

Análisis de Series Temporales

Clase 4 - Modelos ARIMA

Rodrigo Del Rosso
RDelRosso-ext@austral.edu.ar

12 de Noviembre de 2021



CIENCIA DE DATOS

Maestría en **Ciencia de Datos**

Agenda

- No Estacionariedad
 - En la Varianza
 - En la Media
- Modelos $ARIMA(p, d, q)$
- Test de Raíces Unitarias
 - Dickey-Fuller
 - Dickey-Fuller Aumentado
 - Otros tests



Procesos Integrados y de Memoria Larga

Un proceso puede ser no estacionario en la media, en la varianza, en las autocorrelaciones o en otras características de la distribución de las variables.

Cuando el nivel de la serie no es estable en el tiempo, pudiendo en particular tener tendencia creciente o decreciente, diremos que la serie es no estacionaria en la media.

Cuando la variabilidad o las autocorrelaciones se modifican con el tiempo, diremos que la serie es no estacionaria en la varianza o en las autocorrelaciones.

Finalmente, si la distribución de la variable en cada instante varía con el tiempo, diremos que la serie no es estacionaria en distribución.

Los procesos no estacionarios más importantes son los integrados, que tienen la propiedad fundamental de que al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios.

No Estacionariedad en la Varianza

No Estacionariedad en la Varianza

En el caso de los procesos no estacionarios en la varianza, la solución en el ámbito de la dinámica lineal consiste en **aplicar transformaciones** que conviertan al proceso original en un proceso condicionalmente **homocedástico**.

Las técnicas relacionadas con la teoría de los modelos lineales ha sido desarrollada mediante los siguientes supuestos,

- La estructura de la Esperanza Matemática Condicionada es aditiva
- La varianza de las variables que componen el proceso es constante
- Las variables del proceso están normalmente distribuidas

Para la situación de que una o más condiciones no se verifiquen, existen transformaciones relacionadas con cada una de las propiedades a analizar. Alternativamente, existen otras transformaciones que, en principio, intentan actuar sobre las tres propiedades simultáneamente y que se utilizan fundamentalmente para lograr la estabilidad en el tiempo de la Varianza Condicionada, la simetría y en lo posible la Normalidad de la Distribución de las variables Y_t .

No Estacionariedad en la Varianza

Si los datos muestran diferentes variaciones en diferentes niveles de la serie, entonces una transformación para estabilizar la varianza puede ser bastante útil.

Las transformaciones de potencia de Box-Cox se define de la forma siguiente,

$$T^{\lambda}(Y_t) = \begin{cases} \frac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda \leq 1 \\ \ln Y_t & \text{si } \lambda = 0 \\ -Y_t & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Donde λ es el coeficiente que caracteriza la transformación. En todos los casos debe verificarse que $Y_t > 0$.

Por su parte, Tukey definió otra familia de transformaciones de potencia alternativa de la forma,

$$T^{\lambda}(Y_t) = (Y_t + c)^{\lambda}$$

Donde c es una constante tal que $Y_t + c > 0$ para $t = 1, 2, \dots$

No Estacionariedad en la Varianza

Otras formas típicas de la transformación de Tukey son,

$$T^{\lambda}(Y_t) = \begin{cases} Y_t & \text{si } \lambda = 1 \\ Y_t^2 & \text{si } \lambda = 1/2 \\ \frac{1}{Y_t} & \text{si } \lambda = -1 \\ \sqrt{Y_t} & \text{si } \lambda = 2 \end{cases}$$

En cuanto a la transformación logarítmica, si bien es la más ampliamente aplicada para reducir la simetría de la distribución (en particular series económicas), no resulta muy apropiado cuando las variables Y_t son acotadas inferior y superiormente.

No Estacionariedad en la Varianza

Wallis (1987) propuso como alternativa la transformación logística,

$$T(Y_t) = \ln\left(\frac{Y_t}{1-Y_t}\right)$$

Cuando el dominio de las variables incluye solamente valores no-negativos, se genera una asimetría hacia la derecha en su distribución.

Anscombe (1948) propuso una transformación mediante la utilización de la familia de transformaciones de Johnson y demostró que cuando las variables tienen distribución de Poisson se puede aplicar la siguiente transformación,

$$T(Y_t) = \sqrt{Y_t + \frac{3}{8}}$$

La cual es una transformación óptima para eliminar la heterocedasticidad.

No Estacionariedad en la Varianza

Fisher (1925) demostró que la transformación,

$$T(Y_t) = \sqrt{2Y_t}$$

Es particularmente útil en el caso de que $Y_t \sim \chi_r^2$, obteniéndose una serie transformada $T(Y_t)$ distribuida aproximadamente de acuerdo a una función $N(\sqrt{2r-1}, 1)$.

Si se conociera la distribución de probabilidad de Y_t sería fácil testear la validez del resultado de aplicar alguna de las transformaciones comentadas previamente.

Ahora bien, la forma de la transformación debe ser determinada empíricamente a partir de la estimación del coeficiente λ .

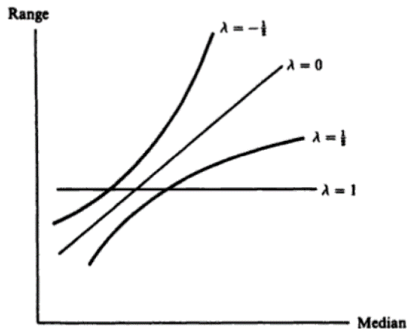
Para la estimación de los coeficientes λ en las transformaciones dirigidas a la eliminación de la heterocedasticidad se suele emplear la **Relación Rango-Mediana** que se obtiene de dividir la serie de tiempo original en k subseries de n_k y calcular para cada una de ellas el Rango y la Mediana.

