ANEXO 2. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Este tema está dedicado al estudio de conceptos que, con formulación matemática y carácter marcadamente económico, se utilizan de forma habitual en la sociedad.

El interés que reporta una cantidad de dinero depositada a plazo fijo en un banco; las anualidades que se han de satisfacer por la compra de cualquier bien, hecha a plazos, son algunas de las situaciones cotidianas relacionadas con matemática comercial.

El primer libro que trata de la aplicación de las matemáticas a la economía fue escrito por el ingeniero italiano Giovanni Ceva en 1711. Medio siglo después, Cesare Beccaria aplicó el álgebra en un análisis sobre los riesgos y los beneficios del contrabando. Sin embargo, el primer intento de explorar sistemáticamente el tema es la obra de Agustin Cournot, *Recherches sur les principes mathematiques de la théorie des richesses*, publicada en 1838.

La obra de Cournot (1801-1877), matemático y filósofo francés, pareció un fracaso cuando fue publicada, por ser demasiado avanzada para su época.

La aplicación de las matemáticas a la economía no se reduce, ni mucho menos, a la formulación de unos resultados. Las matemáticas no sólo prestan su ayuda a la economía, sino que se convierten en su mejor aliada.

TANTOS POR CIENTO

Calcular el *tanto por ciento*, t %, de una cantidad A consiste en encontrar una cantidad B de forma que A y B estén en la misma proporción que 100 y t.

Así, si el t % de una cantidad A es otra cantidad B, se verifica:

$$\frac{A}{B} = \frac{100}{t}$$

Por tanto, sin tener más que dos de estos datos se puede averiguar el tercero.

$$\frac{A}{B} = \frac{100}{t} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{B \cdot 100}{A} \\[2ex] A = \dfrac{B \cdot 100}{t} \\[2ex] B = \dfrac{A \cdot t}{100} \end{cases}$$

Decir que el t % de cierto colectivo (cuya representación debe ser numérica) verifica algo, significa que de cada 100 individuos de ese colectivo, t cumplen dicha condición.

Así, por ejemplo, si se dice que «el 25 % de las personas que forman un Parlamento son de la oposición», se está diciendo que de cada 100 parlamentarios, 25 son de la oposición.

Si hay 100 parlamentarios, 25 son de la oposición

Si hay 300 parlamentarios, 75 son de la oposición

Ejercicio: cálculo de tantos por ciento

---

① ¿Cuál es el 25 % de 480?

Resolución:

● En este caso *A* = 480 y *t* = 25. Se debe calcular *B*.

$$\bullet \frac{A}{B} = \frac{100}{t} \Rightarrow B = \frac{A \cdot t}{100} = \frac{480 \cdot 25}{100} = 120$$

El 25% de 480 es 120.

② Calcular qué tanto por ciento de 320 es 80.

Resolución:

● Obsérvese que en este caso *A* = 320, *B* = 80 y se ha de calcular *t*.

$$\bullet \frac{320}{80} = \frac{100}{t} \Rightarrow t = \frac{80 \cdot 100}{320} = 25 \Big\} \text{ 80 es el 25 \% de 320}$$

③ El 15 % de cierta cantidad es 54. Calcular esa cantidad.

Resolución:

● *t* = 15   *B* = 54

$$\bullet \frac{A}{54} = \frac{100}{15} \Rightarrow A = \frac{54 \cdot 100}{15} = 360 \Big\} \text{ La cantidad cuyo 15 \% es 54, es 360.}$$

④ En una clase de 30 alumnos, 8 practican la natación y 22 juegan al fútbol. Hallar el porcentaje de alumnos que practica cada deporte.

Resolución:

$$\bullet \frac{8}{30} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{80 \cdot 100}{30} = 26{,}6$$

El 26,6 % de los alumnos practica la natación.

$$\bullet \frac{22}{30} = \frac{y}{100} \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 22}{30} = 73{,}3$$

El 73,3 % de los alumnos juega al fútbol.

El tanto por uno

Como se ha visto, el tanto por ciento representa una cierta cantidad con respecto a 100. Si en lugar de tomar como referencia 100, se toma la unidad 1, se llama *tanto por uno*.

Si se divide un tanto por ciento entre 100 dará el tanto por uno correspondiente.

