

Bochner–Räume

Alex Kaltenbach

6. Februar 2025

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Bochner-Messbarkeit und Bochner-Integrierbarkeit | 5 |
| 1.1 | Bochner-Messbarkeit | 5 |
| 1.2 | Bochner-Integrierbarkeit | 7 |
| 1.3 | Klassische Funktionenräume | 13 |
| 1.4 | Schwache Messbarkeit und Satz von Pettis | 16 |
| 2 | Bochner-Lebesgue-Räume | 27 |
| 2.1 | Definition und erste Eigenschaften | 27 |
| 2.2 | Vollständigkeit von Bochner-Lebesgue-Räumen | 29 |
| 2.3 | Dichte Teilmengen von Bochner-Lebesgue-Räumen | 33 |
| 2.4 | Beziehung zu Lebesgue-Räumen auf Zeit-Raum-Zylindern | 40 |
| 3 | Charakterisierung der Dualräume und Reflexivität | 43 |
| 3.1 | Charakterisierung der Dualräume | 43 |
| 3.2 | Reflexivität | 44 |
| 4 | Verallgemeinerte Zeitableitung und Bochner-Sobolev-Räume | 47 |
| 4.1 | Verallgemeinerte Zeitableitung | 47 |
| 4.2 | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 51 |
| 4.3 | Bochner-Sobolev-Räume | 54 |
| 4.4 | Dichte Teilmengen | 56 |
| 5 | Gelfand-Dreier und verallgemeinerte partielle Integrationsformel | 61 |
| 5.1 | Gelfand-Dreier | 61 |
| 5.2 | Verallgemeinerte partielle Integrationsformel | 63 |
| 6 | Instationäre Existenzsätze | 67 |
| 6.1 | Bochner-Nemyckii-Operatoren | 67 |
| 6.2 | Instationäres Lemma von Lax-Milgram | 70 |
| 6.3 | Instationärer Satz von Browder-Minty | 79 |
| 6.4 | Instationärer Satz von Brézis | 87 |
| 6.4.1 | Bochner-Pseudomonotonie | 88 |
| 6.4.2 | Beweis des instationären Satzes von Brézis | 95 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7 | Kompaktheit in Bochner–Lebesgue-Räumen | 101 |
| 7.1 | Satz von Arzelà–Ascoli | 102 |
| 7.2 | Das Ehrling-Lemma | 103 |
| 7.3 | Satz von Aubin–Lions | 104 |
| | Literaturverzeichnis | 109 |

1 Bochner-Messbarkeit und Bochner-Integrierbarkeit

Wir haben in der kurzen Einführung gesehen, dass Evolutionsprobleme Anlass geben, Funktionen zwischen einem Zeitintervall I und einem Banachraum X zu betrachten. Aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie wissen wir, dass eine Funktion auf I mit Werten in $X = \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue messbar ist, wenn sie f.ü.¹ Grenzwert einer Folge von einfachen Funktionen ist. Das Lebesgue-Integral nicht-negativer Funktionen kann dann als Grenzwert von Integralen einer geeigneten Folge von einfachen Funktionen definiert werden. Unser erstes Ziel ist, die Lebesgue'sche Integrationstheorie auf Banachraumwertige Funktionen zu erweitern. In diesem Zusammenhang dient die Approximierbarkeit durch einfache Funktionen als Ausgangspunkt für den Begriff der Bochner-Messbarkeit, die wiederum Ausgangspunkt für die Integrationstheorie Banachraum-wertiger Funktionen ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $I \subseteq \mathbb{R}$ immer ein Intervall und mit X , Y und Z , Banachräume ausgestattet mit der Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ und $\|\cdot\|_Z$.

1.1 Bochner-Messbarkeit

Zunächst definieren wir Banachraum-wertige einfache Funktionen.

Definition 1.1 (Einfache Funktionen)

Eine Funktion $s: I \rightarrow X$ heißt einfach, falls paar-weise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, existieren, sodass

$$s(t) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{B_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Die Menge der einfachen Funktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(I; X)$.

In Analogie zur Äquivalenz von Lebesgue-Messbarkeit zur f.ü. Approximierbarkeit durch einfache Funktionen definieren wir Bochner-Messbarkeit.

Definition 1.2 (Bochner-Messbarkeit)

Eine Funktion $u: I \rightarrow X$ heißt Bochner-messbar, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ existiert, sodass²

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Die Menge der Bochner-messbaren Funktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^0(I; X)$.

¹Die Abkürzung f.ü. steht für *fast überall*.

²Die Abkürzung f.a. steht für *fast alle*.

- Bemerkung 1.3** (i) Falls $X = \mathbb{R}$, dann ist eine Funktion $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Bochner-messbar, wenn sie Lebesgue-messbar ist, d.h. $\mathcal{L}^0(I) := \mathcal{L}^0(I; \mathbb{R})$ entspricht der Menge der Lebesgue-messbaren Funktionen.
- (ii) Bochner-Messbarkeit erzwingt punktweise f.ü. Approximierbarkeit durch einfache Funktionen. Genauer ist jede Bochner-messbare Funktionen Lebesgue-Borel-messbar, wobei die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Die Definition der Bochner-Messbarkeit (cf. Definition 1.2) liefert sofort die folgende Aussage, die wir später für die Definition von Bochner-Integrierbarkeit (cf. Definition 1.12) brauchen.

Lemma 1.4 (u Bochner-messbar $\Rightarrow \|u(\cdot)\|$ Lebesgue-messbar)

Falls $u: I \rightarrow X$ Bochner-messbar ist, dann ist $\|u(\cdot)\|_X: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, d.h. $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$ impliziert $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.

Beweis. Da $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$ (cf. Definition 1.2), existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Weiter sind die Funktionen $\|s_n(\cdot)\|_X: I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige einfache Funktionen, d.h. $(\|s_n(\cdot)\|_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; \mathbb{R})$, denn aus

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n \chi_{B_i^n}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I,$$

für paar-weise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i^n \subseteq I$, $i = 1, \dots, k_n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i^n) < \infty$, $i = 1, \dots, k_n$, und Elemente $x_i^n \in X$, $i = 1, \dots, k_n$, folgt, dass

$$\|s_n(t)\|_X = \sum_{i=1}^{k_n} \|x_i^n\|_X \chi_{B_i^n}(t) \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Außerdem gilt

$$\|s_n(t)\|_X \rightarrow \|u(t)\|_X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Daher ist Funktion $\|u(\cdot)\|_X: I \rightarrow \mathbb{R}$ als f.ü.-Grenzwert einer Folge von einfachen Funktionen selbst Lebesgue-messbar, d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$. \square

Insbesondere ist Bochner-Messbarkeit stabil unter linearen, stetigen Abbildungen.

Lemma 1.5 (u Bochner-messbar & $A: X \rightarrow Y$ linear+stetig $\Rightarrow A(u(\cdot))$ Bochner-messbar)

Sei $A: X \rightarrow Y$ ein linearer, stetiger Operator. Dann ist der linear-induzierte Operator $A: \mathcal{L}^0(I; X) \rightarrow \mathcal{L}^0(I; Y)$, für alle $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$ definiert durch

$$(Au)(t) := A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

wohldefiniert und linear.

Beweis. (Übung). \square

1.2 Bochner-Integrierbarkeit

Nachdem wir das Analogon für die Lebesgue-Messbarkeit reeller Funktionen für Banachraum-wertige Funktionen eingeführt haben, führen wir als nächstes das Analogon für das Lebesgue-Integral reeller Funktionen für Banachraum-wertige Funktionen ein.

Definition 1.6 (Bochner-Integral von einfachen Funktionen)

Sei $s \in \mathcal{S}(I; X)$, d.h. es existieren paarweise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(B_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, sodass

$$s(t) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{B_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann ist das Bochner-Integral von s definiert als

$$\int_I s(t) dt := \sum_{i=1}^n x_i \lambda^1(B_i) \in X.$$

Aus der Definition einer einfachen Funktion sowie der Definition des Bochner-Integrals für einfache Funktionen ergibt sich unmittelbar

Korollar 1.7 (Elementare Eigenschaften I)

(i) Wohldefiniert: Das Bochner-Integral ist wohldefiniert, d.h. ist unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktion. Genauer folgt aus

$$s(t) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{B_i}(t) = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{C_j}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I,$$

wobei $x_i, y_j \in X$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und $B_i, C_j \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, Lebesgue-messbare Mengen sind mit $\lambda^1(B_i), \lambda^1(C_j)$ für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ und $B_i \cap B_j = C_i \cap C_j = \emptyset$, falls $i \neq j$, dass

$$\int_I s(t) dt = \sum_{i=1}^n x_i \lambda(B_i) = \sum_{j=1}^m y_j \lambda(C_j) \quad \text{in } X.$$

(ii) Linearität: Das Bochner-Integral ist linear, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(I; X)$ gilt, dass

$$\int_I \{\alpha s_1 + \beta s_2\}(t) dt = \alpha \int_I s_1(t) dt + \beta \int_I s_2(t) dt \quad \text{in } X.$$

(iii) Stetigkeit: Das Bochner-Integral ist stetig, d.h. für alle $s \in \mathcal{S}(I; X)$ gilt, dass

$$\left\| \int_I s(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|s(t)\|_X dt,$$

und die rechte Seite ist wohldefiniert als Lebesgue-Integral.

Beweis. (Übung). □

Bemerkung 1.8

Korollar 1.7 zeigt, dass das Bochner-Integral eine lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}(I; X)$ nach X definiert, d.h.

$$\left(s \mapsto \int_I s(t) \, dt \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(I; X), X).$$

In Analogie zur Äquivalenz von Lebesgue-Integrierbarkeit zur Approximierbarkeit durch einfache Funktionen f.ü. und im Lebesgue-Integral definieren wir Bochner-Integrierbarkeit.

Definition 1.9 (Bochner-Integrierbarkeit und Bochner-Integral)

Eine Funktion $u: I \rightarrow X$ heißt Bochner-integrierbar, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ existiert mit

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I, \quad (1.10)$$

$$\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X \, dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.11)$$

Dann ist das Bochner-Integral (von $u: I \rightarrow X$) definiert als der Grenzwert

$$\int_I u(t) \, dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n(t) \, dt \in X. \quad (1.12)$$

Die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(I; X)$.