No Estacionariedad en la Varianza

Existen otras transformaciones alternativas a la potencia (Granger-Huques, Arco Seno, Hiperbólica, etc).

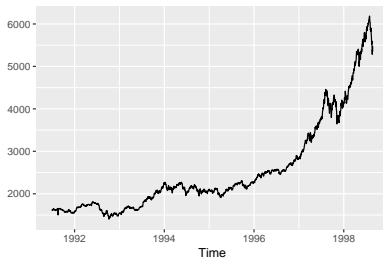
El siguiente gráfico exhibe el valor de λ según la forma funcional que surja de la relación Rango-Mediana.

(a) Range-median relationships and implied λ values

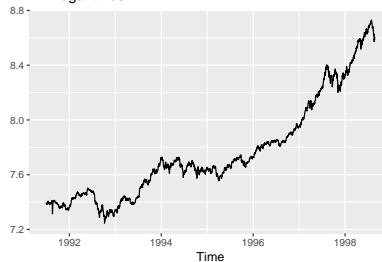


Gráficos

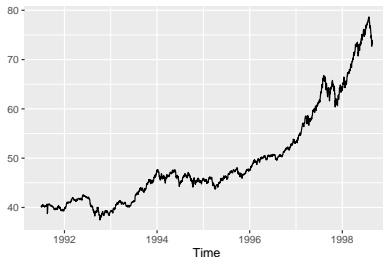
En Niveles



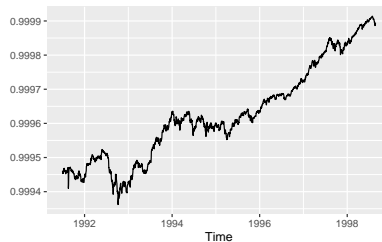
En Logaritmos



Raíz Cuadrada



Box-Cox

 $\lambda = -0.9999242$

No Estacionariedad en la Media

No Estacionariedad en la Media

Una propiedad importante que diferencia a los procesos integrados de los estacionarios es la forma en que desaparece la dependencia con el tiempo.

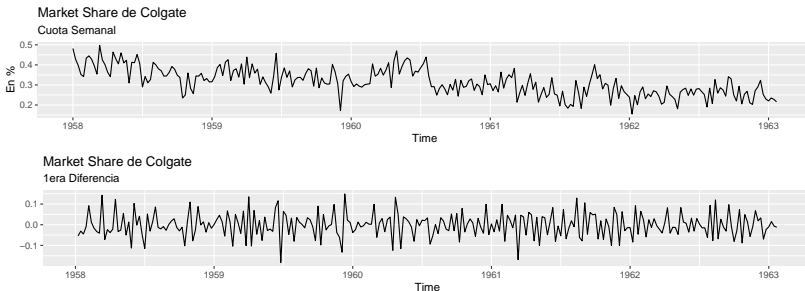
- En los procesos estacionarios *ARMA* las autocorrelaciones disminuyen geométricamente, y se hacen prácticamente cero a los pocos rezagos.
- En los procesos integrados las autocorrelaciones disminuyen linealmente con el tiempo y es posible encontrar coeficientes autocorrelación distintos de cero hasta para rezagos muy altos.

Existe una clase de procesos estacionarios donde las autocorrelaciones disminuyen más lentamente con el tiempo que en el caso de los procesos *ARMA*, y también que en los procesos integrados (procesos de memoria larga).

Estos procesos son casos particulares de la representación de Wold para procesos estacionarios, pero donde los coeficientes decrecen muy lentamente, lo que implica que las autocorrelaciones entre las observaciones también decrecen muy lentamente.

No Estacionariedad en la Media

La mayoría de las series reales no son estacionarias, y su nivel medio varía con el tiempo. Por ejemplo el siguiente gráfico exhibe la cuota semanal de mercado del dentífrico Colgate y la primera diferencia de la serie original.



No Estacionariedad en la Media

- La serie que contiene la información sobre la cuota semanal de mercado del dentífrico Colgate tiene una clara tendencia decreciente y por lo tanto no es estacionaria.
- La serie diferenciada, es decir la serie de variaciones de cuota de mercado entre una semana y la siguiente.

Si se denomina Y_t representa la serie original y $Z_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ se observa que está última posee un comportamiento en el cual los valores oscilan alrededor de una media constante y parecen corresponder a una serie estacionaria.

Se observa que la serie Y_t de cuota de mercado de Colgate parece una **serie integrada**, que **se transforma en estacionaria mediante una diferencia**.

En este caso, se dice que **la serie es integrada de orden uno** $Y_t : I(1)$ donde el orden de integración indica el número de diferencias necesarias para obtener un proceso estacionario.

No Estacionariedad en la Media

Si se denomina Y_t a la serie original, sus variaciones (o crecimientos) medidos por ∇Y_t no son estacionarias, pero las variaciones de los crecimientos medidos por $\nabla^2 Y_t$ si son estacionarias.

Es decir, la serie

$$\begin{aligned} Z_t = \nabla^2 Y_t &= \nabla (\nabla Y_t) = \nabla (Y_t - Y_{t-1}) = \nabla Y_t - \nabla Y_{t-1} = \\ &= Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ Z_t = \nabla^2 Y_t &= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \end{aligned}$$

Que representa los crecimientos de las serie Y_t será estacionaria.

Esta serie Z_t se denomina proceso “segunda diferencia” de la serie original, y es integrada de orden dos, o con incrementos de segundo orden estacionarios. Formalmente, $Y_t : I(2)$.

