

# Análisis de Series Temporales

## Clase 5 - Modelos SARIMA

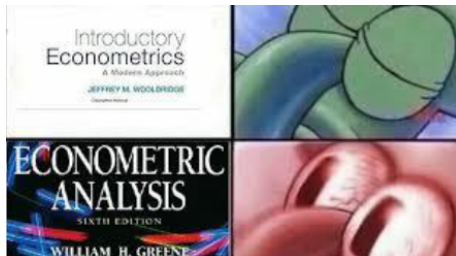
Rodrigo Del Rosso  
[RDelRosso-ext@austral.edu.ar](mailto:RDelRosso-ext@austral.edu.ar)

13 de Noviembre de 2021



# Agenda

- Modelos  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$
- Prueba HEGY
- Modelos  $ARFIMA(p, d, q)$
- Modelos  $GARMA(p, \xi, d, q)$



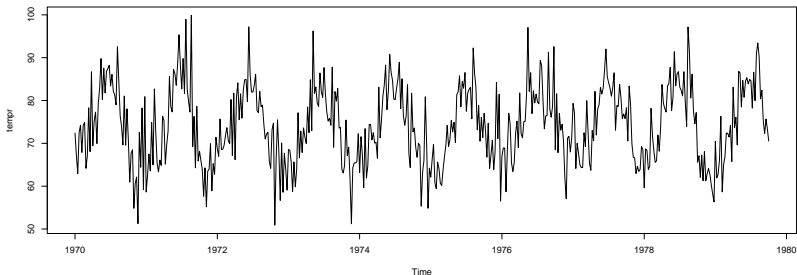
## Modelos SARIMA

Un modelo de media móvil integrada autorregresiva estacional (SARIMA) es la incorporación de tendencias estacionales al modelo ARIMA.

En muchos datos de series de tiempo, entran en juego frecuentes efectos estacionales.

Como por ejemplo la **temperatura promedio** medida en un lugar con cuatro estaciones. Habrá un efecto estacional sobre una base anual, y la temperatura en esta temporada en particular definitivamente tendrá una fuerte correlación con la temperatura medida el año pasado en la misma temporada.

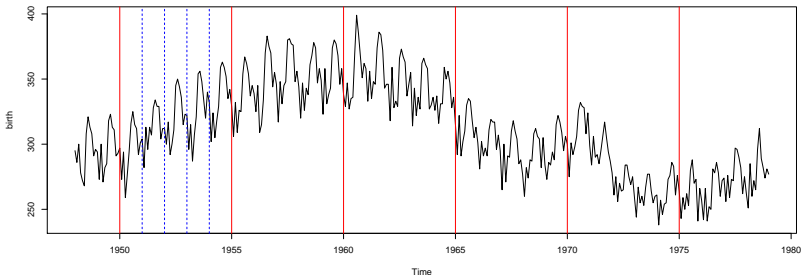
# Modelos SARIMA



El gráfico exhibe el aumento y la caída cíclica anual de las temperaturas, y hay una sólida base para suponer que las temperaturas caerán a 60 grados Fahrenheit cerca del final del año, mientras que las temperaturas superarán los 80 grados Fahrenheit cerca de la mitad del año.

## Modelos SARIMA

Otro ejemplo de tales ciclos de estacionalidad se puede ver en las **Tasas de Natalidad Mensuales** de los Estados Unidos.



Con las líneas rojas y azules como referencia visual, se puede detectar fácilmente los picos y valles anuales dentro de cada año, aunque parece haber alguna tendencia cíclica de “panorama más amplio” entre 1948 y 1979.

## Modelos SARIMA

Para una expresión de un **modelo SARIMA**, se puede observar la siguiente expresión **SARMA** de primer orden,

$$(1 - \phi B^{12})Y_t = (1 - \theta B^{12})\epsilon_t$$

$$Y_t = \phi_{12} Y_{t-12} + \epsilon_t - \theta_{12} \epsilon_{t-12}$$

El modelo exhibe autocorrelación en rezagos pasados de 12 períodos (que se definiría como el período estacional) tanto para ambos componentes (AR y MA).