Si t es un tanto por ciento, $\frac{t}{100}$ es el tanto por uno correspondiente.

Por ejemplo, si de cada 100 unidades se consideran 35, de una unidad se considerará $\frac{35}{100} = 0,35$.

0,35 es el tanto por uno correspondiente al 35 %.

Para realizar operaciones, es más práctico y rápido utilizar el tanto por uno correspondiente en lugar del tanto por ciento.

Ejercicio: aplicaciones de los tantos por ciento

① El precio de un jersey es de 5 800 PTA y sobre este precio se hace un 15 % de descuento. ¿Cuánto se pagará por él?

Resolución:

- Se calcula el 15 % de 5 800 PTA:

$$\frac{15 \cdot 5\,800}{100} = 870$$

- Se resta el descuento del precio del jersey:

5 800 - 870 = 4 930; 4 930 PTA

- También se puede razonar de esta forma:

Si se hace un 15 % de descuento, por el jersey se paga el 85 % de su valor (100 - 15 = 85), es decir:

$$\frac{85 \cdot 5\,800}{100} = 4\,930$$

② Por una silla que marcaba 7 200 PTA se han pagado 6 336 PTA. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha efectuado?

Resolución:

- 7 200 - 6 336 = 864

● La proporción en este caso es:

$$\frac{7\ 200}{864} = \frac{100}{t} \Rightarrow t = \frac{864 \cdot 100}{7\ 200} = 12$$

El descuento ha sido del 12 %.

③ Sobre un artículo se hace un descuento del 8 % y se paga un total de 1 564 PTA. ¿Cuál era su precio inicial?

Resolución:

● Precio inicial - 8 % de precio inicial = 1 564

$$A - \frac{8 \cdot A}{100} = 1\ 564 \Rightarrow 100\ A - 8\ A = 156\ 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{156\ 400}{92} = 1\ 700$$

④ La factura de una reparación doméstica asciende a 4 800 PTA y sobre esta cantidad se aplica un 12 % de impuesto. ¿Cuánto se pagará finalmente?

Resolución:

● Se calcula el 12 % de 4 800:

$$\frac{12 \cdot 4\ 800}{100} = 576$$

● En total se pagará 4 800 PTA + 576 PTA = 5 376 PTA.

⑤ En un trimestre, el consumo de agua de una familia ha sido de 69 m^3, y cada m^3 cuesta 35 PTA. Al importe del agua consumida se le añade un 6 % de impuestos, y además, la factura sufrió un recargo de un 20 % por haberse pagado fuera de plazo. ¿Cuánto se pagó al final?

Resolución:

● Importe del agua: 69 m^3 · 35 PTA/m^3 = 2 415 PTA

● 6 % sobre 2 415 PTA:

$$X + t \text{ \% de } X = ?$$

$$? + t' \text{ \% de } ? = ??$$

$$\frac{6 \cdot 2\,415}{100} = 145; \; 2\,415 + 145 = 2\,560$$

● 20 % sobre 2 560 PTA;

$$\frac{2\,560 \cdot 20}{100} = 512$$

● Total factura: 2 560 PTA + 512 PTA = 3 072 PTA.

INTERESES

Se llama *interés* al beneficio que se obtiene al prestar una cantidad de dinero, capital, durante un cierto tiempo. Es decir, el interés es la diferencia entre el capital final y el capital inicial.

El interés que produce un capital depende del tiempo que esté invertido o prestado, de forma que el interés *I* producido por un capital *C* es directamente proporcional al tiempo que esté invertido, y también directamente proporcional al capital *C*. Entre el interés que produce un capital en un periodo de tiempo y el capital inicial hay, por tanto, una cierta relación.

- *Ejemplo:*

Imagínese que se hace un préstamo de 5 000 PTA con el acuerdo de que al cabo de un año se han de devolver 150 PTA más de la cantidad prestada.

El interés es de 150 PTA y el capital 5 000 PTA.

La relación es de $\frac{150}{5\,000} = 0{,}03$

0,03 es el tanto por uno que representa 150 de 5 000, que equivale al 3 %.

Relación: 150 es el 3 % de 5 000.

Esto quiere decir que de cada 100 pesetas prestadas, al cabo de un año tendrá que devolver 103, 100 serán para devolver el préstamo y 3 de intereses.Se dice que el dinero está prestado a una tasa del 3 %.

