UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Cálculo Vectorial

Tarea 1

Alexander Mendoza

9 de septiembre de 2024

Sección 8.3

Ejercicio 1b

Dado un campo escalar f definido en un conjunto S y un número real c, el conjunto de puntos $\boldsymbol{x}$ en S donde $f(x) = c$ se denomina conjunto de nivel de f. Aquí, S es el espacio $\mathbf{R}^n$. Para los campos escalares siguientes, dibuje los conjuntos de nivel para los valores dados de c. b) $f(x, y) = e^{xy}$ $c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e^1, e^2, e^3$

Respuesta

El conjunto de nivel viene dado por:

$$f(x, y) = c \implies e^{xy} = c.$$

Aplicando logaritmo natural:

$$xy = \ln(c).$$

Así, los conjuntos de nivel se expresan mediante:

$$xy = \ln(c),$$

que son hipérbolas en el plano xy para diferentes valores de c.

Análisis para cada valor de c

- Si $c = e^{-2}$, obtenemos $\ln(e^{-2}) = -2$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = -2.$$

  Esta hipérbola tiene ramas en los cuadrantes II y IV.

- Si $c = e^{-1}$, obtenemos $\ln(e^{-1}) = -1$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = -1.$$

  Esta hipérbola se encuentra más cerca del origen.

- Si $c = 1$, obtenemos $\ln(1) = 0$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = 0.$$

  Esto corresponde a las rectas $x = 0$ y $y = 0$, es decir, los ejes coordenados.

- Si $c = e^1$, obtenemos $\ln(e^1) = 1$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = 1.$$

  Esta hipérbola tiene ramas en los cuadrantes I y III.

- Si $c = e^2$, obtenemos $\ln(e^2) = 2$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = 2.$$

  Esta hipérbola se encuentra más lejos del origen que las anteriores.

- Si $c = e^3$, obtenemos $\ln(e^3) = 3$, y el conjunto de nivel es:

  $$xy = 3.$$

  Esta es la hipérbola más alejada del origen de todas.

Ejercicio 1e

Sean f un campo escalar definido en un conjunto S y c un número real dado. El conjunto de todos los puntos $\boldsymbol{x}$ de S tales que $f(x) = c$ se llama conjunto de nivel de f. Para cada uno de los campos escalares siguientes, S es todo el espacio $\mathbf{R}^n$. Representar gráficamente los conjuntos de nivel correspondientes a los valores dados de c.
e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
$c = 0, 6, 12$

Respuesta El conjunto de nivel está dado por la ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c.$$

Análisis de los valores de c

- Para $c = 0$, la ecuación es:

  $$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0,$$

  cuya única solución es $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. El conjunto de nivel es el punto $(0, 0, 0)$.

- Para $c = 6$, la ecuación es:

  $$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6,$$

  que representa un elipsoide centrado en el origen, con distintos radios en los ejes x, y y z.

- Para $c = 12$, la ecuación es:

  $$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12,$$

  que también es un elipsoide centrado en el origen, pero de mayor tamaño que el anterior.

Representación gráfica de los elipsoides para los valores $c = 6$ y $c = 12$, para $c = 0$ es el punto $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 2c

Dado el conjunto S de todos los puntos (x, y) en el plano que cumplen las siguientes desigualdades, grafique S y explique geométricamente si es un conjunto abierto. Indique en el gráfico la frontera de S.
c) $|x| < 1$ y $|y| < 1$

Respuesta

El conjunto S se define por las desigualdades:

$$|x| < 1 \quad \text{y} \quad |y| < 1,$$

lo que corresponde a un rectángulo abierto en el plano donde x y y están en el intervalo $(-1, 1)$. Este conjunto es **abierto** ya que no incluye los puntos en su frontera.

Frontera y conjunto abierto

S es un conjunto abierto porque su frontera no está incluida. La frontera está formada por las líneas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$, como se muestra en el gráfico con borde sólido. El área sombreada representa el conjunto S, excluyendo sus bordes.

Ejercicio 2

Determinar el conjunto S de todos los puntos (x, y) en el plano que cumplen con las desigualdades proporcionadas. Graficar el conjunto S y analizar si geométricamente S es un conjunto abierto o no. Además, identificar la frontera de S en el gráfico.
Desigualdades: $y > x^2 \quad \text{y} \quad |x| < 2$

Respuesta

Consideremos el conjunto S que cumple las siguientes condiciones:

$$y > x^2 \quad \text{y} \quad |x| < 2$$

Esto indica que S es la región del plano donde los puntos (x, y) están localizados por arriba de la parábola $y = x^2$ y dentro del intervalo $-2 < x < 2$.

Frontera y Conjunto Abierto

El conjunto S consiste en:

- Los puntos encima de la parábola $y = x^2$, es decir, $y > x^2$.
- Aquellos dentro del intervalo $-2 < x < 2$ en el eje x.

Frontera del conjunto: La frontera de S está formada por la parábola $y = x^2$ sobre el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, pero la parábola no es parte de S. El conjunto S es abierto porque no incluye los puntos que pertenecen a su frontera (la parábola $y = x^2$).

Sección 8.9

Ejercicio 1

Dado un campo escalar f definido en $\mathbf{R}^*$ como $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante, determina $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ para cualquier $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$.

Respuesta

$$\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}) + f(h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(h\boldsymbol{y})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{a} \cdot h\boldsymbol{y}}{h} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2c

Considerando $n = 3$ en el ejercicio 2a, encuentre todos los puntos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z)$ para los cuales se cumple $f'(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \mathbf{3k}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$.

Respuesta

Para hallar las derivadas parciales

usando $F(x) = \|\boldsymbol{x}\|^4$,

$$f'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\|\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}\|^4 - \|\boldsymbol{x}\|^4}{h},$$

resolviendo tenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + h^2\|\boldsymbol{y}\|^2\right)^2 - \|\boldsymbol{x}\|^4}{h},$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[\|\boldsymbol{x}\|^4 + 4h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\|\boldsymbol{x}\|^2 + 4h^2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 + 4h^2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\|\boldsymbol{y}\|^2 + h^4\|\boldsymbol{y}\|^4\right] - \|\boldsymbol{x}\|^4}{h},$$

$$= 4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Para $f'(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \mathbf{3k}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$, obtenemos:

$$4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0,$$

donde, al sustituir $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, obtenemos:

$$(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

Y,

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = x + 2y + 3z.$$

Reemplazando tenemos:

$$4(x + 2y + 3z) \cdot 14 = 0,$$

lo que se cancela y resulta en:

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Entonces, los puntos (x, y, z) que satisfacen $x + 2y + 3z = 0$.