Así, este modelo sería de  $SARMA(P, Q)$ , donde  $P = 1$  y  $Q = 1$ .

## Modelos SARIMA

La combinación de los modelos  $ARMA(p, d)$  estacionales y no estacionales se expresaría simplemente como  $ARMA(p, q)(P, Q)s$ , donde,

- $P$  componente autorregresivo estacional
- $Q$  componente de media móvil estacional
- $s$  representa el período estacional

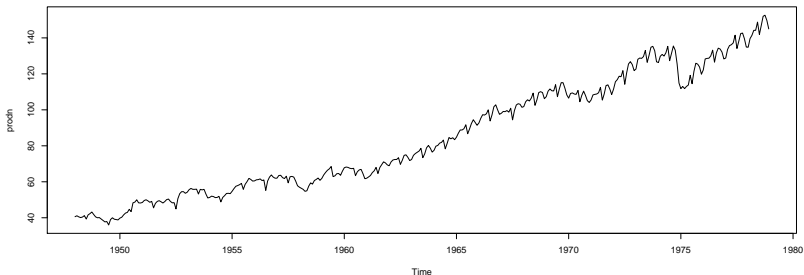
$$\Theta_P(B^s)\phi_p(B)Y_t = \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)\epsilon_t$$

Algunas series de tiempo pueden representar *FAC* que decaen lentamente en los rezagos múltiples del período estacional. Por lo tanto, el modelo **SARIMA multiplicativo** se puede expresar en una expresión similar al modelo ARIMA como se muestra a continuación,

$$\Theta_P(B^s)\phi_p(B)\nabla_s^D\nabla^dY_t = \phi_0 + \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)\epsilon_t$$

# Modelos SARIMA

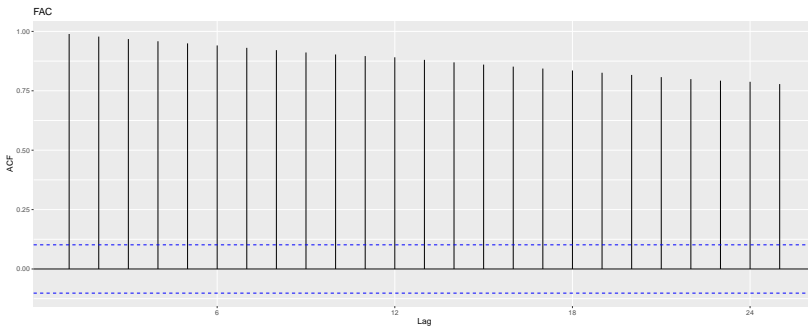
Por ejemplo, los datos de series de tiempo para el **Índice de Producción Mensual de la Junta** de la Reserva Federal de 1948 a 1978 se puede ajustar mediante el modelo SARIMA.