Bemerkung 1.13 (zur Wohldefiniertheit von Definition 1.9)

- (i) Die Forderung (1.10) besagt insbesondere, dass eine Bochner-integrierbare Funktion $u: I \rightarrow X$ Bochner-messbar sein muss, d.h. $\mathcal{L}^1(I; X) \subseteq \mathcal{L}^0(I; X)$.
- (ii) Die Forderung (1.11) ist sinnvoll, denn nach Lemma 1.4 ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die reellwertige Funktion $(t \mapsto \|s_n(t) - u(t)\|_X): I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Lebesgue-messbar und damit ist $\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X \, dt \in [0, +\infty]$ als Lebesgue-Integral definiert.
- (iii) Das Bochner-Integral einer Bochner-integrierbaren Funktion ist wohldefiniert, denn
 - (iii.a) Existenz: Falls $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass (1.10) und (1.11) erfüllt sind. Dann gilt wegen Korollar 1.7(ii),(iii), dass

$$\begin{aligned} \left\| \int_I s_n(t) - s_k(t) \, dt \right\|_X &\leq \int_I \|s_n(t) - s_k(t)\|_X \, dt \\ &\leq \int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X \, dt + \int_I \|u(t) - s_k(t)\|_X \, dt \\ &\rightarrow 0 \quad (n, k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(\int_I s_n(t) \, dt)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ist eine Cauchy-Folge. Da X ein Banach-Raum ist, existiert daher ein $x \in X$, sodass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n(t) \, dt = x \quad \text{in } X,$$

existiert. Hier zeigt sich deutlich, warum es nicht nur reicht allgemeine normierte Räume zu betrachten!

(iii.b) Eindeutigkeit: Das Bochner-Integral einer Bochner-integrierbaren Funktion ist unabhängig von der approximierenden Folge von einfachen Funktionen, denn für zwei Folgen $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, die (1.10) und (1.11) erfüllen, gilt wegen Korollar 1.7(ii),(iii), dass

$$\left\| \int_I s_n^1(t) - s_n^2(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|s_n^1(t) - u(t)\|_X dt + \int_I \|u(t) - s_n^2(t)\|_X dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

und somit folgt (da beide Grenzwerte wegen (iii.a) existieren)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n^1(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n^2(t) dt = \int_I u(t) dt \quad \text{in } X.$$

Bemerkung 1.14 (Etwas nützliche Notation)

(i) Für $u \in \mathcal{L}^1(I; X)$ und eine Lebesgue-messbare Menge $B \subseteq I$, definieren wir

$$\int_B u(t) dt := \int_I u(t) \chi_B(t) dt \in X,$$

wobei wir ausnutzen, dass $u \chi_B \in \mathcal{L}^1(I; X)$ (Übung).

(ii) Für $u \in \mathcal{L}^1(I; X)$ und $(a, b) \subseteq I$, definieren wir

$$\int_a^b u(t) dt := - \int_b^a u(t) dt \in X,$$

Ein einfaches Kriterium zum Nachweis von Bochner-Messbarkeit liefert das Bochner-Kriterium.

Satz 1.15 (Bochner-Kriterium)

Für eine Funktion $u: I \rightarrow X$ gilt $u \in \mathcal{L}^1(I; X)$ genau dann, wenn $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$ und $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)$. Insbesondere gilt, dass

$$\mathcal{L}^1(I; X) = \{u \in \mathcal{L}^0(I; X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)\}.$$

Bemerkung 1.16

Das Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15) ist Motivation für die Definition von $L^p(I; X)$.

Beweis (von Satz 1.15). Zu '⇒': Sei $u \in \mathcal{L}^1(I; X)$. Dann gilt nach Bemerkung 1.13(i), dass $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$, und nach Lemma 1.4, dass $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$. Insbesondere existiert nach Definition 1.9 eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, so dass

$$\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung denn für hinreichend großes (festes) $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_I \|u(t)\|_X dt \leq \underbrace{\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X dt}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_I \|s_n(t)\|_X dt}_{< \infty} < \infty,$$

d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$.

Zu '⇐': Sei $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$ und $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$. Laut Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Definieren wir eine weitere Folge von einfachen Funktionen $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ durch

$$k_n(t) := s_n(t) \chi_{\{\tau \in I \mid \|s_n(\tau)\|_X \leq 2\|u(\tau)\|_X\}}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I,$$

dann gilt:

- $k_n(t) \rightarrow u(t)$ in X ($n \rightarrow \infty$) für f.a. $t \in I$.
- $\|k_n(t) - u(t)\|_X \leq 3\|u(t)\|_X$ für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$, liefert der Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue, dass

$$\int_I \|k_n(t) - u(t)\|_X dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Insgesamt gilt also $u \in \mathcal{L}^1(I; X)$. □

Wie in der klassischen Lebesgue-Theorie müssen wir zu Äquivalenzklassen übergehen, um aus $\mathcal{L}^1(I; X)$ zumindest einen normierten Vektorraum machen zu können.

Definition 1.17 (Bochner–Lebesgue-Raum)

Wir definieren den Bochner–Lebesgue-Raum durch

$$\begin{aligned} L^1(I; X) &:= \mathcal{L}^1(I; X)_{/\sim} \\ (\text{sowie } L^0(I; X) &:= \mathcal{L}^0(I; X)_{/\sim}), \end{aligned}$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim gegeben sei durch „Gleichheit fast überall“, d.h.

$$u \sim v \quad :\Leftrightarrow \quad u(t) = v(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{L^1(I; X)} : L^1(I; X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, für alle $u \in L^1(I; X)$ definiert durch

$$\|u\|_{L^1(I; X)} := \int_I \|u(t)\|_X dt.$$

Korollar 1.18 (Elementare Eigenschaften II)

- (i) $(L^1(I; X), \|\cdot\|_{L^1(I; X)})$ ist ein normierter Vektorraum.
- (ii) $\mathcal{S}(I; X)$ liegt dicht in $L^1(I; X)$.

Beweis. Zu (i). (Übung).

Zu (ii). Folgt analog zum Beweis der Rückrichtung im Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15). □

Die elementaren Eigenschaften des Bochner-Integrals von einfachen Funktionen (cf. Korollar 1.7) lassen sich mithilfe des Dichtheitsresultats in Korollar 1.18 auf Bochner-integrierbare Funktionen übertragen.

Korollar 1.19 (Elementare Eigenschaften III)

(i) *Linearität: Das Bochner-Integral ist linear, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u_1, u_2 \in L^1(I; X)$ gilt, dass*

$$\int_I \{\alpha u_1 + \beta u_2\}(t) dt = \alpha \int_I u_1(t) dt + \beta \int_I u_2(t) dt.$$

(ii) *Stetigkeit: Das Bochner-Integral ist stetig, d.h. für alle $u \in L^1(I; X)$ gilt, dass*

$$\left\| \int_I u(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|u(t)\|_X dt.$$

Beweis. Folgt aus Korollar 1.7 zusammen mit Korollar 1.18. □

Bemerkung 1.20

Korollar 1.19 zeigt, dass das Bochner-Integral eine lineare, stetige Abbildung von $L^1(I; X)$ nach X definiert, d.h.

$$\left(u \mapsto \int_I u(t) dt \right) \in \mathcal{L}(L^1(I; X); X).$$

Satz 1.21 (Linear-induzierter Operator)

Sei $A: X \rightarrow Y$ ein linearer, stetiger Operator. Dann ist der linear-induzierte Operator $\mathcal{A}: L^1(I; X) \rightarrow L^1(I; Y)$, für alle $u \in L^1(I; X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t) := A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

wohldefiniert, linear, stetig mit

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^1(I; Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \|u\|_{L^1(I; X)} \quad \text{für alle } u \in L^1(I; X).$$

Insbesondere gilt

$$A \left(\int_I u(t) dt \right) = \int_I (\mathcal{A}u)(t) dt \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } u \in L^1(I; X),$$

d.h. das Bochner-Integral kommutiert mit linearen, stetigen Abbildungen (cf. Abbildung 1.1).

$$\begin{array}{ccc}
 L^p(I; X) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & L^p(I; Y) \\
 \downarrow \int_I \cdot dt & & \downarrow \int_I \cdot dt \\
 X & \xrightarrow{A} & Y
 \end{array}$$

Abbildung 1.1: Kommutatives Diagramm.

Beweis. 1. Wohldefiniert: Nach Lemma 1.5 ist der Operator $\mathcal{A}: \mathcal{L}^0(I; X) \rightarrow \mathcal{L}^0(I; Y)$ wohldefiniert und linear. Es reicht also zu zeigen, dass $\mathcal{A}u \in L^1(I; Y)$ für alle $u \in L^1(I; X)$. Für alle $u \in L^1(I; X)$ ist $\|(\mathcal{A}u)(\cdot)\|_Y \in L^1(I)$, denn

$$\|(\mathcal{A}u)(t)\|_Y = \|A(u(t))\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|u(t)\|_X \quad \text{für f.a. } t \in I, \quad (1.22)$$

und $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(I)$ laut dem Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15). Das Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15) liefert dann wiederum, dass $\mathcal{A}u \in L^1(I; Y)$. Schließlich ist der Operator $\mathcal{A}: L^1(I; X) \rightarrow L^1(I; Y)$ wohldefiniert und linear.

2. Stetigkeit: Integration von (1.22) bezüglich $t \in I$ für alle $u \in L^1(I; X)$ liefert, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^1(I;Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|u\|_{L^1(I;X)} \quad \text{für alle } u \in L^1(I; X),$$

d.h. $\mathcal{A}: L^1(I; X) \rightarrow L^1(I; Y)$ ist stetig.

3. Integraldarstellung: Laut Definition 1.12 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1(I; X) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Stetigkeit von $\mathcal{A}: L^1(I; X) \rightarrow L^1(I; Y)$ liefert, dass

$$\mathcal{A}s_n \rightarrow \mathcal{A}u \quad \text{in } L^1(I; Y) \quad (n \rightarrow \infty),$$

sodass nach der Stetigkeit des Bochner-Integrals (cf. Korollar 1.19, Bemerkung 1.20) gilt, dass

$$\int_I (\mathcal{A}s_n)(t) dt \rightarrow \int_I (\mathcal{A}u)(t) dt \quad \text{in } Y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen der Linearität des Bochner-Integrals (cf. Korollar 1.19(i)) gilt, dass

$$A \left(\int_I s_n(t) dt \right) = \int_I (\mathcal{A}s_n)(t) dt \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Stetigkeit des Bochner-Integrals (cf. Korollar 1.19, Bemerkung 1.20) und der Stetigkeit von $A: X \rightarrow Y$ folgt, dass

$$A \left(\int_I s_n(t) dt \right) \rightarrow A \left(\int_I u(t) dt \right) \quad \text{in } Y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert schließlich die Behauptung. \square

1.3 Klassische Funktionenräume

In diesem Abschnitt führen wir alle “klassischen” Funktionenräume ein. Beginnen wir mit den Räumen stetiger Funktionen.

Definition 1.23 (Räume stetiger Funktionen)

(i) Der Raum der stetigen Funktionen auf I mit Werten in X ist definiert durch

$$C^0(I; X) := \{u: I \rightarrow X \mid u(t+h) \rightarrow u(t) \text{ in } X \text{ (} h \rightarrow 0, t+h \in I \text{) für alle } t \in I\}.$$

(ii) Der Raum der stetigen, beschränkten Funktionen auf I mit Werten in X ist definiert durch

$$C_b^0(I; X) := \left\{u \in C^0(I; X) \mid \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X < \infty\right\}.$$

Bemerkung 1.24

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann gilt $C^0(I; X) = C_b^0(I; X)$.

Nachdem wir die Räume stetiger Funktionen eingeführt haben, können wir als Nächstes die Räume (k -mal) stetig differenzierbaren Funktionen einführen.

