UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL II

Tarea 4

Alexander Mendoza

22 de mayo de 2024

Tarea

1. Mostrar que el conjunto $B = \{1, x, 2x^2 - 1\}$ esta en $p^2[-1, 1]$ al producto punto $< f.g >= \int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, si es ortonogonal, entonces obtenga la base ortonormal.

   Para verificar si es ortogonal, tenemos que ver que:

   - Sea $f(x) = 1$ y $g(x) = x$, tenemos lo siguiente:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{1x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

     Como la función es impar y esta en un intervalo simétrico, podemos asegurar que la integral es cero.
   - Sea $f(x) = x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$, tenemos lo siguiente:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

     Como la función es impar y esta en un intervalo simétrico, podemos asegurar que la integral es cero.
   - Sea $f(x) = 1$ y $g(x) = x$, tenemos lo siguiente:

     $$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1-x^2} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - \pi = 0$$

     Como la función es impar y esta en un intervalo simétrico, podemos asegurar que la integral es cero.

   Como ya comprobamos que es ortogonal, obtengamos la base:

   - Paso 1:

     $$h_1(x) = \frac{1}{||1||} = 1$$

   - Paso 2:

     $$g_2(x) = x - < x, 1 > 1 = x - \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x$$

     $$h_2(x) = \frac{g_2(x)}{||g_2(x)||} = \frac{x}{\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}$$

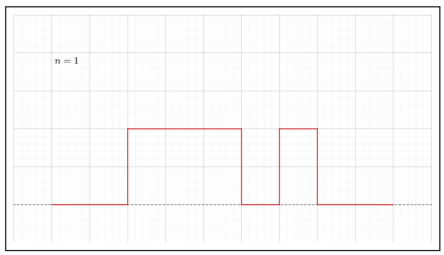
   - Paso 3:

     $$g_3(x) = 2x^2 - 1 - < 2x^2 - 1, x > x - < 2x^2, \frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi} > \frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}$$

$$= 2x^2 - 1 - \int_{-1}^{1} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \left(\int_{-1}^{1} \frac{(x^2-1)\left(\frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\left(\frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)$$

$$= 2x^2 - 1 - 0 - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2-1)x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) = 2x^2 - 1$$

De esta manera tenemos que: $C = \{1, \frac{x\sqrt{2\pi}}{\pi}, 2x^2 - 1\}$



2. $||A||_F = \sqrt{tr(A^*A)}$

Matrices pauli:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \right\}$$

$V = M_{2x2}(C)$, con producto frobenius

a) Mostrar que B es una base ortonormal para V

1) $\sqrt{tr(M_1)(M_2^*)} = \sqrt{tr\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}} = \sqrt{tr\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}} =$

$\sqrt{0} = 0$

2) $\sqrt{\mathrm{tr}(M_1 M_3^*)} = \sqrt{\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}} = \sqrt{\mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}} =$

$\sqrt{0} = 0$

3) $\sqrt{\mathrm{tr}(M_1 M_4^*)} = \sqrt{\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}} = \sqrt{\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}} =$

$\sqrt{0} = 0$

4) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_2M_3^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{0} = 0$

5) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_2M_4^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{0} = 0$

6) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_3M_4^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{0} = 0$

Ahora miramos que al hacer el producto de frobenius de las matrices con ellas mismas debe dar 1:

7) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_1M_1^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{1} = 1$

8) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_2M_2^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{1} = 1$

9) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_3M_3^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{1} = 1$

10) $\sqrt{\operatorname{tr}(M_1M_1^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{1} = 1$

Así hemos demostrado que la base es linealmente independiente.

b) $[A]_B$ donde A= $\begin{pmatrix} 5 & 2-3i \\ 2+3i & -3 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 5 & 2-3i \\ 2+3i & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\,(2-3i) + 0\,(2+3i) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
  $= \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = c_1$
- $\begin{pmatrix} 5 & 2-3i \\ 2+3i & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{2-3i}{\sqrt{2}} + \frac{2+3i}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = c_2$
- $\begin{pmatrix} 5 & 2-3i \\ 2+3i & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{(2-3i)(-i)}{\sqrt{2}} + \frac{(2+3i)(-i)}{\sqrt{2}} = \frac{2i+3i^2+2i+3i^2}{\sqrt{2}} = \frac{3(-1+3(-1))}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = c_3$
-
- $\begin{pmatrix} 5 & 2-3i \\ 2+3i & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = c_4$

