Análisis de Series Temporales

Clase 6 - Modelos de Ecuaciones Simultáneas

Rodrigo Del Rosso
RDelRosso-ext@austral.edu.ar

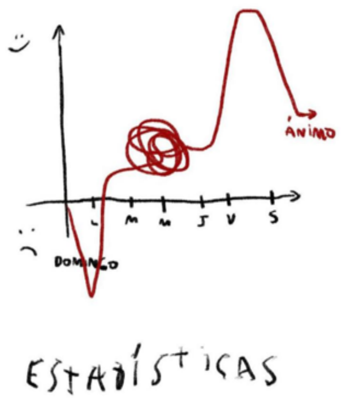
03 de Diciembre de 2021

UNIVERSIDAD AUSTRAL | INGENIERÍA

CIENCIA DE DATOS
Maestría en Ciencia de Datos

Agenda

- Introducción a modelos *VAR* y *VAR* estructural
- Análisis del vector e_t
- Estabilidad y Estacionariedad
- Función Impulso-Respuesta
- Cointegración



¡VECTORES AUTORREGRESIVOS!

(Nadie entiende que hacen esos signos de admiración ahí. . .)

Modelo VAR

Generalidades...

Se utiliza un modelo del tipo vector autorregresivo (*VAR*) cuando se quiere caracterizar las **interacciones simultáneas entre un grupo de variables**.

Un *VAR* es un modelo de ecuaciones simultáneas formado por un sistema de ecuaciones de forma reducida sin restringir. Que sean ecuaciones de forma reducida quiere decir que **los valores contemporáneos de las variables del modelo no aparecen como variables explicativas en ninguna de las ecuaciones**.

Por el contrario, **el conjunto de variables explicativas de cada ecuación está constituido por un bloque de rezagos de cada una de las variables del modelo**.

Que sean ecuaciones no restringidas significa que aparece en cada una de ellas el mismo grupo de variables explicativas.

NOTA: Pueden incluirse también como variables explicativas algunas variables de naturaleza determinista, como una posible tendencia temporal, variables ficticias estacionales, o una variable ficticia de tipo impulso o escalón, que sirve para llevar a cabo una análisis de intervención en el sistema. Por último, podría incluirse como explicativa una variable, incluso en valor contemporáneo, que pueda considerarse exógena respecto a las variables que integran el modelo *VAR*.

Modelo VAR

Relación con políticas específicas

El uso del Modelo VAR como herramienta para la evaluación de políticas, por ejemplo, económicas ya que este modelo nos muestra como cada variable afecta y es afectada por las demás variables del modelo.

Esto nos permite analizar los efectos de cualquier variable sobre otra variable, y medir el tiempo en que se tarda en estabilizar la variable después de la perturbación.

Esta metodología econométrica fue desarrolla por *Christopher Sims* criticando a los modelos de sistemas ecuaciones y sus principales aplicaciones como son los modelos macroeconométricos o de gran escala.

Ha sido una herramienta muy útil para el análisis empírico de las series de tiempo, ya que tiene las siguientes propiedades:

- (i) **parte de un enfoque ateórico;**
- (ii) **es capaz de separar los efectos pasados que explican al vector de las variables endógenas a través de su pasado o mediante variables autorregresivas.**

El enfoque *VAR* de Sims (1980)

El enfoque *VAR* de Sims (1980) tiene la propiedad deseable de que todas las variables son tratadas simétricamente para que todas las variables sean endógena conjuntamente y el econométrico no confíe en ninguna "restricción de identificación increíble". Esto se ilustra a través de un vector autorregresivo de orden uno, *VAR*(1), en su forma primitiva (Enders, 2010).

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

Aunque el enfoque *VAR* produce solo valores estimados de A_0 y A_1, para fines de exposición, es útil tratar a cada uno como conocido. Cuando no tenemos confianza que una variable es actualmente exógena, una extensión natural del análisis de la Función de Transferencia es tratar cada variable simétricamente. **El VAR Estructural (Sistema Primitivo)**:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\ z_t &= b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \end{aligned}$$

Constituyen en un VAR de 1er orden, porque la longitud más larga del rezago es la unidad.

