma_0(Y) - \theta_1\sigma_\epsilon^2 & (2) \end{cases}$$

Se reemplaza (2) en (1),

$$\gamma_0(Y) = \phi_1(\phi_1\gamma_0(Y) - \theta_1\sigma_\epsilon^2)\sigma_\epsilon^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_\epsilon^2$$

Con un poco de álgebra se llega al siguiente resultado,

$$\boxed{\gamma_0(Y) = \frac{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma_\epsilon^2}$$

Con este resultado se reemplaza en (2) y mediante un poco de álgebra se obtiene,

$$\boxed{\gamma_1(Y) = \frac{(1-\theta_1\phi_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma_\epsilon^2}$$

Resumen de hallazgos

AUTOCOVARIANZAS

$$\gamma_j(Y) = \begin{cases} \frac{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma_\epsilon^2 & \text{si} \quad j=0 \\ \frac{(1-\theta_1\phi_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma_\epsilon^2 & \text{si} \quad j=1 \\ \phi_1\gamma_{j-1}(Y) & \text{si} \quad j>1 \end{cases}$$

AUTOCORRELACIONES

$$\rho_j(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j=0 \\ \frac{(1-\theta_1\phi_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2} & \text{si} \quad j=1 \\ \phi_1\rho_{j-1}(Y) & \text{si} \quad j>1 \end{cases}$$

Autocovarianzas y Autocorrelaciones de un $ARMA(p, q)$

Si se multiplica la representación $ARMA\,(p, q)$ ambos lados de la igualdad miembro a miembro por Y_{t-j} y se aplica el operador Esperanza Matemática se obtiene la siguiente ecuación,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$Y_t \cdot Y_{t-j} = \phi_1 Y_{t-1} Y_{t-j} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} Y_{t-j} + \epsilon_t Y_{t-j} - \theta_1 \epsilon_{t-1} Y_{t-j} - \ldots - \theta_q \epsilon_{t-q} Y_{t-j}$$

$$\gamma_j\,(Y) = E\,(Y_t \cdot Y_{t-j})$$

Por lo tanto, $\gamma_j\,(Y) \; = \phi_1 \gamma_{j-1}\,(Y) + \ldots + \phi_p \gamma_{j-p}\,(Y) + \gamma\left(\epsilon_t, Y_{t-j}\right) - \theta_1 \gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_{t-j}\right) - \ldots - \theta_q \gamma(\epsilon_{t-q}, Y_{t-j})$

Autocovarianzas y Autocorrelaciones de un $ARMA(p,q)$

$$\gamma_j(Y) = \phi_1\gamma_{j-1}(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{j-p}(Y) + \gamma\left(\epsilon_t, Y_{t-j}\right) - \theta_1\gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_{t-j}\right) - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_{t-j})$$

Si tomamos los distintos valores de j:

$j = 0$

$$\gamma_0(Y) = \phi_1\gamma_1(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_p(Y) + \gamma(\epsilon_t, Y_t) - \theta_1\gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_t\right) - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_t)$$

$$\boxed{\gamma_0(Y) = \phi_1\gamma_1(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_p(Y) + \sigma_\epsilon^2 - \theta_1\gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_t\right) - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_t)}$$

$j = 1$

$$\gamma_1(Y) = \phi_1\gamma_0(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{p-1}(Y) + \gamma\left(\epsilon_t, Y_{t-1}\right) - \theta_1\gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_{t-1}\right) - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_{t-1})$$

$$\boxed{\gamma_1(Y) = \phi_1\gamma_0(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{p-1}(Y) - \theta_1\sigma_\epsilon^2 - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_{t-1})}$$

$j = q$

$$\gamma_q(Y) = \phi_1\gamma_{q-1}(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{q-p}(Y) + \gamma\left(\epsilon_t, Y_{t-q}\right) - \theta_1\gamma\left(\epsilon_{t-1}, Y_{t-q}\right) - \ldots - \theta_q\gamma(\epsilon_{t-q}, Y_{t-q})$$

$$\boxed{\gamma_q(Y) = \phi_1\gamma_{q-1}(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{q-p}(Y) - \theta_q\sigma_\epsilon^2}$$

$j > q$

$$\boxed{\gamma_j(Y) = \phi_1\gamma_{j-1}(Y) + \ldots + \phi_p\gamma_{j-p}(Y) \qquad (j = q+1, q+2, \ldots)}$$

Autocovarianzas y Autocorrelaciones de un $ARMA(p,q)$

La FAS y FAC de un $ARMA(p,q)$ es **infinita**. Cuando se supera el orden de la componente MA, en este caso igual a q, el proceso queda definido únicamente por una combinación de funciones exponenciales decrecientes y/o sinusoidales amortiguadas.

	FAC	$FACP$
$AR(p)$	*Decrecimiento rápido de tipo geométrico puro y/o con alteración de signos, sinusoidal o mezcla de varios tipos*	*Se anula para rezagos superiores al orden p*
$MA(q)$	*Se anula para rezagos superiores a q*	*Decrecimiento rápido de tipo exponencial y/o sinusoidal*
$ARMA(p,q)$	Es infinita, cuando se supera el orden de la componente MA queda el comportamiento recursivo del AR.	Es infinita, cuando se supera el orden de la componente AR queda el comportamiento recursivo del MA.

Resumen

Resumen de Estacionariedad e Invertibilidad de los modelos $ARMA(p,q)$

	Estacionariedad	***Invertibilidad***
$AR(p)$	*Condiciones:* $\lvert Raices\ EC\rvert < 1$ $\lvert Raices\ PC\rvert > 1$	*Si es Estacionario entonces:* $AR(p) \Leftrightarrow MA(\infty)$
$MA(q)$	*Siempre*	*Condiciones:* $\lvert Raices\ EC\rvert < 1$ $\lvert Raices\ PC\rvert > 1$ $MA(q) \Leftrightarrow AR(\infty)$
$ARMA(p,q)$	*Condiciones:* $\lvert Raices\ EC\rvert < 1$ $\lvert Raices\ PC\rvert > 1$ $ARMA(p,q) \Leftrightarrow MA(\infty)$	*Condiciones:* $\lvert Raices\ EC\rvert < 1$ $\lvert Raices\ PC\rvert > 1$ $ARMA(p,q) \Leftrightarrow AR(\infty)$

Próxima Clase

* Tendencia determinística y estocástica
* Procesos no-estacionarios $\rightarrow$ Modelos integrados $I(d)$
* Modelos $ARIMA(p, d, q)$
* Modelos $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$

Lecturas

Enders. Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulos 1 - 2**.

Hyndman. Forecasting: Principles and Practice. Second Edition. Monash University, Australia. Leer **Capítulo 2**.

Uriel. Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Leer **Capítulo 2** destinado a Procesos Estocástico

Peña. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 3 - 4**

Fin