Ejercicio 3

Dada una transformación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, encuentra la derivada $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ del campo escalar en $\mathbf{R}^n$ definido por la función $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. **Respuesta**

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + h\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + h\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) + h\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + h^2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{h(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + h\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}))}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + h\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}))$$
$$= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$$

Ejercicio 8

Determina cada una de las derivadas parciales de primer orden del campo escalar en los ejercicios 4 a 9. En los ejercicios 8 y 9, los campos están definidos en $\mathbf{R}^n$.
8. $f(x) = a \cdot x$, donde a es constante.
Respuesta Dado que a es un vector constante, entonces

$$a \cdot x = (a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)$$

Realizando el producto punto obtenemos:

$$a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

A continuación, calculamos la derivada parcial. Como a es un vector constante, actúa como un escalar:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_i d_{ik} = a_k$$

Por lo tanto, $D_k f(\vec{x}) = a_k$. En términos generales, sería $Df(\vec{x}) = a$.

Ejercicio 9

Para cada uno de los ejercicios del 4 al 9, encuentra todas las derivadas parciales de primer orden del campo escalar dado. Los campos en los ejercicios 8 y 9 están definidos en $\mathbf{R}^n$. Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, donde $a_{ij} = a_{ji}$.

Respuesta Dado que a_{ij} es una matriz simétrica:

$$\begin{aligned}
&\text{Vamos a resolver por casos.}\\
&\text{Caso 1:} \quad i = j = k\\
&\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} x_i x_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i x_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k \quad \text{(dado que } a_{ij} \text{ es simétrica)}
\end{aligned}$$

$$\text{Caso 2:} \quad i = j \quad y \quad i \neq k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{jk} x_j \quad \text{para } j \neq k$$

$$\text{Caso 3:} \quad i = k \quad y \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

Al combinar las derivadas parciales:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \text{donde} \quad a_{ji} = a_{ij}$$

Al cambiar de variable $y = 1$ se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{jj} x_j = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{jj} x_j$$

Ejercicio 13

Calcular todas las derivadas parciales de primer orden de $f(x, y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad y \neq 0$. **Respuesta**

Definimos $f(x, y) = \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

D_1 es la derivada parcial con respecto a x :

$D_1 f(x, y) = \sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \cdot \dfrac{2x}{y}$,

D_2 es la derivada parcial con respecto a y :

$D_2 f(x, y) = -\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \cdot \dfrac{x^2}{y^2}$.

Calculemos las derivadas parciales mixtas:

$D_2\left(D_1 f\right) = D_2\left(\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \cdot \dfrac{2x}{y}\right) = \dfrac{\sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot (-2x)}{y^2} - \dfrac{4x \sec^3\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^3}$,

$D_1\left(D_2 f\right) = D_1\left(-\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \cdot \dfrac{x^2}{y^2}\right) = \dfrac{-\sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot 2x}{y^2} - \dfrac{2\sec^3\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot \tan\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot 2x}{y^3}$.

Notamos que: $D_1\left(D_2 f\right) = D_2\left(D_1 f\right)$.

Ejercicio 15

En los ejercicios del 10 al 17, calcular todas las derivadas parciales de primer orden. Para los ejercicios 10, 11 y 12, verificar que las derivadas parciales mixtas $D_1\left(D_2 f\right)$ y $D_2\left(D_1 f\right)$ son iguales. Dado $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \neq 1$.

Respuesta

Primero calculamos D_1:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} \\
&= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \\
&= \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+(xy)^2}
\end{aligned}
$$

Luego, calculamos $D_2\left(D_1\right)$:

$$
\begin{aligned}
D_2\left(D_1\right) &= D_2\left(\frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\right), \quad \text{donde} \quad f=1+y^2 \quad \text{y} \quad g=1+x^2+y^2+x^2y^2 \\
f' &= 2y \quad \text{y} \quad g' = 2y+2x^2y \\
D_2 &= \frac{g\cdot f' - f\cdot g'}{g^2} \\
&= \frac{\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)\cdot 2y - \left(1+y^2\right)\cdot\left(2y+2x^2y\right)}{\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)^2} \\
&= \frac{2y+2yx^2+2y^3+2y^3x^2-\left(2y+2x^2y+2y^3+2x^2y^3\right)}{\left(1+x^2+y^2+(xy)^2\right)^2} \\
&= 2y+2yx^2+2y^3+2y^3x^2-2y-2x^2y-2y^3-2x^2y^3 \\
&= 0 \\
&= \frac{0}{\left(1+x^2+y^2+(xy)^2\right)^2} = 0
\end{aligned}
$$

Luego, calculamos D_2:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\left(\frac{(1-xy)\cdot(x+y)^3-(1-xy)'\cdot(x+y)}{(1-xy)^2}\right) \\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{(1-xy)(1)+(x+y)(+x)}{(1-xy)^2} \\
&= \frac{1-xy+x^2+xy}{1-2xy+(xy)^2+x^2+2xy+y^2} \\
&= \frac{1+x^2}{1+(xy)^2+x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, calculamos $D_1\left(D_2\right)$:

$$
\begin{aligned}
D_1\left(D_2\right) &= D_1\left(\frac{1+x^2}{1+(xy)^2+x^2+y^2}\right) \\
f' &= 2x \quad \text{donde} \quad f=1+x^2 \quad \text{y} \quad g=1+(xy)^2+x^2+y^2 \\
g' &= 2x+2xy^2 \\
&= \frac{\left(1+(xy)^2+x^2+y^2\right)\cdot 2x-\left(1+x^2\right)\left(2x+2xy^2\right)}{g^2} \\
&= \frac{2x\left(1+(xy)^2+x^2+y^2\right)-2x-2xy^2-2x^3-2x^3y^2}{g^2} \\
&= \frac{0}{g^2} = 0
\end{aligned}
$$

Se puede notar que $D_1(D_2) = D_2(D_1)$.