No Estacionariedad en la Media

Al generalizar se dirá que un proceso es integrado de orden $d \geq 0$ y se representa como $I(d)$ cuando al diferenciarlo d veces se obtiene un proceso estacionario.

Un proceso estacionario es, por tanto, siempre $I(0)$.

En la práctica la mayoría de las series no estacionarias que son integradas tienen un orden $d \leq 3$.

No Estacionariedad en la Media

Si se considera el siguiente $AR(1)$,

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Si $|\phi_1| < 1$ el proceso es estacionario
- Si $|\phi_1| > 1$ el proceso es explosivo
- Si $|\phi_1| = 1$ el proceso es no estacionario

Este último caso es de interés en el análisis de series temporales, porque las series poseen una tendencia estocástica que rige el comportamiento de la misma.

El proceso no es explosivo y pertenece a la clase de procesos integrados de orden uno.

No Estacionariedad en la Media

En efecto, es inmediato que su primera diferencia es un proceso estacionario.

$$Y_t = \phi_0 + Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Z_t = \nabla Y_t = \phi_0 + \epsilon_t$$

- Este proceso se denomina Random Walk y ha sido visto en clases anteriores al arrancar el análisis de las series temporales.
- Una característica importante que diferencia los procesos estacionarios y los no estacionarios es el papel de las constantes.
- En un proceso estacionario la constante no es importante, por eso se ha trabajado con series expresadas en variables centradas.

Random Walk

Para analizar al proceso Random Walk se realiza sustituciones recursivas de la serie por el valor anterior. Se actúa de la forma siguiente,

$$Y_t = \phi_0 + Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Y_1 = \phi_0 + Y_0 + \epsilon_1$$

$$Y_2 = \phi_0 + Y_1 + \epsilon_2 = \phi_0 + \phi_0 + Y_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\phi_0 + Y_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$Y_t = t\phi_0 + Y_0 + \sum_{j=1}^t \epsilon_j$$

Al tomar Esperanza Matemática de ambos lados de la igualdad,

$$E(Y_t) = E\left(t\phi_0 + Y_0 + \sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) = t\phi_0 + Y_0$$

Random Walk

El proceso tiene una media que aumenta linealmente con el tiempo. Si la serie no presenta término independiente, entonces la media es constante e igual al valor inicial de la serie, el cual podría ser igual a cero. Formalmente,

$$E(Y_t) = E\left(Y_0 + \sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) = Y_0$$

La varianza será,

$$Var(Y_t) = Var\left(t\phi_0 + Y_0 + \sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) = t\sigma_\epsilon^2$$

Y aumenta con el paso del tiempo y tiende a infinito con t .

Esta propiedad indica que al aumentar el tiempo aumenta la incertidumbre sobre la situación del proceso.

Random Walk

La autocovarianza de orden j del proceso es,

$$\gamma_j(Y) = t\sigma_\epsilon^2$$

Las autocovarianzas se incrementan con el tiempo y no solamente en función del rezago, como en los procesos estacionarios, sino que dependen de los instantes en que se calculan. La FAC es,

$$\rho_j(Y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{j}{t}}}$$

Esta expresión indica que si es grande, los coeficientes de la FAC serán próximos a uno y decrecerán aproximadamente de forma lineal con j .

En efecto, si suponemos que el proceso comenzó en un lejano pasado, de manera que $\frac{j}{t}$ es pequeño, entonces la función puede aproximarse con un desarrollo de Taylor de primer orden como,

$$\rho_j(Y) \cong 1 - \frac{j}{2t}$$

Indica que si t es fijo, al representar la FAC como función de j se obtiene una recta con pendiente $-1/2t$.

Random Walk

Si se toma logaritmos sobre la FAC se obtiene lo siguiente,

$$\rho_j(Y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{j}{t}}} \Rightarrow \log \rho_j(Y) = -\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{j}{t}\right) \cong -\frac{j}{2t}$$

Se observa que aproximadamente las correlaciones en logaritmos también decrecerán linealmente con el rezago j .

Este comportamiento de la FAC de un proceso integrado puede considerarse como un caso límite de la de un AR(1), cuando ϕ_1 se aproxima a la unidad. En efecto si $\phi_1 = 1 - \xi$ con ξ pequeño se obtiene que,

$$\rho_j(Y) = (1 - \xi)^j \cong 1 - j\xi$$

Modelos $ARIMA(p, d, q)$

Se puede generalizar para cualquier proceso $ARMA$, permitiendo que una o varias raíces el operador AR sean la unidad. Se obtienen procesos del tipo,

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p\right) (1 - B)^d Y_t = \phi_0 + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q\right) \epsilon_t$$

$$\Phi(B) (1 - B)^d Y_t = \phi_0 + \Theta(B) \epsilon_t$$

Donde,

- p es el orden la parte autorregresiva estacionaria
- d es el número de raíces unitarias (orden de integración del proceso)
- q es el orden de la parte media móvil

Modelos ARIMA

Si se utiliza el operador diferencia descendente,

$$\nabla = 1 - B$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d$$

$$\Phi(B) \nabla^d Y_t = \phi_0 + \Theta(B) \epsilon_t$$

El nombre ARIMA proviene de las iniciales en inglés de los procesos autorregresivos integrados de media móvil (autoregressive integrated moving average), donde integrado indica que llamando $Z_t = \nabla^d Y_t$ al proceso estacionario, se obtiene el proceso original como la suma (integración) de Z_t .

