UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Introducción al Cálculo

Parcial

Polinomios

Alexander Mendoza

June 12, 2023

Contents

Chapter 1

Parcial

Polinomios

. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1. Liste todos los posible ceros raiconales de P.
   Sabemos que por el teorema de los zeros racionales los posibles ceros de un polinomio son dados por las fracciones que se pueden formar con el coeficiente líder y la constante donde el denominador es un factor del coeficiente líder y el numerador un factor de la constante. Por lo tanto los posibles ceros del polinomio P son:
   $P.R.R = \{\pm\frac{3}{2}, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$

2. Encuentre la factorización completa de P.

3. Determine los ceros de P.
   Realizando division sintética con -1 logramos conseguir una de las tres raíces.

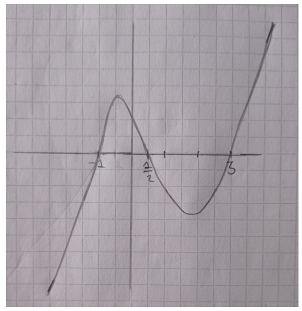
$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ \hline & & -2 & 7 & -3 & \end{array}$$

Luego el polinomio restante sería $2x^2-7x+3$. Aplicando fórmula cuadrática tenemos que los ceros restantes son.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \quad = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \; = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \quad = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Así los ceros del polinomio serían. $-1, \frac{1}{2}, 3$. Y su forma factorizada sería $(x+1)(x-3)(x-\frac{1}{2})$

4. Bosqueje la gráfica de P.



Complejos

Sea $z = 3 - 2i, w = 4 + 3i$. Halle.

1. zw

   $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad = (3 \cdot 4 - (-2 \cdot 3)) + (3 \cdot 3 + (-2 \cdot 4))i = 18 + i$

2. $\frac{z}{w}$
   $\frac{3-2i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{18-17i}{16+9} = \frac{18-17i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{17}{25}i$

3. Encuentre los ceros reales y complejos de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$.
   Usando el teorema de las raices racionales y división sintética encontramos que 3 es un cero del polinomio. Luego el polinomio restante de la división es x^2+2x+2. Usando la fórmula cuadrática tenemos que los ceros restantes son los siguientes.

   $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$
   $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
   $$x = -1 \pm i$$
   $$x_1 = -1 + i$$
   $$x_2 = -1 - i$$

   Por lo tanto las raices del polinomio son $3, -1 - i, -1 + i$.

4. Encuentre un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros que tiene ceros $3i$ y -1, con -1 de multiplicidad 2.
   Sabemos que $-3i$ también es una raíz del polinomio, por lo cual la forma factorizada del polinomio es la siguiente.

$$(x+1)(x+1)(x-3i)(x+3i)$$

Expandiendo la expresión tenemos.

$$\begin{aligned}(x+1)(x+1)(x-3i)(x+3i) &= (x+1)(x+1)(x^2+9)\\ &= (x^2+2x+1)(x^2+9)\\ &= x^4+9x^2+2x^3+18x+x^2+9\\ &= x^4+2x^3+10x^2+18x+9\end{aligned}$$

Funciones Racionales

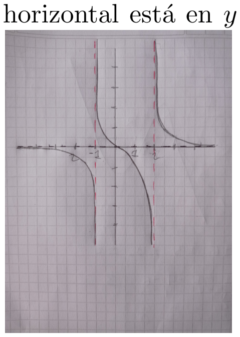
Considere las siguientes funciones racionales:

$$r(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}, s(x) = \frac{x^3+27}{x^2+4}$$

1. Grafique $r(x)$, muestre con claridad cualquier asíntota y los posibles cortes con los ejes.
   Asíntota vertical para $r(x)$.

   $$\begin{aligned}x^2-x-2 &= 0\\ (x-2)(x+1) &= 0\\ x_1 &= 2\\ x_2 &= -1\end{aligned}$$

   Asintota horizontal para $r(x)$.
   Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la asíntota horizontal está en $y = 0$. Luego la gráfica quda de la siguiente

   manera.

2. Grafique $s(x)$, muestre con claridad cualquier asíntota y los posibles cortes con los ejes.

Asíntota vertical para $s(x)$.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= -4 \\ x &= \sqrt{-4} \\ x &= i\sqrt{4} \\ x &= \pm 2i \end{aligned}$$

Como el grado del numerador es mayor al del denominador, tiene asíntota oblicua. Al realizar el algorítmo de la división tenemos que la asíntota oblicua está en $y = x$. La gráfica quedaría de la siguiente manera.