Definition 1.25 (Räume klassisch differenzierbarer Funktionen)

Eine Funktion $u: I \rightarrow X$ heißt

(i) klassisch differenzierbar in $t \in I$, falls ein $x \in X$ existiert, sodass

$$\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) \rightarrow x \quad \text{in } X \quad (h \rightarrow 0, t+h \in I).$$

Wir definieren dann

$$\frac{du}{dt}(t) := x \in X$$

als die klassische Zeitanleitung von u in t .

(ii) klassisch differenzierbar in I , falls klassisch differenzierbar in t für alle $t \in I$.

(iii) k -mal klassisch differenzierbar in I , wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls die i -te klassische Zeitableitung

$$\frac{d^i u}{dt^i} := \frac{d}{dt} \left[\frac{d^{i-1} u}{dt^{i-1}} \right]: I \rightarrow X$$

für alle $i = 0, \dots, k-1$, wobei $\frac{d^0 u}{dt^0} := u: I \rightarrow X$, existiert und in I klassisch differenzierbar ist.

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, bezeichne dann

$$C^k(I; X) := \left\{u \in C^0(I; X) \mid \exists \frac{d^i u}{dt^i} \in C^0(I; X) \text{ für alle } i = 1, \dots, k\right\},$$

den Raum aller auf I k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X .

Satz 1.26 (Vollständigkeit von $C_b^0(I; X)$ und $C^k(I; X)$)

(i) $(C_b^0(I; X), \|\cdot\|_{C_b^0(I; X)})$, wobei

$$\|u\|_{C_b^0(I; X)} := \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X \quad \text{für alle } u \in C_b^0(I; X),$$

ist ein Banachraum.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, ist $(C^k(I; X), \|\cdot\|_{C^k(I; X)})$, wobei

$$\|u\|_{C^k(I; X)} := \sum_{i=0}^k \left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{C_b^0(I; X)} \quad \text{für alle } u \in C_b^0(I; X),$$

ein Banachraum.

Beweis. Zu (i). Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(I; X)$ eine Cauchy-Folge in $C_b^0(I; X)$, d.h.

$$\|u_m - u_n\|_{C_b^0(I; X)} = \sup_{t \in I} \|u_m(t) - u_n(t)\|_X \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

Dann ist $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in I$ eine Cauchy-Folge in X . Da X ein Banachraum ist, existiert daher zu jedem $t \in I$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$u_n(t) \rightarrow u_t \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

Definiere dann die Funktion $u: I \rightarrow X$ durch

$$u(t) := u_t \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass $u \in C_b^0(I; X)$ und $u_n \rightarrow u$ in $C_b^0(I; X)$ ($n \rightarrow \infty$):

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann existiert ein $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ gilt, dass

$$\|u_m - u_n\|_{C_b^0(I; X)} = \sup_{t \in I} \|u_m(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$, dass

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Für $m \rightarrow \infty$ erhalten wir daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt, dass

$$\|u(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Bilden wir das Supremum bezüglich $t \in I$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, dass

$$\sup_{t \in I} \|u(t) - u_n(t)\|_X \leq \varepsilon. \tag{1.27}$$

Damit folgt die Behauptung, falls $u \in C_b^0(I; X)$:

Zur Stetigkeit: Wegen (1.27) gilt, dass

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t+h \in I}} \|u(t+h) - u(t)\|_X &\leq \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t+h \in I}} \|u(t+h) - u_{n_0}(t+h)\|_X \\ &\quad + \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t+h \in I}} \|u_{n_0}(t+h) - u_{n_0}(t)\|_X \\ &\quad + \|u_{n_0}(t) - u(t)\|_X \\ &\leq \varepsilon + 0 + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgern wir, dass

$$u(t+h) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (h \rightarrow 0, t+h \in I) \quad \text{für alle } t \in I,$$

d.h. $u \in C^0(I; X)$.

Zur Beschränktheit: Wegen (1.27) gilt, dass

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\|_X \leq \underbrace{\sup_{t \in I} \|u(t) - u_{n_0}(t)\|_X}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\sup_{t \in I} \|u_{n_0}(t)\|_X}_{< \infty} < \infty,$$

d.h. $u \in C_b^0(I; X)$.

Somit läßt sich (1.27) als $u_n \rightarrow u$ in $C_b^0(I; X)$ ($n \rightarrow \infty$) und es folgt die Behauptung.

Zu (ii). Folgt aus (i) induktiv mit Hilfe von Bemerkung 1.24 (Übung). \square

Proposition 1.28 (Charakterisierung der schwachen Folgenkonvergenz in $C^0(I; X)$)

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann gilt für eine beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(I; X)$ und eine Funktion $u \in C^0(I; X)$, dass

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } C^0(I; X) \quad (n \rightarrow \infty),$$

genau dann, wenn

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. Siehe [BT38, Theorem 3]. \square

Definition 1.29 (Raum der demi-stetigen Funktionen)

Der Raum der demi-stetigen Funktionen auf I mit Werten in X ist definiert durch

$$C_\omega^0(I; X) := \{u: I \rightarrow X \mid u(t+h) \rightarrow u(t) \text{ in } X \text{ } (h \rightarrow 0, t+h \in I) \text{ für alle } t \in I\}.$$

1.4 Schwache Messbarkeit und Satz von Pettis

Das Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15) lieferte uns ein handliches Mittel zum Nachweis der Bochner-Integrierbarkeit. Allerdings müssen wir zum Nachweis der Bochner-Messbarkeit (die Teil des Bochner-Kriteriums ist) immer noch eine Folge von einfachen Funktionen konstruieren, die f.ü. gegen unsere Funktion konvergiert. Das ist in der Praxis zu aufwendig. Abhilfe verschafft uns hier der Satz von Pettis, der Bochner-Messbarkeit äquivalent als schwache Messbarkeit zusammen mit Fast-Separabelwertigkeit charakterisiert; zwei Eigenschaften, die deutlich einfacher nachgewiesen werden können.

Definition 1.30 (Schwache Messbarkeit, Separabelwertigkeit, Fast-Separabelwertigkeit)

Eine Funktion $u: I \rightarrow X$ heißt

(i) schwach messbar, falls

$$\langle f, u(\cdot) \rangle_X \in \mathcal{L}^0(I) \quad \text{für alle } f \in X^* .$$

(ii) separabelwertig, falls das Bild von u , d.h.

$$R(u) := \{u(t) \in X \mid t \in I\} ,$$

separabel ist.

(iii) fast separabelwertig, falls eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$ existiert, sodass

$$R(u|_{I \setminus B_0})$$

separabel ist.

Nun haben wir alle notwendigen Definitionen für den folgenden Satz.

Satz 1.31 (von Pettis, 1938, cf. [Pet38])

Eine Funktion $u: I \rightarrow X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn sie schwach messbar und fast separabelwertig ist.

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Pettis (cf. Satz 1.31), welche in der Praxis am leichtesten anzuwenden ist, erhalten wir das folgende Resultat.

Korollar 1.32

Ist X ein separabler Banachraum, dann ist ein Funktion $u: I \rightarrow X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn sie schwach messbar ist.

Bemerkung 1.33

Da die meisten Banachräume mit denen man es “in der Praxis” zu tun hat separabel sind, ist der Standardweg zur Überprüfung von Bochner-Messbarkeit der Korollar 1.32.

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) ist das folgende Resultat.

Korollar 1.34

Die folgenden Aussagen gelten:

- (i) $C^0(I; X) \subseteq \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I; X) := \{u \in \mathcal{L}^0(I; X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)\}$.
- (ii) $C_b^0(I; X) \subseteq \mathcal{L}^1(I; X)$, falls $\lambda^1(I) < \infty$.

Beweis. Zu (i). Sei $u \in C^0(I; X)$.

1. Bochner-Messbarkeit:

1.1 Schwache Messbarkeit: Da $u \in C^0(I; X)$, gilt

$$\langle f, u(\cdot) \rangle_X \in C^0(\bar{I}) \subseteq \mathcal{L}^0(I) \quad \text{für alle } f \in X^*,$$

d.h. ist u schwach messbar.

1.2 Fast-Separabelwertigkeit: Da I separabel ist und $u \in C^0(I; X)$, ist $R(u)$ separabel,

d.h. u ist separabelwertig.

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$.

2. Lokale Integrierbarkeit: Für alle kompakten $K \subseteq I$ gilt, dass

$$\|(u|_K)(\cdot)\|_X \in C^0(K) \subseteq \mathcal{L}^1(K),$$

d.h. $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I; X)$.

Zu (ii). Folgt analog zu (i) (Übung). □

Korollar 1.35

Die folgenden Aussagen gelten:

- (i) $C_\omega^0(I; X) \subseteq \mathcal{L}^0(I; X)$.
- (ii) Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann gilt für alle $u \in C_\omega^0(I; X)$, dass $\sup_{t \in I} \|u(t)\|_X < \infty$.

Beweis. Zu (i). Sei $u \in C_\omega^0(I; X)$.

1. Schwache Messbarkeit: Da $u \in C_\omega^0(I; X)$, gilt

$$\langle f, u(\cdot) \rangle_X \in C^0(\bar{I}) \subseteq \mathcal{L}^0(I) \quad \text{für alle } f \in X^*,$$

d.h. ist u schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Da I separabel ist und $u \in C_\omega^0(I; X)$, ist $R(u)$ schwach separabel. Da jede schwach separable Teilmenge eines Banachraums auch (stark) separabel ist (cf. Satz von Mazur), ist $R(u)$ (stark) separabel, d.h. u ist separabelwertig.

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert, dass $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$.

Zu (ii). Angenommen es gilt $\sup_{t \in I} \|u(t)\|_X = \infty$. Dann existiert eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$, sodass

$$\|u(t_n)\|_X \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.36)$$

Da $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $t^* \in I$, sodass

$$t_{n_k} \rightarrow t^* \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wegen $u \in C_\omega^0(I; X)$ folgt, dass

$$u(t_{n_k}) \rightarrow u(t^*) \quad \text{in } X \quad (k \rightarrow \infty).$$

Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, ist dies ein Widerspruch zu (1.36). \square

Korollar 1.37 ($\mathcal{L}^0(I; X)$ abgeschlossen bezüglich f.ü. schwacher Konvergenz)

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I; X)$, sodass

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Dann gilt $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$.

Beweis. Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert, dass die folgenden Aussagen gelten:

- (1) $(\langle f, u_n(\cdot) \rangle_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f \in X^*$.
- (2) Es existieren Lebesgue-messbare Mengen $B_n \subseteq I$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lambda^1(B_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $R(u_n|_{I \setminus B_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ separabel ist.

