UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Álgebra Lineal II

Taller 1

Alexander Mendoza

1 de marzo de 2024

Taller 1

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

   Encontrar los valores propios, vectores propios y E_λ.

   Respuesta. Sabemos que el polinomio polinomio característico es de la siguiente forma:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

   Luego,

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -3 & 9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

   Ahora para encontrar los valores propios, debemos encontrar las raíces del polinomio. Se puede observar que $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ es de la forma expandida de un binomio al cubo, por lo tanto, el polinomio se puede factorizar de la siguiente forma:

$$-(\lambda + 1)^3$$

   De esta manera, al igualar a cero, $-(\lambda + 1)^3 =$, se puede concluir que $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$. Encontremos ahora los vectores propios, para esto resolveremos el siguiente sistema homogéneo: $Ax = 0$, donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $x_1, x_2, x_3 \in F$. Así, el sistema homogéneo para $\lambda = -1$ quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Resolviendo el sistema tenemos que el vector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es una solución para el sistema y por lo tanto es un vector propio para A.

2. Demostrar el siguiente teorema. Si A es similar a una matriz diagonal, entonces los elementos de esta matriz diagonal son los valores propios de A. ***Demostración***. Si $P^{-1}AP = D$ para alguna matriz invertible P donde D es una matriz diagonal. Luego

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(PDP^{-1} - \lambda I) & &= \det(PDP^{-1} - \lambda PP^{-1}) \\ &= \det(P(D - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(D - \lambda I)\det(P^{-1}) \end{aligned}$$

Sabemos que $det(P) \in \mathbb{R}$ y que $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$, además, como P es invertible $det(P) \neq 0$ por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \det(P)\det(D - \lambda I)\det(P^{-1}) &= \det(P)\det(P^{-1})\det(D - \lambda I) \\ &= \det(P)\frac{1}{\det(P)}\det(D - \lambda I) & &= \det(D - \lambda I) \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que $\det(A - \lambda I) = \det(D - \lambda I)$.

3. Sea $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ordenada para V, y sea T un mapeo de coordenadas tal que $T(v) = [v]_\beta$, luego T es una transformación lineal.

   Demostración. Demostremos primero que $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para todo $v, w \in V$.

   Sean $v, w \in V$, luego tenemos lo siguiente:

$$T(v) = [v]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

   Donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

   y de manera similar

$$T(v) = [v]_\beta = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

Donde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son escalares tal que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(v+w) &= [v+w]_\beta \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \gamma_i) u_i \right]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \\ &= T(v) + T(w) \end{aligned}$$

Demostremos que $T(cv) = cT(v)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y todo $v \in V$.
Sean $v \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos:

$$T(v) = [v]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
T(cv) &= [cv]_\beta \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(c\alpha_i)n_i\right]_\beta \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ c\alpha_2 \\ \vdots \\ c\alpha_n \end{bmatrix} \\
&= c\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= cT(v)
\end{aligned}
$$

4. Sea $T : \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

y sean β_1 y β_2 bases de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ y $P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\beta_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\beta_2 = \left\{1, x, x^2\right\}$$

Encuentre $[T]_{\beta_1}^{\beta_2}$.

Para encontrar $[T]_{\beta_1}^{\beta_2}$ debemos aplicar la transformación a cada vector de β_1 y luego obtener la matriz de la transformación. En este orden de ideas, para $v_j \in \beta_1$ tenemos lo siguiente:

$$T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1+0) + 2\cdot 0x + 0x^2 = 1$$

$$T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0+1) + 2\cdot 0x + 1x^2 = 1 + x^2$$

$$T(v_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0+0) + 2\cdot 0x + 0x^2 = 0$$

$$T(v_4) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0+0) + 2 \cdot 1x + 0x^2 = 2x$$

Luego

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Sea $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

a) Hallar la matriz de F para las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

$$\beta_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$
$$\beta_2 = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

b) Dada $V \in \mathbb{R}^3$, verifique

$$[F]_{\beta_1}^{\beta_2}[v]_{\beta_1} = [F(v)]_{\beta_2}$$

a) Por definición de F,

$$F((1, 1, 1)) = (3(1) + 2(1) - 4(1), 1 - 5(1) + 3(1)) = (1, -1)$$

$$F((1, 1, 0)) = (3(1) + 2(1) - 4(0), 1 - 5(1) + 3(0)) = (5, -4)$$

y

$$F((1, 0, 0)) = (3(1) + 2(0) - 4(0), 1 - 5(0) + 3(0)) = (3, 1)$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Por último,

$$[F]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 1 & 19 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Sea $v = (a, b, c)$ Tenemos que

$$[F(v)_{\beta_2}] = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \beta_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3a + 2b - 4c \\ 3 & 5 & a - 5b + 3c \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} -13a - 20b + 26c \\ 8a + 11b - 15c \end{bmatrix}\right]$$

Luego de manera similar tenemos que

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{bmatrix}$$

Por último

$$\begin{aligned} [F]_{\beta_1}^{\beta_2}[v]_{\beta_1} &= \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 1 & 19 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -13a - 20b + 26c \\ 8a + 11b - 15c \end{bmatrix} \\ &= [F(v)_{\beta_2}] \end{aligned}$$

6. Sea W_1 el conjunto que denota todos las polinomios, $f(x)$ en $P(F)$ tal que se tiene la representación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Tenemos que $a_i = 0$ si i es par Sea W_2 que denota el conjunto de todos los polinomios $g(x) \in F$ tal que su representación

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

tenemos que $b_i = 0$, i es impar. Demuestre que $P(F) = W_1 \oplus W_2$

Para demostrar que $P(F) = W_1 \oplus W_2$, donde W_1 y W_2 son definidos como:

$$W_1 = \{f(x) \in F \mid a_i = 0 \text{ si } i \text{ es impar}\}$$
$$W_2 = \{g(x) \in F \mid b_i = 0 \text{ si } i \text{ es impar}\}$$

Demostramos que $P(F) = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Primero, para $h(x) \in P(F)$, $h(x) = f(x) + g(x)$, donde $f(x) \in W_1$ y $g(x) \in W_2$. Así, $P(F) = W_1 + W_2$.

Luego, si $h(x) \in W_1 \cap W_2$, entonces $h(x) = 0$. Por lo tanto, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Por lo tanto, $P(F) = W_1 \oplus W_2$.