UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Tarea 2

Secciones 3 y 4

Alexander Mendoza
Dylan Cifuentes

June 12, 2023

Contents

Chapter 1

Ejercicios

Ejercicio 3.3.20

Sean A y B conjuntos. Supongamos que $B \subseteq A$. Demostrar que $A \times A - B \times B = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$.

Demostración.
Definimos $A \times A - B \times B = (x, y)|x \in A, y \in A, x \notin B$ o $y \notin B$. Luego definimos $(A - B) \times A$ y $A \times (A - B)$:

$(A - B) \times A = (x, y)|x \in A - B, y \in A = (x, y)|x \in A, x \notin B, y \in A$
$A \times (A - B) = (x, y)|x \in A, y \in A - B = (x, y)|x \in A, y \in A, y \notin B$

Para demostrar que $A \times A - B \times B \subseteq [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$, tomamos $(x, y) \in A \times A - B \times B$. Entonces, por definición de diferencia, sabemos que $(x, y) \in A \times A$ y $(x, y) \notin B \times B$. Tenemos dos casos a considerar:

Si $x \in A - B$, entonces (x, y) pertenece a $(A - B) \times A$ por definición de producto cartesiano. Si $x \in B$, la única forma en que (x, y) pertenece a $A \times A$ pero no a $B \times B$ es que $y \notin B$. Por lo tanto, $(x, y) \in [A \times (A - B)]$, ya que $x \in A$ e $y \in A - B$. En ambos casos, hemos demostrado que $(x, y) \in [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$. Luego, probemos que $A \times A - B \times B \supseteq [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$.

Si $(x, y) \in (A - B) \times A$, entonces $x \in A$ pero $x \in B$ por definición de diferencia. Por lo tanto, y puede pertenecer a cualquier elemento de A porque (x, y) no pertenece a $B \times B$. Si $(x, y) \in A \times (A - B)$, entonces $y \in A - B$. Por lo tanto, x puede pertenecer a cualquier elemento de A porque (x, y) no pertenece a $B \times B$. En ambos casos, demostramos que $(x, y) \in [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$. Como ya demostramos que $A \times A - B \times B \subseteq [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$, entonces por definición de igualdad de conjuntos podemos concluir que $A \times A - B \times B = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$.

Ejercicio 3.4.6

Sean $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos y B un conjunto.
(1) Demostrar que $\left(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B = \bigcup_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$.
(2) Demostrar que $\left(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B = \bigcap_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$.

$\left(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B = \bigcup_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$. *Demostración.* Sea $a \in \left(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B$, luego $a \in \bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$ y $a \notin B$. Así $a \in Y$ para algún $Y \in \mathcal{A}$, luego $a \in Y - B$. De esta manera $a \in \bigcup_{X\in\mathcal{A}}(X-B)$, por lo tanto $\left(\bigcup_{X\in\mathcal{A}} X\right)-B = \bigcup_{X\in\mathcal{A}}(X-B)$.

$\left(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B = \bigcap_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$. *Demostración.* De manera similar a como hicimos con la unión. Sea $a \in \left(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B$, luego $a \in \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ y $a \notin B$. Así $a \in Y$ para todo $Y \in \mathcal{A}$, luego $a \in Y - B$. De esta manera $a \in \bigcap_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$, por lo tanto $\left(\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X\right) - B = \bigcap_{X\in\mathcal{A}}(X - B)$.

Ejercicio 4.1.8

A es un conjunto y B⊆A y existe la función
χB: A → {0,1}

$$\text{a} \to \begin{cases} 0 \quad si \quad a \notin D \\ \\ 1 \quad si \quad a \in D \end{cases}$$

Probar que χB= χC ↔ B=C

Dem ←: Suponga que B=C por definición de igualdad B⊆C y C⊆B, luego $(\forall a \in A)(a \in B \leftrightarrow a \in C)(\forall a \in A)$, entonces por definición de la función χB(a)= 1 Sii χC(a)=1, por lo tanto $(\forall a \in A)(\chi B(a) = \chi C(a))$ lo que implica que χB= χC