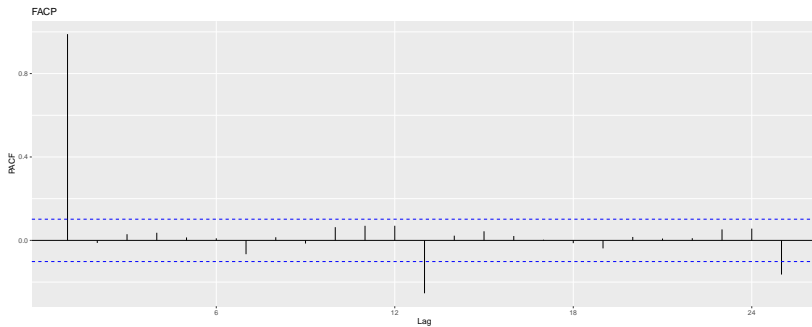


# Modelos SARIMA

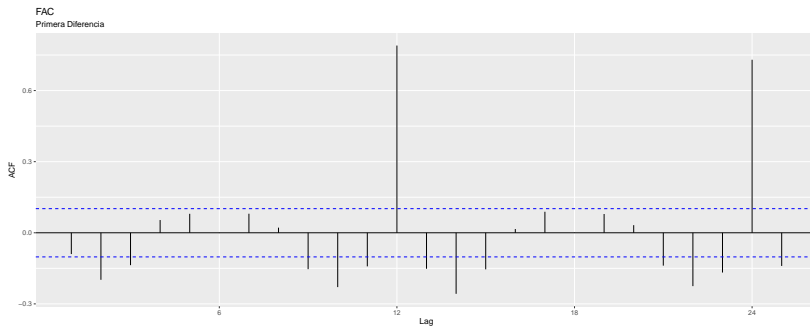
El lento decaimiento de la correlación exhibida en la FAC es una señal de que puede ser necesaria la diferenciación.



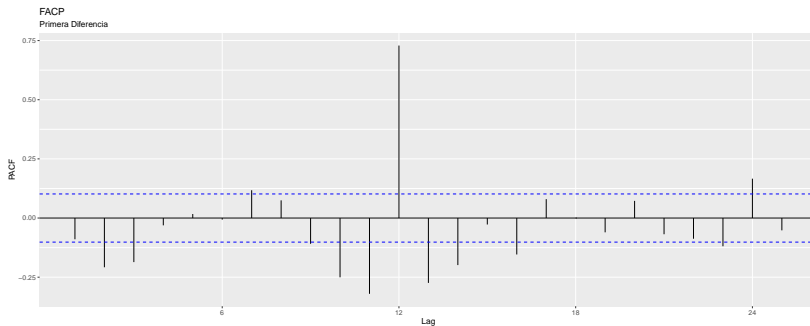
# Modelos SARIMA



# Modelos SARIMA

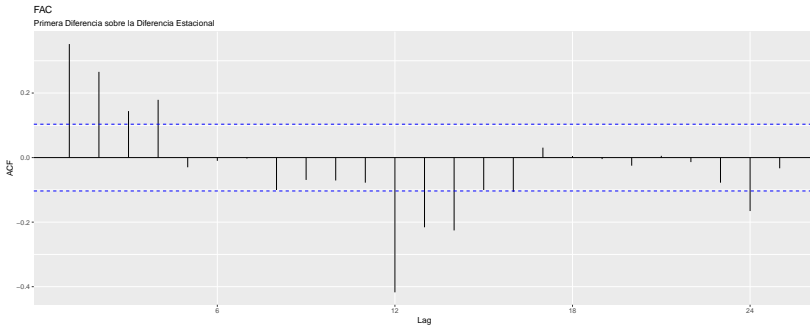


# Modelos SARIMA

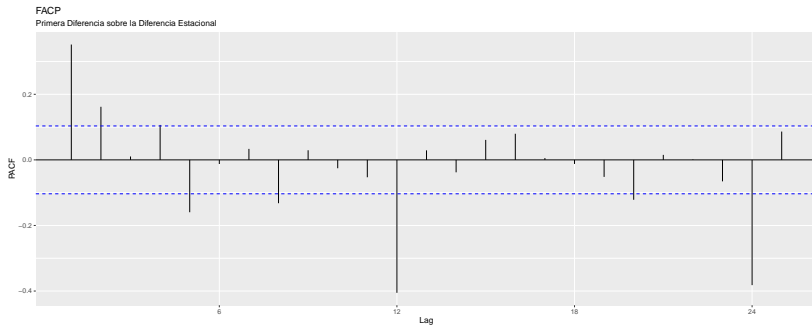


# Modelos SARIMA

Incluso con la primera diferencia, todavía hay un componente residual lento en la FAC en un lag estacional de 12, lo que indica que debe aplicarse una diferencia estacional.