Tasa de interés o rédito

Se llama *tasa de interés* o *rédito* al tanto por ciento al que está invertido un capital en una unidad de tiempo, es decir, al cociente entre el interés producido y el capital, en una unidad de tiempo. Equivale al interés que producen 100 PTA durante un año, y es un valor fijo.

Generalmente se toma como unidad de tiempo el año; en caso contrario, ha de especificarse.

La tasa anual de interés se representa por *I* y viene expresada como un porcentaje (5 %, por ejemplo) o como su equivalente en forma decimal o tanto por uno (0,05). En los cálculos se utiliza generalmente esta última expresión, aunque la información se transmita en forma de tanto por ciento.

Ejercicio: cálculo de la tasa de interés

① Calcular la tasa de interés a que está invertido un capital de 40 000 pesetas si en un año se han convertido en 43 200 pesetas.

Resolución:

- El interés producido ha sido:

$$43\,200 - 40\,000 = 3\,200 \text{ pesetas.}$$

La tasa de interés, por tanto, será: $i = \frac{3\,200}{40\,000} = 0{,}08$.

Es decir, la tasa es del 8 %.

O bien, $\frac{40\,000}{3\,200} = \frac{100}{i} \Rightarrow i = \frac{3\,200 \cdot 100}{40\,000} = 8 \Rightarrow i = 8\ \%$.

Tipos de interés

Imagínese la siguiente situación: dos personas *A* y *B* invierten al mismo tiempo un capital *C*, y con una misma tasa de interés *i* .

Al cabo de un año, *A* retira los intereses producidos por el capital y vuelve a dejar el mismo capital invertido. En el segundo año, vuelve a retirar los intereses y a invertir el mismo capital, etc. Cada año retira los intereses producidos por su capital *C* durante ese año.

En cambio, al cabo del primer año, el individuo *B* no retira el interés, lo invierte junto al capital anterior durante un año más. Y así sucesivamente.

En el primer caso, los intereses producidos son siempre por el mismo capital *C*. En el segundo caso, el capital varía, aumenta. La siguiente tabla resume la situación:

Interés simple y compuesto

Interés simple es el que se obtiene cuando los intereses producidos, durante todo el tiempo que dure una inversión, se deben únicamente al capital inicial. En el ejemplo anterior, el interés de la persona *A* es un interés simple.

Interés compuesto es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente (en general, los periodos son anuales) los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo. El interés de la persona *B* en el ejemplo, es un interés compuesto.

Fórmula del interés simple

El interés *I* que produce un capital es directamente proporcional al capital inicial *C*, al tiempo *t*, y a la tasa de interés *i* :

$$I = C \cdot i \cdot t$$

donde *i* está expresado en tanto por uno y *t* en años.

Ejercicio: aplicaciones de la fórmula del interés simple

① Calcular a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de 25 000 PTA invertido durante 4 años a una tasa del 6 % anual.

Resolución:

● Se ha de expresar el 6 % en tanto por uno, y se obtiene 0,06

$$I = 25\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 4 = 6\,000 \qquad ? = C \cdot i \cdot t$$

● El interés es de 6 000 PTA

② Calcular el interés simple producido por 30 000 PTA durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %.

Resolución:

● $90 \text{ días} = \frac{90}{360} \text{ años}$

$? = C \cdot i \cdot t$

● $I = 30\,000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{90}{360} = 375; \; I = 375$ PTA

③ Al cabo de un año, un banco ha ingresado en una cuenta de ahorro, en concepto de intereses, 970 PTA. La tasa de interés de una cuenta de ahorro es del 2 %. ¿Cuál es el saldo medio (capital) de dicha cuenta en ese año?

Resolución:

● $970 = C \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow C = \frac{970}{0{,}02} = 48\,500$

$I = ? \cdot i \cdot t$

● El saldo medio ha sido de 48 500 PTA.

④ Un préstamo de 20 000 PTA se convierte al cabo de un año en 22 400 PTA. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

Resolución:

● Los intereses han ascendido a:

22 400 - 20 000 = 2 400 PTA

$I = C \cdot ? \cdot t$

● Aplicando la fórmula $I = C \cdot i \cdot t$

$$2\,400 = 20\,000 \cdot i \cdot 1 \Rightarrow i = \frac{2\,400}{20\,000} = 0{,}12$$

La tasa de interés es del 12 %.