Modelos ARIMA

En efecto si, $Z_t = \nabla^1 Y_t = (1 - B) Y_t$ como,

$$\frac{1}{(1-B)} = 1 + B + B^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} B^j$$

Resulta que,

$$Y_t = \frac{1}{(1-B)} Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} B^j Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j}$$

Todos los procesos ARIMA no estacionarios poseen la propiedad de poseer una FAC que decrece lentamente. Para demostrarlo, hay que recordar que el correlograma de un ARMA(p,q) satisface para $j > q$ la ecuación,

$$\Phi(B) \rho_j(Y) = 0 \quad j > q$$

Cuya solución es del tipo,

$$\rho_j(Y) = \sum_{i=1}^p B_i G_i^j$$

Modelos ARIMA

Donde G_i^{-1} son las raíces de $\Phi(B) = 0$ y $|G_i| < 1$.

Si una de estas raíces es muy próxima a la unidad, escribiendo $G_i = 1 - \xi$, siendo ξ muy pequeño, para j grande los términos $B_i G_i^j$ debidos a las otras raíces serán cero y se obtendrá aproximadamente Para j grande,

$$\rho_j(Y) = B_i(1 - \xi)^j \cong B_i(1 - j\xi)$$

En consecuencia, la FAS tendrá coeficientes positivos que se amortiguarán aproximadamente en forma lineal y pueden ser distintos de cero incluso para valores de elevados de j .

Propiedad

La persistencia de valores positivos en el correlograma (aunque sean pequeños) y de decrecimiento lineal caracteriza a los procesos no estacionarios.

Modelos ARIMA y Tendencias

No todas las series no estacionarias son integradas, pero los procesos integrados cubren muchos casos interesantes encontrados en la práctica.

Es fácil demostrar que cualquier proceso que sea la suma de una tendencia polinómica y un proceso estacionario será integrado. Por ejemplo, consideremos el proceso de crecimiento lineal determinista,

$$Y_t = b + ct + u_t$$

Donde u_t es un Ruido Blanco. Este proceso es $I(1)$, dado que tomando la primera diferencia de la serie Y_t ,

$$Z_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$Z_t = b + ct + u_t - (b + c(t-1) + u_{t-1})$$

$$Z_t = b + u_t - u_{t-1}$$

Modelos ARIMA y Tendencias

$$Z_t = c + u_t - u_{t-1} = c + \nabla u_t$$

Como c es constante y ∇u_t es un proceso estacionario (al ser la diferencia de dos procesos estacionarios), el proceso Z_t es también estacionario.

Por tanto Y_t es integrado y el parámetro $\theta_1 = 1$.

El proceso será no invertible y esta propiedad indicará que posee un componente lineal determinista en el modelo.

Al diferenciar el proceso la constante que queda es la pendiente del crecimiento determinista lineal.

Este resultado es válido para procesos generados como la suma de una tendencia polinómica de orden d y un proceso estacionario cualquiera u_t .

Modelos ARIMA y Tendencias

- Si una serie tiene una tendencia polinómica determinista y se modela como un proceso ARIMA, se obtendrá,
 - Componentes de media móvil no invertibles
 - La serie estacionaria tendrá una media distinta de cero y la constante es el coeficiente de orden mayor en la tendencia determinista.

Observación

En los procesos integrados, las constantes juegan un rol importante porque representan efectos deterministas.

Los procesos con tendencia lineal determinista son poco frecuentes en la práctica, pero se puede generalizar un poco el modelo anterior y permitir que la pendiente en cada instante pueda variar un poco respecto al valor anterior.

Modelos ARIMA

El procedimiento a seguir es el siguiente,

- Detectar Raíces Unitarias
- Construir FAC y analizar el decrecimiento
 - Subestimación del orden d
 - Sobreestimación del orden d

Si el orden d se subestima, no hay problema porque se diferenciará hasta tanto convertir a la serie en estacionaria.

Si el orden se sobrestima (se diferencia en exceso), se sabe que al diferenciarse se convierte en estacionaria.

Problemas de Sobrediferenciar

La sobrediferenciación trae 3 problemas en la componente MA,

Se pierde la condición Parsimonia

Se pierde la condición de Invertibilidad

Aumenta la varianza del Proceso

Modelos ARIMA



$$Y_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 B) \epsilon_t$$

$$\nabla Y_t = (1 - B)(1 - \theta_1 B) \epsilon_t$$

Condición de Parsimonia

$$\nabla Y_t = (1 - (1 + \theta_1)B + \theta_1 B^2) \epsilon_t$$

$$\nabla Y_t = (1 - \theta_1^* B - \theta_2^* B^2) \epsilon_t$$

Condición de Invertibilidad

$$\theta_1^* = 1 + \theta_1 \quad \theta_2^* = -\theta_1$$

$$\theta_1^* + \theta_2^* = 1$$

Varianza del Proceso

$$\sigma_Y^2 = (1 + \theta_1^2) \sigma_\epsilon^2$$

$$\sigma_{\nabla Y}^2 = (1 + \theta_1^{*2} + \theta_2^{*2}) \sigma_\epsilon^2$$

$$\sigma_{\nabla Y}^2 > \sigma_Y^2$$



Test de Raíces Unitarias

$$\Phi(B) Y_t = \phi_0 + \Theta(B)\epsilon_t$$

$$\Phi(B) Y_t = 0$$

Del Polinomio Característico $\Phi(B)$ surgen p raíces G_i ($i = 1, 2, \dots, p$).

El problema es que se decide con información muestral, es decir se poseen raíces estimadas, \hat{G}_i ($i = 1, 2, \dots, p$).

