UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Matemáticas Discretas

Tarea 2

Alexander Mendoza

6 de octubre de 2023

Tarea 2

1. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. Se define la función

$$f \times g : A \times C \to B \times C$$

por $(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c))$, para cada $(a, c) \in A \times C$. Demuestre que $f \times g$ es biyectiva, si y sólo si f y g son biyectivas.

Demostración. Empecemos demostrando que si $f \times g$ es biyectiva, entonces f y g son biyectivas.

Demostremos primero que las funciones son inyectivas. Supongamos que $f \times g$ es biyectiva. Luego, sean $a_1, a_2 \in A$ y $c_1, c_2 \in C$ tal que se cumple que $f(a_1) = f(a_2)$ y $g(c_1) = g(c_2)$. Luego tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (f(a_1), g(c_1)) &= (f(a_2), g(c_2)) && \text{Por definición de par ordenado.} \\ (f \times g)(a_1, c_1) &= (f \times g)(a_2, c_2) && \text{Por definición de } f \times g \\ (a_1, c_1) &= (a_2, c_2) && \text{Por biyectividad de } f \times g \end{aligned}$$

De esto concluímos que $a_1 = a_2$ y $c_1 = c_2$, esto por definición de par ordenado. Por lo tanto f y g son inyectivas.

Demostremos ahora que las funciones son sobreyectivas. Supongamos que $f \times g$ es biyectiva. Luego, sean $b \in B$ y $d \in D$, luego $(b, d) \in B \times D$ por definición de producto cartesiano. Así, por biyectividad de $f \times g$, existe $(a, c) \in A \times C$ tal que $(f \times g)(a, c) = (b, d)$, con esto tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (f \times g)(a, c) &= (b, d) && \\ (f(a), g(c)) &= (b, d) && \text{Por definición de } f \times g \end{aligned}$$

Por definición de par ordenado, podemos concluir que $f(a) = b$ y $g(c) = d$. Por lo tanto f y g son sobreyectivas. Como ambas son inyectivas y sobreyectivas, entonces f y g son biyectivas.

2. Sean $f : X \to Y$ una función. Se define $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ por: $\hat{f}(A) = f(A)$, para cada $A \subseteq X$. Demuestre que f es biyectiva si y sólo si $\hat{f}$ es biyectiva.

Demostración. Demostremos primero que si f es biyectiva, entonces $\hat{f}$ también lo es.

Sea f biyectiva y sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\hat{f}(A_1) = \hat{f}(A_2)$, con esto tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(A_1) &= \hat{f}(A_2) & \\
f[A_1] &= f[A_2] & \text{Por definición de } \hat{f} \\
A_1 &= A_2 & \text{Por biyectividad de } f
\end{aligned}
$$

Así $\hat{f}$ es inyectiva. Demostremos ahora sobreyectividad. Sea $B \in \mathcal{P}(Y)$, luego $B \subseteq Y$, así existe $A \in X$ tal que $f[A] = B$, esto por sobreyectividad de f. De esta manera $f[A] = \hat{f}(A) = B$, por lo tanto $\hat{f}$ es sobreyectiva.

Con esto tenemos que $\hat{f}$ es biyectiva.

Sigamos ahora con la demostración de la recíproca. Supongamos que $\hat{f}$ es biyectiva y sean $a_1, a_2 \in X$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$, luego $f[\{a_1\}] = f[\{a_2\}]$. Así por definición de $\hat{f}$, $\hat{f}(\{a_1\}) = \hat{f}(\{a_2\})$, como $\hat{f}$ es inyectiva, tenemos que $\{a_1\} = \{a_2\}$, así $a_1 = a_2$. Por lo tanto f es inyectiva.

Demostremos ahora la sobreyectividad de f. Sea $b \in Y$, luego $\{b\} \in \mathcal{P}(Y)$, así, por sobreyectividad de $\hat{f}$, existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\hat{f}(A) = \{b\}$, por definición de función y de igualdad de conjuntos, A contiene un único elemento, sea este a, luego

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\{a\}) &= \{b\} & \\
f[\{a\}] &= \{b\} & \text{Por definición de } \hat{f} \\
f(a) &= b & \text{Por definición de imagen directa}
\end{aligned}
$$

De esta manera, f es sobreyectiva. Por lo tanto f es biyectiva.

Veamos el recíproco ahora, sea f biyectiva y sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\hat{f}(A_1) = \hat{f}(A_2)$. Con esto tenemos

$$
\begin{aligned}
f(A_1) &= f(A_2) & \text{Definición de } \hat{f} \\
A_1 &= A_2 & \text{Biyectividad de } f
\end{aligned}
$$

Así f es inyectiva.

