



UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL Y SERIES

Taller 1

Alexander Mendoza

8 de marzo de 2024

Las respuestas para el capítulo 13 del Spivak se encuentran señaladas en azul

Las respuestas para el capítulo 14 del Spivak se encuentran señaladas en rojo

Las respuestas para los ejercicios complementarios se encuentran señaladas en verde

Spivak Capítulo 13

1. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

Consideremos la partición de $[0, b]$ P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \frac{b}{n}, \dots, t_i = \frac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^3 = \left((i-1) \frac{b}{n} \right)^3$$

$$M_i = t_i^3 = \left(i \frac{b}{n} \right)^3$$

Luego

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left((i-1) \frac{b}{n} \right)^3 \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \frac{b^4}{n^4} \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\frac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(i \frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 \frac{b^4}{n^4} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\
&= \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{b^4}{4} \left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{b^4}{4} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2} \right) \\
&= \frac{b^4}{n}
\end{aligned}$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \frac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^4}{n} < \epsilon$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0, b]$ tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ se aproximan a $\frac{b^4}{4}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^4}{4}$ es el único número tal que

$$L(f, P_n) = \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \leq \frac{b^4}{4} \leq \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = U(f, P_n)$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

2. Demostrar que $\int_0^b x^4 dx = \frac{b^5}{5}$.

Consideremos la partición de $[0, b]$ P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \frac{b}{n}, \dots, t_i = \frac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^4 = \left((i-1) \frac{b}{n} \right)^4$$

$$M_i = t_i^4 = \left(i \frac{b}{n} \right)^4$$

Luego

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left((i-1) \frac{b}{n} \right)^4 \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n (i-1)^4 \frac{b^5}{n^5} \\ &= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^n (i-1)^4 \\ &= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\ &= \frac{b^5}{n^5} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} \\ &= \frac{b^5}{30} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{n^5} \\ &= \frac{b^5}{30} \left[6 + \frac{5(2-3n)n^2-1}{n^4} \right] \\ &= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4} \end{aligned}$$

Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\frac{b^5}{5}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(i \frac{b}{n}\right)^4 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^n i^4 \frac{b^5}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^n i^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\
&= \frac{b^5}{30} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{30} \left[6 + \frac{5(2+3n)n^2-1}{n^4} \right] \\
&= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4} \\
&= \frac{b^5}{n}
\end{aligned}$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \frac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^5}{n} < \epsilon$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0, b]$ tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ se aproximan a $\frac{b^5}{5}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^5}{5}$ es el único número tal que

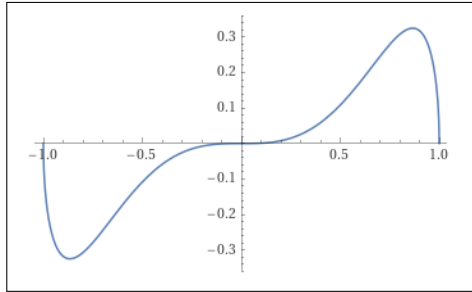
$$L(f, P_n) = \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4} \leq \frac{b^5}{5} \leq \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4} = U(f, P_n)$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^5}{5}$.

5. Obtener sin cálculos

i. $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

La gráfica de la función es la siguiente:



Observando la función, podemos observar que es impar, esto se puede verificar ya que

$$-(x^3 \sqrt{1-x^2}) = (-x)^3 \sqrt{1-(-x)^2}$$

Luego $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = 0$, esto se puede observar gráficamente ya que el área debajo del eje x es igual al área sobre el eje, por lo cual se cancelan.

ii. $\int_{-1}^1 (x^5 + 3) \sqrt{1-x} dx$

Primero manipulemos la expresión para que sea más fácil de trabajar,

$$\int_{-1}^1 (x^5 + 3) \sqrt{1-x} dx = \int_{-1}^1 x^5 \sqrt{1-x} dx + \int_{-1}^1 3 \sqrt{1-x} dx$$

Observemos que $x^5 \sqrt{1-x}$ es impar, por lo tanto $\int_{-1}^1 x^5 \sqrt{1-x} dx = 0$. Además observemos que $\sqrt{1-x}$ es una función par, por lo tanto $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$. Por último observemos que $\sqrt{1-x}$ es la función del círculo unitario, por lo tanto $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \pi/4$ así tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^5 + 3) \sqrt{1-x} dx &= \int_{-1}^1 x^5 \sqrt{1-x} dx + \int_{-1}^1 3 \sqrt{1-x} dx \\ &= 0 + 3 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x} dx \\ &= 6 \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \\ &= 6 \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

