UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

Matemáticas

Cálculo Integral y Series

Taller 1

Alexander Mendoza

5 de marzo de 2024

Spivak Capítulo 13

1. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

   Consideremos la partición de [0, b] P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \frac{b}{n}, \ldots, t_i = \frac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^3 = \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3$$

$$M_i = t_i^3 = \left(i\frac{b}{n}\right)^3$$

   Luego

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \frac{b^4}{n^4} \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \\ &= \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

   Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\frac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$
\begin{aligned}
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{b}{n} \right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 \frac{b^4}{n^4} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\
&= \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$
\begin{aligned}
U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \\
&= \frac{b^4}{4} \left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{b^4}{4} \left(\frac{n^2+2}{n^2} \right) \\
&= \frac{b^4}{n}
\end{aligned}
$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \dfrac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$
U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^4}{n} < \epsilon
$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0, b]$ tal que $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ se aproximan a $\frac{b^4}{4}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^4}{4}$ es el único número tal que

$$
L(f, P_n) = \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \leq \frac{b^4}{4} \leq \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = U(f, P_n)
$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3 dx = \dfrac{b^4}{4}$.

2. Demostrar que $\int_0^b x^4 dx = \dfrac{b^5}{5}$.

Consideremos la partición de [0, b] P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \frac{b}{n}, \ldots, t_i = \frac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^4 = \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^4$$

$$M_i = t_i^4 = \left(i\frac{b}{n}\right)^4$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^4 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 \frac{b^5}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} \\
&= \frac{b^5}{30} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{30} \left[6 + \frac{5(2-3n)n^2 - 1}{n^4}\right] \\
&= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2 - 1}{30n^4}
\end{aligned}$$

Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\frac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{b}{n}\right)^4 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^4 \frac{b^5}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n} i^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\
&= \frac{b^5}{30} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{30} \left[6 + \frac{5(2+3n)n^2-1}{n^4}\right] \\
&= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4}
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4} \\
&= \frac{b^5}{n}
\end{aligned}
$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \dfrac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$
U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{b^5}{n} < \epsilon
$$

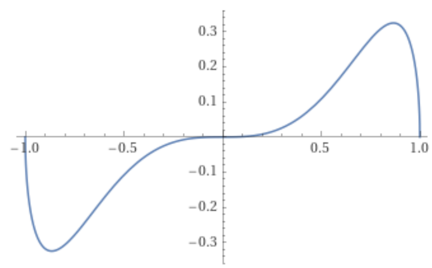
Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0,b]$ tal que $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f,P_n)$ y $L(f,P_n)$ se aproximan a $\frac{b^5}{5}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^5}{5}$ es el único número tal que

$$
L(f,P_n) = \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4} \leq \frac{b^5}{5} \leq \frac{b^5}{5} + \frac{b^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4} = U(f,P_n)
$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3 dx = \dfrac{b^5}{5}$.

5. Obtener sin cálculos

I) $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx$
La gráfica de la función es la siguiente:



Observando la función, podemos observar que es impar, esto se puede verificar ya que

$$-(x^3\sqrt{1-x^2}) = (-x)^3\sqrt{1-(-x)^2}$$

Luego $\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx = 0$, esto se puede observar gráficamente ya que el área debajo del eje x es igual al área sobre el eje, por lo cual se cancelan.

II) $\int_{-1}^{1}(x^5+3)\sqrt{1-x}dx$
Primero manipulemos la expresión para que sea más fácil de trabajar,

$$\int_{-1}^{1}(x^5+3)\sqrt{1-x}dx = \int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x}dx + \int_{-1}^{1} 3\sqrt{1-xdx}$$

Observemos que $x^5\sqrt{1-x}$ es impar, por lo tanto $\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x} = 0$. Además observemos que $\sqrt{1-xdx}$ es una función par, por lo tanto $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-xdx} = 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-xdx}$. Por último observemos que $\sqrt{1-x}$ es la función del círculo unitario, por lo tanto $\int_{0}^{1}\sqrt{1-xdx} = \pi/4$ así tenemos los siguiente

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^5+3)\sqrt{1-x}dx &= \int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x}dx + \int_{-1}^{1} 3\sqrt{1-xdx} \\
&= 0 + 3\int_{-1}^{1}\sqrt{1-xdx} \\
&= 6\int_{0}^{1}\sqrt{1-xdx} \\
&= 6\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

7. Decidir cuáles de las siguientes funciones siguientes son integrables sobre $[0, 2]$, y calcular la integral cuando sea posible.

   I) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

   La función es integrable y su integral se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 x - 2dx \\ &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 x - \int_1^2 2dx \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} - 2(2-1)\right) \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - 4 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   II) $f(x) = x + [x]$

   La función es integrable y su integral se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_0^2 x + [x]dx &= \int_0^2 xdx + \int_0^2 [x]dx \\ &= \int_0^2 xdx + \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 0(1-0) + 1(2-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

   III) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$

   La gráfica de la función es la siguiente