Análisis de Series Temporales

Clase 3 - Modelos de Medias Móviles

Rodrigo Del Rosso
RDelRosso-ext@austral.edu.ar

16 de Octubre de 2021

UNIVERSIDAD AUSTRAL | INGENIERÍA

CIENCIA DE DATOS
Maestría en Ciencia de Datos

Agenda

- Relación entre procesos $AR(1)$ y $MA(\infty)$
- Representación de procesos $MA(1)$
- Representación de procesos $MA(2)$
- Estacionariedad e Invertibilidad
- Comparación de procesos $MA(q)$ con $AR(p)$

MODELO DE MEDIAS MÓVILES (MA)

Modelo de Medias Móviles (MA)

Un modelo de medias móviles de orden q, o abreviadamente un modelo MA(q), se define de la siguiente forma:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Conviene señalar que los coeficientes van precedidos por el signo negativo, por cuestión meramente de conveniencia en la notación.

Utilizando el operador polinominal de retardos: $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q$

El modelo de medias móviles se puede expresar de forma compacta:

$$\boxed{Y_t = \theta(L)\, \varepsilon_t}$$

La **media** de un modelo MA es **cero**, cualesquiera que sean los valores de θ:
$E[Y_t] = \theta(L)\, E[\varepsilon_t]$

Modelo de Medias Móviles (MA)

Si, en cambio, en el modelo original se incluye el término constante:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Entonces, al tomar esperanzas matemáticas en la expresión anterior resulta:

$$E[Y_t] = \delta + \theta(L)\underbrace{E[\varepsilon_t]}_{=0} = \delta$$

Así pues, en los modelos de medias móviles, la media del proceso coincide con el término independiente. Sin pérdida de generalidad, **en adelante supondremos que $\delta = 0$.**

Auto-test

¿Se entiende la idea de estos modelos? ¿Qué significado le dan a los rezagos del error? ¿Qué dice el libro de Peña al respecto?

Modelo de Medias Móviles (MA)

ESTACIONARIEDAD

Los modelos MA son **SIEMPRE** estacionarios con independencia de los valores de los coeficientes, ya que son combinaciones lineales de errores ruido blanco.

INVERTIBILIDAD

Dado que los modelo MA son estacionarios, pueden ser invertible en un AR(∞) bajo ciertas condiciones. La invertibilidad se puede evaluar ya sea a partir de las raíces de la Ecuación Característica (EC) como a partir de las raíces del Polinomio Característico (PC).

$$|Raices\ EC| < 1$$

$$|Raices\ PC| > 1$$

A diferencia de los modelos AR, los modelos de Medias Móviles tiene **memoria finita**. *Recordemos a continuación un concepto de los AR(1)...*

Recordemos: MODELOS AUTORREGRESIVOS DE PRIMER ORDEN – $AR(1)$

- Recuerden que por raíces:
  $|Raices\ EC| = |Raices\ PC|^{-1} \rightarrow Criterios\ Ec.\ o\ Polinom.\ Caract.$
- INVERTIBILIDAD: (*Propiedad*) *"Todo proceso autorregresivo estacionario es invertible en un modelo MA(∞), que siempre es estacionario"*.

Esta propiedad indica que:

- Todo proceso autorregresivo estacionario admite ser expresado alternativamente mediante un modelo de promedios móviles de orden infinito.
- La condición, es que el modelo AR sea estacionario

Los procesos MA son siempre estacionarios. Hay dos formas para obtener la expresión MA(∞) a partir de un proceso $AR(1)$:

(i) Aplicando el método de "reemplazos sucesivos"

(ii) Trabajando con el "polinomio operador de retardos"

Relación entre $AR(1)$ y $MA(\infty)$

- Método de "reemplazos sucesivos":

Partimos de la expresión del proceso: $Y_t = \phi\ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ Al conocer la forma del proceso, sabemos que: $Y_{t-1} = \phi\ Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$, reemplazo:

$$Y_t = \phi\left(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right) + \varepsilon_t \quad \Longrightarrow \quad Y_t = \phi^2 Y_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Nuevamente: $Y_{t-2} = \phi\ Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$, entonces:

$$Y_t = \phi^2\left(\phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\right) + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Longrightarrow \quad Y_t = \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Relación entre $AR(1)$ y $MA(\infty)$