VAR Estructural

VAR Estructural

Consideremos 2 series, $\{y_t\}$ y $\{z_t\}$ que están mutuamente relacionadas. Donde se asume:

- y_t y z_t son estacionarias
- $\varepsilon_{yt} \sim WN(0, \sigma_y)$
- $\varepsilon_{zt} \sim WN(0, \sigma_z)$
- ε_{yt} y ε_{zt} no están autocorrelacionados. Estos se definen como "shocks" que son cambios exógenos con sentido económico.

Esto constituye un **modelo VAR de orden 1**, $VAR(1)$. Éste es un modelo *VAR* en forma estructural o primitiva.

VAR y su representación

Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_t + b_{12}\ z_t = b_{10} + \gamma_{11}\ y_{t-1} + \gamma_{12}\ z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\ z_t + b_{21}\ y_t = b_{20} + \gamma_{21}\ y_{t-1} + \gamma_{22}\ z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix} \binom{y_t}{z_t} =$$

$$= \binom{b_{10}}{b_{20}} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \binom{y_{t-1}}{z_{t-1}} + \binom{\varepsilon_{yt}}{\varepsilon_{zt}}$$

Sean:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad x_t = \binom{y_t}{z_t}$$

$$\Gamma_0 = \binom{b_{10}}{b_{20}} \qquad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_{t-1} = \binom{y_{t-1}}{z_{t-1}} \qquad e_t = \binom{\varepsilon_{yt}}{\varepsilon_{zt}}$$

En escritura vectorial se tiene:

$$\boxed{B\ x_t = \Gamma_0 + \Gamma_1\ x_{t-1} + e_t}$$

VAR y su representación

Entonces,

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + e_t$$

Si la matriz B admite inversa, se tiene que:

$$B^{-1}Bx_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 x_{t-1} + B^{-1}e_t$$

El modelo *VAR* en forma estándar es,

$$\boxed{x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t}$$

Donde,

$$A_0 = B^{-1}\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = B^{-1}\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$e_t = B^{-1}e_t = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

VAR y su representación

El modelo *VAR* en forma estándar es,

$$x_t = A_0 + A_1 \; x_{t-1} + e_t$$

$$e_t = \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}}{1 - b_{12}b_{21}} \\ \frac{\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt}}{1 - b_{12}b_{21}} \end{pmatrix}$$

Los elementos del **vector** e_t **cumplen con tener valor esperado igual a cero, varianzas constantes y están individualmente incorrelacionados.**

$$E\left(e_t\right) = E\binom{e_{1t}}{e_{2t}} = \binom{E(e_{1t})}{E(e_{2t})} = \binom{0}{0} = 0$$

Análisis del vector e_t

$$E(e_{1t}) = E\left(\frac{\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}}{1 - b_{12}b_{21}}\right) = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}}\left[E\left(\varepsilon_{yt}\right) - b_{12}E\left(\varepsilon_{zt}\right)\right] = 0$$

Se llega al mismo resultado cuando se calcula para e_{2t}.

Por lo tanto, la varianza de estas perturbaciones se calculan mediante el momento de segundo orden,

$$E\left(e_{1t}^2\right) = \frac{\sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

$$E(e_{2t}^2) = \frac{\sigma_z^2 + b_{21}^2\sigma_y^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2}$$

Las autocorrelaciones de orden j valen 0. En términos formales,

$$E(e_{1t}e_{1t-j}) = 0 \qquad \forall\, j \neq 0 \;\; E(e_{2t}e_{2t-j}) = 0 \qquad \forall\, j \neq 0$$

Con esto se demuestra que e_t es un proceso estacionario.

