UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL II

Taller 2

Alexander Mendoza

12 de abril de 2024

Taller 2

1. Si $A \in M_{nxn}(F)$ es invertible y $degm_A(x) = P$. Demostrar que A^{-1} es una combinación de $I_n, A, A^2, \ldots A^{P-1}$.

   Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Dado que A es invertible, $\det(A) \neq 0$, lo que implica que el polinomio característico $P_A(\lambda) \neq 0$, es decir, $\lambda \neq 0$. Por el teorema de Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$. Si escribimos $P(A)$ de forma general como $b_0 I + b_1 A + \ldots + b_n A^n = 0$, entonces A^{-1} se puede expresar como:

   $$A^{-1} = \left(\frac{-b_1}{b_0} \cdot I - \frac{b_2}{b_0} \cdot A - \ldots - \frac{b_n}{b_0} A^{n-1} \right)$$

2. Determine el polinomio característico y el polinomio mínimo de cada una de las siguientes matrices.

   a)
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $P_A(\lambda) = -(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$
   $P_A = -(A-I)^3 = 0$

   1) $(I-A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   2) $(I-A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Por el teorema, $(I-A)^3 = 0$, por lo tanto, el polinomio característico es el mismo que el minimal.

   b) Sea la matriz
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

   La suma $A + D$ es:

$$A + D = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico se calcula como:

$$\begin{aligned} \det(A+D) &= (1-\lambda)((\lambda^2-2)-1-\lambda) \\ &= -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3 \\ &= (\lambda+1,3593)(\lambda-1,1797+0,9030i)(\lambda-1,1797-0,90301i) \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1+1,3593$, $\beta = 1-1,1797+0,9030i$, y $\gamma = 1-1,1797-0,90301i$.

Para la posibilidad 1:

$$(A+1,3593I)(A-1,1797I+0,90301iI) = \begin{bmatrix} 2,36 & 0 & 0 \\ -1 & 2,36 & 0 \\ 0 & 0 & -0,64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,1797 & 1 & 0 \\ -1 & -0,8571 & 1 \\ 0 & 1 & -2,1797 \end{bmatrix}$$
$$= \text{Resultado de la suma}$$

c) Sea la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Sea la matriz y sean $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Dado que A es triangular superior, su polinomio característico es $(b-\lambda)^3$.

Para encontrar el polinomio minimal, consideramos las potencias de $(b-\lambda)$:

1) $(b-\lambda)$:

$$(bI-A)=\begin{bmatrix} b-\lambda & -a & 0 \\ 0 & b-\lambda & -a \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{bmatrix}$$

Si $a=0$, el polinomio minimal es $(b-\lambda)$. Si $a\neq 0$, continuamos.

2) $(b-\lambda)^2$:

$$(bI-A)^2=\begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $(b-\lambda)^3=(b-\lambda)^2\cdot(bI-A)$:

$$(bI-A)^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b-\lambda & -a & 0 \\ 0 & b-\lambda & -a \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto, el polinomio minimal de A es el mismo que su polinomio característico.

e) Sea la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcular el polinomio característico de A es equivalente a calcular el de las submatrices que lo conforman.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 8 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=(2-\lambda)^2-8(0)=(2-\lambda)^2$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)-(1)(2)=(\lambda-5)(\lambda-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Realizando los cálculos, obtenemos que:

$$P_A(\lambda)=(2-\lambda)^2(\lambda-5)^2(\lambda-2)(-\lambda)^2$$

Posibilidades:

$$\begin{bmatrix} 4 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Minimal: $(-\lambda)^2(\lambda-5)^2(\lambda-2)$

Minimal: $(-\lambda)^2(\lambda-5)^2(\lambda-2)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda^2)(\lambda-2)$$

$(\lambda-5)$

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\lambda{-}5) \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\lambda{-}5)^2$$

Por lo tanto, el polinomio minimal es $(-\lambda)^2(\lambda-5)^2(\lambda-2)$.

3. Demuestre que la transpuesta A^t de una matriz A tienen el mismo polinomio minimal.

   Para demostrar que la matriz transpuesta A^T de una matriz A tiene el mismo polinomio minimal, observamos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_A(\lambda) &= \det(\lambda \operatorname{In} - A) \\
&= \det(\lambda(\operatorname{In}^T) - A) \\
&= \det(\lambda \operatorname{In} - A^T) = \lambda^t(A)(\lambda)
\end{aligned}
$$

Esto muestra que el polinomio minimal de A es igual al de A^T. Por lo tanto, A y A^T tienen el mismo polinomio minimal.

4. Demuestre que el término constante en el polinomio característico de A es $\det(A)$

   Según la definición, tenemos:

$$
P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n)
$$

   Sustituimos $\lambda = 0$:

$$
P(0) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^n(0^n + c_1 \cdot 0^{n-1} + c_2 \cdot 0^{n-2} + \cdots + c_n)
$$

   Simplificando, obtenemos:

$$
\det(A) = c_n
$$