(i) Método de "reemplazos sucesivos": *(continuación...)*

Si continuamos realizando reemplazos, es posible inferir que se alcanza una expresión del tipo:

$$Y_t = \phi^N \; Y_{t-N} + \underbrace{\phi^{N-1}\varepsilon_{t-(N-1)} + \phi^{N-2}\varepsilon_{t-(N-2)} + \ldots + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t}_{MA(N-1)}$$

Según propiedades del límite, se tiene:

$$\lim_{N\to\infty} Y_t = \underbrace{\lim_{N\to\infty}\left(\phi^N \; Y_{t-N}\right)}_{\to\ 0} +$$

$$\underbrace{+\lim_{N\to\infty}\left\{\phi^{N-1}\varepsilon_{t-(N-1)} + \phi^{N-2}\varepsilon_{t-(N-2)} + \ldots + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\right\}}_{\to\ MA(\infty)}$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty} Y_t = MA\,(\infty)$$

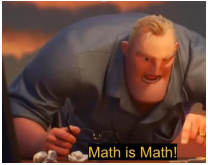
En definitiva, estamos en condiciones de afirmar que, cuando al cantidad de "reemplazos" realizados crece indefinidamente, se obtiene la expresión del modelo AR(1) estacionario original como un modelo MA(∞).

Relación entre $AR(1)$ y $MA(\infty)$

(ii) Trabajando con el polinomio operador en retardos, $\Psi(L)$:

Partimos de la expresión del proceso:

$$Y_t = \phi \; Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Longrightarrow \quad Y_t - \phi \; Y_{t-1} = \varepsilon_t$$



Expresamos todo a partir del operador retardo (L):

$$(1 - \phi L) \, Y_t = \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad Y_t = \frac{1}{1-\phi L} \; \varepsilon_t$$

Dado que el polinomio operador de retardos se define de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1-\phi L} = \Psi \, (L) = \left(1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \Psi_3 L^3 + \ldots\right)$$

Entonces: $Y_t = \Psi \, (L) \, \varepsilon_t = \left(1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \Psi_3 L^3 + \ldots\right) \varepsilon_t$

Distribuyendo se tiene:

$$Y_t = \varepsilon_t + \Psi_1 \; \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \; \varepsilon_{t-2} + \Psi_3 \; \varepsilon_{t-3} + \ldots \rightarrow \; MA \, (\infty)$$

Importante

Obtuvimos la expresión del modelo $MA(\infty)$, nos resta obtener la expresión de los coeficientes Ψ_i, en función del coeficiente del modelo original, ϕ.

Relación entre $AR(1)$ y $MA(\infty)$

(ii) Trabajando con el polinomio operador en retardos, $\Psi(L)$ *(continuación...)*:

Sea

$$\frac{1}{1-\phi L} = \left(1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \Psi_3 L^3 + \ldots\right)$$

Entonces: $1 = (1 - \phi L)\left(1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \Psi_3 L^3 + \ldots\right)$

Distribuyendo:

$$1 = 1 - \phi\ L + \Psi_1 L - \phi\Psi_1 L^2 + \Psi_2 L^2 - \phi\Psi_2 L^3 + \Psi_3 L^3 + \ldots$$

Agrupando:

$$1 = 1 + (\Psi_1 - \phi)L + (\Psi_2 - \phi\Psi_1)\ L^2 + (\Psi_3 - \phi\Psi_2)L^3 + \ldots$$

Relación entre $AR(1)$ y $MA(\infty)$

(ii) Trabajando con el polinomio operador en retardos, $\Psi(L)$ *(continuación...)*:

$$1 = 1 + (\Psi_1 - \phi)L + (\Psi_2 - \phi\Psi_1)\, L^2 + (\Psi_3 - \phi\Psi_2)L^3 + \dots$$

Igualando miembro a miembro cada término de los polinomios obtenidos:

$1 = 1$

$$0.L = (\Psi_1 - \phi)L \quad \Longrightarrow \quad \Psi_1 - \phi = 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\Psi_1 = \phi}$$

$$0.L^2 = (\Psi_2 - \phi\Psi_1)\, L^2 \quad \Longrightarrow \quad \Psi_2 - \phi\Psi_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Psi_2 = \phi\Psi_1 \quad \Longrightarrow \boxed{\Psi_2 = \phi^2}$$

$$0.L^3 = (\Psi_3 - \phi\Psi_2)\, L^3 \quad \Longrightarrow \quad \Psi_3 - \phi\Psi_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Psi_3 = \phi\Psi_2 \quad \Longrightarrow \boxed{\Psi_3 = \phi^3}$$

...

