UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Cálculo Integral y Series

Taller 1

Alexander Mendoza

3 de marzo de 2024

Spivak Capítulo 13

1. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = \dfrac{b^4}{4}$.

   Consideremos la partición de [0, b] P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \dfrac{b}{n}, \ldots, t_i = \dfrac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^3 = \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3$$

$$M_i = t_i^3 = \left(i\frac{b}{n}\right)^3$$

   Luego

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \frac{b^4}{n^4} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \\
&= \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

   Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\dfrac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 \frac{b^4}{n^4} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\
&= \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \frac{b^4}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{b^4}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right] \\
&= \frac{b^4}{4}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right) \\
&= \frac{b^4}{n}
\end{aligned}
$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \dfrac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$
U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{b^4}{n} < \epsilon
$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0,b]$ tal que $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f,P_n)$ y $L(f,P_n)$ se aproximan a $\frac{b^4}{4}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^4}{4}$ es el único número tal que

$$
L(f,P_n) \leq \frac{b^4}{4} \leq U(f,P_n)
$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.