Matemáticas

Geometría Euclidiana

Demostraciones congruencias de triángulos

Alexander Mendoza

12 de junio de 2023

Índice general

Capítulo 1

Demostraciones congruencias de triángulos

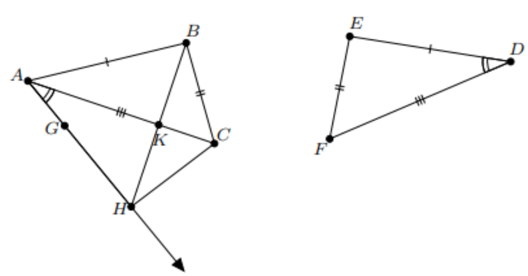
1.1. Demostracion criterio de congruencia LLL

Dada la correspondencia entre el $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tal que, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Demostración. Para hacer la demostración haremos una construcción de la cual saldrán tres casos para demostrar. La construcción es la siguiente:

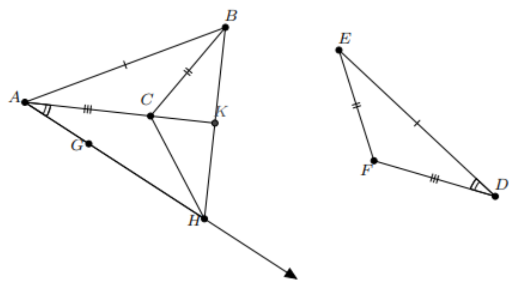
Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tal que, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, luego sea $G \in \mathcal{S}_{\overleftrightarrow{AC},\neg B}$ de modo que $\angle CAG \cong \angle EDF$, así sea H tal que $\overline{AG} \cong \overline{DE}$. Así $\triangle AHC \cong \triangle DEF$, esto debido a congruencia LAL con $\overline{AH} \cong \overline{ED}$, $\angle HAC \cong \angle EDF$ y $\overline{DF} \cong \overline{AC}$. Luego $\overline{BH} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{K\}$ esto por el PSP, intersección segmento puntos opuestos. Así tenemos tres casos para K.

Caso 1. Supongamos que $A - K - C$.



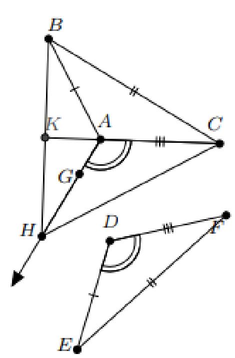
Si $A - K - C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AH}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CH}$ esto por transitividad de congruencia. Así $\triangle ABH$ es isósceles, luego $\angle ABK \cong \angle AHK$, esto por definición de triángulo isósceles. De manera similar $\triangle BCH$ es isósceles y $\angle CBK \cong \angle CHK$. Luego $K \in int\angle ABC$ y $k \in int\angle AHC$ esto debido a la interestancia $A-K-C$ y el teorema interior de ángulo, lado opuesto de triángulo. Así $m\angle ABC = m\angle ABK + m\angle CBK$ y $m\angle AHC = m\angle AHK + m\angle CHK$. Por definición de congruencia de ángulos, $\angle ABC \cong \angle AHC$. Así $\triangle ABC \cong \triangle AHC$ por criterio de congruencia LAL. Por transitividad de congruencia $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Caso 2. Supongamos que $A-C-K$.



Si $A-C-K$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AH}$ y $\overline{CB} \cong \overline{CH}$ esto por transitividad de congruencia. Luego el $\triangle ABH$ y el $\triangle CBH$ son isósceles, lo que implica que $\angle AHK \cong \angle ABK$ y $\angle CHK \cong \angle CBK$ esto debido a definición de triángulo isósceles. Debido a que $A-C-K$ sabemos que $C \in int\angle AHK$ y $C \in int\angle ABK$, por lo tanto $m\angle ABK = m\angle ABC + m\angle CBK$ y $m\angle AHK = m\angle AHC + m\angle CHK$, reemplazando ángulos congruentes tenemos que $m\angle AHC = m\angle ABC$. Luego por criterio de congruencia ALA tenemos que $\triangle AHC \cong \triangle ABC$. Así, por transitividad de congruencia, tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

Caso 3. Supongamos que $K-A-C$.



De manera similar al anterior caso, si $K-A-C$, tenemos que $\angle CHA \cong \angle CBA$ lo que nos deja con un criterio de congruencia LAL con $\overline{AH} \cong \overline{BA}, \overline{CH} \cong \overline{CB}$ y $\angle CHA \cong \angle CBA$. Así $\triangle CAH \cong \triangle CAB$, y por transitividad de congruencia,

$\triangle CAH \cong \triangle FDE$.

De esta manera hemos demostrado que en cualquiera de los casos los triángulos son congruentes, por lo tanto el criterio de congruencia LLL se cumple.

1.2. Demostración del criterio de congruencia LAL usando como postulado ALA

Sean el $\triangle ABC$ y $\triangle FED$ tal que $\overline{BC} \cong \overline{ED}, \angle ACB \cong \angle FDE$ y $\overline{AC} \cong \overline{FD}$ formando un criterio de congruencia LAL. Luego sea $G \in \mathcal{S}_{\overleftrightarrow{ED},F}$ tal que $m\angle GED = m\angle ABC$, luego sea $F' \in \overleftrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{EG}$, así $\angle F'ED \cong \angle ABC$. Por el postulado de criterio de congruencia ALA, $\triangle ABC \cong \triangle F'ED$. Esta congruencia implica que $\overline{F'D} \cong \overline{AC}$ y por transitividad de congruencia $\overline{F'D} \cong \overline{FD}$, lo cual implica que $F'D = FD$. Como $F' \in \overrightarrow{DF}$, esto ya que la totalidad de $\overrightarrow{EG}$ está en $\mathcal{S}_{\overleftrightarrow{ED},F}$ y en particular F' también lo está, entonces $F' = F$. Por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle FED$. Con esto demostramos la reciprocidad entre LAL y ALA.