Importante

- De este modo obtuvimos la expresión de los coeficientes del modelo $MA(\infty)$ en función del coeficiente del AR(1) dado: $\boxed{Y_t = \varepsilon_t + \phi \;\; \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \;\; \varepsilon_{t-2} + \phi^3 \;\; \varepsilon_{t-3} + \dots}$

Procesos $MA(1)$

Ahora que ya vimos algunas cosas,
vamos en detalle con Medias Móviles. . .

Procesos $MA(1)$

$MA(1)$: $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1} = (1-\theta_1 L) \ \varepsilon_t$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación anterior por Y_{t-k} y se toman esperanzas matemáticas se tiene que:

$$Y_t \cdot Y_{t-k} = (\varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1}) \qquad \underbrace{Y_{t-k}}_{(\varepsilon_{t-k} \ -\theta_1 \ \ \varepsilon_{t-k-1})}$$

$$E[Y_t \cdot Y_{t-k}] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} \ - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-k-1})]$$

Puede verse que para $k=0$, resulta:

$$E[Y_t^2] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1})^2] = E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \ \ \varepsilon_{t-1}^2 - 2 \ \theta_1 \ \varepsilon_t \ \ \varepsilon_{t-1}] =$$

$$= \underbrace{E[\varepsilon_t^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1^2 \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} - 2\theta_1 \underbrace{E[\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-1}]}_{=0} = \boxed{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0}$$

Procesos $MA(1)$

MA(1): $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 L) \ \varepsilon_t$

Tenemos entonces: $E\left[Y_t \cdot Y_{t-k}\right] = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \ \varepsilon_{t-k-1})\right]$

Puede verse que para $k = 1$, resulta: auto covarianza

$$\boxed{E\left[Y_t \cdot Y_{t-1}\right]} = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \ \varepsilon_{t-2})\right] =$$

$$= \underbrace{E\left(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-1}\right)}_{=0} - \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_t \ \varepsilon_{t-2})}_{=0} - \theta_1 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1}^2\right)}_{=\sigma_\varepsilon^2} - \theta_1^2 \underbrace{E\left(\varepsilon_{t-1} \ \varepsilon_{t-2}\right)}_{=0} = \boxed{-\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_1}$$

Para valor de $k > 1$, se deduce que: $\boxed{\gamma_k = 0}$

Auto-test

Entonces, ¡¡hemos deducido las funciones de autocovarianzas para un proceso $MA(1)$!! ¿Qué relación guardan con las de un $AR(p)$?

Procesos $MA(1)$

MA(1): $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} = (1-\theta_1 L) \ \varepsilon_t$

Para obtener las funciones de autocorrelación basta con reemplazar los valores de las autocovarianzas en la siguiente función:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

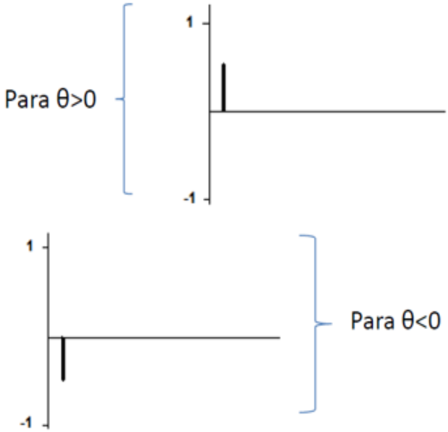
Entonces,

$$Para \quad k=1 \Longrightarrow \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 \ \sigma_\varepsilon^2}{\left(1+\theta_1^2\right) \ \sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_1}{\left(1+\theta_1^2\right)} = \rho_1$$

$$Para \quad k>1 \Longrightarrow \qquad \rho_k = 0 \qquad \forall k>1$$

Procesos $MA(1)$

Una vez calculados los coeficientes de correlación correspondientes al proceso $MA(1)$ se pueden representar en un correlograma:



Procesos $MA(1)$

CONDICIONES DE INVERTIBILIDAD:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_t = Y_t + \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1}$$

Dado que los procesos $MA(1)$ son **SIEMPRE ESTACIONARIOS**, si efectuamos sustituciones sucesivas, resulta que:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} = Y_t + \theta_1 \left(\underbrace{Y_{t-1} + \theta_1 \ \varepsilon_{t-2}} \right) = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 \ \varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-2} = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 \left(\underbrace{Y_{t-2} + \theta_1 \ \varepsilon_{t-3}} \right) = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \theta_1^3 \ \varepsilon_{t-3}$$

... ...