# Modelos SARIMA



## Modelos SARIMA

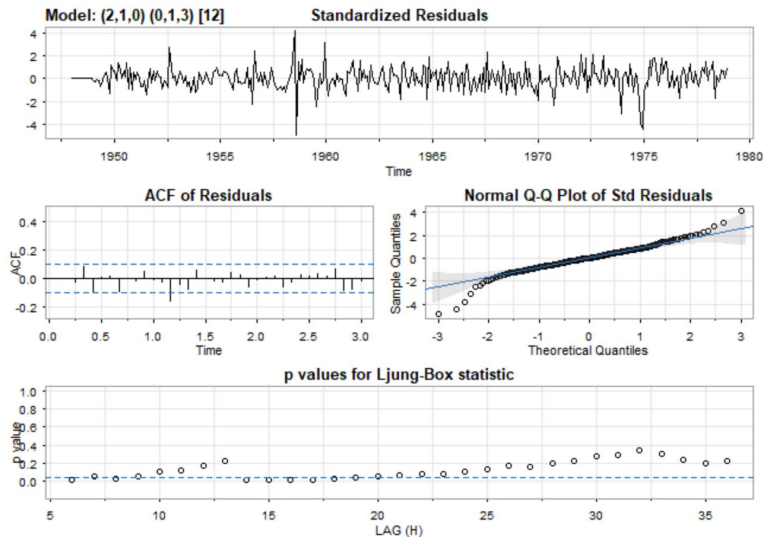
Después de aplicar la diferenciación, se puede abordar el modelado (S)ARMA en base a las gráficas FAC y FACP.

Desde la perspectiva del lag estacional, se observa que la FAC se corta en el tercer lag estacional, mientras que la FACP parece disminuir, lo que podría indicar que la mejor representación es  $SARMA(0, 3)$ .

Dentro del primer ciclo estacional, se puede ver que la FACP parece estar cortando en  $j = 2$ , mientras que la FAC se reduce.

Por lo tanto, un modelo propuesto puede ser  $ARMA(2, 0)(0, 3)_{12}$  para la serie diferenciada.

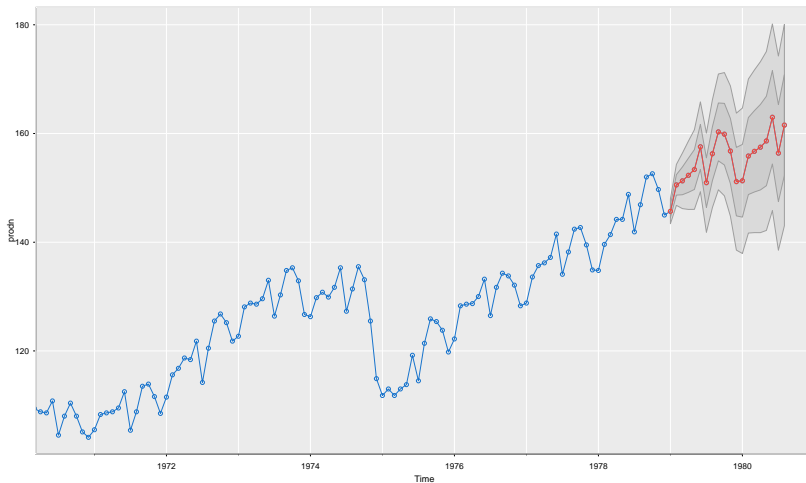
# Modelos SARIMA





# Modelos SARIMA

A medida que avanza el tiempo, la incertidumbre aumenta y, por lo tanto, los límites de predicción aumentan en amplitud.



## Test de Raíz Unitaria Estacional

Existe una prueba de hipótesis para testear la conjetura de **Raíz Unitaria Estacional**. El artículo original es,

- **HEGY**. S. Hylleberg, S, Engle, R., Granger, C., Yoo, B. (1990). Seasonal integration and cointegration. Journal of Econometrics, 44(1-2):215–238.

### Importante

Indagar en las diferencias entre las pruebas mencionadas previamente y este test en particular.

