Riemann Hypotheses

Alex J. Best

WMS Talks

4/2/2014

In this talk:

The Riemann zeta function: Euler's work

- In 1735 Euler solves the **Basel problem** by finding that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

The Riemann zeta function: Euler's work

- In 1735 Euler solves the **Basel problem** by finding that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- He also discovered more general formulae for $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ in terms of the Bernoulli numbers B_{2k} for all natural k.

The Riemann zeta function: Euler's work

- In 1735 Euler solves the **Basel problem** by finding that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- He also discovered more general formulae for $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ in terms of the Bernoulli numbers B_{2k} for all natural k.
- In fact, a nice form for

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k-1},$$

is still unknown today.

The Riemann zeta function: Along comes Riemann

- In 1859 Bernhard Riemann, a well known analyst, publishes a paper on counting the primes using analysis.

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

The Riemann zeta function: Along comes Riemann

- In 1859 Bernhard Riemann, a well known analyst, publishes a paper on counting the primes using analysis.
- In the paper he considers

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

The Riemann zeta function: Along comes Riemann

- In 1859 Bernhard Riemann, a well known analyst, publishes a paper on counting the primes using analysis.
- In the paper he considers

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- Here the notation ζ for this function is used for the first time.

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

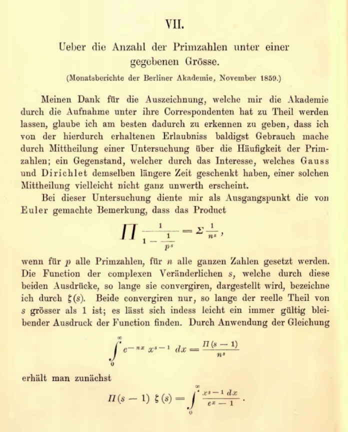
$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

The Riemann zeta function: Along comes Riemann

- In 1859 Bernhard Riemann, a well known analyst, publishes a paper on counting the primes using analysis.
- In the paper he considers

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- Here the notation ζ for this function is used for the first time.
- Along the way he (essentially) makes four hypotheses.



VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

The Riemann zeta function: What Riemann did

In his paper Riemann takes the function
$\zeta\colon \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1\} \to \mathbb{C}$ and extends it to all of $\mathbb{C}$.

Ramanujan graphs

Suppose we want to design a communications network (for computers, people, phones, etc.) by linking together n entities with wires, such that each object has only k wires from it.

Ramanujan graphs

Suppose we want to design a communications network (for computers, people, phones, etc.) by linking together n entities with wires, such that each object has only k wires from it.

We shall call our entities **nodes** and wires **edges**, as in graph theory.

Ramanujan graphs

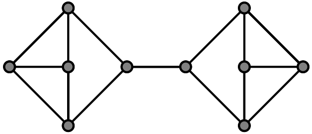
Suppose we want to design a communications network (for computers, people, phones, etc.) by linking together n entities with wires, such that each object has only k wires from it.

We shall call our entities **nodes** and wires **edges**, as in graph theory.

For today we will think of our goal as the following:

If we split our network into two nonempty parts (a partition) there should be lots of edges between the two halves.

Ramanujan graphs



Suppose we want to design a communications network (for computers, people, phones, etc.) by linking together n entities with wires, such that each object has only k wires from it.

We shall call our entities **nodes** and wires **edges**, as in graph theory.

For today we will think of our goal as the following:

If we split our network into two nonempty parts (a partition) there should be lots of edges between the two halves.

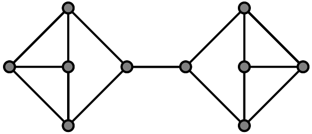
Ramanujan graphs

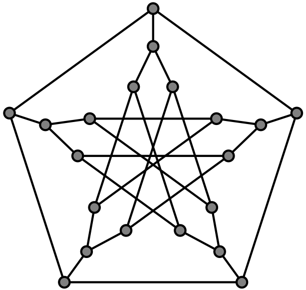
Suppose we want to design a communications network (for computers, people, phones, etc.) by linking together n entities with wires, such that each object has only k wires from it.

We shall call our entities **nodes** and wires **edges**, as in graph theory.

For today we will think of our goal as the following:

If we split our network into two nonempty parts (a partition) there should be lots of edges between the two halves.





Ramanujan graphs

The Cheeger constant

The Ihara zeta function

The zeta function of a scheme

The Dedekind zeta function

Dedekind wanted to use the

Closing remarks

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).

Closing remarks

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).
- The properties of this package can be used to discover and prove statements about the objects you started with.

Closing remarks

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).
- The properties of this package can be used to discover and prove statements about the objects you started with.
- We can also see the link different objects via their zeta functions.

Closing remarks

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).
- The properties of this package can be used to discover and prove statements about the objects you started with.
- We can also see the link different objects via their zeta functions.
- A huge number of papers have been written that assume the Riemann hypothsis, so a proof of it would imply hundreds of other results true.