⑤ Un capital de 300 000 PTA invertido a una tasa de interés del 8 % durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de 12 000 PTA. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?

Resolución:

● Aplicando la fórmula $I = C \cdot i \cdot t$

$$12\,000 = 300\,000 =: 0{,}08 \cdot t$$

$$I = C \cdot i \cdot ?$$

$$t = \frac{12\,000}{300\,000 \cdot 0{,}08} = \frac{12\,000}{24\,000} = 0{,}5$$

● El tiempo que ha estado invertido es de 0,5 años, es decir, 6 meses.

Fórmula del interés compuesto

Sea C un capital invertido durante n años a una tasa i de interés compuesto por cada año.

Durante el primer año el capital C produce un interés $I_1 = C \cdot i$. El capital final será:

$$C_1 = C + Ci = C(1 + i)$$

Después del segundo año, el capital C_1 produce un interés $I_2 = C(1+i)\cdot i = C(i + i^2)$. El capital final C_2 será:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C\,(1 + i) + C\,(i + i^2) = C\,(i^2 + 2i + 1) =$$

$$= C \cdot (1 + i)^2$$

Al cabo de n años el capital inicial C, invertido en la modalidad de interés compuesto se convertirá en un capital final C_n,

$$C_n = C\,(1 + i)^n$$

Puesto que el interés es la diferencia entre el capital final y el inicial:

$I = C_n - C = C\,(1 + i)^n - C$, y sacando factor común C:

$$I = C\left[(1 + i)^n - 1\right]$$

La tasa de interés se obtiene despejando en la fórmula de C_n:

$$C_n = C\,(1 + i)^n$$

$$\frac{C_n}{C} = (1 + i)^n$$

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1$$

Aunque la fórmula del interés compuesto se ha deducido para una tasa de interés anual durante *n* años, todo sigue siendo válido si los periodos de conversión son semestres, trimestres, días, etc., sin más que convertir éstos a años:

- Si los periodos de conversión son semestrales,

$$C_n = C\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$$

- Si los periodos de conversión son trimestrales,

$$C_n = C\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Ejercicio: aplicación de la fórmula del interés compuesto

---

① Averiguar en qué se convierte un capital de 1 200 000 PTA al cabo de 5 años, y a una tasa de interés compuesto anual del 8 %.

Resolución:

- Aplicando la fórmula $C_n = C\,(1 + i\,)^n$

$? = C(\,1 + i\,)^n$

$C = 1\ 200\ 000;\ n = 5;\ i = \frac{8}{100} = 0{,}08$

$C_5 = 1\ 200\ 000\ (1 + 0{,}08)^5 = 1\ 200\ 000 \cdot 1{,}4693280 = 1\ 763\ 193{,}6$

El capital final es de 1 763 194 PTA.

② Un cierto capital invertido durante 7 años a una tasa de interés compuesto anual del 10 % se ha convertido en 1 583 945 PTA. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses se han pagado semestralmente.

Resolución:

● $i = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ C_7 = 1\,583\,945;\ n = 7$

$$C_n = ? \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$$

● Como los intereses se han pagado semestralmente, la fórmula que se ha de aplicar es:

$$C_7 = C\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{7 \cdot 2} = C\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{14}$$

$$1\,583\,945 = C\,(1 + 0{,}05)^{14}$$

$1\,583\,945 = C \cdot 1{,}97993160$, y despejando C:

$$C\ \frac{1\,583\,945}{1{,}97993160} = 799\,999{,}85$$

El capital inicial fue de 800 000 pesetas.

③ Calcular la tasa de interés compuesto anual que se ha aplicado a un capital de 1 500 000 PTA para que al cabo de 4 años se haya convertido en 2 360 279 PTA.

Resolución:

● $Cn = 2\,360\,279;\ C = 1\,500\,000;\ n = 4$

$$2\,360\,279 = 1\,500\,000\,(1 + i)^4$$

$$\frac{2\,360\,279}{1\,500\,000} = (1 + i)^4 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{\frac{2\,360\,279}{1\,500\,000}} = \sqrt[4]{1{,}5735193}$$

$$1 + i = 1{,}1199999$$

$$i = 1{,}1199999 - 1 = +0{,}1199999 \cong 0{,}12$$

La tasa de interés ha sido del 12 %.