Vamos a verificar, multiplicando C_1, c_2, c_3, c_4 con las matrices y luego sumarlas, deberia darnos la matriz A:

$= \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + \frac{6}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + \frac{8}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2-3i \\ 3i+2 & -3 \end{bmatrix}$

Por tanto tenemos que:

$$[A]_B = \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \frac{2}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}, \frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Ejercicios aula virtual

1. a) Si Q es ortogonal, como usted sabe que Q es invertible y Q^{-1} también es ortogonal.
   b)Si $Q_1^T = Q_1^{-1}$ y $Q_2^T = Q_2^{-1}$ demuestre que $Q_1, Q-2$ también es una matriz ortogonal.
   a)

$$\begin{aligned}
&I = I && \\
&Q^{-1} = Q^{-1} && \text{(Propiedad reflexiva)}\\
&Q^{-1} = Q^{\top} && \text{(Definición de matriz ortogonal)}\\
&(Q^{-1})^{\top} = (Q^{\top})^{\top} && \text{(Propiedad de la transposición)}\\
&(Q^{-1})^{\top} = Q && \text{(Propiedad de la transposición de la inversa)}
\end{aligned}$$

   De esta manera Q^{-1} es ortogonal
   b)

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2$$

   Reemplazando Q_1^T y Q_2^T por sus inversas, obtenemos:

$$Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^{-1}Q_1^{-1}Q_1Q_2$$

   Dado que $Q_1^{-1}Q_1 = I$ y $Q_2^{-1}Q_2 = I$, entonces:

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}Q_1Q_2 = Q_2^{-1}IQ_2 = Q_2^{-1}Q_2 = I$$

   Por lo tanto, hemos demostrado que $(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = I$, lo que significa que Q_1Q_2 es una matriz ortogonal.

2. a) Una matriz de permutación tiene las mismas columnas que la matriz identidad (en algún orden), explique porque esta matriz de permutación y todos las matrices de permutación son ortogonales.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Obteniendo la inversa y transpuesta de P, tenemos lo siguiente:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De esto podemos concluir que P cumple la propiedad de ortogonalidad, puesto que $P^{-1} = P^T$

Al observar que el producto punto de una matriz identidad es ortogonal, y al considerar una matriz de permutación que consta de una base con filas y columnas que contienen un único elemento, podemos concluir que el producto punto de esta matriz también resulta ser ortogonal.

b) P tiene columnas ortonormales porque

$$P^T P = I, P^{-1} = P^T$$

3. Cuatro vectores propiois de la matriz P:

$$x_1 = (1,1,1,1), x_2 = (1,i,i^2,i^3), x_3 = (1,i^2,i^4,i^6), x_4 = (1,i^3,i^6,i^9)$$

multiplica P por cada vector para encontrar λ los vectores propios son columnas de la matriz de fouvier F, demuestre que:

$$Q = \frac{F}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i^2 & 1 & -1 \\ 1 & i^3 & -1 & i \end{pmatrix}$$

tiene columnas ortonormales: $Q^T Q = I$

Sea $\alpha_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4(\frac{1}{4}) = 1$$

Sea $\alpha_2 = (\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{2})$

$$\alpha_2 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cdot\frac{i}{2} + \frac{i^2}{2}\cdot\frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2}\cdot\frac{i^3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2} + \frac{-1}{4} = 0$$

Sea $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Sea $\alpha_4 = (\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{i}{2})$

$$\alpha_4 \cdot \alpha_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{-i}{2}\cdot\frac{-i}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{i^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{(-i)^2}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{-1}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto no es ortonormal

4. Las ondículas de Haar son vectores ortogonales (columnas de W) que utilizan sólo 1,-1, n=4.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Busca $W^T W$ y W^{-1} y las ocho ondículas de haar para n=8

$$W^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando $W^T W$

$$WW^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrando

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora tomando n=8, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$