7. Decidir cuáles de las siguientes funciones siguientes son integrables sobre $[0, 2]$, y calcular la integral cuando sea posible.

i. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

La función es integrable y su integral se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 x - 2dx \\ &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 x - \int_1^2 2dx \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} - 2(2 - 1)\right) \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - 4 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii. $f(x) = x + [x]$

La función es integrable y su integral se calcula de la siguiente manera

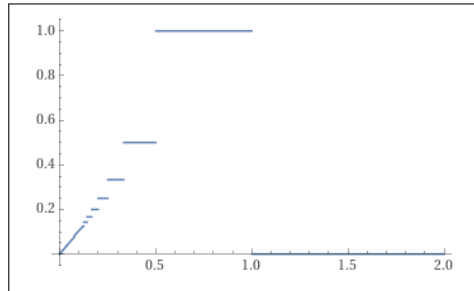
$$\begin{aligned} \int_0^2 x + [x]dx &= \int_0^2 xdx + \int_0^2 [x]dx \\ &= \int_0^2 xdx + \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 0(1 - 0) + 1(2 - 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

vi. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$

Analicemos los valores que toma nuestra función

$\left[\frac{1}{x} \right]$	Condición
$\frac{1}{1}$	$1 \leq \frac{1}{x} < 2 \leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$
$\frac{1}{2}$	$2 \leq \frac{1}{x} < 3 \leftrightarrow \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$3 \leq \frac{1}{x} < 4 \leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$
\vdots	\vdots
$\frac{1}{n}$	$n \leq \frac{1}{x} < n+1 \leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

Con esta tabla de valores podemos obtener la siguiente gráfica



Así, podemos dividir $(0, 1]$ en intervalos, obtener el área de esos intervalos y sumar las áreas. Haremos esto de la siguiente manera, primero veamos cuál es el área de los intervalos

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

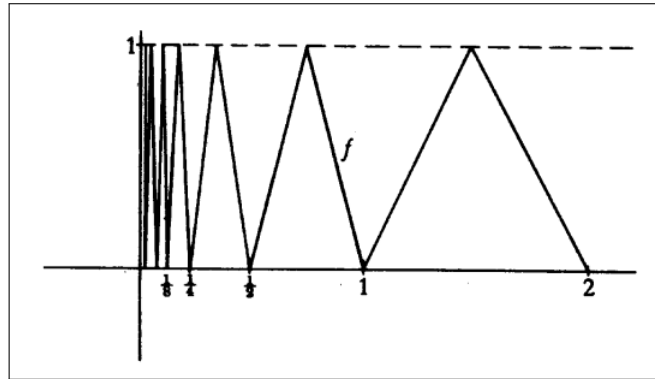
$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{36}$$

Luego, nuestra integral toma el siguiente valor

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\
 &= \int_0^1 f(x)dx + 0 \\
 &= 1(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{6}(\pi^2 - 6)
 \end{aligned}$$

vii. f es la función indicada en la siguiente figura



Analicemos el área en cada intervalo en el cambia la función. En cada intervalo la función forma un triángulo, algunos intervalos en los que podemos observar que cambia la función son $[1, 2]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$. $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1(2-1)}{2} = \frac{1}{2}$ Para el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, el área del triángulo es:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1(1 - \frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{4}$$

Para el intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, el área del triángulo es:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}{2} = \frac{1}{8}$$

Finalmente, para el intervalo $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, el área del triángulo es:

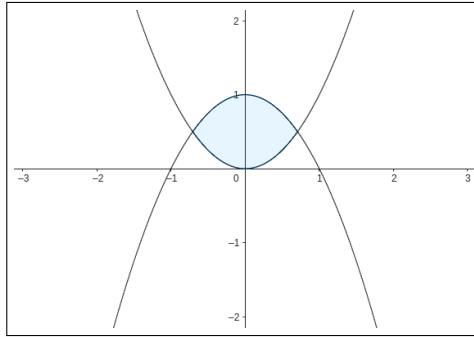
$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} f(x) dx = \frac{1(\frac{1}{4} - \frac{1}{8})}{2} = \frac{1}{16}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

8. Hallar las áreas de las regiones limitadas por

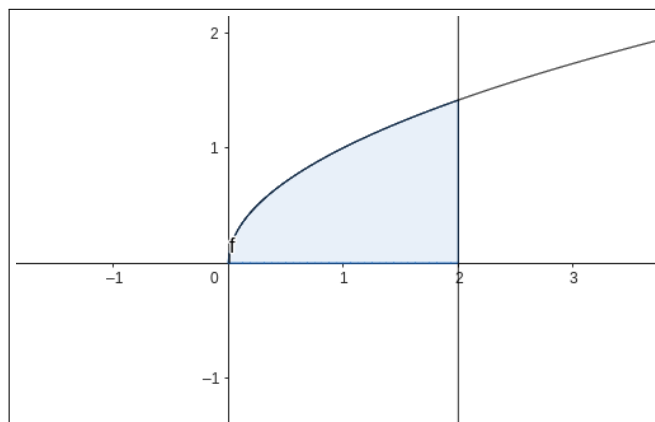
iii. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$



