UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

MATEMÁTICA DISCRETA

Taller

Alexander Mendoza

25 de agosto de 2023

1. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que la contención de conjuntos es transitiva, es decir, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

   a) Demuéstrelo de forma directa.

   Demostración. Sea $a \in A$, luego $a \in B$ debido a que $A \subseteq B$, de esto concluímos que $a \in C$ ya que $B \in C$, y por lo tanto $A \subseteq C$.

   b) Demuéstrelo por contradicción.

   Demostración. Supongamos que $A \nsubseteq C$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \notin C$, pero como $A \subseteq B$, entonces $a \in B$ y como $B \subseteq C$, entonces $a \in C$. Con esto llegamos a una contradicción y por lo tanto $A \subseteq C$.

   c) Demuéstrelo por contrarrecíproco.

   Demostración. Queremos demostrar que si $A \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq C$. Ahora supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, luego sea $a \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $a \in B$ y como $B \subseteq C$, $a \in C$, lo que implica que $A \subseteq C$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq C$.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Emplee la demostración por casos para probar que: $|a+b| = |a| + |b|$ si y solo si $ab \geq 0$.

   Demostración.

   Empecemos demostrando que $|a+b| = |a|+|b|$ implica $ab \geq 0$. Supongamos que $|a + b| = |a| + |b|$.

   Ahora supongamos que a es negativo y b es positivo. En este caso, $|a| = -a$ y $|b| = b$, lo que implica que $|a| + |b| > |a + b$. Lo que contradice $|a + b| = |a| + |b|$, por lo tanto a no puede ser negativo si b es positivo. De manera similar se puede verificar para el caso en el que b es negativo y a es positivo.

   Si $a = b = 0$ es trivial que $|a + b| = |a| + |b|$.

   Si $a = 0$, entonces $|0 + b| = |b| = |0| + |b|$

   Del resultado anterior concluimos que como $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y por lo tanto $ab \geq 0$.

   Demostremos ahora el recíproco. Supongamos que $ab \geq 0$.

   Sabemos que para que $ab \geq 0$ se cumpla, $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Consideremos los siguientes casos para demostrar que $|a + b| = |a| + |b|$ se cumple.

   Caso 1. Si $a = b = 0$ es trivial que $|a + b| = |a| + |b|$.

   Caso 2. Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $|0 + b| = |b| = |0| + |b|$. Se puede verificar de manera similar para el caso en el que $b = 0$ y $a > 0$.

   Caso 3. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$, luego $|a+b| = |a|+|b|$

3. Use inducción matemática para demostrar que:

a) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ para $n \geq 1$.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ para $n \geq 1$. Consideraremos el caso base $n = 1$.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Paso inductivo. Supongamos que $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Luego sea

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

Sabemos que si $a \leq b$, entonces $ac \leq bc$ para cualquier $c \geq 0$. Si $n = 0$, entonces $\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} > 0$, por lo tanto $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{2}$. Luego si $n > 0$, entonces $\frac{2n+1}{2n+2} > 0$, por lo tanto $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$

b) $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible por 54.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $54|2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$. Consideremos el caso base $n = 3$.

$$2^{2n+1} - 9(3)^2 + 3\cdot 3 - 2 = 54$$

$54|54$ por lo tanto la ecuación se cumple para el caso base.

Paso inductivo. Supongamos que $54|2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$.

Consideremos ahora.

$$\begin{aligned}2^{2(n+1)+1} - 9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2 &= 2^{2n+1+2} - 9n^2 - 18n - 9 + 3n + 3 - 2\\ &= 4\cdot 2^{2n+1} - 9n^2 - 18n - 9 + 3n + 3 - 2\\ &= (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2) + (3\cdot 2^{2n+1} - 18n - 6)\\ &= (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2) + (6\cdot 2^{2n} - 18n - 6)\\ &= (2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2) + 6(2^{2n} - 3n - 1)\end{aligned}$$

Sabemos que $54|(2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2)$, por lo cual para completar la demostración debemos mostrar que $9|2^{2n} - 3n - 1$.

Procederemos por inducción para demostrar $9|2^{2n} - 3n - 1$. Consideremeos primero el caso base $n = 3$.

$$2^{2\cdot 3} - 3\cdot 3 - 1 = 54$$

$9|54$ por lo tanto la ecuación se cumple para el caso base.
Paso inductivo. Supongamos que $9|2^{2n} - 3n - 1$.
Consideremos ahora.

