UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Computación Científica 2

Tarea 1

Alexander Mendoza

28 de agosto de 2024

1. Sea $S_n = \{f : [n] \to [n] : f \text{ es biyectiva}\}$. Demostrar que $(S_n, \circ)$ es un grupo.

   Para demostrar que $(S_n, \circ)$ es un grupo, debemos demostrar que la operación dentro del grupo es asociativa, tiene elemento neutro y tiene elementos inversos.

   a) **Asociatividad**. La asociatividad se puede concluir de la asociatividad de la composición de funciones.

   b) **Elemento neutro**. Construyamos la función identidad para el conjunto S_n asignando cada elemento de $[n]$ a si mismo. Así

   $$I_n : [n] \to [n]\,; k \mapsto k$$

   o

   $$I_n(k) = k$$

   para cada $k \in [n]$. Sabemos que la función identidad es biyectiva, por tanto, $I \in S_n$. Luego, sea $f \in S_n$, así $f(k) \in [n]$, con esto

   $$(I \circ f)(k) = I(f(k)) \qquad = f(k)$$

   Además

   $$(f \circ I)(k) = f(I(k)) \qquad = f(k)$$

   Con esto demostramos que I es el elemento neutro de $(S_n, \circ)$.

   c) **Elemento inverso**.
   Dado que $f \in S_n$ es biyectiva, existe una función inversa $f^{-1} : [n] \to [n]$ también biyectiva, tal que para todo $k \in [n]$ se cumple que $f(f^{-1}(k)) = k$ y $f^{-1}(f(k)) = k$.
   Con esto, para demostrar que es es la inversa,

   $$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(k) &= f(f^{-1}(k)) \\ &= k\end{aligned}$$

   Luego,

   $$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(k) &= f^{-1}(f(k)) \\ &= k\end{aligned}$$

   Por lo tanto, f^{-1} es la inversa f en $(S_n, \circ)$ para todo $(f \in S_n)$.

2. Código para verificar si es una permutación.

```
def verificar_permutacion(lista):
    n = len(lista)
    if set(lista) != set(range(1, n + 1)):
        return False

    verificados = [False] * n
    for i in lista:
        if verificados[i - 1]:
            return False
        verificados[i - 1] = True
    return True

print(verificar_permutacion([2, 1, 3]))
```