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \cdots + \theta_1^N Y_{t-N} + \theta_1^{N+1} \ \varepsilon_{t-(N+1)}$$

Se anidan las sustituciones en este esquema recursivo hasta llegar a esta expresión

Procesos $MA(1)$

CONDICIONES DE INVERTIBILIDAD: $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1}$ *(continuación...)*

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \ldots + \theta_1^N \ Y_{t-N} + \theta_1^{N+1} \ \ \varepsilon_{t-(N+1)}$$

- Si $|\theta_1| < 1$, el último término de la expresión anterior tiene menos peso a medida que sea mayor N, y además el peso de cada Y_t retardada decrece a medida que crece el número de retardos. En consecuencia, si se cumple siempre esta condición, el modelo podrá expresarse así:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \ldots$$

- De esta forma, se ha pasado de un MA(1) a un $AR(\infty)$. La condición que permitió invertir un modelo en otro es: $\boxed{|\theta_1| < 1}$ y se denomina **"condición de invertibilidad"**.

CONDICIONES DE INVERTIBILIDAD: $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1}$ *(continuación...)*

La condición de invertibilidad de un modelo $MA(1)$ es equivalente en sentido formal a la condición de estacionariedad de un modelo $AR(1)$. Cuando $|\theta_1| < 1$, entonces:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1-\theta_1) \ L} \ Y_t$$

Puede verse como una ecuación en diferencias de ε_t:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \ \varepsilon_{t-1} = \underbrace{(1 - \theta_1 L)}_{Polin. \quad Caract.} \ \varepsilon_t$$

Para que esta ecuación sea estable se requiere que la raíz del polinomio característico $[1 - \theta_1 L = 0]$ caiga fuera del círculo unitario.

Es decir, $\boxed{|L| = \left|\frac{1}{\theta_1}\right| > 1 \Longleftrightarrow |\theta_1| < 1}$

Procesos $MA(2)$

Ampliemos los rezagos... ¡veamos como convergen ciertas cosas al orden q!...

Procesos $MA(2)$

MA(2): $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2} = \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2\right) \ \varepsilon_t$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación anterior por Y_{t-k} y se toman esperanzas matemáticas se tiene que: $E\left[Y_t \, . Y_{t-k}\right] =$

$$E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2}) \underbrace{(\varepsilon_{t-k} \ - \theta_1 \ \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-k-2})}_{Y_{t-k}}\right]$$

Puede verse que los distintos valores de k, resulta:

$$k = 0 \quad \longrightarrow \quad E\left[Y_t^2\right] = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2})^2\right] =$$

$$E\left[\varepsilon_t^2 - 2\theta_1 \ \varepsilon_t \ \varepsilon_{t-1} - 2\theta_2 \ \varepsilon_t \ \varepsilon_{t-2} + \theta_1^2 \ \ \varepsilon_{t-1}^2 + 2\theta_1\theta_2 \ \ \varepsilon_{t-1} \ \ \varepsilon_{t-2} + \theta_2^2 \ \ \varepsilon_{t-2}^2\right] =$$

$$= \underbrace{E[\varepsilon_t^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1^2 \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_2^2 \underbrace{E[\varepsilon_{t-2}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \boxed{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0}$$

Procesos $MA(2)$

Continuamos con otros valores de k:

$$E\left[Y_t \cdot Y_{t-k}\right] = E\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \; \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-k} \; - \theta_1 \; \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \; \varepsilon_{t-k-2}\right)\right]$$

Entonces:

$$k = 1 \;\longrightarrow\; E\left[Y_t \; .Y_{t-1}\right] =$$

$$= E\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \; \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-1} \; - \theta_1 \; \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \; \varepsilon_{t-3}\right)\right] =$$

$$E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-3} - \theta_1 \; \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1^2 \; \varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-2} + \theta_1\theta_2 \; \varepsilon_{t-1} \; \varepsilon_{t-3} - \\ - \theta_2 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-2} + \theta_1\theta_2 \; \varepsilon_{t-2}^2 + \theta_2^2 \; \varepsilon_{t-2} \; \varepsilon_{t-3}] =$$

$$= -\theta_1 \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1\theta_2 \underbrace{E[\varepsilon_{t-2}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \boxed{(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_1}$$