Ejercicio 18

Sea $v(r,t) = t^n e^{-r^2/(4t)}$. Determine un valor de n para que v satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

Respuesta Primero, evaluamos la derivada de v respecto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= nt^{n-1}e^{-r^2/(4t)} + t^n\left(-e^{-r^2/(4t)}\cdot\frac{r^2}{4t^2}\right)\\
&= nt^{n-1}e^{-r^2/(4t)} - \frac{r^2}{4t^2}t^n e^{-r^2/(4t)}\\
&= e^{-r^2/(4t)}\left(nt^{n-1} - \frac{r^2}{4t^2}t^n\right)\\
&= e^{-r^2/(4t)}\left(nt^{n-1} - \frac{r^2}{4t^2}t^n\right)
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos la derivada de v respecto a r:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \left(-\frac{r}{2t}\right)t^n e^{-r^2/(4t)} = -\frac{rt^{n-1}}{2}e^{-r^2/(4t)}$$

Ahora multiplicamos por r^2 y derivamos de nuevo respecto a r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^3t^{n-1}}{2}e^{-r^2/(4t)}\right)\\
&= -\frac{3r^2t^{n-1}}{2}e^{-r^2/(4t)} + \frac{r^4t^{n-2}}{4t}e^{-r^2/(4t)}\\
&= e^{-r^2/(4t)}\left(-\frac{3r^2t^{n-1}}{2} + \frac{r^4t^{n-2}}{4t}\right)
\end{aligned}$$

Igualamos las expresiones obtenidas:

$$e^{-r^2/(4t)}\left(nt^{n-1} - \frac{r^2}{4t^2}t^n\right) = e^{-r^2/(4t)}\left(-\frac{3r^2t^{n-1}}{2} + \frac{r^4t^{n-2}}{4t}\right)$$

Simplificando términos:

$$\begin{aligned}
nt^{n-1} - \frac{r^2t^{n-2}}{4} &= -\frac{3r^2t^{n-1}}{2} + \frac{r^4t^{n-2}}{4t}\\
nt^{n-1} &= -\frac{3}{2}t^{n-1}\\
n &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 19

Dado $z = u(x, y)e^{ax+by}$ y $\partial^2 u/\partial x\partial y\big) = 0$. Encuentra los valores de las constantes a y b tales que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

Respuesta 1) Calcular la primera derivada parcial de z con respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot e^{ax+by} + u(x, y) \cdot e^{ax+by} \cdot a$$

2) Calcular la primera derivada parcial de z con respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot e^{ax+by} + u(x, y) \cdot e^{ax+by} \cdot b$$

3) Calcular la segunda derivada parcial mixta de z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Desarrollando el término anterior:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot e^{ax+by} + u(x, y) \cdot e^{ax+by} \cdot a\right)$$

Lo cual nos lleva a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot e^{ax+by} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot e^{ax+by} \cdot b + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot e^{ax+by} \cdot a + u(x, y) \cdot a \cdot b \cdot e^{ax+by}$$

Como $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\Big)$, la ecuación se simplifica a:

$$e^{ax+by}\left(au_y + bu_x + abu - u_x - u_y + u\right) = 0$$

Dado que $e^{ax+by} \neq 0$, se debe cumplir:

$$au_y + bu_x + abu - u_x - u_y + u = 0$$

Reordenando los términos, obtenemos:

$$u_y(a-1) + u_x(b-1) + u(ab - a - b + 1) = 0$$

Para que la ecuación se mantenga siempre igual a cero:

$$a = 1 \quad \text{y} \quad b = 1$$

Así obtenemos que los valores de las constantes son $a = 1$ y $b = 1$.

Sección 8.14

Ejercicio 2a

Determine las derivadas direccionales de los campos escalares siguientes en los puntos y direcciones dadas: a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $(1,1,0)$ en la dirección de $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. **Respuesta** Para el campo escalar dado, el vector dirección unitario es

$\hat{n} = \frac{i-j+2k}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} \rightarrow \hat{n} = \frac{i-j+2k}{\sqrt{6}}$

La derivada direccional de f en el punto (x,y,z) y en la dirección de $\hat{n}$ se calcula como:

$D_{\hat{n}}f(x,y,z) = \nabla f \cdot \hat{n} = (2xi + 4yj + 6zk) \cdot \frac{i-j+2k}{\sqrt{6}}$

Entonces,

$D_{\hat{n}}f(1,1,0) = \frac{2x-4y+12z}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad \text{en} \quad (1,1,0)$

Ejercicio 4

Un campo escalar diferenciable f presenta las derivadas direccionales $+2$ en la dirección del punto $(2,2)$ y -2 en la dirección del punto $(1,1)$ evaluadas en $(1,2)$. Encuentre el vector gradiente en $(1,2)$ y calcule la derivada direccional en la dirección del punto $(4,6)$.

Respuesta

Dados los puntos $P(1,2)$, $Q(2,2)$, $R(1,1)$ y $S(4,6)$, construimos los vectores unitarios:

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (2-2)j = i$$

$$\vec{PR} = (1-1)i + (1-2)j = -j$$

$$\vec{PS} = \frac{(4-1)i + (6-2)j}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3i+4j}{5}$$

Para las derivadas direccionales obtenemos:

$$D_{\vec{PQ}}f(1,2) = \nabla f \cdot \vec{PQ} = \nabla f \cdot i = 2 \Rightarrow \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 2$$

$$D_{\vec{PR}}f(1,2) = \nabla f \cdot \vec{PR} = \nabla f \cdot (-j) = -2 \Rightarrow \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 2$$

El vector gradiente en el punto $(1,2)$ es:

$$\nabla f(1,2) = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} i + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} j$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\nabla f(1,2) = 2i + 2j$$

Entonces, la derivada direccional en la dirección del punto $(4, 6)$ es:

$$D_{\vec{PS}}f(1,2) = (2i + 2j) \cdot \left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j\right) = \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{14}{5}$$

Ejercicio 5

Determinar los valores de las constantes a, b y c de manera que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ alcance el máximo valor de 64 en la dirección del eje z. **Respuesta** Para encontrar a, b y c, debemos calcular la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punto $(1, 2, -1)$ y establecer que esta derivada tenga un valor máximo de 64 en la dirección del eje z.