Por lo tanto se utiliza una Prueba de Hipótesis para poner a prueba la conjetura de que las raíces del Polinomio Característico son iguales a la unidad.

Este Test de Hipótesis se construye para no rechazar la Hipótesis Nula, a diferencia de la construcción de la mayoría de los tests.

Test de Raíces Unitarias

Suponga que $Y_t : AR(1)$, es decir,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Podría plantearse el siguiente Test de Significatividad Individual para poner a prueba la conjetura de que el coeficiente que acompaña al valor pasado de la serie es igual a 1. En términos formales,

$$H_0 : G_1 = 1 \Rightarrow H_0 : \phi_1 = 1$$

$$H_1 : G_1 > 1 \Rightarrow H_1 : \phi_1 < 1$$

$$T^e = \frac{\hat{\phi}_1 - \phi_1}{\sigma(\hat{\phi}_1)} \rightarrow t_{n-1}$$

El problema de este Contraste de Hipótesis es que tiene un sesgo hacia el Rechazo de la Hipótesis Nula en la mayoría de los casos.

Test de Raíces Unitarias

Por lo tanto ambos autores (1979) en su paper **Distribution of the estimates for autoregressive time series with a unit root** desarrollaron una prueba para poner a prueba la conjetura a partir de testear el coeficiente que acompaña el rezago del período anterior. Se parte de la siguiente ecuación,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Y_t - Y_{t-1} = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\nabla Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

A esta última ecuación se la denomina **Ecuación de Dickey Fuller** y se pone a prueba el coeficiente que acompaña al rezago del período anterior. Las hipótesis de esta prueba son,

$$H_0 : \phi_1 - 1 = 0 \quad \text{"No Estacionario"}$$

$$H_1 : \phi_1 - 1 < 0 \quad \text{"Estacionario"}$$

Test de Raíces Unitarias

El Estadístico de este Test es parecido al del planteo anterior, pero se diferencian en la distribución que converge el mismo. En esta situación el estadístico converge a una Distribución τ

$$\tau^e = \frac{\hat{\phi}_1 - \phi_1}{\sigma(\hat{\phi}_1)} \rightarrow \frac{\int_0^1 B(t) dt}{\sqrt{\int_0^1 [B(t)]^2 dt}}$$

Donde $B(t)$ es un Proceso Estocástico Continuo-Continuo (Tiempo-Variables) denominado **Movimiento Browniano** (Brownian Motion), que posee muchas aplicaciones en Finanzas (Cuantitativas). Un MB posee varias características,

$$B(t) \sim N$$

$$B(0) = 0$$

$$\text{Var}[B(t)] = t$$

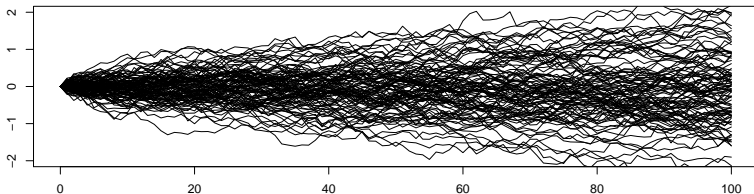
$$\gamma[B(t); B(j)] = t - j$$

Test de Raíces Unitarias

Dickey y Fuller basándose en métodos de Simulación de Monte Carlo, tabularon esta distribución límite y calcularon los correspondientes valores críticos.

Estas técnicas de Monte Carlo fueron aplicadas a partir de la fijación de la hipótesis $\phi_1 = 1$ y un diseño muestral que supone que las perturbaciones están Normalmente distribuidas.

Se generaron, miles de muestras para Y_t de acuerdo con la representación en diferencias anterior y se consideró el porcentaje de veces en que se rechazaba la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria, cuando ésta era verdadera (Error de Tipo I), basándose en el estadístico τ^e .



Test de Raíces Unitarias

$$\tau^e = \frac{\hat{\phi}_1 - \phi_1}{\sigma(\hat{\phi}_1)} \rightarrow \frac{\int_0^1 B(t) dt}{\sqrt{\int_0^1 [B(t)]^2 dt}}$$

El Estadístico se encuentra sesgado a la izquierda del cero (Valor Esperado de la t- de Student). La **Regla de Decisión** es,

Si $\tau \leq \tau^e < 0 \Rightarrow$ No Rechazo H_0

Si $\tau^e < \tau \Rightarrow$ Rechazo H_0

Importante

Demostraron que la definición de la zona crítica para testear la hipótesis nula depende de,

Tamaño de Muestra n

Componentes Determinísticos (Tipo de Tendencia)

Nivel de Significación

Test de Raíces Unitarias

Componentes Determinísticos

- No incluye término independiente ni lineal ("None")

$$\nabla Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Incluya término independiente pero no incluye término lineal ("Drift")

$$\nabla Y_t = a_0 + (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Incluya ambos términos ("Trend")

$$\nabla Y_t = a_0 + a_1 t + (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

A esta última ecuación se denomina **Ecuación de Dickey Fuller Aumentada** (Augmented Dickey Fuller).