1. Schwache Messbarkeit: Nach Voraussetzung existiert eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$, sodass

$$\langle f, u_n(t) \rangle_X \rightarrow \langle f, u(t) \rangle_X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } t \in I \setminus B_0 \text{ und } f \in X^*. \quad (1.38)$$

Da fast überall Grenzwerte Lebesgue-messbarer Funktionen wieder Lebesgue-messbar sind, folgt aus (1.38) zusammen mit (1), dass

$$\langle f, u(\cdot) \rangle_X \in \mathcal{L}^0(I) \quad \text{für alle } f \in X^*,$$

d.h. u ist schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Aus (1.38) folgt, dass

$$\text{conv} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(u_n|_{I \setminus B_n}) \right) \quad (1.39)$$

separabel ist. Definieren wir $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_n$, dann gilt, dass $\lambda^1(B) = 0$ und mit (1.38) und dem Satz von Mazur

$$\begin{aligned} R(u|_{I \setminus B}) &\stackrel{(1.38)}{\subseteq} \overline{\operatorname{conv} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(u_n|_{I \setminus B_n}) \right)}^{\omega(X, X^*)} \\ &= \overline{\operatorname{conv} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(u_n|_{I \setminus B_n}) \right)}^{\|\cdot\|_X}. \end{aligned}$$

Wegen (1.39) ist $R(u|_{I \setminus B})$ separabel, d.h. u ist fast separabelwertig.

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$. □

Beispiel 1.40 (Eine nicht fast separabelwertige Funktion)

Betrachte die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^\infty(0, 1)$, definiert durch

$$u(t) := \chi_{(0,t)} \quad \text{in } L^\infty(0, 1) \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

d.h.

$$[u(t)](x) := \chi_{(0,t)}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x < t, \\ 0 & \text{falls } x \geq t. \end{cases}$$

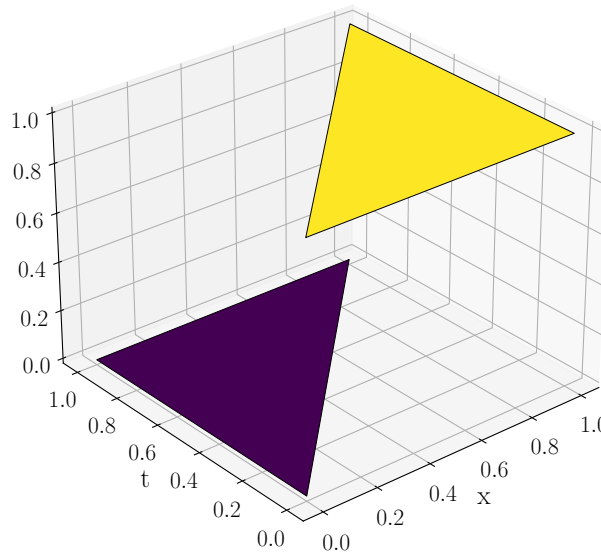


Abbildung 1.2: Die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^\infty(0, 1)$.

Dann gilt:

- (i) Die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^\infty(0, 1)$ ist nicht fast separabelwertig, denn für $t, s \in (0, 1)$ gilt, dass

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^\infty(0,1)} = 1 \quad \text{falls } t \neq s.$$

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert dann insbesondere, dass die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^\infty(0, 1)$ nicht Bochner-messbar ist.

- (ii) Die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^p(0, 1)$ ist für $p \in [1, \infty)$
- separabel wertig, da $L^p(0, 1)$ für $p \in [1, \infty)$ separabel ist.
 - schwach messbar, da für alle $f \in L^{p'}(0, T)$ gilt, dass

$$\left(t \mapsto \int_0^t f(x) \, dx \right) \in C^0(0, 1) \subseteq \mathcal{L}^0(0, 1).$$

Der Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) liefert dann insbesondere, dass die Funktion $u: (0, 1) \rightarrow L^p(0, 1)$ für $p \in [1, \infty)$ Bochner-messbar ist.

Beweis (von Satz 1.31). Zu "⇒". Sei $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$. Nach Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ und eine Lebesgue-messbare Menge $B_0 \subseteq I$ mit $\lambda^1(B_0) = 0$, sodass

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } t \in I \setminus B_0. \quad (1.41)$$

1. Schwache Messbarkeit: Wegen (1.41) gilt, dass

$$\langle f, s_n(t) \rangle_X \rightarrow \langle f, u(t) \rangle_X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } t \in I \setminus B_0 \text{ und } f \in X^*.$$

Wegen $(\langle f, s_n(\cdot) \rangle_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; \mathbb{R}^1) \subseteq \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f \in X^*$, ist $\langle f, u(\cdot) \rangle_X \in \mathcal{L}^0(I)$ für alle $f \in X^*$ als fast-überall-Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen, d.h. u ist schwach messbar.

2. Fast-Separabelwertigkeit: Wegen (1.41) gilt, dass

$$R(u|_{I \setminus B_0}) \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(s_n)}^{\|\cdot\|_X}.$$

Da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(s_n)$ (da $\text{card}(R(s_n)) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$) abzählbar ist, ist $R(u|_{I \setminus B_0})$ separabel, d.h. u ist fast separabelwertig.

Zu "⇐". Sei $u: I \rightarrow X$ schwach messbar und fast separabelwertig.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass X selbst separabel ist, denn andernfalls ersetzen wir X durch den separablen Banachraum

$$\overline{\text{span } R(u|_{I \setminus B_0})}^{\|\cdot\|_X} \subset X,$$

wobei $B_0 \subseteq I$ Lebesgue-messbare ist, sodass $\lambda^1(B_0) = 0$ und $R(u|_{I \setminus B_0})$ separabel ist.

Für separables X lässt sich der Beweis von der Rückrichtung (d.h. von "⇐") in drei Schritte unterteilen:

1. Schritt: Zeige, dass $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.

2. Schritt: Konstruiere eine Folge von abzählbarwertigen Funktionen $\tilde{s}_n: I \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. $R(\tilde{s}_n)$ ist abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\tilde{s}_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

3. Schritt: Konstruiere eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

1. Schritt: ($\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$) Für den ersten Schritt benötigen wir folgende Aussage:

Ist X ein separabler Banachraum, dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$, sodass für alle $f_0 \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f_0 \quad \text{in } X^* \quad (k \rightarrow \infty),$$

d.h. $\overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ ist separabel bezüglich der *-schwachen Topologie.

Wenn wir das folgende Ziel erreichen, folgt die Aussage vom 1. Schritt:

Ziel: Zeige, dass

$$A_r := \{t \in I \mid \|u(t)\|_X \leq r\} \subseteq I \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}$$

Lebesgue-messbar ist, d.h. $\|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^0(I)$.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir erst das folgende Zwischenziel erreichen:

Zwischenziel: Zeige, dass

$$A_r := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_r^{f_n} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R},$$

wobei $A_r^f := \{t \in I \mid |\langle f, u(t) \rangle_X| \leq r\} \subseteq I$ wegen der schwachen Messbarkeit von $u: I \rightarrow X$ für alle $f \in X^*$ und $r \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

Um dieses Zwischenziel zu erreichen, müssen wir erst das folgende Zwischenzwischenziel erreichen:

Zwischenzwischenziel: Zeige, dass

$$A_r := \bigcap_{f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Beweis (des Zwischenzwischenziels). Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} t \in A_r &\Leftrightarrow \sup_{f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} |\langle f, u(t) \rangle_X| = \|u(t)\|_X \leq r \\ &\Leftrightarrow |\langle f, u(t) \rangle_X| \leq r \quad \text{für alle } f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}} \\ &\Leftrightarrow t \in A_r^f \quad \text{für alle } f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}} \\ &\Leftrightarrow t \in \bigcap_{f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f. \end{aligned}$$

Beweis (des Zwischenziels).

Zu “ \subseteq ”: Wegen des Zwischenzwischenziels gilt, dass

$$A_r \subseteq \bigcap_{f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}} A_r^f \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_r^{f_n}.$$

Zu “ \supseteq ”: Sei $t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_r^{f_n}$ beliebig aber fest. Dann gilt, dass

$$|\langle f_n, u(t) \rangle_X| \leq r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu $f \in \overline{B_1^{X^*}(0)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad \text{in } X^* \quad (k \rightarrow \infty).$$

Daher folgt, dass

$$|\langle f, u(t) \rangle_X| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle f_{n_k}, u(t) \rangle_X| \leq r,$$

d.h. $t \in A_r^f$.

2. Schritt: (Konstruktion einer abzählbarwertigen Folge) Da X separabel ist, existieren zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ ein Folge $(x_{j,n})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$, sodass

$$R(u) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{B_{\frac{1}{n}}^X(x_{j,n})}^{\|\cdot\|_X}.$$

Da $u(\cdot) - x_{j,n}: I \rightarrow X$ für alle $j, n \in \mathbb{N}$ schwach messbar ist, gilt wegen dem 1. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis (cf. Satz 1.31), dass

$$(\|u(\cdot) - x_{j,n}\|_X)_{j,n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I).$$

Definieren wir die Mengen

$$B_{j,n} := \left\{ t \in I \mid \|u(t) - x_{j,n}\|_X \leq \frac{1}{n} \right\} \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

- $B_{j,n} \subseteq I$ ist für alle $j, n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-messbar.
- $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definieren wir weiter die Mengen

$$\tilde{B}_{i,n} := B_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n} \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N},$$

dann gilt:

- $\tilde{B}_{i,n} \subseteq I$ ist für alle $i, n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-messbar.
- $I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{B}_{i,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\tilde{B}_{i,n} \cap \tilde{B}_{j,n} = \emptyset$, falls $i \neq j$.

Definieren wir schließlich die Funktionen $\tilde{s}_n: I \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\tilde{s}_n(t) := \sum_{i \in \mathbb{N}} x_{i,n} \chi_{\tilde{B}_{i,n}}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I,$$

Dann gilt:

- $R(\tilde{s}_n)$ ist abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\tilde{s}_n: I \rightarrow X$ schwach messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_X \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } t \in I,$$

d.h. insbesondere gilt, dass

$$\tilde{s}_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Exkurs: (zum 3. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis)

Bevor wir den 3. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis beweisen können, erwähnen wir noch zwei weitere Sätze, die aus der klassischen Maßtheorie bekannt sein sollten.

Definition 1.42 (Fast gleichmäßige Konvergenz)

Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}: I \rightarrow X$ konvergiert fast gleichmäßig gegen $u: I \rightarrow X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Lebesgue-messbare Menge $F \subseteq I$ mit $\lambda(F) < \varepsilon$ existiert, sodass

$$u_n \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{gleichmäßig auf } I \setminus F,$$

d.h.

$$\sup_{t \in I \setminus F} \|u_n(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Definition 1.43 (Konvergenz nach Maß)

Sei X ein separabler Banachraum. Eine Folge $u_n: I \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, schwach messbarer Funktionen konvergiert nach Maß gegen eine schwach messbare Funktion $u: I \rightarrow X$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^1(\{t \in I \mid \|u_n(t) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Bemerkung 1.44 (i) Der 1. Schritt im Beweis von Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) sichert, dass $(\|u_n(\cdot) - u(\cdot)\|_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I)$, d.h. dass $\{t \in I \mid \|u_n(t) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\} \subseteq I$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-messbar ist.