El gradiente de $f(x, y, z)$ se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay^2 + 3cz^2x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy + bz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = by + 2czx^3$$

Luego, la derivada direccional en la dirección z corresponde a:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Evaluamos en el punto $(1, 2, -1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) = b(2) + 2c(-1)(1^3) = 2b - 2c$$

Queremos que esta derivada sea 64, entonces:

$$2b - 2c = 64 \quad \Rightarrow \quad b - c = 32 \quad (1)$$

Para que el gradiente sea máximo en la dirección z, las componentes $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ deben ser cero en $(1, 2, -1)$.

Evaluamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(1, 2, -1)$:

$$a(2^2) + 3c(-1)^2(1^2) = 4a + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a + 3c = 0 \quad (2)$$

Y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(1, 2, -1)$:

$$2a(1)(2) + b(-1) = 4a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a = b \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$b - c = 32 \quad (1), \quad 4a + 3c = 0 \quad (2), \quad 4a = b \quad (3)$$

Sustituyendo $b = 4a$ en $b - c = 32$:

$$4a - c = 32 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{4a}{3}$$

Sustituyendo en $4a + 3c = 0$:

$$16a = 96 \quad \Rightarrow \quad a = 6, \quad b = 24, \quad c = -8$$

Los valores de las constantes son:

$$a = 6, \quad b = 24, \quad c = -8$$

Ejercicio 6

Dado un campo escalar diferenciable en un punto $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{R}^2$, supongamos que $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y}) = 1$ y $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z}) = 2$, donde $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. El problema consiste en hacer un gráfico que muestre todos los puntos (x, y) para los cuales $f'(\boldsymbol{a}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$. Además, se solicita calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

Respuesta

Dadas las condiciones $\vec{y} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ y $\vec{z} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = 1 \quad ①,$$

$$f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{z}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{z} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = 2 \quad ②.$$

Dado que

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Usando la ecuación ①:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = 1$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad ③$$

Usando la ecuación ②:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad ④$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones ③ y ④:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3$$

El vector gradiente es:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = 5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$

Además,

$$f'(\boldsymbol{a}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$$

$$(5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) \cdot (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$$

El conjunto de todos los puntos (x, y) que cumplen $f'(\boldsymbol{a}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$ forma la recta $5x - 3y = 6$.

Sección 8.17

Ejercicio #3a

Hallar la derivada direccional de f en los puntos y direcciones dados: a) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2, 2, 1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Respuesta Primero obtenemos el gradiente de la función $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$. El gradiente es el vector de las derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -5, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2.$$

Entonces, el gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y, z) = (3, -5, 2).$$

La derivada direccional se obtiene mediante el producto escalar del gradiente de f en el punto especificado con el vector unitario en la dirección dada. La dirección solicitada es la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Para encontrar dicha dirección, hallamos el gradiente de la ecuación de la esfera $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$:

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Evaluamos el gradiente de g en el punto $(2, 2, 1)$:

$$\nabla g(2, 2, 1) = (4, 4, 2).$$

Este es el vector normal a la superficie en el punto $(2, 2, 1)$. Para normalizar este vector, calculamos su magnitud:

$$|\nabla g(2, 2, 1)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6.$$

De esta manera, el vector unitario en la dirección de la normal es:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6}(4, 4, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Finalmente, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ se calcula como:

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 2, 1) = \nabla f(2, 2, 1) \cdot \mathbf{u} = (3, -5, 2) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Computamos el producto escalar:

$$D_{\mathbf{u}}f(2,2,1) = 3 \cdot \frac{2}{3} + (-5) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 - \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 2 - \frac{8}{3} = \frac{6}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Así, la derivada direccional de f en el punto $(2,2,1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera es:

$$D_{\mathbf{u}}f(2,2,1) = -\frac{2}{3}.$$

Ejercicio 3b

Calcular la derivada direccional de f en los puntos y direcciones especificados: b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2+y^2+z^2 = 4$ en la dirección de la normal exterior en dicho punto. **Respuesta** Para determinar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en la dirección de la normal exterior a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en cualquier punto de esta superficie, siga estos pasos:

1. Encuentra el gradiente de la función

El gradiente de $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ se calcula como:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Así, el gradiente de f es:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -2y, 0)$$

2. Encuentra el vector normal a la superficie

Para la superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, el gradiente de la función $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ provee la dirección normal a la superficie:

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

Este es el vector normal a la superficie en cualquier punto (x,y,z). La dirección de la normal exterior se toma de este vector.

3. Encuentra el vector unitario de la dirección normal

Calcula la magnitud de $\nabla g(x,y,z)$:

$$|\nabla g(x,y,z)| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dado que $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en la superficie, la magnitud es:

$$|\nabla g(x,y,z)| = 2\sqrt{4} = 4$$

Así, el vector unitario en la dirección de la normal exterior es:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4}(2x, 2y, 2z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$$

4. Calcule la derivada direccional

La derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es el producto punto de ∇f y $\mathbf{u}$:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u} = (2x, -2y, 0) \cdot \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$$

Calculando el producto punto:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 2x \cdot \frac{x}{2} + (-2y) \cdot \frac{y}{2} + 0 \cdot \frac{z}{2} = x^2 - y^2$$

Por lo tanto, la derivada direccional de $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en la dirección de la normal exterior en cualquier punto de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ es:

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = x^2 - y^2$$

Ejercicio 3c

Calcule la derivada direccional de f en los siguientes puntos y direcciones: c) Para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ en el punto $(3, 4, 5)$ a lo largo de la intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

Respuesta

Primero, se calcula el gradiente de $f(x, y, z)$:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

Evaluando en el punto $(3, 4, 5)$:

$$\nabla f(3, 4, 5) = (6, 8, -10)$$

Luego, los gradientes de las superficies dadas: Para $g_1(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 25$:

$$\nabla g_1(x, y, z) = (4x, 4y, -2z)$$

Para $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$:

$$\nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

El vector tangente a la intersección se obtiene mediante el producto cruzado $\mathbf{v} = \nabla g_1 \times \nabla g_2$:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4x & 4y & -2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (-4yz, 4xz, 0)$$