Test de Raíces Unitarias

	Model 0 - no constant, no trend			
N	0.01	0.025	0.05	0.10
25	-2.661	-2.273	-1.955	-1.609
50	-2.612	-2.246	-1.947	-1.612
100	-2.588	-2.234	-1.944	-1.614
250	-2.575	-2.227	-1.942	-1.616
500	-2.570	-2.224	-1.942	-1.616
>500	-2.567	-2.223	-1.941	-1.616

	Model 1 - constant, no trend			
N	0.01	0.025	0.05	0.10
25	-3.724	-3.318	-2.986	-2.633
50	-3.568	-3.213	-2.921	-2.599
100	-3.498	-3.164	-2.891	-2.582
250	-3.457	-3.136	-2.873	-2.573
500	-3.443	-3.127	-2.867	-2.570
>500	-3.434	-3.120	-2.863	-2.568

	Model 2 - constant, trend			
N	0.01	0.025	0.05	0.10
25	-4.375	-3.943	-3.589	-3.238
50	-4.152	-3.791	-3.495	-3.181
100	-4.052	-3.722	-3.452	-3.153
250	-3.995	-3.683	-3.427	-3.137
500	-3.977	-3.670	-3.419	-3.132
>500	-3.963	-3.660	-3.413	-3.128

None

$$\nabla Y_t = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Si $\tau \leq \tau^e < 0 \Rightarrow$ No Rechazo H_0

Si $\tau^e < \tau \Rightarrow$ Rechazo H_0

Drift

$$\nabla Y_t = a_0 + (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Si $\tau_\mu \leq \tau^e < 0 \Rightarrow$ No Rechazo H_0

Si $\tau^e < \tau_\mu \Rightarrow$ Rechazo H_0

Trend

$$\nabla Y_t = a_0 + a_1 t + (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Si $\tau_\tau \leq \tau^e < 0 \Rightarrow$ No Rechazo H_0

Si $\tau^e < \tau_\tau \Rightarrow$ Rechazo H_0

Test de Raíces Unitarias

Existen otras pruebas de hipótesis para poner a prueba la conjetura de Raíz Unitaria. Por ejemplo,

- *Phillips-Perron*
- *KPSS*
- *Said-Dickey*
- *Zivot & Andrews*



Test de Phillips-Perron

Tiene como conjetura que los coeficientes de la Ecuación de DF Aumentada son en forma conjunta igual a cero, contra una hipótesis alternativa no específica. En términos formales,

$$\nabla Y_t = a_0 + a_1 t + (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Las hipótesis son,

$$H_0 : a_0 = a_1 = \phi_1 - 1 = 0$$

$$H_1 : \text{no específica}$$

Por su parte estos autores propusieron una generalización de estos tests de raíces unitarias que admite la heterocedasticidad del proceso ϵ_t ¹.

¹Leer en detalle el procedimiento descrito en la página 321 del Libro de Alberto Landro sobre la secuencia de tests de significatividad que deben aplicarse en forma secuencial.

Generalización $AR(p)$

Todos estos tests se realizan bajo la suposición de que el orden p es conocido o fue estimado en forma consistente. Sea $Y_t : AR(p)$

$$1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p = 0$$

La condición necesaria para que las raíces del polinomio característico sean en módulo mayores a la unidad es,

$$\sum_{i=1}^p \phi_i < 1$$

La condición suficiente es,

$$\sum_{i=1}^p |\phi_i| < 1$$

La condición necesaria y suficiente para determinar la existencia de al menos 1 raíz unitaria,

$$\sum_{i=1}^p \phi_i = 1$$

Generalización $AR(p)$

La cuestión para generalizar a un $AR(p)$ es operar “artesanalmente” de forma tal de introducir la Condición Necesaria y Suficiente para asegurar la existencia de al menos 1 raíz unitaria. Es decir,

$$\sum_{i=1}^p \phi_i = 1$$

En términos formales,

$$Y_t = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^p \phi_i \right)}_{\phi_1^*} Y_{t-1} + \dots$$

Si se parte de la siguiente ecuación, $Y_t : AR(p)$, al sumar y restar términos debería llegarse a la siguiente Ecuación de Dickey Fuller,

$$Y_t = \phi_1^* Y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{j+1}^* \nabla Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Generalización $AR(p)$

Donde,

$$\phi_j^* = \sum_{i=j}^p \phi_i$$

La Ecuación de Dickey Fuller será,

$$\nabla Y_t = (\phi_1^* - 1)Y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{j+1}^* \nabla Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Por lo tanto, el planteo de hipótesis se realiza sobre el coeficiente $\phi_1^* - 1$ de la anterior ecuación,

$$H_0 : \phi_1^* - 1 = 0 \quad I(1)$$

$$H_1 : \phi_1^* - 1 < 0 \quad I(0)$$

Generalización $AR(p)$

El estadístico es,

$$\tau^e = \frac{\phi_1^* - 1}{\sigma(\phi_1^*)}$$

Si no se rechaza la hipótesis nula, bajo la evidencia empírica se afirma que la serie posee 1 raíz unitaria y por lo tanto la serie original es integrado de orden 1. Es lo mismo, que decir que habrá diferenciarla 1 vez para convertirla en estacionaria. En caso contrario, si se rechaza la hipótesis nula, la serie podrá tener ninguna raíz.

Ahora bien, la ecuación anterior se utiliza para testear la presencia de 1 raíz unitaria en un $AR(p)$. Sin embargo, está podrá tener como máximo p raíces.

Para eso habrá que **realizar una secuencia de prueba de hipótesis para determinar en forma secuencial la cantidad de raíces unitarias** que posee la serie bajo análisis.

Secuencia de Tests de Raíces Unitarias

Si se parte de la siguiente ecuación, $Y_t : AR(p)$,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

Suponga que se quiere testear la presencia de 2 raíces unitarias, debe realizarse el siguiente planteo secuencial. Se parte del orden mayor que se desea poner a prueba, es decir,

- Se testea la presencia de 2 raíces unitarias.
- Si se rechaza la hipótesis nula del test inicial, se procede a testear la presencia de una raíz unitaria. Si rechaza el siguiente test, se afirma que bajo la evidencia empírica, la serie es estacionaria. Si no rechaza dicho test, se afirma que bajo la evidencia empírica, la serie presenta una raíz unitaria y se procede a diferenciar una vez para convertirla en estacionaria.
- Si no rechaza la hipótesis nula del test inicial, bajo la evidencia empírica se afirma que la serie posee dos raíces unitarias y se procede a diferenciar dos veces para convertirla en estacionaria.

