UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Cálculo Diferencial

Tarea 3

Alexander Mendoza
Dylan Cifuentes

21 de noviembre de 2023

Tarea 3

1. Demuestre la fórmula de Cauchy: Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces para un cierto $c \in (a, b)$, tenemos

$$f'(c)\,[g(b) - g(a)] = g'(c)\,[f(b) - f(a)]$$

Demostración. Sea $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Observamos que h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b), y que

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] \\ &= [f(a)g(b) - f(a)g(a)] - [g(a)f(b) - g(a)f(a)] \\ &= [f(a)g(b) - g(a)f(a)] - [g(a)f(b) - g(a)f(a)] \\ &= f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

Además tenemos que la derivada de $h(x)$ es la siguiente

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$$

Luego, por el Teorema de Rolle, existe c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Al tomar $h'(c) = 0$, tenemos lo siguiente

$$0 = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)]$$

De esta manera tenemos que

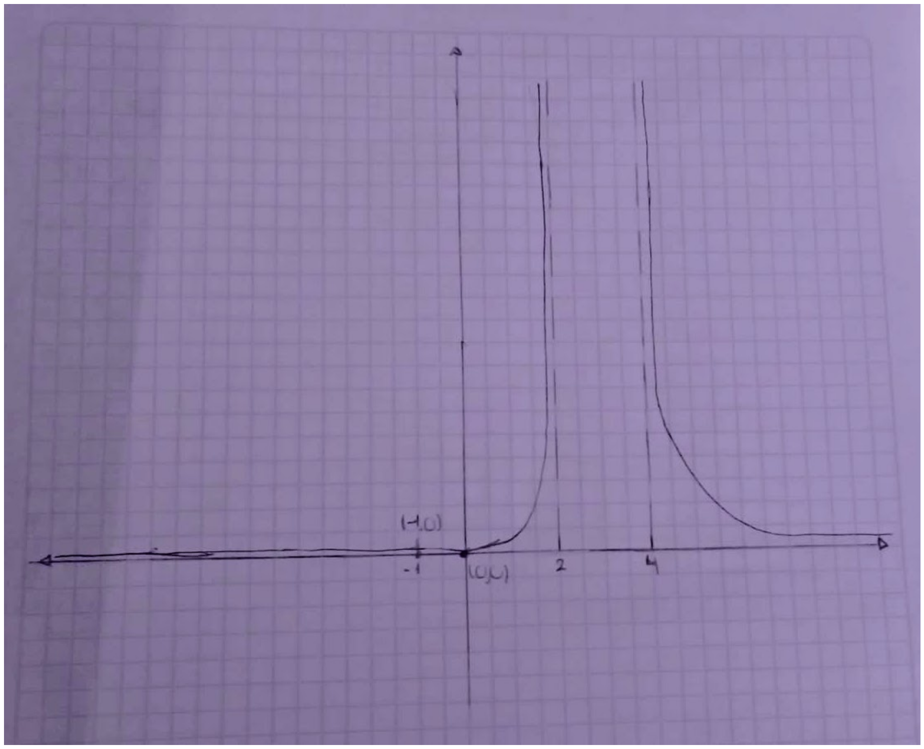
$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

2. Probar que $x^2 = x\sin(x) + \cos(x)$ se verifica exactamente para dos valores de x.
Demostración. Reescribiremos la ecuación como $f(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x) = 0$, luego hallemos sus puntos críticos, entonces:
$f'(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x) = 2x - \sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) = 2x - x\cos(x) = x(2 - \cos(x))$.
Notemos que $(2 - \cos(x))$ nunca se hace 0, luego si $x = 0$, este es su único punto crítico. Además, si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$, por tanto f decrece. Si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$, por tanto f crece. Por tanto, $x = 0$ es un mínimo relativo. Por último, veamos que $f(x) = f(-x)$, es decir, f es par.
Demostración: Probemos que no existen puntos $x_1, x_2, ..., x_i$ positivos tales que $f(x_i) = 0$ para todo $i \geq 2$, además supongamos que $x_i < x_{i+1}$. Por el teorema de valor medio, existe un $\beta_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f(\beta_i) = 0$ con $i \geq 2$, luego existe más de un punto crítico, lo que contradice nuestra hipótesis inicial de que $x = 0$ es el único punto crítico.
Luego, o existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 0$ y $f(\alpha) = 0$, o no existe ese α.

Para probar su existencia, tomemos $x = 0$ y $x = \pi$, si reemplazamos en f, tenemos que:
$f(0) = -1$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1$.
Puesto que f es creciente y continua con $x > 0$, entonces existe algún $\alpha \in (0, \pi)$ que cumple que $f(\alpha) = 0$. Como sabemos que f es par, entonces también se debe cumplir para $-\alpha$, por tanto, hemos hallado nuestros dos valores.

3. Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$

- Dom: $(\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty)$
- Asíntota vertical: $x = 2, x = 4$
- Asíntota horizontal: $x = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3 + 18x^2 - 44x - 16)}{(x-2)^3(x-4)^5)}$
- $f'(x) = 0$ si $x = -20{,}14476, x = -1, x = -0{,}321983, x = 0, x = 2{,}46675$
- $f'(x)$ no existe si $x = 2, x = 4$ $(-\infty, -20{,}14476)$ decreciente $(-20{,}14476, -1)$ Crece, $(-1, -0{,}321983)$ Crece, $(-0{,}321983, 0)$ Decrece, $(0, 2)$ Crece, $(2, 2{,}46675)$ Crece, $(2, 4)$ Decrece.
- $f''(x) = \dfrac{2(x^7 + 37x^6 + 42x^5 - 622x^4 + 56x^3 + 1356x^2 + 736x + 64)}{(x-2)^4(x-4)^6)}$
  Puntos de inflexión:
  $f''(x) = 0$ si $x = -35{,}3113, x = -4{,}97777, x = -1, x = -0{,}542718, x = -0{,}108386$
  $(-\infty, -35{,}3113)$ Concava , $(-35{,}3113, 4{,}97777)$ Convexa , $(-4{,}97777, -1)$ Concava ,
  $(-1, -0{,}542718)$ Convexa, $(-0{,}542718, -0{,}108386)$ Concava , $(-0{,}108386, \infty)$ Convexa.
- Cortes con eje x; $(-1, 0), (0, 0)$
- Corte con eje y; $(0, 0)$
- $\lim_{x->2^+} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$, $\lim_{x->2^-} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$
- $\lim_{x->4^+} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$, $\lim_{x->4^-} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$
- $\lim_{x->\infty} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = 0$, $\lim_{x->-\infty} \frac{x^2(x+1)^3)}{(x-2)^2(x-4)^4} = 0$
  Este es el codigo por si te queda más facil pasarlo
  Con esto tenemos la siguiente grafica



4. Demuestre que si f es continua y uno a uno en un intervalo, entonces f^{-1} es también continua.

   Teorema 1. Si f es continua e inyectiva sobre un intervalo, entonces f o crece o decrece dentro de ese intervalo.

   Demostración. Por el Teorema 1, sabemos que f crece o decrece sobre el intervalo. Supongamos que f es creciente. Sea $b = f(a)$ para algún a en el dominio de f^{-1}. Para cualquier $\epsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que si $f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$, entonces $a - \epsilon < f^{-1}(x) < a + \epsilon$.

   Elegimos δ de modo que $\delta = \min\{f(a+\epsilon) - f(a), f(a) - f(a-\epsilon)\}$. Esto asegura que $f(a-\epsilon) \leq f(a) - \delta$ y $f(a) + \delta \leq f(a+\epsilon)$.

   Si $f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$, entonces $f(a-\epsilon) < x < f(a+\epsilon)$. Dado que f es creciente, se sigue que $f^{-1}(f(a-\epsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\epsilon))$, esto es, $a - \epsilon < f^{-1}(x) < a + \epsilon$. Para el caso en el que f es decreciente se puede verificar de la misma forma usando $-f$.

   Por lo tanto, $\lim_{x \to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$.

5. Encuentre la derivada de:

a) $f(x) = \sin(\sin(x))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[\sin(\sin(x))] \\ &= \cos(sin(x))\frac{d}{dx}(\sin(x)) \\ &= \cos(\sin(x)cos(x)) \end{aligned}$$

b) $y = \dfrac{1}{(1+\tan(x))^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(1+\tan(x))^2} \\ &= (1+\tan(x)^{-2}) \\ &= -\frac{2}{(1+\tan(x))^3}\frac{d}{dx}(1\tan(x)) \\ &= -\frac{2}{(1+\tan(x))^3}\sec^2(x) \\ &= -\frac{2\sec^2(x)}{(1+\tan(x))^3} \end{aligned}$$

c) $y = \arctan(x^2+1)$

$$\begin{aligned} y' &= \arctan(x^2+1) \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^4+2x^2+2} \end{aligned}$$

d) $(\cos(x))^x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((\cos(x))^x) &= e^{x\ln(\cos(x))}\frac{d}{dx}(x\ln(\cos(x))) \\ &= e^{x\ln(\cos(x))}(\ln(\cos(x)) - x\tan(x)) \\ &= \cos^x(x)(\ln(\cos(x)) - x\tan(x)) \end{aligned}$$

6. Una función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq c \\ ax+b & x > c \end{cases}$$

Encuentre a y b de manera que $f'(c)$ exista.

Teorema 2. Si f es diferenciable en a, entonces f no es continua en a.

Demostración. Sabemos que para que una función sea diferenciable, esta debe ser continua (esto se verifica con el contra-recíproco del Teorema 2). Para que f sea continua se debe cumplir lo siguiente

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x \to c^-} x^2 = \lim_{x \to c^+} ax + b$$

Esto ya que si $x \to c^-$, entonces $x < c$ y si $x \to c^+$, entonces $x > c$. Así se comprueba lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c^-} x^2 &= \lim_{x \to c^+} ax + b \\ c^2 &= ac + b && \text{Por continuidad de funciones.} \\ b &= c^2 - ac \end{aligned}$$

Comprobemos ahora el valor de a para que $f'(c)$ exista. Para esto debemos verificar que la derivada por izquierda y por derecha de c existan y sean iguales.

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{[a(c+h) + b] - c^2}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{[a(c+h) + (c^2 - ac)] - c^2}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{[(c+h) + c][(c+h) - c]}{h} \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{ac + ah + c^2 - ac - c^2}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2c+h)}{h} \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{ah}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2c+h)}{h} \\ a &= 2c \end{aligned}$$

Reemplazando en b, tenemos que $b = -c^2$.