Evaluando en el punto $(3, 4, 5)$:

$$\mathbf{v}(3, 4, 5) = (-80, 60, 0)$$

La magnitud del vector:

$$|\mathbf{v}| = 100$$

El vector unitario en la dirección de la curva es:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{100}(-80, 60, 0) = (-0{,}8, 0{,}6, 0)$$

La derivada direccional se calcula como:

$$D_{\mathbf{u}}f(3, 4, 5) = \nabla f(3, 4, 5) \cdot \mathbf{u} = (6, 8, -10) \cdot (-0{,}8, 0{,}6, 0) = 0$$

Entonces, la derivada direccional es:

$$D_{\mathbf{u}}f(3, 4, 5) = 0$$

Ejercicio 4a

a) Encontrar un vector $V(x, y, z)$ perpendicular a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \left(x^2 + y^2\right)^3$$

en cualquier punto (x, y, z) de dicha superficie donde $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Respuesta Para determinar un vector normal a la superficie especificada, es necesario calcular el gradiente de la función que define la superficie de manera implícita. Dicha superficie se puede escribir como:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \left(x^2 + y^2\right)^3$$

Reformulándola en forma implícita $F(x, y, z) = 0$:

$$F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} - \left(x^2 + y^2\right)^3$$

El vector normal en un punto de la superficie es el gradiente de $F(x, y, z)$:

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Paso 1: Calcular las derivadas parciales de F
Primero, encontramos las derivadas parciales de F.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \left(x^2 + y^2\right)^3\right)$$

Aplicando la regla de la cadena para $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ahora, derivamos $\left(x^2+y^2\right)^3$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2\right)^3\right) = 3\left(x^2+y^2\right)^2 \cdot 2x = 6x\left(x^2+y^2\right)^2$$

Por lo tanto, la derivada parcial con respecto a x es:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6x\left(x^2+y^2\right)^2\right)$$

Asimismo, encontramos la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6y\left(x^2+y^2\right)^2\right)$$

Finalmente, la derivada parcial respecto a z es:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

Paso 2: Calcular el gradiente de F

Así, el gradiente de F es:

$$\nabla F(x,y,z) = \left(-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6x\left(x^2+y^2\right)^2\right), -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6y\left(x^2+y^2\right)^2\right), 1\right)$$

Este gradiente proporciona el vector normal $V(x,y,z)$ a la superficie en el punto (x,y,z).

Paso 3: Resultado Final

El vector normal $V(x,y,z)$ en cualquier punto $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ es:

$$V(x,y,z) = \left(-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6x\left(x^2+y^2\right)^2\right), -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6y\left(x^2+y^2\right)^2\right), 1\right)$$

Ejercicio 4b

Calcula el coseno del ángulo θ que forma el vector $V(x,y,z)$ con el eje z y determina el límite de $\cos\theta$ cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Respuesta

El módulo del vector obtenido en la parte a), normal a la superficie es:

$$\|\vec{V}\| = \left[\frac{\left(1+3x^2+3y^2\right)^2 x^2}{x^2+y^2} + \frac{\left(1+3x^2+3y^2\right)^2 y^2}{x^2+y^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$\|\vec{V}\| = \left[\frac{\left(1+3x^2+3y^2\right)^2 \left(x^2+y^2\right) + \left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{V}\| = \left\{ 1 + \left[1+3\left(x^2+y^2\right)\right]^2 \right\}^{1/2}$$

El coseno del ángulo θ que forma el vector $\vec{V}(x,y,z)$ con el eje $\hat{k}$ es:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}\cdot\hat{k}}{\|\vec{V}\|\|\hat{k}\|} = \frac{-1}{\left\{1+\left[1+3\left(x^2+y^2\right)\right]^2\right\}^{1/2}}$$

Cuando $(x,y,z)\to(0,0,0)$, entonces $\cos\theta \to \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 5

Las dos ecuaciones $e^* \cos v = x$ y $e^* \operatorname{sen} v = y$ definen u y v como funciones de x e y. Sean estas funciones $u = U(x,y)$ y $v = V(x,y)$. Encuentra expresiones explícitas para $U(x,y)$ y $V(x,y)$ para $x > 0$, y demuestra que los vectores gradientes $\nabla U(x,y)$ y $\nabla V(x,y)$ son perpendiculares en cada punto (x,y).

Respuesta

Dado que $e^u \cos v = x$ y $e^u \operatorname{sen} v = y$, tenemos:

$$x^2+y^2 = e^{2u}\cos^2 v + e^{2u}\operatorname{sen}^2 v = e^{2u}(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)$$

$$e^{2u} = x^2+y^2$$

Aplicando el logaritmo natural en ambos lados de esta ecuación obtenemos:

$$\ln(e^{2u}) = \ln(x^2+y^2)$$

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Ahora, consideremos el cociente y/x:

$$\frac{y}{x} = \frac{e^u \operatorname{sen} v}{e^u \cos v}$$

Despejando v, obtenemos:

$$v = \arctan(y/x)$$

En resumen:

$$u = U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$v = V(x,y) = \arctan(y/x)$$

Calculamos las derivadas parciales de U:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Entonces, el gradiente de U es:

$$\nabla U(x,y) = \frac{xi+yj}{x^2+y^2}$$

Para V, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = D_x \operatorname{arc}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}\right) = \frac{-1}{|y|(x^2+y^2)}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left(\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) = \frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}$$

Y el gradiente de V es:

$$\nabla V(x,y) = \frac{1}{|y|(x^2+y^2)}(-y^2 i + xyj)$$

Verificamos que $\nabla U \cdot \nabla V = 0$:

$$\nabla U \cdot \nabla V = \left(\frac{xi+yj}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{-y^2 i + xyj}{|y|(x^2+y^2)}\right) = \frac{-xy^2+xy^2}{|y|(x^2+y^2)^2} = 0$$

Por lo tanto, ∇U y ∇V son perpendiculares en cada punto (x,y).

Ejercicio 6a

Dada la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, se pide demostrar que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son nulas en el origen.