Correlación de e_{it}

Un punto crítico es notar que e_{1t} y e_{2t} están correlacionados.

$$E(e_{1_t} e_{2t}) = \frac{-(b_{21}\ \sigma_y^2 + b_{12}\ \sigma_z^2)}{(1 - b_{12}\ b_{21})^2} \neq 0$$

Los dos shocks están correlacionados.

Si $b_{12} = b_{21} = 0$, entonces no hay efectos contemporáneos de y_t sobre z_t ni al revés. Es decir, los dos shocks están incorrelacionados.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2(e_{1t}) & Cov(e_{1t} e_{2t}) \\ Cov(e_{2t} e_{1t}) & \sigma^2(e_{2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Donde $\sigma_{21} = \sigma_{12}$

Estabilidad y Estacionariedad

En un $AR(1)$ la condición de estabilidad es que $|\phi_1| < 1$

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t \qquad\qquad \epsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$$

Es directamente análogo a,

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

Donde A_1 es una matriz pero se puede proceder recursivamente igual a que con una sola ecuación en diferencias de la forma siguiente,

$$x_t = A_0 + A_1(\overbrace{A_0 + A_1 x_{t-2} + e_{t-1}}^{x_{t-1}}) + e_t$$

$$x_t = A_0 + A_1 A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t \implies x_t = (I + A_1) A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t$$

Estabilidad y Estacionariedad

Continuando la idea...

$$x_t = (I + A_1)A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t$$

Después de n iteraciones se llega a,

$$\boxed{x_t = \left(I + A_1 + \ldots + A_1^n\right) A_0 + A_1^{n+1} x_{t-n-1} + \sum_{j=0}^{n} A_1^j e_{t-j}}$$

Si se continúa en forma recursiva (en forma *Backward*), es claro que la convergencia requiere que la expresión $A_1^{n+1} \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

La estabilidad requiere que las raíces de la siguiente expresión caigan fuera del círculo unitario:

$$\left(1 - a_{11} B\right)\left(1 - a_{22} B\right) - a_{12} a_{21} B^2$$

Estabilidad y Estacionariedad

Entonces. . .

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} \left(I + A_1 + \ldots + A_1^n\right) A_0 + A_1^{n+1} x_{t-n-1} + \sum_{j=0}^{n} A_1^j e_{t-j} = \mu$$

Donde $\mu = [\ \bar{y}\ \bar{z}\ ]\ T$ con:

$$\bar{y} = \frac{a_{10}(1-a_{22})+a_{12}\ \ a_{20}}{\Delta}$$

$$\bar{z} = \frac{a_{20}(1-a_{11})+a_{21}\ \ a_{10}}{\Delta}$$

$$\Delta = (1 - a_{11})\,(1 - a_{22}) - a_{12}\ \ a_{21}$$

$$\boxed{E(x_t) = \mu}$$

Estabilidad y Estacionariedad

Como se tiene que $E(x_t) = \mu$

Entonces,

$$E[x_t - \mu]^2 = \frac{1}{1 - A_1^2}\Sigma$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2(e_{1t}) & Cov(e_{1t}e_{2t}) \\ Cov(e_{2t}e_{1t}) & \sigma^2(e_{2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = B^{-1}\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si se toma la forma equivalente del VAR se demuestra lo mismo, es decir que tienen la misma ecuación característica (Enders, 2010). Exhiben similar patrón de comportamiento.

Un objetivo explícito de la metodología de Box Jenkins es suministrar una técnica que tiende a modelos parsimoniosos. Consideren la siguiente generalización multivariada de un VAR.

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \ldots + A_p x_{t-p} + e_t$$

- Las variables incluidas en el modelo son seleccionadas según la relevancia del modelo explicativo. Es necesario que sean **estacionarias** para modelizar.
- **Un VAR será sobreparametrizado cuando varios de estos coeficientes estimados son insignificantes.**
- El objetivo es encontrar las interacciones importantes entre las variables.
- $A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \ldots + A_p x_{t-p}$ contiene solamente variables predeterminadas y e_t **se asume que son serialmente incorrelacionadas con varianza constante**.
- Cada ecuación del sistema puede ser estimada mediante MCO. Los estimadores son consistentes y asintóticamente eficientes.

