Matemáticas

Cálculo Integral y Series

Taller 1

Alexander Mendoza

4 de marzo de 2024

Spivak Capítulo 13

1. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = \dfrac{b^4}{4}$.

   Consideremos la partición de [0, b] P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \dfrac{b}{n}, \ldots, t_i = \dfrac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^3 = \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3$$

$$M_i = t_i^3 = \left(i\frac{b}{n}\right)^3$$

   Luego

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \frac{b^4}{n^4} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \\
&= \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

   Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\dfrac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{b}{n}\right)^3\frac{b}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3\frac{b^4}{n^4}\\
&= \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3\\
&= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\\
&= \frac{b^4}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$\begin{aligned}
U(f,P_n)-L(f,P_n) &= \frac{b^4}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}\\
&= \frac{b^4}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\\
&= \frac{b^4}{4}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\\
&= \frac{b^4}{n}
\end{aligned}$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \dfrac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$U(f,P_n)-L(f,P_n) = \frac{b^4}{n} < \epsilon$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0,b]$ tal que $U(f,P_n)-L(f,P_n) < \epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f,P_n)$ y $L(f,P_n)$ se aproximan a $\frac{b^4}{4}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^4}{4}$ es el único número tal que

$$L(f,P_n) =\leq \frac{b^4}{4} \leq U(f,P_n)$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3dx = \dfrac{b^4}{4}$.

2. Demostrar que $\int_0^b x^4dx = \dfrac{b^5}{5}$.

Consideremos la partición de [0, b] P_n tal que $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b}{n}$, así $t_0 = 0, t_1 = \dfrac{b}{n}, \dots, t_i = \dfrac{ib}{n}$. Con esto, sabemos que

$$m_i = t_{i-1}^3 = \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^3$$

$$M_i = t_i^3 = \left(i\frac{b}{n}\right)^3$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^4 \frac{b}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 \frac{b^5}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n-1} i^4 \\
&= \frac{b^5}{n^5} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} \\
&= \frac{b^5}{30} \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{n^5} \\
&= \frac{b^5}{30} \left[6 + \frac{5(2-3n)n^2-1}{n^4}\right] \\
&= \frac{b^5}{5} + \frac{d^5 5(2-3n)n^2-1}{30n^4}
\end{aligned}$$

Con esto podemos observar que cuando n se hace tan grande cuanto se quiera, $L(f, P_n)$ tiende a $\dfrac{b^4}{4}$. Continuamos de manera similar para $U(f, P_n)$

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{b}{n}\right)^4\frac{b}{n}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^4\frac{b^5}{n^5}\\
&= \frac{b^5}{n^5}\sum_{i=1}^{n} i^4\\
&= \frac{b^5}{n^5}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\\
&= \frac{b^5}{30}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{n^5}\\
&= \frac{b^5}{30}\left[6+\frac{5(2+3n)n^2-1}{n^4}\right]\\
&= \frac{b^5}{5}+\frac{d^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4}
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos la diferencia de las sumas

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n)-L(f,P_n) &= \frac{b^5}{5}+\frac{d^5 5(2+3n)n^2-1}{30n^4}\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}\\
&= \frac{b^4}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2}-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\\
&= \frac{b^4}{4}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\\
&= \frac{b^4}{n}
\end{aligned}
$$

De esta manera, dado $\epsilon > 0$ si $n > \dfrac{b^4}{\epsilon}$, entonces

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b^4}{n}<\epsilon$$

Así, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar una partición P_n de $[0,b]$ tal que $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\epsilon$. Por lo tanto, f es integrable. Luego como tanto $U(f,P_n)$ y $L(f,P_n)$ se aproximan a $\frac{b^4}{4}$ dado un n lo suficiente mente grande, $\frac{b^4}{4}$ es el único número tal que

$$L(f,P_n)\le\frac{b^4}{4}\le U(f,P_n)$$

Por lo tanto $\int_0^b x^3dx=\dfrac{b^4}{4}$.