Consideraremos el intervalo $[-1, 1]$, sabemos que la altura va a ser $h = (2 - x^2) - x^2$, luego

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 1 - 2x^2 dx \\
 &= \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 2x^2 dx \\
 &= x - \frac{2^3}{x} \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

vi. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la vertical por $(2, 0)$. La gráfica de la función es la siguiente



9. Hallar

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)dy \right)$$

en términos de $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$.

Para esto, consideraremos las constantes que están dentro de las integrales, observemos que en integral de adentro, $f(x)$ sería una constante ya que se está integrando con respecto a y y no a x . Así, tenemos

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx = \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y) dy \right) dx$$

Observemos ahora que la integral de adentro es constante con respecto a la integral de afuera, así se puede concluir lo siguiente

$$\int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y) dy \right) dx = \int_c^d g(y) dy \int_a^b f(x) dx$$

13. Si $a < b < c < d$ y f es integrable sobre $[a, d]$, demostrar que f es integrable sobre $[b, c]$.

Para el ejercicio usaremos el Teorema 4. Como $a < b < c < d$, tenemos que $a < c < d$ y como f es integrable sobre $[a, d]$, por el Teorema 4 tenemos que f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, d]$. Luego, como $a < b < c$, aplicando nuevamente el Teorema 4 tenemos que f es integrable sobre $[b, c]$.

20. Supongamos que f está acotada sobre $[a, b]$ y que f es continua en todo punto de $[a, b]$ con la excepción de x_0 de (a, b) . Demostrar que f es integrable sobre $[a, b]$.

Primero definamos las siguientes funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \\ m, & x = x_0 \end{cases}$$

Donde $m = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x > x_0 \\ 0, & x < x_0 \\ n, & x = x_0 \end{cases}$$

Donde $n = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Y sea

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ f(x_0) - m - n, & x = x_0 \end{cases}$$

Luego $f = f_1 + f_2 + f_3$, como f_1, f_2, f_3 son integrables, f es integrable por el Teorema 5.

Spivak Capítulo 14

1. Hallar las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

iii.

$$F(x) = \int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt \right) dy$$

Sea $f(y) = \int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt$, así por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ &= \int_8^x \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt \\ &= \int_x^8 \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt \end{aligned}$$

v.

$$F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\sin^2 t} dt$$

Como x es constante, tenemos

$$x \int_a^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt$$

Además, la integral es una integral definida por lo cual sabemos que tomará algún valor fijo, por lo cual la función se puede ver como una variable x por una constante, así

$$F'(x) = \int_a^b \frac{1}{1+t^2 + \sin^2 t}$$

viii. F^{-1} , donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} (F^{-1})'(x) &= \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-(F^{-1}(x))^2}}} \\ &= \sqrt{1-(F^{-1}(x))^2} \end{aligned}$$

2. Para cada una de las f siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$, ¿En qué puntos x es $F'(x) = f(x)$?

ii. $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(x) = 1$ si $x \geq 1$.

Como la función es continua en todos los puntos excepto en 1, por el primer teorema fundamental del cálculo tenemos que $F'(x) = f(x)$ en todo $x \neq 1$.

iii. $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(x) = 1$ si $x = 1$.

Nuevamente, como la función es continua en todos los puntos excepto en 1, por el primer teorema fundamental del cálculo tenemos que $F'(x) = f(x)$ en todo $x \neq 1$.

vi. $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{1}{\lceil \frac{1}{x} \rceil}$ si $x \geq 0$.

$F'(x) = f(x)$ para todo x irracional.

4. Demostrar que los valores de las expresiones siguientes no dependen de x .

i.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Consideremos $f(x)$ como la expresión de arriba, luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos que si $f'(x) = 0$, entonces $f(x) = c$ para alguna constante c , de esta manera, f no depende de x .

ii.

