Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Taller 6

Alexander Mendoza
Alejandro Garzón

6 de noviembre de 2024

Ejercicio 3.1.35

Dadas las soluciones $\mathrm{Y}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ y $\mathrm{Y}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ el sistema $\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = A\mathrm{Y}$, donde $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(a) Computar $\frac{dW}{dt}$

Define $W(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$. Entonces:

$$\frac{dW}{dt} = x_1\frac{dy_2}{dt} + y_2\frac{dx_1}{dt} - x_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_2}{dt}.$$

(b) Muestre que $\dfrac{dW}{dt} = (a+d)W(t)$

Dado que $\frac{dY}{dt} = AY$, tenemos:

$$\frac{dY_1}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dy_1}{dt} \end{pmatrix} = AY_1 = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar,

$$\frac{dY_2}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = AY_2 = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en $\frac{dW}{dt}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= x_1(cx_2 + dy_2) + y_2(ax_1 + by_1) - x_2(cx_1 + dy_1) - y_1(ax_2 + by_2) \\ &= a(x_1y_2 - x_2y_1) + d(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (a+d)W(t),\end{aligned}$$

donde $W(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$.

(d) Solución General para $W(t)$

Para encontrar $W(t)$, resolvemos:

$$\frac{dW}{dt} = (a+d)W(t) \Rightarrow \frac{1}{W(t)}\frac{dW}{dt} = a + d.$$

Integrando ambos lados se obtiene:

$$\ln(W) = (a+d)t + C \Rightarrow W(t) = Ke^{(a+d)t} \quad \text{con } K = e^C.$$

(e) Condición para Independencia Lineal

Dado que $W(t) = \det(\mathrm{Y}_1(t) \quad \mathrm{Y}_2(t))$, si $\mathrm{Y}_1(0)$ y $\mathrm{Y}_2(0)$ son linealmente independientes, entonces $W(0) = K \neq 0$, por lo que $W(t) = Ke^{(a+d)t} \neq 0$ para todo t. Así, $\mathrm{Y}_1(t)$ y $\mathrm{Y}_2(t)$ permanecen linealmente independientes, ya que $W(t) \neq 0$.

Ejercicio 3.2.14

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$$

donde la condición inicial es $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$.

Para encontrar los valores propios, resolvemos $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2) = 0,$$

lo cual se simplifica a

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

dando las soluciones $(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$, así que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = 3$, resolvemos

$$\begin{cases} 4x_1 - 2y_1 = 3x_1 \\ x_1 + y_1 = 3y_1 \end{cases}$$

lo cual se simplifica a

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases}.$$

Para $\lambda_2 = 2$, resolvemos

$$\begin{cases} 4x_2 - 2y_2 = 2x_2 \\ x_2 + y_2 = 2y_2 \end{cases}$$

lo cual se simplifica a

$$\begin{cases} 2x_2 - 2y_2 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \end{cases}.$$

Los valores propios distintos $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$ tienen vectores propios asociados $V_1 = (2, 1)$ y $V_2 = (1, 1)$, respectivamente. Las soluciones son:

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con la condición inicial $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$, buscamos constantes k_1 y k_2 tales que

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da el sistema:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases}$$

resolviendo para $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$.

Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es:

$$\mathbf{Y}(t) = 1 \cdot \mathbf{Y}_1(t) + 0 \cdot \mathbf{Y}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$