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n+2} - 3n - 3 - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2n} - 3 - 1 \\ &= (2^{2n} - 1) + (3 \cdot 2^{2n} - 3) \\ &= (2^{2n} - 1) + 3(2^{2n} - 1) \end{aligned}$$

Sabemos que $9|2^{2n} - 3n - 1$, por lo cual para completar la demostración debemos mostrar que $3|2^{2n} - 1$.
Procederemos por inducción para demostrar $3|2^{2n}-1$. Consideremeos primero el caso base $n = 3$.

$$2^{2\cdot 3} - 1 = 63$$

$3|63$ por lo tanto la ecuación se cumple para el caso base.
Paso inductivo. Supongamos que $3|2^{2n} - 1$.
Consideremos ahora.

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 1 &= 2^{2n+2} - 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2n} - 1 \\ &= (2^{2n} - 1) + (3 \cdot 2^{2n}) \end{aligned}$$

Sabemos que $3|2^{2n} - 1$ y además sabemos que $3|3 \cdot 2^{2n}$. Por lo tanto $9|2^{2(n+1)}-3(n+1)-1$ y por lo tanto $54|2^{2(n+1)+1}-9(n+1)^2+3(n+1)$.

4. Sean A, B, C y D conjuntos. Demuestre que:

   a) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$ para cualquier C.
   Demostración. Sea $a \in A \cup C$. Luego por definición de unión, $a \in A$ o $a \in C$. Si $a \in C$, entonces $a \in B \cup C$ lo que implica $A \cup C \subseteq B \cup C$. Por otra parte si $a \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $a \in B$, así $a \in B \cup C$ y por lo tanto $A \cup C \subseteq B \cup C$.

   b) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
   Demostración. Sea $a \in \mathcal{P}(A)$, luego $a \subseteq A \subseteq B$ por transitividad tenemos que $a \subseteq B$ y por definición de conjunto de partes, $a \in \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

   c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Demostración. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ es equivalente al conjunto $\{x | x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$ lo cual es equivalente al conjunto $\{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$ lo cual es equivalente a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $A \subseteq B$ si y solo si $B^c \subseteq A^c$.

Demostración. Empecemos demostrando que si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$.

Sea $x \in B^c$, luego $x \notin B$ por definición de complemento, como $A \subseteq B$, entonces $x \notin A$, luego $x \in A^c$ y por lo tanto $B^c \subseteq A^c$.

Demostremos ahora que si $B^c \subseteq A^c$, entonces $A \subseteq B$.

Sea $x \in A$, luego $x \notin A^c$ por definición de complemento, como $B^c \subseteq A^c$, entonces $x \notin B^c$, nuevamente por definición de complemento, $x \in B$, lo que implica que $A \subseteq B$.

e) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

f) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración. Demostremos primero que $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

Sea (x, y) in $A \times (B \cap C)$ por definición de producto cartesiano $x \in A$ y $y \in (B \cap C)$, luego tenemos $x \in A$, $y \in B$ y $y \in C$. Así, nuevamente por definición de producto cartesiano tenemos que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in A \times C$, de esta manera $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostremos ahora que $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.

Supongamos $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Entonces, $x \in A$, $y \in B$, y $y \in C$. Como $y \in B$ y $y \in C$, $y \in B \cap C$. Por lo tanto, $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Y $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$.

5. Demuestre que:

a) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

Demostración. Demostremos primero que $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

Sea $a \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c$, luego $a \notin \bigcap_{i \in I} A_i$, esto es $a \notin A_i$ para todo $i \in I$, por definición de unión concluímos que $a \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

Demostremos ahora que $\bigcup_{i \in I} A_i^c \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c$

b) $M \cup \left(\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (M \cup A)$.

c) Si $B_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, entonces $\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n = (0, 1)$.

6. (3 puntos) Sea B un álgebra de Boole y $a, b, c \in B$. Demuestre las siguientes igualdades:

a) $ab + bc + b'c = ab + c$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
ab + bc + b'c &= ab + c(b + b') && \text{Propiedad distributiva} \\
&= ab + c \cdot 1 && \text{Def. complemento} \\
&= ab + c && \text{Def. identidad}
\end{aligned}
$$

b) $a + a'b = a + b$

c) $a'b'c + a'bc + abc' = a'c + ab'$ ***Demostración.***

$$\begin{aligned} a'b'c + a'bc + abc' &= a'c(b' + b) + ab' && \text{Propiedad distributiva} \\ &= a'c \cdot 1 + ab' && \text{Def. complemento} \\ &= a'c + ab' && \text{Def. identidad} \end{aligned}$$

d) $ab + (ac)' + ab'c(ab + c) = 1$
Demostración.

$$\begin{aligned} ab + a' + c' + ab'c(ab) + ab'c &= ab + ab'c + a' + c' \\ &= a(b + b'c) + a' + c' \\ &= a(b + c) + a' + c' \\ &= ab + ac + a' + c' \\ &= ab + (ac + a' + c') \\ &= ab + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$