Dem →:Suponga que χB= χC, entonces para cualquier y, y ∈X,luego $\chi B(y)$= $\chi C(y)$ por definición de función, como $\chi B(y)$= $\chi C(y)$ entonces ambas son 1 o son 0. Si $\chi B(y)$= $\chi C(y)$= 1, entonces y ∈ A e y ∈ B, lo que implica que A = B, Si $\chi B(y)$= $\chi C(y)$= 0 entonces y∉A e y∉B, luego por definición de diferencia se puede decir que y∈ X-A e y∈ X-B, por tanto
$A = X - (X - A) = X - (X - B) = B$ sin embargo, esta última no puede ser verdadera ya que X es un conjunto no vacío y A y B son subconjuntos no vacíos de X. Por lo tanto, debemos tener A = B, luego como se han demostrado amabas implicaciones pondemos conliuir que χB= χC ↔ B=C

Ejercicio 4.2.15

Sea A un conjunto no vacío, y sea $g : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ una función. La función g es monótona si $X \subseteq Y$ implica $g(X) \subseteq g(Y)$ para todo $X, Y \in \mathscr{P}(A)$. Supongamos que g es monótona.

(1) Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de A. Demuestra que $g\left(\bigcap_{X\in\mathcal{D}} X\right) \subseteq \bigcap_{X\in\mathcal{D}} g(X)$.
(2) Demuestra que existe algún $T \in \mathscr{P}(A)$ tal que $g(T) = T$. A dicho elemento T se le llama un punto fijo de g. Usa la Parte (1) de este ejercicio.

Demostración.
(1) Queremos demostrar que $g\left(\bigcap_{X\in\mathcal{D}} X\right) \subseteq \bigcap_{X\in\mathcal{D}} g(X)$. Sea $y \in g\left(\bigcap_{X\in\mathcal{D}} X\right)$. Entonces existe $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{D}} X$ tal que $y = g(x)$. Como $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{D}} X$, tenemos que $x \in X$ para todo $X \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $g(x) \in g(X)$ para todo $X \in \mathcal{D}$, ya que g es monotona. Esto implica que $y = g(x) \in g(X)$ para todo $X \in \mathcal{D}$, lo que significa que $y \in \bigcap_{X\in\mathcal{D}} g(X)$.

(2) Consideremos el conjunto $T = \bigcap X \in \mathcal{P}(A) : g(X) \subseteq X$. Como $\mathcal{P}(A)$ no es vacío, este conjunto está bien definido. Queremos mostrar que $g(T) = T$. Primero, demostraremos que $g(T) \subseteq T$. Sea $y \in g(T)$. Entonces existe $x \in T$ tal que $y = g(x)$. Como $x \in T$, tenemos que $x \in X$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $g(X) \subseteq X$. En particular, $x \in T$, por lo que $y = g(x) \in T$, lo que implica que $g(T) \subseteq T$. Luego, demostraremos que $T \subseteq g(T)$. Sea $x \in T$. Queremos demostrar que $x \in g(T)$, es decir, que existe $y \in T$ tal que $x = g(y)$. Como $x \in T$, tenemos que $x \in X$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $g(X) \subseteq X$. En particular, $x \in g(x)$, por lo que $g(x) \subseteq X$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$ tal que $g(X) \subseteq X$. Por lo tanto, $x \subseteq T$, lo que implica que $x \in g(T)$. Por lo tanto, hemos demostrado que $T \subseteq g(T)$. Combinando las dos inclusiones, obtenemos $g(T) = T$, lo que significa que T es un punto fijo de g.

Ejercicio 4.3.10

Sean A y B conjuntos, y sea $f\colon$ A $\to$ B una función. Demostrar que si f tiene dos inversos distintos a la izquierda entonces no tiene inverso a la derecha, y que si f tiene dos inversos distintos a la derecha entonces no tiene inverso a la izquierda. inversos a la derecha, entonces no tiene inverso a la izquierda.
Dem por contradicción: Sean g_1, g_2 B $\to$ A tal que $g_1 \neq g_2$ y $g_1 \circ f = g_2 \circ f = idA$, entonces f tiene inversa, si f tiene inversa, existe h $\circ$ f=idA y f $\circ$ h= idB de manera que:
$(g_1 \circ f) \circ h$= $(g_2 \circ f) \circ h$
$g_1 \circ (f \circ h)$= $g_2 \circ (f \circ h)$
$g_1 \circ idB = g_2 \circ idB$
$g_1 = g_2$ y esto lleva a una contradicción ya que se tenia dicho que $g_1 \neq g_2$.

