UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

COMPUTACIÓN CIENTÍFICA 2

Parcial 1

Alexander Mendoza

13 de septiembre de 2024

1. Deme las permutaciones que ordenan la siguiente lista

$$x = [9, 10, 7, 2, -7, 0, 9, 6, -1, 2, 2, 2, -4, -4, -1, 1, 5, 4, 3, 2].$$

Respuesta. Para obtener las permutaciones note que $\pi = 51314915616410111220191817 83172$ es una permutación que ordena a x, luego todas las permutaciones que ordenan a x son las permutaciones resultantes al permutar $[\pi_1, \pi_7]$, $[\pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}]$ y $[\pi_9, \pi_{15}]$.

2. Sea $\pi \in \mathfrak{S}_n$ una permutación de n elementos. Considere la relación C_π sobre $[n]$:

$$C_\pi = \left\{(i, j) \in [n] : \exists k \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \text{ t.q } \pi^k(i) = j\right\} \subseteq [n]^2$$

Acá $\pi^k(i) = \pi(\pi(\cdots \pi(i) \cdots))$ es componer πk veces. Pruebe que C_π es una relación de equivalencia. Ejemplo: Si $\pi = 13254$, entonces $C_\pi = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Respuesta. Para demostrar que C_π es una relación de equivalencia debemos demostrar que C_π es:

   a) ***Reflexiva***: Sea $i \in [n]$ Al tomar $k = 0$ se concluye que $\pi^k(i) = \pi^0(i) = i$.

   b) ***Simétrica***: Sean $i, j \in [n]$ con $i \neq j$. Supongamos que existe α tal que $\pi^\alpha(i) = j$, luego sabemos que existe β tal que $\pi^\beta(i) = i$ esto ya que la relación es reflexiva. Con esto $\beta < \alpha$ note que de lo contrario, si $\beta > \alpha$, $\pi^\alpha(i) = i$, pero como $\beta > \alpha$ $\pi^\alpha(\pi^\alpha(i)) = i$, contradiciendo $\pi^\beta(i) = i$. Así, como $\beta > \alpha$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^\beta(i) &= j \\ \pi^{\alpha-\beta}(\pi^\beta(i)) &= \pi^{\alpha-\beta}(j) \\ &= i \end{aligned}$$

   Demostrando así lo requerido.

   c) ***Transitiva***. Sean $i, j, k \in [n]$ tal que $\pi^\alpha(i) = j$ y $\pi^\beta(j) = k$. Luego $\pi^\beta(\pi^\alpha(i)) = \pi^{\beta+\alpha}(i) = k$. Demostrando así lo requerido.

Con esto demostramos que la relación es una relación de equivalencia.

3. Sea $x \in [n]^n$, se define una pica de x a una tupla $(i, j) \in [n]^2$ tal que $i < j$ y $x_i > x_j$ (con el orden usual). El conjunto de picas de x es

$$\text{Picas}(x) = \left\{(i, j) \in [n]^2 : i < j \text{ y } x_i > x_j\right\}$$

Ejemplo: Si $n = 4$ y $x = [1, 4, 2, 1]$, entonces $\text{Picas}(x) = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

   a) Pruebe que x está ordenada sii $\text{Picas}(x) = \emptyset$.

b) Cuándo se maximiza el tamaño del conjunto de Picas? Halle una fórmula, en términos de n, para

$$\max_{x\in[n]^n} |\operatorname{Picas}(x)|$$

Respuesta:

a) Sea x una lista ordenada de tamaño n, luego para todo $i, j \in [n]$, con $i < j$, $x_i \leq x_j$, por lo tanto, $\operatorname{Picas}(x) = \emptyset$. Supongamos ahora que $\operatorname{Picas}(x) = \emptyset$, esto implica que no existen $i, j \in [n]$ con $i < j$ tal que $x_i > x_j$, por lo tanto, x está ordenada.

b) Las condiciones para que se maximize el tamaño del conjunto de Picas es que $x \in [n]^n$ no contenga elementos repetidos y que x esté ordenada de mayor a menor, de esta manera para todo $i, j \in [n]$ con $i < j$, se tiene que $x_i > x_j$. Basado en las condiciones anteriores, como x contiene n elementos y todas sus parejas de índices pertenecen a $\operatorname{Picas}(x)$, una fórmula natural sería la de todas las combinaciones de n elementos eligiendo 2,

$$\binom{n}{2} = \frac{(n-1)(n)}{2}$$