## Procesos de Memoria Larga

Existe una clase de procesos estacionarios que pueden confundirse fácilmente con los no estacionarios integrados.

Estos son los procesos de memoria larga, que se caracterizan por tener muchos coeficientes de autocorrelación con coeficientes pequeños y que se amortiguan muy lentamente.

El lento decrecimiento de las autocorrelaciones podría llevar a modelar estas series suponiendo que son integradas de orden uno, tomando una diferencia. Sin embargo, el decrecimiento es distinto que para procesos integrados, mucho más rápido para los primeros rezagos que en un proceso integrado, pero más lento para rezagos elevados.

Esta estructura hace que en un proceso de memoria larga se observen muchos coeficientes de autocorrelación pequeños y que decrecen muy lentamente para rezagos altos, a diferencia de lo que suele ocurrir con procesos integrados, donde el decrecimiento es lineal.

## Procesos de Memoria Larga

El proceso de memoria larga más simple se obtiene al generalizar el Random Walk con,

$$(1 - B)^d Y_t = \nabla^d Y_t = \epsilon_t$$

Donde ahora el parámetro  $d$  en lugar de ser un número entero es un número real.

Si  $-0,50 < d < 0,50$  se obtiene un proceso estacionario que se denomina proceso fraccional y tiene la propiedad de que sus autocorrelaciones decrecen muy lentamente.

Para definir el operador  $(1 - B)^d$  cuando  $d$  no es entero, se partirá de la expresión del Desarrollo del Binomio de Newton. Cuando  $d$  es un entero positivo se verifica que,

$$(1 - B)^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} 1^{d-i} (-B)^i = \sum_{i=0}^d \alpha_i B^i$$

## Procesos de Memoria Larga

Donde los coeficientes de esta suma se definen por,

$$\alpha_i = \binom{d}{i} (-1)^i = \frac{d!}{(d-i)!i!} (-1)^i = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d-i+1)} (-1)^i$$

Siendo  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$  la función Gamma que para valores enteros coincide con la función factorial. Para generalizarla cuando  $d$  no sea entero, se puede aprovechar que la función Gamma está definida para cualquier número real y escribir para  $d$  real.

$$(1-B)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i \quad \alpha_i = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d-i+1)} (-1)^i$$

Donde todos los términos mayores de  $d$  en esta sumatoria infinita son cero.

## Procesos de Memoria Larga

Donde todos los términos mayores de  $d$  en esta sumatoria infinita son cero. Con lo que para  $d$  entero se reduce la última expresión.

Para  $i = 0$  resulta  $\alpha_0 = 1$  y mediante las propiedades de la Función Gamma se demuestra que,

$$\alpha_i = \prod_{j>0}^i \frac{j-1-d}{j} \quad , \quad i = 1, 2, \dots$$

Mediante esta expresión se puede escribir el proceso fraccional  $\nabla^d Y_t = \epsilon_t$  mediante una representación  $AR(\infty)$  desarrollando el operador  $(1-B)^d$  para obtener,

$$Y_t = - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Y_{t-i} + \epsilon_t$$

Puede demostrarse que este proceso admite también una representación  $MA(\infty)$  de la forma,

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d)} \epsilon_{t-i}$$

## Procesos de Memoria Larga

Y la FAC del proceso fraccional de memoria larga  $\nabla^d Y_t = \epsilon_t$ ,

$$\rho_j(Y) = \frac{\Gamma(d+j)\Gamma(1-d)}{\Gamma(j+1-d)\Gamma(d)}$$

$$\rho_1(Y) = \frac{d}{1-d}$$

$$\rho_2(Y) = \rho_1(Y) \left( \frac{d+1}{2-d} \right)$$

$$\rho_j(Y) = \rho_{j-1}(Y) \left( \frac{d+j+1}{j-d} \right)$$

Para  $j$  grande se pueden aproximar las correlaciones por,

$$\rho_j(Y) = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} |j|^{2d-1} \Rightarrow \log \rho_j(Y) \approx a + (2d-1) \log |j|$$

## Procesos de Memoria Larga

Por lo tanto, si se gráfica  $\log \rho_j(Y)$  y  $\log |j|$  para valores elevados de  $j$  se obtiene una recta con pendiente  $2d - 1$ .