De manera similar suponga que f tiene dos inversos a derecha h_1, h_2 de manera que $h_1 \neq h_2$ y $h_1 \circ f = h_2 \circ f = idB$, entonces f tiene inversa a izquiera, si f tiene inversa, existe h $\circ$ f=idA y f $\circ$ h= idB de manera que:
$(h_1 \circ f) \circ g$= $(h_2 \circ f) \circ g$

$h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g)$
$h_1 \circ idB = h_2 \circ idB$
$h_1 = h_2$ y esto lleva a una contradicción ya que se tenia dicho que $h_1 \neq h_2$.

Ejercicio 4.4.17

Sean A y B conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función. Demuestra que f es sobreyectiva si y solo si $B - f(X) \subseteq f(A - X)$ para todo $X \subseteq A$.

Demostración.
Empecemos demostrando que $B - f(X) \subseteq f(A - X)$ implica que f es sobreyectiva. Sea $b \in B$ luego $b \in B - f(X)$ para algún $X \subseteq A$. Sabemos que $B - f(X) \subseteq f(A - X)$, así $b \in f(A - X)$ esto por definición de subconjunto, con esto podemos concluir que $b = f(a)$ para algún $a \in A$ y $a \notin X$. Se sobreentiende que $b = f(x)$ para algún $x \in X$ cuando $b \in f(X)$.

Concluyamos la demostración con el caso en el que cuando f es sobreyectiva $B - f(X) \subseteq f(A - X)$ para algún $X \subseteq A$ se cumple. Sabemos que $B = f(A)$ recordemos que A y B son el dominio y codominio de f respectivamente. Luego sea $a \in A$ y sea $b \in B - f(X)$ para todo $X \subseteq A$. Así $b = f(a)$ para algún $a \in A$ y $a \notin X$, esto por definición de diferencia de conjuntos e imagen de un conjunto sobre una función. Así tenemos que $b \in f(A - X)$.

Ejercicio 5.1.7

Sea A un conjunto, y piense que $\subseteq$ define una relación sobre P(A), Sea A un conjunto. El símbolo " $\subseteq$ " representa una relación sobre P(A), donde P,Q $\in P$(A) están relacionados si y sólo si P⊆Q. Es esta relación reflexiva, simétrica y/o transitiva?

Para la relación " $\subseteq$ " en el conjunto P(A) de un conjunto A, se puede demostrar que:

- Es reflexiva, ya que cualquier conjunto P es un subconjunto de sí mismo , y por lo tanto P⊆P para cualquier P $\in P$(A).
- No es simétrica, ya que si P⊆Q, no necesariamente se cumple que Q⊆P. Un contraejemplo sencillo es tener P = 1,2 y
  Q = 1,2,3. En este caso, se tiene que P⊆Q, pero no se cumple que Q⊆P.
- Es transitiva, ya que si P⊆Q y Q⊆R, entonces por definición todo elemento de P es también un elemento de Q, y todo elemento de Q es también un elemento de R. Por lo tanto, todo elemento de P también es un elemento de R, y se cumple que P⊆R para cualquier P,Q,R$\in P$(A). Entonces, la relación "⊆" es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica.

Entonces, la relación " $\subseteq$ " es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica.

Ejercicio 5.2.8

Teorema 1. Sea $n \in \mathbb{N}$. $[0] \cup [1] \cup \ldots \cup [n-1] = \mathbb{Z}$

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $n^3 \equiv n \mod 6$. *Demostración.* Por *Teorema 1* sabemos que o $n^3 \equiv 0 \mod 6$ o $n^3 \equiv 1 \mod 6$ o ... o $n^3 \equiv 5 \mod 6$. Así

$$0^3 \equiv 0 \equiv 0 \mod 6$$

$$1^3 \equiv 1 \equiv 1 \mod 6$$

$$2^3 \equiv 8 \equiv 2 \mod 6$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv 3 \mod 6$$

$$4^3 \equiv 64 \equiv 4 \mod 6$$

$$5^3 \equiv 125 \equiv 5 \mod 6$$