Riemann Hypotheses

Alex J. Best

WMS Talks

4/2/2014

In this talk:

The Riemann zeta function

Euler's work:

The Riemann zeta function

Euler's work:

- In 1735 Euler solves the *Basel problem* and finds

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

The Riemann zeta function

Euler's work:

- In 1735 Euler solves the *Basel problem* and finds

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- He also discovered formulae for $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ in terms of the Bernoulli numbers B_{2k} for all natural k.

The Riemann zeta function

Euler's work:

- In 1735 Euler solves the *Basel problem* and finds

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- He also discovered formulae for $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ in terms of the Bernoulli numbers B_{2k} for all natural k.
- In fact, a nice form for

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k-1},$$

is still unknown today.

The Riemann zeta function

Along comes Riemann:

- In Riemann, a well known analyst, publishes a paper.

VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Ramanujan graphs

The Ihara zeta function

The zeta function of a scheme

The Dedekind zeta function

Dedekind wanted to use the

Conclusion

The take away message:

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).

Conclusion

The take away message:

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).
- The properties of this package can be used to discover and prove statements about the objects you started with.

Conclusion

The take away message:

- Zeta functions can be used to pack up useful information into one big package (a complex function).
- The properties of this package can be used to discover and prove statements about the objects you started with.
- We can also see the link different objects via their zeta functions.