Respuesta

De acuerdo con la definición de derivadas parciales, tenemos que verificar:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

En el origen tenemos:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

Dado que $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, se sigue que:

$$f(h, 0) = \sqrt{|h \cdot 0|} = 0, \quad f(0, 0) = \sqrt{|0 \cdot 0|} = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{0 - 0}{h} \right) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

De manera similar:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \left(\frac{0 - 0}{k} \right) = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

Ejercicio 7

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie $z = xy$, demuestre que el plano tangente a esta superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) contiene las rectas $z = y_0 x, y = y_0$ y $z = x_0 y, x = x_0$ que pasan por (x_0, y_0, z_0) y están contenidas en la superficie.

Respuesta

La ecuación de la superficie está dada por:

$$z = xy$$

Queremos comprobar que el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) contiene las dos rectas dadas por:

1. $z = y_0 x$, con $y = y_0$ 2. $z = x_0 y$, con $x = x_0$

Primero, vamos a hallar el plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

Paso 1: Gradiente de la superficie

Para obtener la ecuación del plano tangente, necesitamos calcular el gradiente de la función $F(x, y, z) = z - xy = 0$. El gradiente de $F(x, y, z)$ es:

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (-y, -x, 1)$$

Evaluamos el gradiente en el punto (x_0, y_0, z_0):

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (-y_0, -x_0, 1)$$

La ecuación del plano tangente es:

$$-y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

Simplificamos la ecuación:

$$y_0 x + x_0 y - z = x_0 y_0$$

Este es el plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0).

Paso 2: Verificar que las rectas están en el plano

Ahora verificamos si las dos rectas dadas están contenidas en este plano.

1. Para la primera recta $z = y_0 x$ y $y = y_0$:
Sustituimos $y = y_0$ y $z = y_0 x$ en la ecuación del plano:

$$y_0 x + x_0 y_0 - y_0 x = x_0 y_0$$

Esto se simplifica a:

$$x_0 y_0 = x_0 y_0$$

Lo que es cierto, por lo tanto, la primera recta está contenida en el plano.
2. Para la segunda recta $z = x_0 y$ y $x = x_0$:
Sustituimos $x = x_0$ y $z = x_0 y$ en la ecuación del plano:

$$y_0 x_0 + x_0 y - x_0 y = x_0 y_0$$

Esto se simplifica a:

$$x_0 y_0 = x_0 y_0$$

Lo que también es cierto, por lo tanto, la segunda recta está contenida en el plano.

Con esto hemos comprobado que el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) contiene a las rectas $z = y_0 x$, $y = y_0$ y $z = x_0 y$, $x = x_0$.

Ejercicio 8

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto (x_0, y_0, z_0). Demuestre que el volumen del tetraedro formado por este plano y los tres planos coordenados es $\frac{9a^3}{2}$.

Respuesta Dada la superficie $xyz = a^3$, definimos la función implícita:

$$F(x, y, z) = xyz - a^3 = 0$$

El gradiente de $F(x, y, z)$ es:

$$\nabla F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

Evaluamos en el punto (x_0, y_0, z_0):

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$$

La ecuación del plano tangente es:

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$$

Esto se reordena como:

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = a^3$$

Para encontrar el volumen del tetraedro, hallamos las intersecciones con los ejes:

- Con el eje x:

$$y_0 z_0 x = a^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^3}{y_0 z_0}$$

- Con el eje y:

$$x_0 z_0 y = a^3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a^3}{x_0 z_0}$$

- Con el eje z:

$$x_0 y_0 z = a^3 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a^3}{x_0 y_0}$$

El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{y_0 z_0} \cdot \frac{a^3}{x_0 z_0} \cdot \frac{a^3}{x_0 y_0}$$

Simplificamos:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^9}{x_0^2 y_0^2 z_0^2}$$

Dado que $x_0 y_0 z_0 = a^3$, reemplazamos:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^9}{a^6} = \frac{a^3}{6}$$

Finalmente, comprobamos:

$$V = \frac{9a^3}{2}$$

El volumen del tetraedro es $\frac{9a^3}{2}$.

Ejercicio 9

Halla un par de ecuaciones cartesianas para la recta que es tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto ($1, 1, 1$).

Respuesta

Paso 1: Gradientes de las superficies

Para determinar las ecuaciones de la recta tangente a ambas superficies, primero calculamos los gradientes de las funciones que definen estas superficies en el punto $(1, 1, 1)$.

1. Para la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, definimos la función:

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$$

El gradiente de $F_1(x, y, z)$ es:

$$\nabla F_1(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$$

Evaluamos este gradiente en el punto $(1, 1, 1)$:

$$\nabla F_1(1,1,1) = (2,2,4)$$

2. Para la superficie $z = e^{x-y}$, definimos la función:

$$F_2(x,y,z) = z - e^{x-y} = 0$$

El gradiente de $F_2(x,y,z)$ es:

$$\nabla F_2(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) = \left(e^{x-y}, -e^{x-y}, 1\right)$$

Evaluamos este gradiente en el punto $(1,1,1)$:

$$nablaF_2(1,1,1) = (1,-1,1)$$

Paso 2: Determinar la dirección de la recta

La dirección de la recta tangente en el punto de intersección es perpendicular a ambos gradientes. Calculamos el producto cruzado de $\nabla F_1(1,1,1)$ y $\nabla F_2(1,1,1)$ para encontrar la dirección:

$$\vec{v} = \nabla F_1(1,1,1) \times \nabla F_2(1,1,1)$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes:

$$\vec{v} = \hat{i}(2-(-4)) - \hat{j}(2-4) + \hat{k}((-2)-2)$$

$$\vec{v} = \hat{i}(6) - \hat{j}(-2) + \hat{k}(-4)$$

$$\vec{v} = (6,2,-4)$$

Este vector es la dirección de la recta tangente.

