UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Fundamentos de Matemáticas

Correción Parcial 3

Alexander Mendoza

June 12, 2023

Contents

Chapter 1

Correción Parcial 3

1.1 Defina los siguientes términos

1. ***Divisibilidad***: Se dice que un número b es divisible por un número a si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $an = b$.
2. ***Cortadura de Dedekind***: Una cortadura α en el conjunto de los núemros racionales es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que cumple las siguientes condiciones:
   - $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
   - Si $a \in \alpha$ y $b < q$, entonces $p \in \alpha$.
   - α no contiene un número racional máximo.
3. ***Conjunto numerable***: Un conjunto se define como numerable si es finito o si existe una función biyectiva entre los naturales y el conjunto.
4. ***Forma exponencial de un número complejo***: Sea w un número complejo, su forma exponencial sería $z = re^{i\theta}$.

1.2 Sea n un número entero. Pruebe que $30|n$ si y solo si $5|n$ y $6|n$

- Si $30|n$ entonces $5|n$ y $6|n$: 30 se puede expresar como $5 \cdot 6$, luego $5 \cdot 6|n$ así $5|n$ y $6|n$.
- Si $5|n$ y $6|n$ entonces $30|n$: $n = 5a$ y $n = 6b$ para algunos enteros a y b. Como 5 y 6 son relativamente primos, se puede reescribir 30 como $5 \cdot 6$. Luego n es divisible por $5 \cdot 6 = 30$. Por lo tanto $30|n$.

1.3 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$ un número real. Demuestre que: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Procederemos por inducción en n. Empezaremos con el caso base $n = 1$:

$$(\cos x + i \sin x)^1 = \cos x + i \sin x = \cos 1x + i \sin 1x$$

Para nuestra hipótesis de inducción supongamos que $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$. Y en base a esta hipótesis vamos a demostrar que la propiedad se cumple para $n + 1$. Además debemos tener en cuenta la fórmula de la suma de ángulos ($\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ y $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$).

$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x)$$
$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = (\cos nx + i \sin nx) \cdot (\cos x + i \sin x)$$
$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = \cos(nx) \cos x - \sin(nx) \sin x + i(\sin(nx) \cos x + \cos(nx) \sin x)$$
$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = \cos(nx + x) + i \sin(nx + x)$$
$$(\cos x + i \sin x)^{n+1} = (\cos(n + 1)x + i \sin(n + 1)x)$$

De esta manera, hemos demostrado que $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ para todo número natural n.