Secuencia de Tests de Raíces Unitarias

Test para 2 raíces unitarias

La ecuación de DF es la siguiente,

$$\nabla^2 Y_t = (\phi_1^{**} - 1)\nabla Y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{j+1}^{**} \nabla^2 Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Las hipótesis son,

$$H_0 : \phi_1^{**} - 1 = 0 \quad I(2)$$

$$H_1 : \phi_1^{**} - 1 < 0 \quad I(1) \quad \text{ó} \quad I(0)$$

El estadístico es,

$$\tau^e = \frac{\phi_1^{**} - 1}{\sigma(\phi_1^{**})}$$

Si se rechaza la hipótesis nula se procede a realizar el siguiente test para poner a prueba la conjetura de 1 raíz unitaria. En caso de no rechazar la raíz unitaria, se debe diferenciar dos veces para convertirla en estacionaria.

Secuencia de Tests de Raíces Unitarias

Test para 1 raíz unitaria

La ecuación de DF es la siguiente,

$$\nabla Y_t = (\phi_1^* - 1)Y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{j+1}^* \nabla Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Las hipótesis son,

$$H_0 : \phi_1^* - 1 = 0 \quad I(1)$$

$$H_1 : \phi_1^* - 1 < 0 \quad I(0)$$

El estadístico es,

$$\tau^e = \frac{\phi_1^* - 1}{\sigma(\phi_1^*)}$$

Si se rechaza la hipótesis nula se procede a determinar que la serie es estacionaria bajo la evidencia empírica. En caso de no rechazar la raíz unitaria, se debe diferenciar una vez para convertirla en estacionaria.

Test de Said-Dickey (1984)

Artículo de Said-Dickey (1984): “*Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order*”

Biometrika (1984), **71**, 3, pp. 599-607
Printed in Great Britain

599

Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order

BY SAID E. SAID

Department of Mathematics, East Carolina University, Greenville, North Carolina, U.S.A.

AND DAVID A. DICKEY

Department of Statistics, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, U.S.A.

Se basaron en que hasta ese momento se habían propuesto métodos para detectar raíces unitarias en series de tiempo promedio autorregresivas y de movimiento autorregresivo.

La presencia de una raíz unitaria indica que la serie temporal no es estacionaria, pero que la diferenciación la reducirá a la Condición de Estacionariedad. Las pruebas propuestas hasta esa fecha requieren la especificación del número de coeficientes de promedio móvil y autorregresivo en el modelo.

Test de Said-Dickey (1984)

En este artículo desarrollan una prueba de raíces unitarias que se basa en una aproximación de un modelo de promedio móvil autorregresivo por una autorregresividad.

El estadístico de prueba es el resultado estándar de la mayoría de los programas de regresión y tiene una distribución límite cuyos percentiles se han tabulado. En el paper se proporciona un ejemplo. Sea $Y_t : ARIMA(p; 1; q)$, es decir,

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varphi_{p+1} Y_{t-p-1} + \Theta(B)\epsilon_t$$

En notación compacta,

$$\Phi(B)(1 - B)Y_t = \Theta(B)\epsilon_t = \Phi(B)\nabla Y_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

Estos autores propusieron reestimar el modelo y emplear una representación $ARIMA(p^*; 1; 0)$, es decir poner a prueba la conjetura de raíz unitaria sobre un modelo sin coeficientes de la representación de medias móviles, tratando de encontrar el valor de p^* óptimo que mejor se ajuste a la serie (determinado por Criterios de Información).

Test de Said-Dickey (1984)

La ecuación a poner a prueba es,

$$\nabla Y_t = (\phi_1^* - 1)Y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p^*} \phi_{j+1}^* \nabla Y_{t-j} + \epsilon_t$$

Se trata de encontrar el valor de p^* óptimo que mejor se ajuste a la serie (determinado por Criterios de Información). El procedimiento es el siguiente,

- Se plantea un valor elevado de p y se procede a estimar la serie partiendo del orden más elevado hasta encontrar aquella representación con el menor valor de Criterio de Información (AIC, SBC, etc).
- Cuando se encuentra dicho valor de p se selecciona como el valor óptimo de la serie y luego se procede a realizar el test considerando dicho valor.



AIC, BIC
elevado

AIC, BIC
mínimo

Test de KPSS

Como alternativa a la prueba Dickey-Fuller, se podría emplear el enfoque KPSS, que prueba la nula de estacionariedad.

Kwiatkowski – Phillips – Schmidt – Shin (KPSS) se utiliza para probar una hipótesis nula de que una serie temporal observable es estacionaria alrededor de una tendencia determinista (es decir , estacionaria de tendencia) frente a la alternativa de una raíz unitaria.

Contrariamente a la mayoría de las pruebas de raíz unitaria , la presencia de una raíz unitaria no es la hipótesis nula sino la alternativa. Además, en la prueba KPSS, la ausencia de una raíz unitaria no es una prueba de estacionariedad sino, por diseño, de tendencia-estacionariedad.

Esta es una distinción importante ya que es posible que una serie de tiempo sea no estacionaria, no tenga una raíz unitaria y sea estacionaria de tendencia.

Test de KPSS

Tanto en la raíz unitaria como en los procesos estacionarios de tendencia, la media puede aumentar o disminuir con el tiempo.