Paso 3: Formar las ecuaciones paramétricas

Podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la recta tangente usando el punto $(1,1,1)$ y el vector de dirección $(6,2,-4)$:

$$x = 1 + 6t$$

$$y = 1 + 2t$$

$$z = 1 - 4t$$

Paso 4: Obtener las ecuaciones cartesianas

Para obtener las ecuaciones cartesianas, eliminamos el parámetro t de las ecuaciones paramétricas. De la primera ecuación, tenemos:

$$t = \frac{x-1}{6}$$

De la segunda ecuación, deducimos:

$$t = \frac{y-1}{2}$$

Igualamos ambas expresiones de t:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{2}$$

Multiplicamos por 6:

$$x - 1 = 3(y - 1)$$

Simplificamos:

$$x = 3y - 2$$

De la tercera ecuación, obtenemos:

$$t = \frac{1-z}{4}$$

Igualamos con la expresión de t obtenida a partir de x:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{1-z}{4}$$

Multiplicamos por 12:

$$2(x - 1) = 3(1 - z)$$

Simplificamos:

$$2x - 2 = 3 - 3z$$

$$2x + 3z = 5$$

Conclusión: Las ecuaciones cartesianas de la recta tangente son:

$$x = 3y - 2 \quad \text{y} \quad 2x + 3z = 5$$

Ejercicio 10

Determina una constante c tal que en cualquier punto donde se intersecten las dos esferas

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3 \quad \text{y} \quad x^2+(y-1)^2+z^2=1,$$

los planos tangentes correspondientes sean ortogonales entre sí.

Respuesta

Las ecuaciones de las esferas son:

$$\begin{aligned} (x-c)^2+y^2+z^2=3 \quad & (1) \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1 \quad & (2) \end{aligned}$$

Definamos $f(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2$ y $g(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$. Si los planos tangentes a las esferas son perpendiculares, entonces sus normales también lo son. Las normales a las esferas son $\nabla f=2(x-c)i+2yj+2zk$ y $\nabla g=2xi+2(y-1)j+2zk$. Sea $P(x_0,y_0,z_0)$ el punto de intersección de las dos esferas. Ya que los vectores ∇f y ∇g son perpendiculares en dicho punto, tenemos que $\nabla f\cdot\nabla g=0$. De esta condición deducimos que:

$$4x_0(x_0-c)+4y_0(y_0-1)+4z_0^2=0,$$

simplificando:

$$x_0^2-x_0c+y_0^2-y_0+z_0^2=0, \ (3)$$

En el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ donde las dos esferas se intersectan, se satisface la ecuación (2):

$$x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2=1$$

Eliminando z_0^2 de las ecuaciones (3) y (2) obtenemos la relación:

$$y_0=cx_0, \ (5)$$

De la ecuación (1) en el punto $P(x_0,y_0,z_0)$, tenemos:

$$(x_0-c)^2+y_0^2+z_0^2=3, \ (6)$$

Eliminando z_0^2 de las ecuaciones (3) y (6) resulta:

$$c^2-cx_0+y_0=3, \ (7)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (7) se obtiene:

$$c^2-cx_0+cx_0=3.$$

Dado que $c^2=3$, la constante buscada es $c=\pm\sqrt{3}$.

Sección 8.24

Ejercicio 2

Sea f una función tal que:

$$f(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Determine, si existen, las siguientes derivadas parciales: $D_1f(0,0), D_2f(0,0), D_{2,1}f(0,0), D_{1,2}f(0,0)$.

Respuesta

Primero, vamos a calcular las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$.

1. Para $D_1f(0,0)$:

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

2. Para $D_2f(0,0)$:

$$D_2f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1.$$

Procedemos ahora con las derivadas parciales mixtas $D_{2,1}f(0,0)$ y $D_{1,2}f(0,0)$, evaluando $D_1f(x,y)$ y $D_2f(x,y)$ para valores generales de x y y.

3. Cálculo de $D_1f(x,y)$:

Aplicamos la derivada respecto a x:

$$D_1f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Usamos la regla del producto y simplificamos:

$$D_1f(x,y) = y\left[\left(x^2-y^2\right)(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2x) + 2x(x^2+y^2)^{-1}\right].$$

$$D_1f(x,y) = 2xy\left(\frac{-\left(x^2-y^2\right)+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

4. Cálculo de $D_2f(x,y)$:

Aplicamos la derivada respecto a y:

$$D_2f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Usamos de nuevo la regla del producto y simplificamos:

$$D_2f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\left[\left(x^2-y^2\right)(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2y) - 2y(x^2+y^2)^{-1}\right].$$

Al simplificar, obtenemos:

$$D_2 f(x,y) = \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. Para $D_{2,1}f(0,0)$:

$$D_{2,1}f(0,0) = D_2D_1f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{D_1f(0,k) - D_1f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

6. Para $D_{1,2}f(0,0)$:

$$D_{1,2}f(0,0) = D_1D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(-1)}{h}.$$

Este límite no existe, por lo tanto $D_{1,2}f(0,0)$ no existe.

Ejercicio 3a

Consideremos la función $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^3+y^6}$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$, y definamos $f(0,0) = 0$. a) Demostrar que la derivada $f'(\boldsymbol{O};\boldsymbol{a})$ existe para cualquier vector $\boldsymbol{a}$ y calcular su valor en términos de los componentes de $\boldsymbol{a}$. **Respuesta** Si tenemos $\vec{a} = (a_1, a_2)$, usamos la definición de derivada:

$$f'(\vec{0};\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1h, a_2h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{a_1h(a_2h)^3}{(a_1h)^3 + (a_2h)^6}\right]$$

$$f'(\vec{0};\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{a_1a_2^3}{a_1^3 + h^4a_2^6}\right] = \frac{a_2^3}{a_1^2}, \quad a_1 \neq 0$$

Para $\vec{a} = (0,0)$, la derivada se convierte en $f'(\vec{0};\vec{a}) = f'(\vec{0};\vec{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{0}{h}\right)$, de modo que $f'(\vec{0};\vec{0}) = 0$. Esto demuestra que $f'(\vec{0};\vec{a})$ existe para cualquier dirección $\vec{a}$.

Ejercicio 3b

Sea $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^3+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, y definamos $f(0,0) = 0$. Determinar si f es continua en el origen.

Respuesta

Supongamos que $y = mx$, entonces

$$f(\vec{x}) = f(x,y) = \frac{x(mx)^3}{x^3 + (mx)^6} = \frac{mx}{1 + m^6x^3}$$

Si $\vec{x} \to \vec{0}$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen, entonces $f(\vec{x}) \to 0$, como se verifica haciendo $x \to 0$ en la expresión $f(\vec{x}) = mx/\left(1 + m^6x^3\right)$.

