Análisis de Series Temporales

Clase 6 - Modelos ADL

Rodrigo Del Rosso
RDelRosso-ext@austral.edu.ar

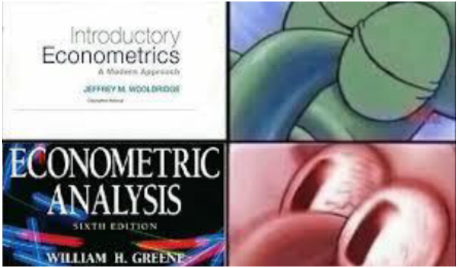
03 de Diciembre de 2021

UNIVERSIDAD AUSTRAL | INGENIERÍA

CIENCIA DE DATOS
Maestría en **Ciencia de Datos**

Agenda

- Análisis de Intervención
- Modelos ADL



Análisis de Intervención

Análisis de Intervención

Suponga que en el tiempo $= T$ (donde se conocerá T), ocurrió una intervención en una serie de tiempo.

Por intervención, nos referimos a un cambio en un procedimiento, ley o política, etc. que tiene la intención de cambiar los valores de la serie. Queremos estimar cuánto ha cambiado la intervención la serie (si es que lo ha hecho).

El análisis de intervención en series de tiempo se refiere al análisis de cómo cambia el nivel medio de una serie después de una intervención, cuando se supone que la misma estructura ARIMA para la serie se mantiene tanto antes como después de la intervención.

Análisis de Intervención

Ejemplo

Suponga que la serie observada se puede representar de la forma siguiente,

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + c_0 Z_t + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$$

Donde $|\phi_1| < 1$ y sea Z_t la cantidad de cambio en el momento que es atribuible a la intervención. Por definición, $Z_t = 0$ antes del tiempo T (tiempo de la intervención). El valor de Z_t puede o no ser 0 después del tiempo T.

$$Z_t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq T \\ \\ 1 & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

La media a largo plazo de la serie es $m(Y_t) = m(Y) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$

El intercepto depende de la intervención,

$$Z_t = 1 \Rightarrow \; Y_t = (\phi_0 + c_0) + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Z_t = 0 \Rightarrow \; Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Análisis de Intervención

Donde $\phi_0 + c_0$ es el intercepto si ha ocurrido la intervención. El impacto inicial del efecto de la intervención está dado por c_0. Por lo tanto se suele testear con "Test t" la siguiente conjetura,

$$H_0 : c_0 = 0$$

$$H_1 : c_0 \neq 0$$

El efecto a largo plazo de la intervención es, $\frac{c_0}{1-\phi_1} = \underbrace{\frac{\phi_0 + c_0}{1 - \phi_1}}_{Long \quad Term} - \underbrace{\frac{\phi_0}{1 - \phi_1}}_{Promedio}$

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + c_0 Z_t + \epsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B)\, Y_t = \phi_0 + c_0 Z_t + \epsilon_t \Rightarrow \; Y_t = \tfrac{\phi_0}{(1-\phi_1 B)} + \tfrac{c_0}{(1-\phi_1 B)} Z_t + \tfrac{1}{(1-\phi_1 B)} \epsilon_t$$

$$Y_t = \tfrac{\phi_0}{1-\phi_1} + c_0 \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^j \epsilon_{t-j}$$

Donde Y_t retorna a la **función impulso respuesta**.

Análisis de Intervención

El camino más simple para obtener las respuestas al impulso es reconocer que,

$$\frac{\partial Y_t}{\partial Z_{t-j}} = \frac{\partial Y_{t+j}}{\partial Z_t} \qquad Z_t = Z_{t+j} = 1 \quad \forall\, j > 0$$

Habíamos llegado a la siguiente ecuación,

$$Y_t = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^j \epsilon_{t-j}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial Z_{t-j}} = c_0 + c_0\phi_1 = \frac{\partial Y_{t+j}}{\partial Z_t}$$

Donde c_0 representa el impacto directo de Z_{t+1} sobre Y_{t+1} y $c_0\phi_1$ es el efecto de Z_t sobre Y_t (c_0) multiplicado por el efecto de Y_t sobre Y_{t+1} (ϕ_1).

