UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL I

Explorando la función tangente hiperbólica

Alexander Mendoza

5 de septiembre de 2023

Explorando la función tangente hiperbólica

Considere $t : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ donde $t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Demostrar que t es inyectiva.

   Demostración. Sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $t(x) = t(y)$. Luego tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\
(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) &= (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x}) \\
(e^x - \frac{1}{e^x})(e^y + \frac{1}{e^y}) &= (e^y - \frac{1}{e^y})(e^x + \frac{1}{e^x}) \\
e^x e^y + \frac{e^x}{e^y} - \frac{e^y}{e^x} - \frac{1}{e^x e^y} &= e^x e^y - \frac{e^x}{e^y} + \frac{e^y}{e^x} - \frac{1}{e^x e^y} \\
\frac{e^x}{e^y} - \frac{e^y}{e^x} &= -\frac{e^x}{e^y} + \frac{e^y}{e^x} \\
-2\frac{e^y}{e^x} &= -2\frac{e^x}{e^y} \\
\frac{e^y}{e^x} &= \frac{e^x}{e^y} \\
e^{y-x} &= e^{x-y} \\
\ln(e^{y-x}) &= \ln(e^{x-y}) \\
y - x &= x - y \\
-2x &= -2y \\
x &= y
\end{aligned}
$$

   De esta manera demostramos que la función es inyectiva.

2. Demostrar que t es sobreyectiva (muestre explícitamente t^{-1}).

3. Copie la estructure de $(\mathbb{R}, +)$ en $(-1, 1)$ y muestre de manera explícita y simplificada la definición de la nueva operación.

4. Realice en Python la definición de la operación en $(-1, 1)$ y calcule el elemento neutro.

5. Usando Python, calcule para cada $x \in (-1, 1)$, cuánto es $-x$.