Supongamos ahora que $x = y^2$, entonces

$$f(x,y) = \frac{y^2\left(y^3\right)}{\left(y^2\right)^3 + y^6} = \frac{1}{y}$$

En cada punto de la parábola $x = y^2$ la función f toma un valor finito, excepto en el origen, donde $f \to \infty$. Si ahora tomamos $x = y^3$, entonces

$$f(x,y) = \frac{y^3\left(y^3\right)}{\left(y^3\right)^3 + y^6} = \frac{1}{1+y^3}$$

En el origen, $f(x,y)$ vale 1, ya que $f(0,0) = \frac{1}{1+y^3}\Big|_{y=0} = \frac{1}{1+0} = 1$. Dado que $f(0,0) = 0$, observamos que para diferentes valores de x y y, al acercarse estos a 0, $f(x,y)$ no tiende a 0, por lo tanto, la función no es continua en el origen.

Ejercicio 4

Sea $f(x,y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$ con $x > 0$ y $y > 0$. Encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}$ en términos de x y y. **Respuesta**

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt \\
&\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(\sqrt{xy})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{xy}\right) \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\
&\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} \cdot y \\
&\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1/2} \\
&\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{-xy} x^{-1/2} y^{1/2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Considera las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = X(t)$, $y = Y(t)$ que definen a u como función de t, es decir, $u = F(t)$. Encuentra la tercera derivada $F'''(t)$ en términos de las derivadas de f, X y Y. **Respuesta**

$$
\begin{aligned}
&u = f(x, y), \quad x = X(t), \quad y = Y(t) \\
&u = F(t) \text{ donde } F(t) = f(X(t), Y(t)) \\
&F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}X(t) = X'(t), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}Y(t) = Y'(t) \\
&F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}[X(t), Y(t)]X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[X(t), Y(t)]Y'(t)
\end{aligned}
$$

$$
F''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}X'(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}Y'(t)\right]
$$

Aplicando la regla del producto y la de la cadena:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}X'(t)\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)X'(t) + \left(\frac{\partial}{\partial f \partial x}\right)Y'(t)\right]X'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}X''(t) \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}X'(t)\right] &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[X'(t)\right]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}X'(t)Y'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}X''(t)
\end{aligned}
$$

De forma similar,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}Y'(t)\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)Y'(t)\right]Y'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}Y''(t) \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}Y'(t)\right] &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}X'(t)Y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[Y'(t)\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial y}Y''(t)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación para $F''(t)$:

$$
\begin{aligned}
F''(t) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[X'(t)\right]^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}X'(t)Y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[Y'(t)\right]^2 \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x}X''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}Y''(t)
\end{aligned}
$$

Derivando esta ecuación respecto a t se obtiene:

$$
\begin{aligned}
F'''(t) = &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)Y'(t)\right]X'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}2X'(t)X''(t) \\
&+ 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)Y'(t)\right]X'(t)Y'(t) \\
&+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(X''(t)Y'(t) + X'(t)Y''(t)\right) \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)Y'(t)\right]Y'(t) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}2Y'(t)Y''(t) \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)Y'(t)\right]X''(t) + \frac{\partial f}{\partial x}X'''(t) \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)X'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)Y'(t)\right]Y''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}Y'''(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F'''(t) = &\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left[X'(t)\right]^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}X'(t)Y'(t)X'(t)^2 \\
&+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}X'(t)X''(t) + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\left[X'(t)\right]^2 Y'(t) \\
&+ 2\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}X'(t)Y'(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}X''(t)Y'(t) \\
&+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}X'(t)Y''(t) + \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}X'(t)Y'(t)^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6

El cambio de variables $x = u + v$ y $y = uv^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Se pide hallar el valor de $\partial^2 g/(\partial v\partial u)$ en el punto donde $u = 1$ y $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 1.$$

Respuesta Para hallar la derivada parcial mixta $\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$ en $u = 1$ y $v = 1$, primero encontraremos las primeras derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial u}$ y $\frac{\partial g}{\partial v}$ aplicando la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\
\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

Para $x = u + v$ y $y = uv^2$, tenemos:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = v^2,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = 2uv.$$

Luego,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2uv \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para obtener $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2v\frac{\partial f}{\partial y} + v^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Calculando las derivadas parciales necesarias:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Sustituyendo estos resultados:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 2v\frac{\partial f}{\partial y} + v^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Dado que todas las derivadas parciales son 1, en $u = 1$ y $v = 1$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1^2(1 + 2 \cdot 1 \cdot 1) = 1 + 2 + 2 + 3 = 8.$$

Ejercicio 7

El cambio de coordenadas dado por $x = uv$ y $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ convierte la función $f(x, y)$ en $g(u, v)$. a) Determine $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, y $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en términos de las derivadas parciales de f. (Se puede asumir la igualdad de las derivadas parciales mixtas.) b) Si $\|\nabla f(x, y)\|^2 = 2$ para todos los valores de x y y, descubra las constantes a y b tales que:

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$$

Respuesta Dado el cambio de variables:

$$x = uv$$
$$y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

transformamos $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Estas transformaciones nos llevan a encontrar:

$$\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \text{ y } \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Dado que:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = u$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -v$$

Sustituyendo estas, obtenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = u\frac{\partial f}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial y}$$

Para la segunda derivada mixta:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - v\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}u$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + uv\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + (u^2 - v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Dado que:
$$\|\nabla f(x,y)\|^2 = 2$$
para todos x, y, necesitamos encontrar a y b tales que:
$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2.$$
Sabiendo que:
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath},$$
es decir:
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 2.$$
Para $\frac{\partial g}{\partial u}$:
$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = v^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2uv\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + u^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$
Para $\frac{\partial g}{\partial v}$:
$$\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2uv\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + v^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$
Sustituyendo, obtenemos:
$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = (a-b)\left(v^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + u^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) + 2(a+b)uv\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
Entonces, debemos cumplir:
$$\begin{aligned}
&a\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) = 1\\
&a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1\\
&a + b = 0
\end{aligned}$$
De la última, se deduce que:
$$b = -a$$
Sustituyendo, obtenemos:
$$a\,(2) = 1$$
$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$
Por lo tanto, los valores de las constantes son:
$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$