(ii) Konvergenz nach Maß (cf. Definition 1.43) ist metrisierbar mit (cf. [Bog07])

$$d_I(u, v) := \inf_{\delta > 0} \{\lambda^1(\{t \in I \mid \|u(t) - v(t)\|_X \geq \delta\}) + \delta\},$$

d.h. es gilt:

$$u_n \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{nach Maß (in } I) \quad \Leftrightarrow \quad d_I(u_n, u) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(iii) Fast gleichmäßige Konvergenz impliziert Konvergenz nach Maß (cf. [Els09, §4, Satz 4.4, p. 255]).

Es gilt der folgende Kompaktheitssatz.

Satz 1.45

Sei X ein separabler Banachraum und $u_n: I \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, sowie $u: I \rightarrow X$ schwach messbar, sodass

$$u_n \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{nach Maß (in } I).$$

Dann existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad (n_k \rightarrow \infty) \quad \text{fast gleichmäßig (in } I).$$

Beweis. Wir wenden die klassische Version des Satz (cf. [Els09, §4, Satz 4.7, p. 256]) auf die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\|u_n(\cdot) - u(\cdot)\|_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^0(I)$ an, wobei wir für die Lebesgue-Messbarkeit den 1. Schritt im Beweis des Satzes von Pettis (cf. Satz 1.31) ausnutzen. \square

3. Schritt: (Konstruktion von einfachen Funktionen) Sei $\tilde{s}_n: I \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, die Folge von abzählbarwertigen, schwach messbaren Funktionen aus dem 2. Schritt vom Beweis des Satzes von Pettis (cf. Satz 1.31), welche

$$\sup_{t \in I} \|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_X \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Laut Definition 1.42 gilt daher auch, dass

$$\tilde{s}_n \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{fast gleichmäßig in } I.$$

Laut Bemerkung 1.44(iii) impliziert dies wiederum, dass

$$\tilde{s}_n \rightarrow u \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{nach Maß in } I,$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$d_I(\tilde{s}_n, u) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bezeichne nun $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen, sodass

- $I_n \subseteq I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Dann definieren wir die Doppelfolge von einfachen Funktionen $(s_n^\ell)_{\ell, n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ durch

$$s_n^\ell(t) := \sum_{i=0}^{\ell} x_{i,n} \chi_{\tilde{B}_{i,n} \cap I_n}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{für alle } \ell, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

- $s_n^\ell = s_n$ auf $I_n \setminus \bigcup_{i=\ell+1}^{\infty} \tilde{B}_{i,n} \cap I_n$ für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$.
- Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, existiert ein $\ell_0 := \ell_0(\varepsilon, n) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lambda^1 \left(\bigcup_{i=\ell+1}^{\infty} \tilde{B}_{i,n} \cap I_n \right) = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \lambda^1(\tilde{B}_{i,n} \cap I_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } \ell \geq \ell_0,$$

denn $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^1(\tilde{B}_{i,n} \cap I_n) = \lambda^1(I_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Laut Definition 1.42 gilt daher, dass

$$s_n^\ell \rightarrow s_n \quad (\ell \rightarrow \infty) \quad \text{fast gleichmäßig in } I_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Laut Bemerkung 1.44(iii) impliziert dies wiederum, dass

$$s_n^\ell \rightarrow s_n \quad (\ell \rightarrow \infty) \quad \text{nach Maß in } I_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$d_{I_n}(\tilde{s}_n^\ell, \tilde{s}_n) \rightarrow 0 \quad (\ell \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $d_{I_n}(\tilde{s}_n, u) \leq d_I(\tilde{s}_n, u) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (cf. Bemerkung 1.44(ii)), existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, sodass

$$d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}, u) \leq \frac{1}{2k}.$$

Wegen $d_{I_n}(\tilde{s}_n^\ell, \tilde{s}_n) \rightarrow 0$ ($\ell \rightarrow \infty$) für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert weiter zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\ell_k \in \mathbb{N}$, sodass

$$d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, \tilde{s}_{n_k}) \leq \frac{1}{2k}.$$

Folglich gilt

$$d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \leq d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, \tilde{s}_{n_k}) + d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}, u) \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Insbesondere gilt

$$d_{I_\ell}(\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \leq d_{I_{n_k}}(\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}, u) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty; n_k \geq \ell),$$

was wegen Bemerkung 1.44(ii) äquivalent ist zu

$$\tilde{s}_{n_k}^{\ell_k} \rightarrow u \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{nach Maß in } I_\ell \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.45 liefert dann iterativ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(s_n^\ell)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (s_n^{\ell-1})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{s}_{n_k}^{\ell_k}$, sodass

$$s_n^\ell(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I_\ell \setminus B_\ell,$$

wobei $B_\ell \subseteq B_{\ell-1}$ mit $\lambda^1(B_\ell) = 0$. Die Diagonalfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (s_n^\ell)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$ erfüllt dann

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I \setminus B,$$

wobei $B := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} B_\ell$ Lebesgue-messbar ist und $\lambda^1(B) = 0$ erfüllt. Dies zeigt schließlich, dass $u \in \mathcal{L}^0(I; X)$. \square

2 Bochner–Lebesgue-Räume

Das Bochner-Kriterium (cf. Satz 1.15) motivierte die Definition

$$\mathcal{L}^1(I; X) = \{u \in \mathcal{L}^0(I; X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in \mathcal{L}^1(I)\},$$

die Anlass zur Definition des Bochner–Lebesgue-Raum $L^1(I; X)$ gab (cf. Definition 1.17). In Analogie zur klassischen L^p -Theorie lässt sich die Definition des Raums $L^1(I; X)$ auf L^p -Integrabilität erweitern.

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 2.1 (Der Bochner–Lebesgue-Raum $L^p(I; X)$)

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist der Bochner–Lebesgue-Raum definiert durch

$$L^p(I; X) := \{u \in L^0(I; X) \mid \|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)\},$$

und ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(I; X)} := \|\|u(\cdot)\|_X\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Bevor wir zur Vollständigkeit von $L^p(I; X)$ kommen, notieren wir einige Folgerungen.

Korollar 2.2 (Erste Resultate)

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $(L^p(I; X), \|\cdot\|_{L^p(I; X)})$ ist ein normierter Vektorraum.
- (ii) Falls $X \hookrightarrow Y$, dann gilt

$$L^p(I; X) \hookrightarrow L^p(I; Y).$$

- (iii) Falls $A: X \rightarrow Y$ linear und stetig ist, dann ist der (linear-)induzierte Operator $\mathcal{A}: L^p(I; X) \rightarrow L^p(I; Y)$, für alle $u \in L^p(I; X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t) := A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle $u \in L^p(I; X)$, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^p(I; Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u\|_{L^p(I; X)}.$$

Beweis. (Übung). □

Die L^p -Integrabilität des Bochner–Lebesgue-Raums $L^p(I; X)$ ermöglicht eine Verallgemeinerung der Hölder’schen Ungleichung. Dazu ersetzen wir die skalare Multiplikation $f(\cdot)u(\cdot)$ durch das Dualitätsprodukt $\langle f(\cdot), u(\cdot) \rangle_X$.

Satz 2.3 (Hölder'sche Ungleichung)

Seien $p, p' \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (d.h. $p' = 1$, falls $p = \infty$, und $p' = \infty$, falls $p = 1$). Dann gilt für alle $f \in L^{p'}(I; X^*)$ und $u \in L^p(I; X)$, dass $\langle f(\cdot), u(\cdot) \rangle_X \in L^1(I, \mathbb{R})$ mit

$$\int_I |\langle f(t), u(t) \rangle_X| \, dt \leq \|f\|_{L^{p'}(I; X^*)} \|u\|_{L^p(I; X)}.$$

Beweis. 1. Lebesgue-Messbarkeit: Da $f \in L^{p'}(I; X^*)$, $u \in L^p(I; X)$ Bochner-messbar sind, existieren Folgen von einfachen Funktionen $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X^*)$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$\begin{aligned} k_n(t) &\rightarrow f(t) & \text{in } X^* & \quad (n \rightarrow \infty) & \quad \text{für f.a. } t \in I, \\ s_n(t) &\rightarrow u(t) & \text{in } X & \quad (n \rightarrow \infty) & \quad \text{für f.a. } t \in I. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus der Stetigkeit des Dualitätsprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_X: X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\langle k_n(t), s_n(t) \rangle_X \rightarrow \langle f(t), u(t) \rangle_X \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Wegen $(\langle k_n(\cdot), s_n(\cdot) \rangle_X)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^0(I; \mathbb{R})$, ist $\langle f(\cdot), u(\cdot) \rangle_X \in L^0(I; \mathbb{R})$.

2. Lebesgue-Integrierbarkeit: Laut Definition 2.1 gilt $\|f(\cdot)\|_{X^*} \in L^{p'}(I)$ und $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$. Mit der klassischen Hölder-Ungleichung folgt daher, dass $\langle f(t), u(t) \rangle_X \in L^1(I, \mathbb{R})$ mit

$$\int_I |\langle f(t), u(t) \rangle_X| \, dt \leq \int_I \|f(t)\|_{X^*} \|u(t)\|_X \, dt \leq \|f\|_{L^{p'}(I; X^*)} \|u\|_{L^p(I; X)}. \quad \square$$

Korollar 2.4 (aus der Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3))

Die folgenden Aussagen gelten:

(i) Falls $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, dann gilt

$$L^q(I; X) \hookrightarrow L^p(I; X).$$

(ii) Falls $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, dann gilt

$$L^p(I; X) \cap L^q(I; X) \hookrightarrow L^r(I; X).$$

Genauer gilt für alle $u \in L^p(I; X) \cap L^q(I; X)$, dass $u \in L^r(I; X)$ mit

$$\|u\|_{L^r(I; X)} \leq \|u\|_{L^q(I; X)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(I; X)}^\theta,$$

wobei $\theta \in [0, 1]$, sodass $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$.

(iii) Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $B: X \times Y \rightarrow Z$ bilinear und stetig. Dann ist der (bilinear-)induzierte operator $\mathcal{B}: L^p(I; X) \times L^q(I; Y) \rightarrow L^r(I; Z)$, für alle $(u, v)^\top \in L^p(I; X) \times L^q(I; Y)$ definiert durch

$$\mathcal{B}(u, v)(t) := B(u(t), v(t)) \quad \text{in } Z \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

wohldefiniert, bilinear und stetig. Insbesondere gilt für alle $(u, v)^\top \in L^p(I; X) \times L^q(I; Y)$, dass

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_{L^r(I; Z)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X \times Y, Z)} \|(u, v)^\top\|_{L^p(I; X) \times L^q(I; Y)}.$$

Beweis. Folgt aus der Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3) analog zur klassischen L^p -Theorie. \square

2.2 Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen

Wir kommen nun zu einem der zentralen Resultate dieses Abschnitts, der Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen.

Theorem 2.5 (Vollständigkeit von $L^p(I; X)$)

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist $(L^p(I; X), \|\cdot\|_{L^p(I; X)})$ ein Banachraum.