Sin embargo, en presencia de un choque, los procesos estacionarios de tendencia son reversos a la media (es decir, transitorios, las series de tiempo convergerán nuevamente hacia la media creciente, que no se vio afectada por el choque) mientras que la raíz unitaria.

Los procesos tienen un impacto permanente en la media (es decir, no hay convergencia en el tiempo).

Las pruebas de tipo KPSS están destinadas a complementar las pruebas de raíz unitaria, como las pruebas Dickey-Fuller.

Al probar tanto la hipótesis de la raíz unitaria como la hipótesis de la estacionariedad, se pueden distinguir series que parecen ser estacionarias, series que parecen tener una raíz unitaria y series para las cuales los datos (o las pruebas) no son lo suficientemente informativos para asegurar si son estacionarias o integradas.

Test de KPSS

Testing the null hypothesis of stationarity
against the alternative of a unit root

How sure are we that economic time series
have a unit root?*

Denis Kwiatkowski

Central Michigan University, Mt. Pleasant, MI 48859, USA

Peter C.B. Phillips

Yale University, New Haven, CT 06520, USA

Peter Schmidt and Yongcheol Shin

Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA

Test de Zivot & Andrews (1992)

Perron (1989) sostuvo que los tradicionales test de Raíz Unitaria (Dickey-Fuller, Dickey-Fuller Aumentado y Phillips-Perron) tenían poco para diferenciar una trayectoria de raíz unitaria de una estacionaria cuando había cambio estructural. En consecuencia, como estos tests estaban sesgados hacia el “no rechazo” de la Hipótesis nula de Raíz Unitaria, a menudo se rechazaba incorrectamente la hipótesis alternativa de Estacionariedad.

Perrón encontró, por ejemplo, que las series de agregados macroeconómicos y financieros utilizados por Nelson y Plosser (1982) eran en su mayoría estacionarias con cambio estructural, en oposición a lo señalado por dichos autores.

A partir de esta línea, Zivot & Andrews (1992) elaboraron un test en la que la fecha del punto de quiebre era determinado en forma endógena.

Si las pruebas de raíz unitaria encuentran que una serie contiene una raíz unitaria, la ruta apropiada en este caso es transformar los datos diferenciando las variables antes de su inclusión en el modelo de regresión, pero esto conlleva una pérdida de información importante a largo plazo.

Test de Zivot & Andrews (1992)

Una debilidad bien conocida de las pruebas de ADF es su posible confusión de cambios estructurales en la serie como evidencia de no estacionariedad. En otras palabras, pueden fallar en rechazar la hipótesis de raíz unitaria si la serie tiene un cambio estructural.

Este procedimiento puede identificar la fecha del cambio estructural, facilita el análisis si el mismo está asociado a una variable o evento en particular (política gubernamental, una crisis monetaria, una guerra, etc). La prueba solo permite un cambio estructural y se elegirá una fecha donde la evidencia sea menos favorable para la presencia de una raíz unitaria.

La hipótesis nula es que la serie tiene una raíz unitaria con cambio(s) estructural(es) contra la hipótesis alternativa de que son estacionarias con cambio(s). Se rechaza la hipótesis nula si el estadístico del valor t es inferior al valor crítico tabulado (prueba de cola izquierda).

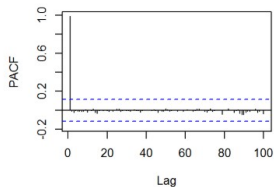
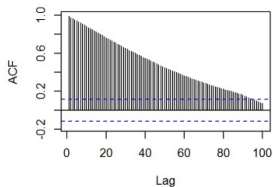
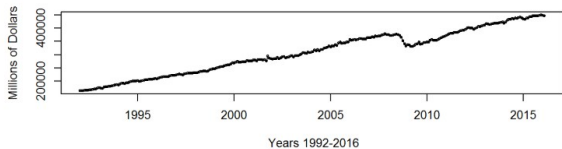
Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis

Eric Zivot; Donald W. K. Andrews

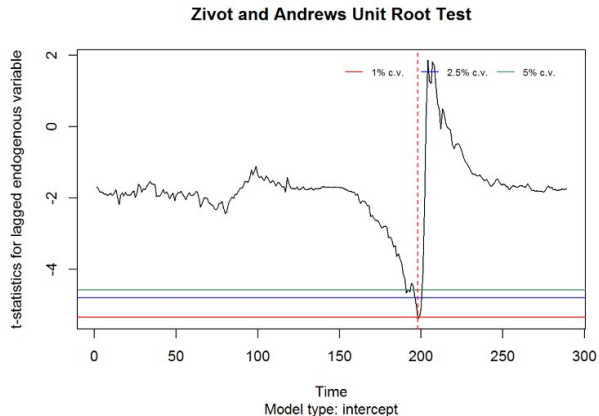
Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 10, No. 3. (Jul., 1992), pp. 251-270.

Test de Zivot & Andrews (1992)

Food Services Sales, Millions of Dollars Seasonally Adjusted Monthly data from 1992 to



Test de Zivot & Andrews (1992)



Próxima Clase

- * Modelos $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$
- * Prueba HEGY
- * Modelos $ARFIMA(p, d, q)$
- * Modelos $GARMA(p, \xi, d, q)$



Lecturas

Enders. Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulos 4 - 5.**

Hyndman. Forecasting: Principles and Practice. Second Edition. Monash University, Australia. Leer **Capítulo 8.**

Uriel. Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Leer **Capítulo 4** destinado a Procesos Estocástico

Peña. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 6**

Fin