Función Impulso-Respuesta

Figure 1: Impulse Responses in the inflation-unemployement-interest Rate Recursive VAR

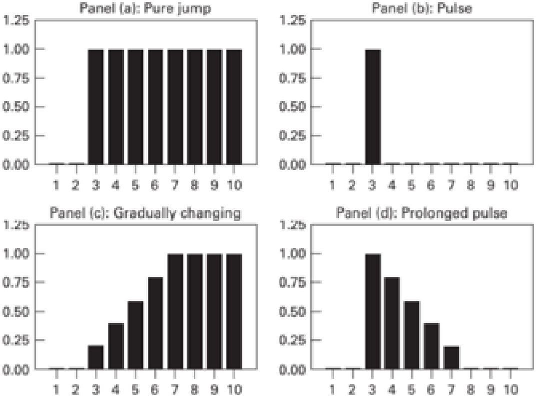
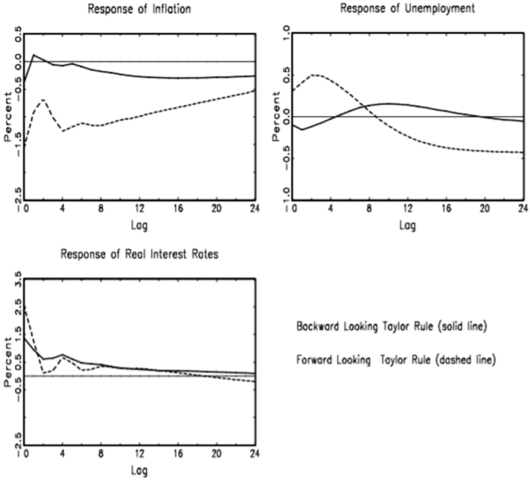


FIGURE 5.3 Typical Intervention Functions

Función Impulso-Respuesta

Figure 2: Impulse Responses of monetary policy Shocks for Different Taylor Rule Identifying Assumptions



Cointegración

un mal necesario (¿y suficiente?)

Cointegración

Desde el punto de vista del fenómeno a estudiar

Se dice que dos o mas **series están cointegradas si las mismas se mueven conjuntamente a lo largo del tiempo y las diferencias entre ellas son estables** (es decir estacionarias), aún cuando cada serie en particular contenga una tendencia estocástica y sea por lo tanto no estacionaria.

De aquí que la cointegración refleja la presencia de un **equilibrio a largo plazo hacia el cual converge el sistema a lo largo del tiempo**.

Las diferencias (o término error) en la ecuación de cointegración se interpretan como el error de desequilibrio para cada punto particular de tiempo.

Desde el punto de vista Estadístico

Dos o más series de tiempo que son no estacionarias de orden $I(1)$ están cointegradas si existe una combinación lineal de esas series que sea estacionaria o de orden $I(0)$.

El vector de coeficientes que crean esta serie estacionaria es el **vector cointegrante**.

Cointegración

Las mayoría de las series con componentes económicos son **no estacionarias** por cuanto comparten tendencias estocásticas comunes.

- El profesor Clive Granger, Premio Nobel de Economía en el año 2003, fue el primero en llamar la atención sobre la existencia de tendencias comunes en las series econométricas.
- Según él ésta es la causa principal de los resultados espurios obtenidos en las estimaciones econométricas realizadas antes del año 1980.
- Los métodos econométricos desarrollados por los Profesores Engle y Granger en el año 1987 se aplican fundamentalmente a series estacionarias.

Métodos

Engle-Granger (1987)

- Aplicable a modelos **uniecuacionales de dos (o más variables)**
- Método en **dos etapas** basado en los residuos estimados
- Asume a priori que existe un solo vector de cointegración en el modelo
- El resultado de este método de cointegración puede cambiar dependiendo de cual variable se seleccione como dependiente.