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle $p < \infty$ und $p = \infty$.

1. Fall: ($p < \infty$) Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\|u_n - u_k\|_{L^p(I; X)} \rightarrow 0 \quad (n, k \rightarrow \infty).$$

Wir finden daher eine wachsende Folge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$), sodass

$$\|u_n - u_{k_j}\|_{L^p(I; X)}^p < 4^{-j} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j. \quad (2.6)$$

Dann gilt wegen $k_{j+1} \geq k_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und (2.6) für $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} := (u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$, dass

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p(I; X)}^p < 4^{-j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Wir definieren die Lebesgue-messbaren Mengen

$$M_j := \{t \in I \mid \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \geq 2^{-j}\} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \lambda^1(M_j) &= \int_I \chi_{M_j}(t) \, dt \\ &\leq 2^j \int_I \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \, dt \\ &= 2^j \|v_{j+1} - v_j\|_{L^p(I; X)}^p \\ &< 2^j \cdot 4^{-j} = 2^{-j}. \end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir die Lebesgue-messbaren Mengen

$$N_i := \bigcup_{j \in \mathbb{N} : j \geq i} M_j \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $N_{i+1} \subseteq N_i$ sowie

$$\begin{aligned} \lambda^1(N_i) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N} : j \geq i} \lambda^1(M_j) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N} : j \geq i} 2^{-j} \\ &= 2^{1-i}. \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir die Lebesgue-messbare Menge $N := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i$, die wegen der Oberhalbstetigkeit des Lebesgue-Maßes (wobei wir ausnutzen, dass $N_{i+1} \subseteq N_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $\lambda^1(N_1) \leq 2^{1-1} = 1$)

$$\begin{aligned} \lambda^1(N) &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \lambda^1(N_i) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda^1(N_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} 2^{1-i} = 0. \end{aligned}$$

erfüllt.

Zusammenfassung: Für alle $t \in I \setminus N$ existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $t \notin N_i$ (d.h. $t \notin M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq i$), d.h.

$$\|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p < 2^{-j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j \geq i.$$

Insbesondere ist $(v_j(t))_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchy-Folge, denn

$$\|v_j(t) - v_i(t)\|_X \leq \sum_{\ell=i}^{\infty} \|v_{\ell+1}(t) - v_\ell(t)\|_X < \sum_{\ell=i}^{\infty} 2^{-\frac{j}{p}} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty, j \geq i).$$

Da X ein Banachraum ist, existiert daher für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$v_j(t) \rightarrow u_t \quad \text{in } X \quad (j \rightarrow \infty).$$

Definiere dann die Funktion $u: I \rightarrow X$ für alle $t \in I$ durch

$$u(t) := \begin{cases} u_t & \text{falls } t \in I \setminus N, \\ 0 & \text{falls } t \in N. \end{cases}$$

Wegen $\lambda^1(N) = 0$ gilt dann, dass

$$v_j(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (j \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Korollar 1.37 sichert dann, dass $u \in L^0(I; X)$. Lemma 1.4 liefert wiederum, dass $\|u(\cdot)\|_X \in L^0(I)$. Das heißt wir können auf L^p -Integrabilität prüfen. Tatsächlich folgt mit dem Lemma von Fatou (cf. [Els09, Kap. IV, §5, Lem. 5.1, S. 144]) für alle $j \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, dass

$$\begin{aligned} \int_I \|u(t)\|_X^p dt &\leq 2^{p-1} \int_I \|u(t) - v_j(t)\|_X^p dt + 2^{p-1} \int_I \|v_j(t)\|_X^p dt \\ &\leq 2^{p-1} \underbrace{\liminf_{i \rightarrow \infty} \int_I \|v_i(t) - v_j(t)\|_X^p dt}_{\rightarrow 0} + 2^{p-1} \int_I \|v_j(t)\|_X^p dt < \infty. \end{aligned}$$

d.h. $u \in L^p(I; X)$ (cf. Definition 2.1). Des Weiteren gilt mit dem Lemma von Fatou (cf. [Els09, Kap. IV, §5, Lem. 5.1, S. 144]), dass

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(I; X)}^p &\leq 2^{p-1} \|u_n - v_j\|_{L^p(I; X)}^p + 2^{p-1} \|v_j - u\|_{L^p(I; X)}^p \\ &\leq 2^{p-1} \|u_n - v_j\|_{L^p(I; X)}^p + 2^{p-1} \liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_j - v_i\|_{L^p(I; X)}^p \\ &\rightarrow 0 \quad (n, j \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d.h. $u_n \rightarrow u$ in $L^p(I; X)$ ($n \rightarrow \infty$).

2. Fall: ($p = \infty$) Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I, X)$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\|u_n - u_k\|_{L^\infty(I; X)} \rightarrow 0 \quad (n, k \rightarrow \infty).$$

Wir finden daher eine wachsende Folge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $k_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$), sodass

$$\|u_n - u_k\|_{L^\infty(I; X)} < \frac{1}{j} \quad \text{für alle } n, k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n, k \geq k_j.$$

Insbesondere existiert dann für alle $n, k, j \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq k_j$ eine Lebesgue-messbare Menge $N_{k,n}^j \subseteq I$ mit $\lambda^1(N_{k,n}^j) = 0$, sodass

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{j} \quad \text{für alle } t \in I \setminus N_{k,n}^j.$$

Definieren wir die Lebesgue-messbare $N := \bigcup_{\substack{n, k, j \in \mathbb{N} \\ n, k \geq k_j}} N_{k,n}^j \subseteq I$, dann gilt $\lambda^1(N) = 0$ und für alle $t \in I \setminus N$ gilt, dass

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{j} \quad \text{für alle } n, k, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n, k \geq k_j.$$

Damit ist $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchy-Folge im Banachraum X . Daher existiert für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u_t \in X$, sodass

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

Definiere dann die Funktion $u: I \rightarrow X$ für alle $t \in I$ durch

$$u(t) := \begin{cases} u_t & \text{falls } t \in I \setminus N, \\ 0 & \text{falls } t \in N. \end{cases}$$

Wegen $\lambda^1(N) = 0$ gilt dann, dass

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Korollar 1.37 sichert dann, dass $u \in L^0(I; X)$. Lemma 1.4 liefert wiederum, dass $\|u(\cdot)\|_X \in L^0(I)$. Das heißt wir können auf essentielle Beschränktheit prüfen. In der Tat gilt für alle $t \in I \setminus N$, dass

$$\|u(t)\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty(I; X)},$$

d.h. $u \in L^\infty(I; X)$. Weiter gilt für alle $t \in I \setminus N$, dass

$$\|u_n(t) - u(t)\|_X = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_k(t)\|_X \leq \frac{1}{j} \quad \text{für alle } n, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j,$$

d.h.

$$\|u_n - u\|_X \leq \frac{1}{j} \quad \text{für alle } n, j \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k_j.$$

Mit anderen Worten gilt $u_n \rightarrow u$ in $L^\infty(I; X)$ ($n \rightarrow \infty$). □

Aus dem Beweis von Theorem 2.5 ergibt sich die nützliche Folgerung

Folgerung 2.8 (Umkehrung des Satzes von Lebesgue)

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$ eine Folge, sodass

$$u_n \rightarrow u \quad L^p(I; X) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$, sodass

$$u_{k_j}(t) \rightarrow u(t) \quad X \quad (j \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Beweis. 1. Fall: ($p < \infty$) Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$ eine Cauchy-Folge ist, existiert eine monoton wachsende Folge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$), sodass

$$\|u_n - u_{k_j}\|_{L^p(I; X)}^p < \frac{1}{4^j} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq j \text{ und alle } j \in \mathbb{N}.$$

Analog zum Beweis von Theorem 2.5 im Fall $p < \infty$ folgt dann, dass

$$u_{k_j}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (j \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

1. Fall: ($p = \infty$) Analog zum Fall $p < \infty$. □

2.3 Dichte Teilmengen von Bochner–Lebesgue-Räumen

In diesem Abschnitt identifizieren wir einige wichtige dichte Teilmengen von Bochner–Lebesgue-Räumen.

Satz 2.9 (Dichtheit von einfachen Funktionen)

Für $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathcal{S}(I; X)$ dicht in $L^p(I; X)$.

Beweis. Für $p = 1$ haben wir die Behauptung bereits in Satz 1.15 gezeigt. Für $p \in (1, \infty)$ verläuft der Beweis völlig analog. \square

Bemerkung 2.10 (Dichtheit von Treppenfunktionen)

Eine Funktion $s: I \rightarrow X$ heißt Treppenfunktion, falls paar-weise disjunkte Intervalle $I_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$, mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda^1(I_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, existieren, sodass

$$s(t) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{I_i}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I.$$

Die Menge der Treppenfunktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(I; X)$.

Für $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathcal{T}(I; X)$ dicht in $L^p(I; X)$ (cf. [GGZ74, Lemma 1.3]).

Die folgenden spezielle dichte Teilmenge erweist als sehr nützlich.

Korollar 2.11 (Spezielle dichte Teilmenge)

Falls $p \in [1, \infty)$, $C \subseteq L^p(I)$ eine dichte Teilmenge von $L^p(I)$ und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X ist, dann ist die Menge

$$M(C, D) := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i d_i \mid n \in \mathbb{N}, c_i \in C, d_i \in D \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

dicht in $L^p(I; X)$.

Bemerkung 2.12 (Kanonische Beispiele für dichte Teilmengen $C \subseteq L^p(I)$)

Kanonische Beispiele für dichte Teilmengen von $L^p(I)$ sind $C = C_c^\infty(\overset{\circ}{I})$, $C = C^\infty(I) \cap L^p(I)$ und im Fall $\lambda^1(I) < \infty$ auch $C = C^\infty(\bar{I})$.

Korollar 2.11 zusammen mit Bemerkung 2.12 liefert insbesondere das folgende Resultat.

Korollar 2.13

Falls $p \in [1, \infty)$, dann gilt:

- (i) $C_c^\infty(\overset{\circ}{I}; X) := \{u \in C^\infty(I; X) \mid \text{supp } u \subseteq \overset{\circ}{I}\}$ liegt dicht in $L^p(I; X)$;
- (ii) $C^\infty(I; X) \cap L^p(I; X)$ liegt dicht in $L^p(I; X)$;
- (iii) $C^\infty(\bar{I}; X)$ liegt dicht in $L^p(I; X)$, falls $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Beweis (von Korollar 2.11). Sei $u \in L^p(I; X)$ beliebig. Wegen Satz 2.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u \in L^p(I; X)$ von der Form $u(t) = x \chi_B(t)$ in X für fast alle $t \in I$ mit $x \in X$ und Lebesgue-messbarer Menge $B \subseteq I$ ist. Nach Voraussetzung existieren nun Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, sodass

$$\begin{aligned} c_n &\rightarrow \chi_B && \text{in } L^p(I) && (n \rightarrow \infty), \\ d_n &\rightarrow x && \text{in } X && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(I; X)} &= \|x \chi_B - c_n d_n\|_{L^p(I; X)} \\ &\leq \|x - d_n\|_X \|\chi_B\|_{L^p(I; X)} \\ &\quad + \|d_n\|_X \|\chi_B - c_n\|_{L^p(I)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad \square$$

Beweis (von Korollar 2.13). 1. Inklusionen: (Übung).