ANUALIDAD

Las *anualidades* son pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo (generalmente de un año) que se llaman intervalos de pago.

Cuando el pago de la anualidad se efectúa al final del intervalo de pago, se llama *anualidad ordinaria*; y si se efectúa al principio del intervalo de pago, se llama *anualidad anticipada*.

Anualidad ordinaria

En una anualidad ordinaria simple, los pagos se efectúan periódicamente según un cierto intervalo de pago que coincide con los periodos de interés y, además, cada pago se realiza al final del primer intervalo, el segundo al final del segundo intervalo, etc...

¿Cómo calcular el capital, *valor final* , en que se convierte una anualidad en un cierto periodo de tiempo?

Ejercicio: cálculo de una anualidad ordinaria

---

① Calcular el valor final de una anualidad ordinaria de 10 000 pesetas anuales durante 4 años al 5 % de interés.

Resolución:

- Como es una anualidad ordinaria, el primer pago se efectuará al final del primer año.

- Las 10 000 PTA del primer pago estarán invertidas durante 3 años, puesto que la anualidad es de 4 años y ya ha transcurrido uno. Luego el primer pago gana intereses durante 3 años. Al final del plazo de la anualidad, esas 10 000 PTA se habrán convertido en

$$10\,000\,(1 + 0{,}05)^3 \text{ PTA} = 11\,576{,}25 \text{ PTA}$$

- Por el mismo razonamiento, el segundo pago produce intereses durante dos años, por lo que se convierte en

$$10\,000\,(1 + 0{,}05)^2 \text{ PTA} = 11\,025 \text{ PTA}$$

- El tercer pago produce intereses durante 1 año:

$$10\,000\,(1 + 0{,}05) \text{ PTA} = 10\,500 \text{ PTA}$$

- Y el último pago coincide con el final del plazo de la anualidad, por lo que no produce ningún interés. Llamando V al valor final de la anualidad:

$$V = 11\,576{,}25 + 11\,025 + 10\,500 + 10\,000 = 43\,101$$

$$V = 43\,101 \text{ PTA}$$

Se observa que el valor final de la anualidad es la suma de los valores finales de cada uno de los pagos invertidos a interés compuesto hasta el final del plazo de la anualidad.

Fórmula del valor final de una anualidad ordinaria

Sea R el pago periódico de una anualidad ordinaria, i la tasa de interés por periodo de interés, n el número de intervalos de pago (igual al número de periodos de interés por ser una anualidad ordinaria) y V el valor final de dicha anualidad.

- El primer pago R se convertirá en $R(1 + i)^{n-1}$, puesto que está invertido durante $(n - 1)$ periodos de interés.

- El segundo pago R, se convertirá en $R(1 + i)^{n-2}$

.
.
.

- El penúltimo pago se convertirá en $R(1 + i)^1$

- El último pago será R.

- El valor final será:

$$V = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + ... + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-1}$$

Como puede observarse, se ha obtenido la suma de n términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)$ y término inicial, R.

Aplicando la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión

geométrica $S_n = a_n \frac{r^n - 1}{r - 1}$, se obtiene:

$$V = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ejercicio: cálculo del valor final de una anualidad ordinaria

---

① ¿En cuánto se convierte una anualidad ordinaria de 5 000 PTA anuales, durante 6 años, al 3 %?

Resolución:

$$? = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V = 5\,000\frac{(1+0{,}03)^6 - 1}{0{,}03} = 5\,000 \cdot 6{,}46841 = 32\,342{,}05$$

② Al final de cada año se depositan en el banco 150 000 PTA. Si el banco paga el 7 % anual, ¿cuánto dinero habría inmediatamente después del 5.º año? ¿Y después del 8.º?

Resolución:

• $V_5 = 150\,000 \dfrac{(1 + 0{,}07)^5 - 1}{0{,}07} = 862\,610{,}78$ $\qquad ? = R \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Al final del 5.º año habría 862 611 pesetas.

• $V_8 = 150\,000 \dfrac{(1 + 0{,}07)^8 - 1}{0{,}07} = 1\,538\,970{,}04$

Al final del 8.º año habría 1 538 970 pesetas.