Johansen, S. (1988,1991)

- Aplicable a **sistemas de ecuaciones**
- Este método está basado en **modelos VAR (Vectores autorregresivos)**.
- Es un test de máxima verosimilitud que requiere muestras grandes (100 ó más datos)
- Prueba la existencia de múltiples vectores de cointegración entre las variables, mediante la prueba de la Traza y del Eigenvalue máximo
- Descansa fuertemente en la relación entre el rango de la matriz y sus raíces características

Engle y Granger

Supongamos que se tiene la siguiente relación entre X e Y,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \; X_t + \eta_t$$

Donde X_t e Y_t están **cointegradas** por ejemplo $CI(1,1)$.

Y X_t explica totalmente el comportamiento no estacionario y η_t es un Ruido Blanco (Estacionario).

La diferencia primera de la ecuación anterior exhibe la siguiente expresión,

$$\nabla Y_t = \nabla \beta_1 X_t + \nabla \eta_t$$

Si X_t e Y_t son $I(d)$ entonces (X_t, Y_t) son **cointegradas si**,

$$\eta_t^* = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$$

Esta última ecuación estaría integrada con orden $d_1 < d$, y α_1 y α_2 es la **relación de cointegración**.

Cointegración

Una variable **explica parte de la tendencia de la otra**.

$$\eta_t^* = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$$

$$\frac{\eta_t^*}{\alpha_1} = X_t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} Y_t$$

Mediante un reordenamiento se llega a la siguiente expresión que está integrada con orden $d_1 < d$ y con orden de cointegración igual 1 y $-\beta$.

$$Y_t = \beta \ X_t + \eta_t$$

$$\eta_t = \frac{\eta_t^*}{\alpha_1}$$

$$\beta = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Donde β representa la **relación de largo plazo entre ambas variables originales**.

Cointegración

Propiedades:

i $\alpha_1 I(0) + \alpha_2 I(0) = I(0)$

ii $\alpha_1 I(0) + \alpha_2 I(d) = I(?) \rightarrow$ No Estacionario

iii

$$\alpha_1 I(d) + \alpha_2 I(d) = I(n \leq d) = \begin{cases} n = d \;\Rightarrow \textit{No existe cointegración} \\ \\ n < d \;\Rightarrow \textit{Existe cointegración} \end{cases}$$

iv Si X_t, Y_t son $I(1)$ entonces se relacionan de la siguiente forma,

$$Y_t = \beta\, X_t + \eta_t$$

El parámetro β se estima por **Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)**, por lo tanto este estimador tendrá mínima varianza.

Si el tamaño de la ventana temporal utilizado se incrementa, dicho estimador es insesgado. Se refiere a este parámetro como **superconsistente**.

Cointegración

Una cuestión no menor es que los **tests de hipótesis tradicionales no son válidos para poner a prueba la conjetura de significativo**.

Por tal motivo, se procede a realizar el siguiente procedimiento,

1. Se estima la recta anterior por MCO. Obteniéndose la siguiente ecuación estimada,
$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{g} X_t$$
2. Se obtienen los residuos que surgen del anterior modelo estimado
$$\hat{\eta}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{g} X_t$$

Se evalua si los **residuos del modelo son estacionarios o no**. De serlo, entonces ambas variables estarían cointegradas. En caso contrario, si no son estacionarias, entonces se procede a diferenciar y volver a armar el modelo, buscando que el nuevo modelo $\hat{\eta}_t$ sea estacionario y tratando de buscar el Modelo con Corrector de Error.

El modelo con corrector de error contempla la función impulso-respuesta de la relación de X_t y Y_t.

Test de Engle-Granger (1987)

Comenzamos asumiendo que X_t, Y_t ambas son $I(1) \to CI(1,1)$.

