UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Álgebra Lineal II

Tarea 4

Alexander Mendoza

17 de mayo de 2024

Tarea

1. Mostrar que el conjunto $B = \{1, x, 2x^2 - 1\}$ está en $p^2[-1, 1]$ con el producto punto $< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Si es ortogonal, entonces obtenga la base ortonormal.

   Para verificar si es ortogonal, tenemos que demostrar que:

   - Para $f(x) = 1$ y $g(x) = x$, tenemos:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{1 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

     Como la función es impar y está en un intervalo simétrico, podemos asegurar que la integral es cero.

   - Para $f(x) = x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$, tenemos:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

     Como la función es impar y está en un intervalo simétrico, podemos asegurar que la integral es cero.

   - Para $f(x) = 1$ y $g(x) = 2x^2 - 1$, tenemos:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

     Podemos separar esta integral:

     $$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi - \pi = 0.$$

     Así, hemos demostrado que esta integral también es cero.

   Como ya comprobamos que el conjunto es ortogonal, obtengamos la base ortonormal:

   - Paso 1:

     $$h_1(x) = \frac{1}{||1||} = 1.$$

   - Paso 2:

     $$g_2(x) = x - < x, 1 > 1 = x - \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x,$$

     $$h_2(x) = \frac{g_2(x)}{||g_2(x)||} = \frac{x}{\left(\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\right)^{1/2}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

- Paso 3:

$$g_3(x) = 2x^2 - 1 - < 2x^2 - 1, x > x - < 2x^2 - 1, \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} > \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Evaluando las integrales:

$$\begin{aligned}
&= 2x^2 - 1 - \int_{-1}^{1} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx - \left(\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2 - 1)\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \right) \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right) \\
&= 2x^2 - 1 - 0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{(2x^2 - 1)x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \right) \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right) \\
&= 2x^2 - 1.
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que la base ortonormal es: $C = \{1, \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, 2x^2 - 1\}$.