$$\frac{\partial Y_{t+j}}{\partial Z_t} = c_0 \left(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \ldots + \phi_1^j\right) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \frac{\partial Y_{t+j}}{\partial Z_t} = \frac{c_0}{1-\phi_1}$$

Modelo de Intervención General

El modelo no necesita ser un $AR(1)$, suponga que el modelo ARIMA para Y_t (la serie observada) sin intervención es,

$$Y_t - \mu = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\epsilon_t$$

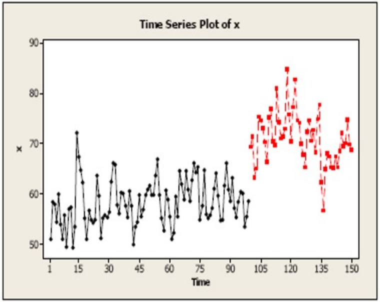
Donde $\Theta(B)$ es el operador de promedios móviles de orden q y $\Phi(B)$ es el operador autorregresivo de orden p.

Sea Z_t la cantidad de cambio en el momento que es atribuible a la intervención. Por definición, $Z_t = 0$ antes del tiempo T. Luego, el modelo general, incluido el efecto de intervención, puede escribirse como,

$$Y_t - \mu = Z_t + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\epsilon_t$$

Modelo de Intervención General

A continuación se presenta un gráfico de un modelo $MA(2)$ simulado con una media $\mu = 60$ antes de un "punto de intervención" en el $T = 100$. Se añadió 10 a la serie para momentos mayores a 100.



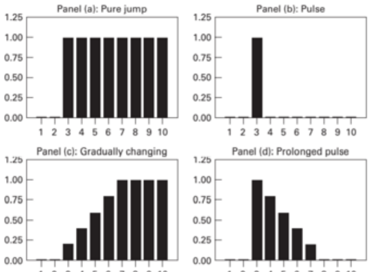
En la práctica, la tarea es determinar la magnitud y el patrón del cambio de la serie.

Posibles patrones para el efecto de intervención (patrones para Z_t)

Existen varios patrones posibles de cómo una intervención puede afectar los valores de una serie para $\geq T$ (el punto de intervención).

Los cuatro patrones posibles son los siguientes:

- Cambio constante permanente al nivel medio (Puro Salto)
- Breve cambio constante al nivel medio (Función Pulso)
- Aumento o disminución gradual a un nuevo nivel medio (Función Cambio Gradual)
- Cambio inicial seguido de un retorno gradual al no cambio (Función Impulso Prolongado)



Modelo de Intervención General

Los efectos de estas interacciones cambian si $Y_t : I(1)$, es decir si posee una raíz unitaria, dado que tendrá un efecto permanente sobre el nivel del proceso no estacionario, porque afectará el drift si la función impulso respuesta es de Puro Salto.

También es posible asumir que puede haber un delay en la intervención,

$$\Phi(B)Y_t = \phi_0 + c_0 Z_{t-d} + \Theta(B)\epsilon_t$$

Estimación del Efecto Intervención

Deben estimarse dos partes del modelo general: el modelo ARIMA básico para la serie y el efecto de intervención. Se han propuesto varios enfoques. Un enfoque tiene los siguientes pasos:

- Utilizar los datos antes del punto de intervención para determinar el modelo ARIMA para la serie.
- Utilizar ese modelo ARIMA para pronosticar valores para el período posterior a la intervención.
- Calcular las diferencias entre los valores reales después de la intervención y los valores pronosticados.
- Examinar las diferencias en el paso 3 para determinar un modelo para el efecto de intervención.