Entonces, se procede a hacer el siguiente procedimiento secuencial:

1. Pre-Tests del orden de Integración: se hace **Dickey-Fuller**
   - **i. Si ambos son estacionarias** $\to$ ¡OK!
   - **ii. Si son $I(d)$, con d distintas** $\to$ $NO\ estan\ cointegradas$ $\to$ ***FIN DEL TEST***

2. Estimar el equilibrio de largo plazo del modelo (si hay estacionariedad):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \eta_t$$

   - i. Modelo posiblemente $CI(1{,}1)$. Si $\{\hat{\eta}_t\}$ capta el largo plazo y es $I(0)$

   Se hace un test Dickey-Fuller (para uno o más lags), testeando a_1 como si fuera raíz unitaria de la siguiente especificación:

$$\Delta\,\hat{\eta}_t = a_1 \hat{\eta}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0\colon a_1 = 0$ $\to$ Si **RECHAZO** H_0 $\to$ **el proceso es un** $MA(1)$ $\to$ $I(0)\ estacionario$

Test de Engle-Granger (1987)

Continuamos...

3. El modelo que proponen Engle-Granger (1987), si falla el step 2, es un modelo corrector del error (*ver filmina 27, en rojo*):
   i. Se asume que ambas series están $CI(1,1)$:

$$\begin{cases} \Delta Y_t = \alpha_1 + \alpha_Y\ \hat{\eta}_{t-1} + \sum_i \alpha_{11}(i)\ \Delta Y_{t-i} + \sum_i \alpha_{12}(i)\ \Delta X_{t-i} + \varepsilon_Y \\ \Delta X_t = \alpha_2 + \alpha_X\ \hat{\eta}_{t-1} + \sum_i \alpha_{21}(i)\ \Delta Y_{t-i} + \sum_i \alpha_{22}(i)\ \Delta X_{t-i} + \varepsilon_X \end{cases}$$

Dónde $\hat{\eta}_{t-1}$ conforma en la expresión anterior un VAR en primeras diferencias.

4. **MODELO CON AJUSTE CORRECTOR AL EQUILIBRIO**
   i. **Analizamos cada estimación**
   ii. **Estimamos el modelo VAR**
   iii. **Analizamos la función impulso-respuesta**

Lecturas

Paper de Stock y Watson. Vector autoregressions. Journal of Economic perspectives, 15(4), 101-115.

Paper de Alfonso Novales. Modelos vectoriales autoregresivos (VAR). Universidad Complutense, 1-26.

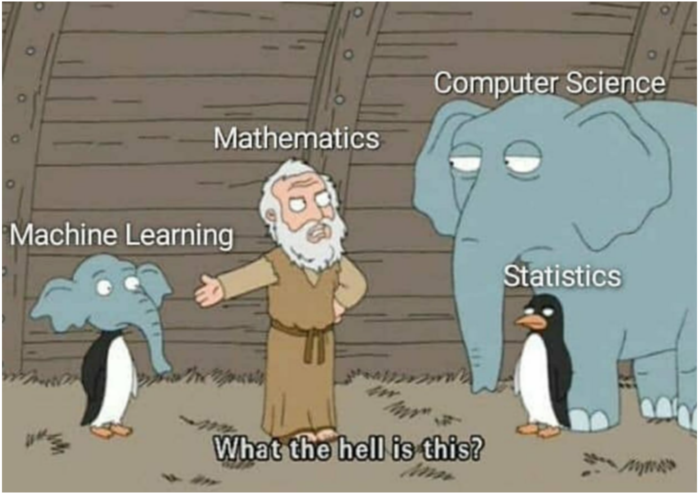
Presentación de Gabriel Montes Rojas. Procesos Multivariados.

VAR en R. Capítulo 11. Modelo VAR. Javier Galán Figueroa.

Peña. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 18 y 19**.

Enders. Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulo 5**.

Fin


Computer Science
Mathematics
Machine Learning
Statistics
What the hell is this?