Procesos $MA(2)$

Continuamos con otros valores de k:

$$E\left[Y_t \cdot Y_{t-k}\right] = E\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \;\; \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \;\; \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-k} \;\; - \theta_1 \;\; \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \;\; \varepsilon_{t-k-2}\right)\right]$$

Entonces:

autocovarianza de orden 2

$$k = 2 \;\longrightarrow\; E\left[Y_t \; .Y_{t-2}\right] =$$

$$= E\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \;\; \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \;\; \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-2} \;\; - \theta_1 \;\; \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \;\; \varepsilon_{t-4}\right)\right] =$$

$$= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \; \varepsilon_t \; \varepsilon_{t-4} - \theta_1 \;\; \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \theta_1^2 \;\; \varepsilon_{t-1} \;\; \varepsilon_{t-3} +$$

$$+\theta_1\theta_2 \;\; \varepsilon_{t-1} \;\; \varepsilon_{t-4} - \theta_2 \; \varepsilon_{t-2}^2 + \theta_1\theta_2 \;\; \varepsilon_{t-2} \;\; \varepsilon_{t-3} + \theta_2^2 \;\; \varepsilon_{t-2} \;\; \varepsilon_{t-4}] =$$

$$= -\theta_2 \; \underbrace{E[\varepsilon_{t-2}^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \boxed{(-\theta_2)\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_2}$$

Procesos $MA(2)$

Dado los procesos $MA(2)$, veamos la relación entre las funciones de autocovarianzas y autocorrelación:

MA(2): $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \ \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \ \varepsilon_{t-2} =$
$= \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2\right) \varepsilon_t$

Entonces:

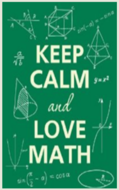
$$\gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = (-\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = 0, \quad \forall k > 2$$

Así obtuvimos las distintas **autocovarianzas**.



- A partir de dichas expresiones se obtienen fácilmente los **coeficientes de autocorrelación:**

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

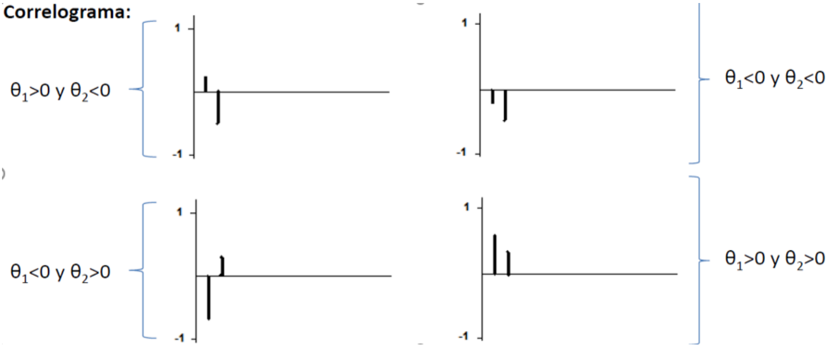
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0 \ \ \forall k > 2$$

Procesos $MA(2)$

Para que un proceso $MA(2)$ sea **invertible** se requiere que las raíces del polinomio característico: $1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ *caigan fuera del círculo unitario*.

Esto es: $|\theta_i| < 1 \quad \forall\ i = 1, 2$.



Comparación entre procesos $AR(p)$ y $MA(q)$

	AR	MA
Estacionariedad	Condiciones: |Raíces EC|<1 |Raíces PC|>1	SIEMPRE
Invertibilidad	Si es estacionario: $AR(p) \leftrightarrow MA(\infty)$	Condiciones: |Raíces EC|<1 |Raíces PC|>1 $MA(q) \leftrightarrow AR(\infty)$

Lecturas

Enders. Applied Econometric Time Series. Fourth Edition. Wiley Series. Leer **Capítulos 1 - 2**.

Hyndman. Forecasting: Principles and Practice. Second Edition. Monash University, Australia. Leer **Capítulo 2**.

Uriel. Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Leer **Capítulo 2** destinado a Procesos Estocástico

Peña. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Leer **Capítulos 3 - 4**

Fin