Funciones de Transferencias y ADLs

Funciones de Transferencias y ADLs

Una extensión natural del modelo de intervención es permitir que la secuencia Z_t sea algo más que una variable ficticia determinista. Consideren la siguiente generalización del modelo de intervención,

$$Y_t = \phi_0 + \Phi(L)\, Y_t + C(L)\, Z_t + \Theta(B)\, \epsilon_t$$

Suponga que $\Theta(B)\, \epsilon_t = \epsilon_t$

$$\Phi(B) Y_t = \phi_0 + \alpha(B) Z_t + \epsilon_t$$

Se denomina **Modelo ADL (Autorregresive Distributed Lag Model)**. El objetivo es estimar un modelo parsimonioso. Por ejemplo supongan que la realización de Z_t afecta la realización de la secuencia Y_t con un rezago de duración desconocido.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c_d Z_{t-d} + \epsilon_t$$

Los coeficientes ϕ_1 α_d son desconocidos, y d es el delay o rezago de duración a determinar por el Analista. Donde Z_t y ϵ_t son dos procesos Ruido Blanco Incorrelacionados e Independientes tal que se cumple lo siguiente,

$$E[Z_t \epsilon_{t-i}] = 0$$

Funciones de Transferencias y ADLs

Como podemos observar los diversos valores de Z_t, el primer paso es calcular las correlaciones cruzadas entre Y_t y los diversos Z_{t-i}.

La Correlación Cruzada (Cross Correlation) –CCF- entre Y_t y Z_{t-i} se define como,

$$\rho_{YZ}(i) \equiv \frac{\gamma(Y_t, Z_{t-i})}{\sigma_Y \sigma_Z}$$

Se supone que la desviación estándar de cada secuencia es independiente del tiempo. Al graficar cada valor de $\rho_{YZ}(i)$ se obtiene la función de correlación cruzada (CCF) o el correlograma cruzado.

En la práctica, debemos usar las correlaciones cruzadas calculadas usando datos muestrales porque no conocemos las covarianzas verdaderas o las desviaciones estándar.

El punto clave es que la observación de la CCF tiene el mismo tipo de información como la FAC de un ARMA.

Funciones de Transferencias y ADLs

Por ejemplo, partiendo de la ecuación anterior,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c_d Z_{t-d} + \epsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B) Y_t = c_d Z_{t-d} + \epsilon_t$$

$$Y_t = \frac{c_d}{(1-\phi_1 B)} Z_{t-d} + \frac{1}{(1-\phi_1 B)} \epsilon_t$$

$$Y_t = c_d \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-d-j} + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^j \epsilon_{t-j}$$

$$Y_t = c_d (Z_{t-d} + \phi_1 \; Z_{t-d-1} + \phi_1^2 Z_{t-d-2} + \ldots) \; + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^j \epsilon_{t-j}$$

Al tomar el valor esperado de cada una de las anteriores ecuaciones, y si se mantiene el supuesto que Z_t y ϵ_t son perturbaciones independientes de ruido blanco, se deduce que en forma compacta,

$$E[Y_t Z_{t-j}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < d \\ & \\ c_d \phi_1^{j-d} \sigma_Z^2 & \text{si} \quad j \geq d \end{cases}$$

Funciones de Transferencias y ADLs

Al dividir cada valor de $E[Y_t Z_{t-j}] \equiv \gamma(Y_t, Z_{t-i})$ entre σ_Y y σ_Z se obtiene el CCF. Formalmente,

$$\rho_{YZ}(j) \equiv \frac{\gamma\left(Y_t, Z_{t-j}\right)}{\sigma_Y \sigma_Z} = \frac{E\left[Y_t Z_{t-j}\right]}{\sigma_Y \sigma_Z}$$

Tener en cuenta que el **Correlograma Cruzado** consiste en ceros hasta el rezago d.

El valor absoluto de la altura de la primera correlación cruzada distinta de cero está positivamente relacionado con las magnitudes de c_d y ϕ_1. Posteriormente, las correlaciones cruzadas decaen a la velocidad ϕ_1.

La decadencia del correlograma coincide con los patrones autorregresivos de la secuencia Y_t. El patrón exhibido por,

$$E[Y_t Z_{t-j}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < d \\ & \\ c_d \phi_1^{j-d} \sigma_Z^2 & \text{si} \quad j \geq d \end{cases}$$

se generaliza fácilmente.