Para demostrar sobreyectividad, sea $B \in \mathcal{P}(Y)$. Luego sabemos que $B \subseteq (Y)$, como f es biyectiva, tenemos que para todo $b \in B$ existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$, seas A el conjunto que contiene a todos estos a, luego $f(A) = B$, por definición de $\hat{f}$, $\hat{f}(A) = B$.

De esta manera $\hat{f}$ es biyectiva.

3. Sea $f : X \to Y$ una función. $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Demuestre que:

a) Si $A \subseteq B$, entonces $f(A) \subseteq f(B)$.

Demostración. Sea $a' \in f(A)$, luego $a' = f(a)$ para algún $a \in X$, luego, por hipótesis, $a \in B$, así $f(a) \in f(B)$ lo cual implica que $a' \in f(B)$. Por lo tanto $f(A) \subseteq f(B)$.

b) Si $C \subseteq D$, entonces $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(C)$, luego $f(x) \in C$, por hipótesis tenemos que $f(x) \in D$, luego $x \in f^{-1}(D)$. Por lo tanto $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

4. Sea $f : X \to Y$ una función. Considere la relación sobre $X : a \sim b$ si $f(a) = f(b)$.

   a) Demuestre que esta es una relación de equivalencia

   Para demostrar que es una relación de equivalencia debemos demostrar que es reflexiva, transitiva y simétrica.

   Reflexividad. Sea $a \in X$, luego $f(a) = f(a)$ por definición de función, luego $a \sim a$. Por lo tanto es reflexiva.

   Transitividad. Sean $a, b, c \in X$ tal que $a \sim b$ y $b \sim c$, luego $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c)$, así $f(a) = f(c)$, esto por transitividad de igualdad, luego $a \sim c$. Por lo tanto es transitiva.

   Simetría. Sean $a, b \in X$, tal que $a \sim b$, luego $f(a) = f(b)$, por simetría de igualdad, $f(b) = f(a)$, así $b \sim a$. Por lo tanto es simétrica.

   b) Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + x - 6$, encuentre $\mathbb{R}/_\sim$.

5. considere $(\mathbb{N}, \leq)$ con el orden usual. Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación: $(a, b) \preceq (c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$.

   a) Demuestre que esta es una relación de orden sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   Demostración. Para demostrar que es una relación de orden, debemos demostrar que es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

   Reflexividad. Sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, luego $a \leq a$ y $b \leq b$, por lo tanto $(a, b) \preceq (a, b)$.

   Transitividad. Sea $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b) \preceq (c, d)$ y $(c, d) \preceq (x, y)$, luego $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq x$ y $d \leq y$, esto por definición de orden de parejas ordenadas. Por transitividad de la igualdad, $a \leq x$ y $b \leq y$, por lo tanto $(a, b) \preceq (x, y)$

   Antisimetría. Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b) \preceq (c, d)$ y $(c, d) \preceq (a, b)$, luego $a \leq c$, $c \leq a$, $b \leq d$ y $d \leq b$, por antisimetría del orden de los naturales, $a = c$ y $b = d$, luego por definición de igualdad de parejas ordenadas tenemos $(a, b) = (c, d)$.

   b) ¿Es un orden total?, ¿un buen orden?, ¿hay primer elemento?, ¿hay elementos maximales?.

Orden total. Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, por tricotomía tenemos que $aleqc$ o $c < a$ y $b \leq d$ o $b < d$. Consideremos el caso en el que $c < a$ y $b \leq d$, con esto, $(a,b) \npreceq (c,d)$. Por lo tanto no es orden total.

Buen orden. Sea $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y sean $B = \{b \in \mathbb{N} | (\exists c \in \mathbb{N})((b,c) \in A)\}$ y $C = \{c \in \mathbb{N} | (\exists c \in \mathbb{N})((b,c) \in A)\}$. Luego $C, B \subseteq \mathbb{N}$, por el principio del buen orden, C y B son bien ordenados, esto es que existe $b' \in B$ tal que $b' \leq x$ para todo $x \in B$, y de manera similar, existe $c' \in C$ tal que $c' \leq x$ para todo $x \in C$, luego $(b', c') \preceq (x,y)$, por lo tanto $(b', c') \preceq (x,y) \in A$.

Primer elemento. Si $0 \in \mathbb{N}$, el primer elemento es $(0,0)$.

Elemento maximal. No hay elementos maximales.

c) Para $A = \{(1,1),(1,2),(3,4),(2,2),(5,9),(5,4)\}$, encuentre: $A_*, A^*, Sup(A)$ e $Inf(A)$.
$B^* = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a \geq 5 \wedge b \geq 9\}$
$B_* = \{(1,1)\}$
$Sup(B) = (5,9)$
$Inf(B) = (1,1)$