Esta propiedad diferencia un proceso de memoria larga de un proceso no estacionario integrado, donde se sabe que  $\log \rho_j(Y)$  decrece linealmente con  $j$  y no con  $\log |j|$ .

Esta propiedad pueden fácilmente llevar a la confusión con un  $AR(p)$  de orden elevado y si  $d$  es próximo a 0,50, los elevados valores y el lento decrecimiento de la FAC pueden sugerir un proceso  $I(1)$ .



## Procesos de Memoria Larga – $ARFIMA(p, d, q)$

Si se generaliza se pueden considerar procesos estacionarios  $ARMA$  pero que incluyan además memoria larga al definir,

$$\Phi(B)(1 - B)^d Y_t = \phi_0 + \Theta(B)\epsilon_t$$

1. Donde  $d$  no es necesariamente entero
2. Si  $d < 0,50$  el proceso es estacionario
3. Si  $d \geq 0,50$  el proceso es no estacionario

Estos modelos se denominan  $ARFIMA(p, d, q)$ , autorregresivos fraccionalmente integrados de media móvil.

Si el proceso es estacionario tiene la propiedad de que para rezagos altos, cuando la estructura  $ARMA$  desaparezca, mostrarán la característica de memoria larga.

Si no es estacionario, al tomar una diferencia se convertirán en estacionarios, pero de memoria larga.

## Procesos de Memoria Larga - GARMA

Otro de los procesos que requiere de nuestra mención son los procesos *ARMA* de Gegenbauer, también llamados procesos *GARMA*.

La característica que distingue a los procesos *GARMA* de los *ARFIMA* es que los primeros son capaces de capturar comportamientos persistentes y periódicos, periodicidad (o comportamiento cíclico) que no refleja un modelo *ARFIMA*.

En el caso de la modelización *GARMA*, la *FAC* del proceso presenta un decrecimiento hiperbólico pero, a diferencia del decrecimiento propio de las autocorrelaciones de un *ARFIMA*, este decrecimiento puede presentarse de manera sinusoidal.

$$\rho_j(Y) = K j^{2d-1} \text{sen}(\pi d - jG)$$

Donde  $G$  se conoce como la frecuencia del proceso.

## Procesos de Memoria Larga - GARMA

En cuanto a su estructura, un proceso  $GARMA(p, \xi, d, q)$  toma como base los polinomios de Gegenbauer.

Al aplicar a los procesos estocásticos este polinomio, definimos el proceso de Gegenbauer como aquel que admite una representación,

$$Y_t - \mu = (1 - 2\xi B + B^2)^{-d} \epsilon_t$$

El proceso de Gegenbauer es el caso más sencillo de los modelos  $GARMA(p, \xi, d, q)$ .

Estos últimos permiten la coexistencia de memoria larga y memoria corta a partir de la inclusión de los coeficientes del modelo  $ARMA(p, q)$ ,

$$\Phi(B)(1 - 2\xi B + B^2)^d(Y_t - \mu) = \Theta(B)\epsilon_t$$

De la observación del polinomio surge que si el parámetro  $\xi$  toma el valor 1 el proceso es equivalente a un  $ARFIMA(p, 2d, q)$  con lo que claramente se observa la inclusión de los  $ARFIMA$  como caso particular de la representación  $GARMA$ .

## Próxima Clase

- \* Análisis de Intervención
- \* Modelos ADL
- \* Modelos VAR



## Lecturas

**Enders.** Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulos 4 - 5.**

**Hyndman.** Forecasting: Principles and Practice. Second Edition. Monash University, Australia. Leer **Capítulo 8.**

**Uriel.** Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Leer **Capítulo 4** destinado a Procesos Estocástico

**Peña.** Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 6**

Fin