Funciones de Transferencias y ADLs

Por ejemplo, partiendo de la ecuación anterior,

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c_d Z_{t-d} + c_{d+1} Z_{t-d-1} + \epsilon_t$

$$E[Y_t Z_{t-j}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < d \\ c_d & \text{si} \quad j = d \\ c_d \phi_1 + c_{d+1} & \text{si} \quad j = d+1 \\ \phi_1^{j-d-1}(c_d \phi_1 + c_{d+1}) & \text{si} \quad j > d+1 \end{cases}$$

Funciones de Transferencias y ADLs

La función de Covarianza Cruzada Estandarizada (CCVF y CCF) tienen una forma con las siguientes características,

- Toda covarianza cruzada $E[Y_t Z_{t-j}]$ valdrá cero hasta el primer elemento distinto de cero del polinomio $C(L)$.
- Un pico en el CCVF indica un elemento distinto de cero de $C(L)$. Por lo tanto, un pico en el rezago d indica que Z_{t-j} afecta directamente a Y_t.
- Todos los picos decaen a la tasa de convergencia ϕ_1 implica que el valor absoluto de es menor que la unidad.
- Si $0 < \phi_1 < 1$, la desintegración en las covarianzas cruzadas será directa,
- Si $-1 < \phi_1 < 0$, el patrón de desintegración será oscilatorio.

Identificación y Estimación

Dado que Z_t evoluciona independientemente de Y_t podemos usar la metodología desarrollada de Box-Jenkins para estimar Z_t como el proceso AR dado por,

$$Y_t = \phi_0 + \phi(L)Y_{t-1} + C(L)Z_t + \epsilon_t$$

$$Z_t = D(L)Z_{t-1} + \epsilon_{zt}$$

Los residuos de dicho modelo, denotado por ϵ_{zt} deben ser Ruido Blanco. La idea es estimar las innovaciones en la secuencia Z_t aunque la secuencia en sí misma no sea un proceso de Ruido Blanco.

$$Y_t = \phi_0 + \phi(L)Y_t + C(L)Z_t + \epsilon_t$$

$$Z_t = D(L)Z_{t-1} + \epsilon_{zt}$$

Una vez que se ha estimado puede elegirse entre dos técnicas para estimar el modelo ADL. Si no se tiene en cuenta la parsimonia, simplemente puede utilizarse el modelo anterior,

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{n} c_i Z_{t-i} + \epsilon_t$$

Comentarios

- A diferencia del enfoque estándar de Box-Jenkins, se comienza a estimar el modelo ADL mediante los valores más grandes de p y de n considerados factibles.
- Luego, las pruebas F y t se pueden utilizar para reducir las longitudes de retraso del modelo. Además, también puede usar el AIC o el SBC para encontrar las longitudes de rezago que producen el mejor ajuste.
- Como en cualquier estimación de Series Temporal, es crucial realizar las verificaciones de diagnóstico apropiadas para garantizar que los residuos sean Ruido Blanco.
- El beneficio de este método es que es simple de realizar. Sin embargo, puede terminar fácilmente con un modelo demasiado parametrizado.
- Dado que Z_t y Z_{t-i} están correlacionados (y están correlacionados con los valores de Y_{t-i}), no es sencillo usar las pruebas t para reducir los coeficientes de $C(L)$.
- Por lo general, una vez que se determinan las longitudes de rezago p y n, no hay más intentos de reducir el modelo.

Comentarios

- El segundo método intenta reducir el modelo de una manera consistente con la metodología de Box-Jenkins.
- Como en el caso donde Z_t es ruido blanco, la idea es usar las correlaciones cruzadas para obtener el patrón de los coeficientes tal como aparecen en el ADL.
- Es tentador pensar que deberíamos formar las correlaciones cruzadas entre la secuencia Y_t y ϵ_{zt-i}.
- Sin embargo, este procedimiento sería inconsistente con la hipótesis mantenida de que la estructura de la función de transferencia viene dada por la ecuación vista previamente.
- La razón es que $Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots$ (y no simplemente las innovaciones) afectan directamente el valor de Y_t.
- Las correlaciones cruzadas entre Y_t y los diversos ϵ_{zt-i} no revelarían el patrón de los coeficientes en $C(L)$.

Próxima Clase

* Vectores Autorregresivos

Lecturas

Enders. Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulos 4 - 5**.

Hyndman. Forecasting: Principles and Practice. Second Edition. Monash University, Australia. Leer **Capítulo 8**.

Uriel. Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Leer **Capítulo 4** destinado a Procesos Estocástico

Peña. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 6**

Fin