6. Hallar una función g tal que

i.

$$\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$g(t) = \frac{1}{t} + 2$$

12. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^x xf(t)dt \right)' \\ &= \left(1 \cdot \int_0^x f(t)dt + x \cdot \left(\int_0^x f(t)dt \right)' \right) \\ &= \int_0^x f(t)dt + x \cdot f(x). \end{aligned}$$

13. Demostrar que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

Sea $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du$ y $G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$, luego derivemos ambas funciones y tenemos

$$F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$

Usando el ejercicio anterior tenemos que $F'(x) = \int_0^x f(t)dt$

De manera similar

$$G'(x) = \int_0^x f(t)dt$$

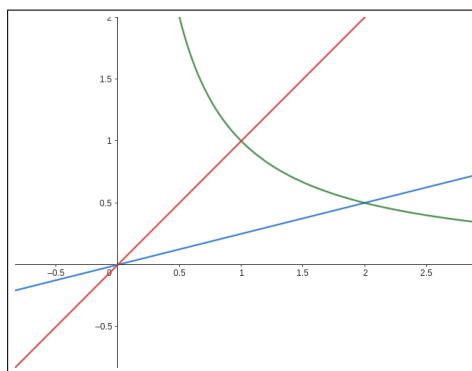
Así, como sus derivadas son iguales, entonces $F(x) = G(x)$

Ejercicios Complementarios

1. Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y . Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.

i.

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$$



Los puntos de intersección son $x = 0, x = 2, x = 1$, así

$$\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{4} \right) dx + \int_{-1}^0 -\frac{3x}{4} dx + \int_0^2 0 dx = \log(2) \approx 0,693147$$

ii.

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \geq 0$$

Los puntos de intersección son $x = 0, x = 2, x = 1$, luego

$$\int_{-6}^{-\frac{3}{2}} \left(3 - x - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{7x^2}{4} dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 0 dx = \frac{117}{8}$$

2. Plantee una integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones delimitadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco cifras decimales.

i. $y = e^{-x^2}, y = 0, x = -1, x = 1$

Alrededor del eje x . Procederemos por el método de la arandela, así

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(e^{-x^2} \right)^2 dx \approx 3,75825$$

Alrededor de $y = -1$. Procederemos de la misma forma por el método de la arandela.

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(e^{-x^2} - 1 \right)^2 - (1)^2 dx \approx 6,93975$$

ii. $y = 0, y = \cos^2 x, \frac{2\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Alrededor del eje x . De igual forma procederemos por el método de las arandelas

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x)^2 dx \approx 3,70110$$

Alrededor de $y = 1$. Procederemos nuevamente por el método de las arandelas

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1)^2 - (1 - \cos^2 x)^2 dx \approx 1,9635$$

iii. $x^2 + 4y^2 = 4$

Alrededor de $y = 2$. Procederemos nuevamente por el método de la arandela

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(2(1 + \sqrt{1 - y^2}) \right)^2 - \left(2(1 - \sqrt{1 - y^2}) \right)^2 dy \approx 39,47841$$

Alrededor de $x = 2$. Procederemos por el método de los cascarones de cilindro.

$$4\pi \sqrt{1 - \frac{(2+x)^2}{4x(4+x)}} \cdot |x| \approx 121,7486$$

iv.

$$y = x^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$$

3. a. Plantee una integral para el volumen del solido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado. b. Utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación de cinco decimales.

i.

$$y = xe^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 2$$

Alrededor del eje y tenemos que

$$V = 2\pi \int_0^2 x^2 e^{-x} dx \approx 4,06300$$

ii. $y = \tan x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$ Alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$. Tenemos que

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x \, dx \approx 2,25323$$

4. Determine la longitud exacta de las siguientes curvas

$$y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y' = 9(x)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (9(x)^{1/2})^2} \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 81x} \, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 81x)^{1/2} \, dx \\ &= 6,10322 \end{aligned}$$

5.

$$y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y > 0$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + (3(x + 4)^{1/2})^2} \, dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 9(x + 4)} \, dx \\ &\approx 13,54287 \end{aligned}$$

6.

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y' = \frac{4x^4 - 1}{4x^2}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{4x^4 - 1}{4x^2}\right)^2} \, dx \\ &= \frac{59}{24} \approx 2,45833 \end{aligned}$$

7.

$$x = \frac{y^4}{8} + \frac{1}{4y^2}, \quad 1 \leq y \leq 2$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y^3}{2} - \frac{1}{2y^3}\right)^2} \, dy \approx 2,0625$$

8. Determine el area de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x

$$y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$A = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1)$$

9.

$$9x = y^2 + 18, \quad 2 \leq x \leq 6$$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^6 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= 49\pi \end{aligned}$$

10.

$$y = \sqrt{1 + 4x}, \quad 1 \leq x \leq 5, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x}}$$

$$A = 2\pi \int_1^5 \sqrt{1 + 4x} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 4x}}\right)^2} dx = \frac{98\pi}{3}$$