2. Dichtheit: Folgt aus Korollar 2.11 wegen Bemerkung 2.12. \square

Theorem 2.14 (Separabilität von $L^p(I; X)$)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) $L^p(I; X)$ ist separabel;
- (ii) $L^p(I)$ ist separabel (d.h. $p < \infty$) und X ist separabel.

Beweis. Zu $(ii) \Rightarrow (i)$. Da $L^p(I)$ separabel ist, existiert eine abzählbare und dichte Teilmenge $C \subseteq L^p(I)$. Da X separabel ist, existiert eine abzählbare und dichte Teilmenge $D \subseteq X$. Laut Korollar 2.11 ist dann die spezielle Teilmenge $M(C, D)$ dicht in $L^p(I; X)$. Da $M(C, D)$ außerdem abzählbar ist, folgt schließlich die Separabilität von $L^p(I; X)$.

Zu $(i) \Rightarrow (ii)$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} A &:= \left(x \mapsto \lambda^1(S)^{-\frac{1}{p}} \chi_S x \right): X \rightarrow L^p(I; X), \\ B &:= (f \mapsto x_0 f): L^p(I) \rightarrow L^p(I; X), \end{aligned}$$

wobei $S \subseteq I$ Lebesgue-messbar ist mit $\lambda^1(S) \in (0, \infty)$ und $x_0 \in X$ mit $\|x_0\|_X = 1$. Da $L^p(I; X)$ separabel ist, sind die Bilder $R(A), R(B) \subseteq L^p(I; X)$ ebenfalls separabel. Da die Abbildungen $A: X \rightarrow L^p(I; X)$ und $B: L^p(I) \rightarrow L^p(I; X)$ Isometrien sind (Übung), müssen X und $L^p(I)$ ebenfalls separabel sein. \square

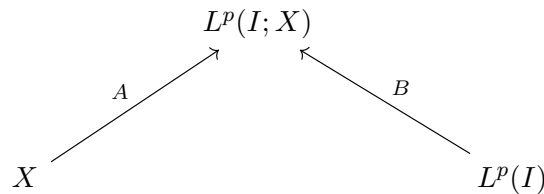


Abbildung 2.1: Abbildungsdiagramm zum Beweis von Theorem 2.14.

Satz 2.15 (Glättung mittels Faltung)

Sei $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, und $p \in [1, \infty]$. Bezeichne weiter $\mathcal{E}_I: L^p(I; X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}; X)$ den Null-Fortsetzungsoperator, für alle $u \in L^p(I; X)$ und fast alle $t \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\mathcal{E}_I u)(t) := \begin{cases} u(t) & \text{falls } t \in I, \\ 0 & \text{falls } t \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

Dann definieren wir den Faltungsglättungsoperator $\mathcal{S}_I^h: L^p(I; X) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; X)$ für alle $u \in L^p(I; X)$ durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_I^h u)(t) &:= (\omega_h * \mathcal{E}_I u)(t) \\ &:= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s) \, ds, \end{aligned}$$

wobei $\omega_h \in C_0^\infty(-h, h)$, $h > 0$, eine Familie von normierten Standardglättern ist, d.h.

$$\omega_h(t) := \frac{1}{h} \omega\left(\frac{t}{h}\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } h > 0,$$

wobei $\omega \in C_0^\infty((-1, 1); \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \omega(s) \, ds = 1$. Dann ist $\mathcal{S}_I^h: L^p(I; X) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; X)$ wohldefiniert, linear und es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $u \in L^p(I; X)$ gilt, dass

$$\text{supp}(\mathcal{S}_I^h u) \subseteq [-h, T+h] \quad \text{für alle } h > 0.$$

(ii) Für alle $u \in L^p(I; X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{S}_I^h u\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \leq \|u\|_{L^p(I; X)} \quad \text{für alle } h > 0.$$

(iii) Falls $p < \infty$, dann gilt für alle $u \in L^p(I; X)$, dass

$$\mathcal{S}_I^h u \rightarrow u \quad \text{in } L^p(I; X) \quad (h \rightarrow 0).$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit des Faltungsglättungsoperators, d.h. dass $\mathcal{S}_I^h u \in C^\infty(\mathbb{R}; X)$ für alle $u \in L^p(I; X)$, folgt wie im klassischen Fall aus Standardresultaten über Parameterintegrale und den Eigenschaften der Faltung. Die Linearität ist evident. Daher konzentrieren wir uns auf den Beweis von (i)–(iii):

Zu (i). Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-h, T+h]$ gilt, dass $B_h^1(t) \subseteq \mathbb{R} \setminus I$, d.h. wegen $\mathcal{E}_I u = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus I$ gilt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-h, T+h]$, dass

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{S}_I^h u)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s) \, ds \\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s)(\mathcal{E}_I u)(s) \, ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } X.$$

Zu (ii). Wegen der Definition der $L^p(I; X)$ -Norm (cf. Definition 2.1) und der klassischen L^p -Stabilität der Faltung mit Konstante 1 folgt im Fall $p \in (1, \infty)$, dass

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}_I^h u\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} &= \|\omega_h * \mathcal{E}_I u\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) (\mathcal{E}_I u)(s) \, ds \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \|(\mathcal{E}_I u)(s)\|_X \, ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|(\omega_h * \|\mathcal{E}_I u\|_X)(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\leq \|(\mathcal{E}_I u)(\cdot)\|_X \|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &= \|\mathcal{E}_I u\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \\
 &= \|u\|_{L^p(I; X)}.
 \end{aligned}$$

Der Fall $p = \infty$ folgt analog (Übung).

Zu (iii). Für alle $v \in C^0(\mathbb{R}; X)$ gilt wegen $\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \, ds = 1$ für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}_I^h v - v\|_{L^p(I; X)} &= \|\omega_h * \mathcal{E}_I v - v\|_{L^p(I; X)} \\
 &= \left(\int_I \left\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) (\mathcal{E}_I v)(s) \, ds - v(t) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_I \left\| \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) ((\mathcal{E}_I v)(s) - v(t)) \, ds \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\int_I \left(\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \|(\mathcal{E}_I v)(s) - v(t)\|_X \, ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq T^{\frac{1}{p}} \sup_{\substack{t, s \in [-h, T+h] \\ |t-s| \leq h}} \|v(t) - v(s)\|_X \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),
 \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $v: \mathbb{R} \rightarrow X$ auf Kompakta gleichmäßig stetig ist. Wegen Korollar 2.13 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u_\varepsilon \in C_c^0(I; X) \subseteq C^0(\mathbb{R}; X)$, sodass

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(I; X)} < \varepsilon.$$

Wir folgern daher für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned}
 \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{S}_I^h u - u\|_{L^p(I; X)} &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{S}_I^h(u - u_\varepsilon)\|_{L^p(I; X)} \\
 &\quad + \limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{S}_I^h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^p(I; X)} \\
 &\quad + \limsup_{h \rightarrow 0} \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(I; X)} \\
 &\leq 2 \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(I; X)} \leq 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Schließlich folgt, dass $\limsup_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{S}_I^h u - u\|_{L^p(I; X)} \leq 2\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). \square

Mit Hilfe von Satz 2.15 lässt sich das folgende Resultat beweisen.

Korollar 2.16 ($u \in L^\infty(I; X)$ & $ju \in C_\omega^0(I; Y) \Rightarrow u \in C_\omega^0(I; X)$)

Sei $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, seien X, Y Banach-Räume und $j: X \rightarrow Y$ eine Einbettung¹. Falls X reflexiv ist, dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für eine Funktion $u \in L^\infty(I; X)$ mit $ju \in C_\omega^0(I; Y)$, wobei

$$(ju)(t) := j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } t \in I,$$

gilt $u \in C_\omega^0(I; X)$. Insbesondere gilt, dass

$$(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } t \in I,$$

wobei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ mit $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(ii) Für eine Funktion $u \in L^\infty(I; X)$ mit $ju \in C_\omega^0(\bar{I}; Y)$, wobei

$$(ju)(t) := j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für alle } t \in \bar{I},$$

gilt $u \in C_\omega^0(\bar{I}; X)$.

Bemerkung 2.17

Ist $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, und sind X, Y Banach-Räume, sodass $X \hookrightarrow Y$, dann gilt laut Korollar 1.34, dass $C_\omega^0(\bar{I}; X) \subseteq L^\infty(I; X)$. Da wegen $X \hookrightarrow Y$ ² ebenfalls $C_\omega^0(\bar{I}; X) \subseteq C_\omega^0(\bar{I}; Y)$ gilt, folgt daher, dass

$$C_\omega^0(\bar{I}; X) \subseteq L^\infty(I; X) \cap C_\omega^0(\bar{I}; Y).$$

Ist X zusätzlich reflexiv, dann folgt zusammen mit Korollar 2.16 schließlich, dass

$$C_\omega^0(\bar{I}; X) = L^\infty(I; X) \cap C_\omega^0(\bar{I}; Y).$$

Um Korollar 2.16 beweisen zu können, erweist sich das folgende Resultat aus der Funktionalanalysis als nützlich.

Lemma 2.18

Seien X, Y Banach-Räume und $j: X \rightarrow Y$ eine Einbettung. Falls X reflexiv ist, dann folgt für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ und ein Element $x \in X$ aus

$$jx_n \rightarrow jx \quad \text{in } Y \quad (n \rightarrow \infty),$$

dass

$$x_n \rightarrow x \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis. (Übung). □

¹Das heißt $j: X \rightarrow Y$ ist linear, stetig und injektiv.

²Das heißt $X \subseteq Y$ und $\text{id}_X: X \rightarrow Y$ ist eine Einbettung.

Beweis (von Korollar 2.16). Zu (i).

1. Schritt: ($u(t) \in X$ für alle $t \in I$): Laut Satz 2.15(ii) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \bar{I}$, dass

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)\|_X &\leq \|\mathcal{S}_I^{h_n} u\|_{C_b^0(I; X)} \\ &= \|\mathcal{S}_I^{h_n} u\|_{L^\infty(I; X)} \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(I; X)}, \end{aligned}$$

wobei wir im Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass $\mathcal{S}_I^h u \in C^0(\bar{I}; X)$. Insbesondere ist $((\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ für alle $t \in \bar{I}$ beschränkt. Da X reflexiv ist, existiert zu jedem $t \in \bar{I}$ eine Teilfolge $(n_k^t)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $u_t \in X$, sodass

$$(\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}} u)(t) \rightharpoonup u_t \quad \text{in } X \quad (k \rightarrow \infty).$$

Gleichzeitig gilt wegen Proposition 1.21 für alle $g \in Y^*$ und $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} \langle g, j((\mathcal{S}_I^h u)(t)) \rangle_Y &= \langle g, (\mathcal{S}_I^h j u)(t) \rangle_Y \\ &= \left\langle g, \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s) (\mathcal{E}_I j u)(s) \, ds \right\rangle_Y \\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \langle g, (\mathcal{E}_I j u)(s) \rangle_Y \, ds \\ &= \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \mathcal{E}_I(\langle g, j u(\cdot) \rangle_Y)(s) \, ds \\ &= (\mathcal{S}_I^h(\langle g, j u(\cdot) \rangle_Y))(t) \\ &\rightarrow \langle g, j u(t) \rangle_Y \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\langle g, u(\cdot) \rangle \in C^0(I)$ und dass für alle $t \in I$ und $h \in (0, \min\{t, T-t\})$, d.h. $B_h^1(t) \subseteq I$, gilt, dass

$$\int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \mathcal{E}_I(\langle g, u(\cdot) \rangle_Y)(s) \, ds = \int_{B_h^1(t)} \omega_h(t-s) \langle g, u(s) \rangle_Y \, ds.$$

Mit anderem Worten gilt für alle $t \in I$, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_n} j u)(t) \rightharpoonup (j u)(t) \quad \text{in } Y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da gleichzeitig für alle $t \in I$ gilt, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}} u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_{n_k^t}} j u)(t) \rightharpoonup j(u_t) \quad \text{in } Y \quad (k \rightarrow \infty),$$

folgt aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts, dass $(ju)(t) = j(u_t)$ in Y für alle $t \in I$. Die Injektivität von $j: X \rightarrow Y$ liefert weiter, dass $u(t) = u_t \in X$ für alle $t \in I$. Insbesondere erhalten wir dann für alle $t \in I$, dass

$$j((\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)) = (\mathcal{S}_I^{h_n} ju)(t) \rightharpoonup j(u(t)) \quad \text{in } Y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Schließlich folgern wir mit Lemma 2.18 für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t) &\rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty), \\ \|u(t)\|_X &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{S}_I^{h_n} u)(t)\|_X \leq \|u\|_{L^\infty(I; X)}. \end{aligned}$$

2. Schritt: $(u \in C_\omega^0(I; X))$: Seien $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ und $t^* \in I$ so, dass

$$t_n \rightarrow t^* \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|u(t_n)\|_X \leq \|u\|_{L^\infty(I; X)},$$

d.h. $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ist beschränkt. Da wegen $ju \in C_\omega^0(I; Y)$ gleichzeitig gilt, dass

$$j(u(t_n)) \rightharpoonup j(u(t)) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty),$$

folgern wir mit Lemma 2.18, dass

$$u(t_n) \rightharpoonup u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty),$$

d.h. $u \in C_\omega^0(I; X)$.

Zu (ii). Wir betrachten die durch Spiegelung fortgesetzte Funktion $\hat{u}: 3I := (-T, 2T) \rightarrow X$, definiert durch

$$\hat{u}(t) := \begin{cases} u(-t) & \text{falls } t \in [-T, 0), \\ u(t) & \text{falls } t \in \bar{I}, \\ u(2t - T) & \text{falls } t \in (T, 2T]. \end{cases}$$

Dann gilt, dass $\hat{u} \in L^\infty(3I; X)$ und $j\hat{u} \in C_\omega^0(3I; Y)$ (Übung), sodass mit (i) folgt, dass $\hat{u} \in C_\omega^0(3I, X)$ und damit $u = \hat{u}|_{\bar{I}} \in C_\omega^0(\bar{I}; X)$. \square

2.4 Beziehung zu Lebesgue-Räumen auf Zeit-Raum-Zylindern

In diesem Abschnitt untersuchen wir kurz den Bochner–Lebesgue-Raum $L^p(I; L^p(\Omega))$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge, zu seiner Beziehung zum Lebesgue-Raum $L^p(I \times \Omega)$. Hierbei wird der Produktraum $I \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ meistens als *Zeit-Raum-Zylinder* bezeichnet.

Satz 2.19 (Beziehung zwischen $L^p(I; L^p(\Omega))$ und $L^p(I \times \Omega)$)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Falls $p \in [1, \infty)$, dann ist die Abbildung $\widetilde{(\cdot)}: L^p(I \times \Omega) \rightarrow L^p(I; L^p(\Omega))$, für alle $u \in L^p(I \times \Omega)$ definiert durch

$$\widetilde{u}(t) := u(t, \cdot) \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

ein isometrischer Isomorphismus.

- (ii) Falls $p = \infty$, dann ist die (inverse) Abbildung $\widetilde{(\cdot)}^{-1}: L^\infty(I; L^\infty(\Omega)) \rightarrow L^\infty(I \times \Omega)$, für alle $\tilde{u} \in L^\infty(I; L^\infty(\Omega))$ definiert durch

$$u(t, x) := [\tilde{u}(t)](x) \quad \text{für f.a. } (t, x)^\top \in I \times \Omega,$$

eine Isometrie.

Bemerkung 2.20

In Beispiel 1.40 haben wir bereits eine Funktion kennen gelernt, die in $L^\infty((0, 1)) \times (0, 1)$ liegt, aber nicht in $L^\infty((0, 1); L^\infty(0, 1))$, da sich nicht fast separabelwertig und damit nicht Bochner-messbar. Daher ist die Abbildung in Satz 2.19(ii) nur eine Isometrie und kein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Zu (i). 1. *Wohldefiniertheit und Isometrie:* Sei $u \in L^p(I \times \Omega)$ beliebig, aber fest. Wir wollen zeigen, dass $\tilde{u} \in L^p(I; L^p(\Omega))$. Zunächst stellen wir fest, dass nach dem Satz von Fubini–Tonelli (cf. [Els09, §2, Satz 2.1, S. 175]) aus $|u|^p \in L^1(I \times \Omega)$ folgt, dass $|u(t, \cdot)|^p \in L^1(\Omega)$ für fast alle $t \in I$ mit

$$\int_I \left(\int_\Omega |u(t, x)|^p dx \right) dt = \int_{I \times \Omega} |u(t, x)|^p dt dx.$$

Mit anderen Worten gilt $\tilde{u}(t) \in L^p(\Omega)$ für fast alle $t \in I$ mit

$$\int_I \|\tilde{u}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt = \int_{I \times \Omega} |u(t, x)|^p dt dx < \infty, \quad (2.21)$$

sodass nur noch die Bochner-Messbarkeit zu zeigen bleibt:

Da $L^p(\Omega)$ separabel ist, reicht es laut dem Satz von Pettis (cf. Satz 1.31) zu zeigen, dass $\tilde{u}: I \rightarrow L^p(\Omega)$ schwach messbar ist. Sei dazu $f \in (L^p(\Omega))^*$ beliebig, aber fest. Weiter sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen, sodass $I_n \subseteq I_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Dann gilt, dass $(f \chi_{I_n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; (L^p(\Omega))^*) \subseteq L^{p'}(I; (L^p(\Omega))^*)$. Nach der Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3) gilt, dass $(\langle f \chi_{I_n}(\cdot), \tilde{u}(\cdot) \rangle_{L^p(\Omega)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(I)$, d.h. insbesondere gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\langle f \chi_{I_n}(\cdot), \tilde{u}(\cdot) \rangle_{L^p(\Omega)} = \langle f, \tilde{u}(\cdot) \chi_{I_n}(\cdot) \rangle_{L^p(\Omega)} \in L^0(I)$.

Mit anderen Worten ist $(\tilde{u}\chi_{I_n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^0(I; L^p(\Omega))$. Da auf der anderen Seite gilt, dass

$$\tilde{u}(t)\chi_{I_n}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

folgt aus Korollar 1.37, dass $\tilde{u} \in L^0(I; L^p(\Omega))$ und mit (2.21), dass $\tilde{u} \in L^p(I; L^p(\Omega))$ mit

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(I; L^p(\Omega))} = \|u\|_{L^p(I \times \Omega)}, \quad (2.22)$$

d.h. die Abbildung $(\cdot): L^p(I \times \Omega) \rightarrow L^p(I; L^p(\Omega))$ ist wohldefiniert und eine Isometrie.

1. Surjektivität: Sei $U \in L^p(I; L^p(\Omega))$ beliebig, aber fest. Nach Korollar 2.11 existiert eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M(C_c^\infty(I), C_c^\infty(\Omega))$, sodass

$$\tilde{u}_n \rightarrow U \quad \text{in } L^p(I; L^p(\Omega)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wir definieren die Folge $u_n: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$u_n(t, x) := [\tilde{u}_n(t)](x) \quad \text{für f.a. } (t, x)^\top \in I \times \Omega.$$

Da die Folgeglieder von $\tilde{u} \in L^p(I; L^p(\Omega))$ Linearkombinationen von Elementen aus $C_c^\infty(I)$ und $C_c^\infty(\Omega)$ sind, gilt insbesondere, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(I \times \Omega)$ (Übung). Da $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; L^p(\Omega))$ eine Cauchy-Folge ist, folgt aus (2.22), dass auch $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(I \times \Omega)$ eine Cauchy-Folge ist. Da $L^p(I \times \Omega)$ ein Banach-Raum ist, existiert ein Element $u \in L^p(I \times \Omega)$, sodass

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p(I \times \Omega) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen der Isometrieeigenschaft gilt weiter, dass $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ in $L^p(I; L^p(\Omega))$ ($n \rightarrow \infty$). Die Eindeutigkeit des Grenzwert liefert, dass $U = \tilde{u}$ in $L^p(I; L^p(\Omega))$, d.h. die Abbildung $(\cdot): L^p(I \times \Omega) \rightarrow L^p(I; L^p(\Omega))$ ist surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus. Zu (ii). Sei $\tilde{u} \in L^\infty(I; L^\infty(\Omega))$ beliebig, aber fest. Nach Definition 2.1 und Definition 1.2 existiert eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; L^\infty(\Omega))$, sodass

$$\tilde{u}_n(t) \rightarrow \tilde{u}(t) \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Wir definieren die Folge $u_n: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$u_n(t, x) := [\tilde{u}_n(t)](x) \quad \text{für f.a. } (t, x)^\top \in I \times \Omega.$$

Dann gilt, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^\infty(I \times \Omega)$ (Übung). Insbesondere existiert (cf. [Bré11, Theorem IV.9, S. 58]) eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und eine Lebesgue-messbare Menge $N \subseteq I \times \Omega$ mit $\lambda^{d+1}(N) = 0$, sodass $(u_{n_k}(t, x))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für fast alle $(t, x)^\top \in I \times \Omega$ eine Cauchy-Folge ist. Insbesondere existiert zu jedem $(t, x)^\top \in (I \times \Omega) \setminus N$ ein $u_{(t, x)^\top} \in \mathbb{R}$, sodass

$$u_{n_k}(t, x) \rightarrow u_{(t, x)^\top} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Definiere wir dann die Funktion $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für alle $(t, x)^\top \in I \times \Omega$, durch

$$u(t, x) := \begin{cases} u_{(t, x)^\top} & \text{falls } (t, x)^\top \in (I \times \Omega) \setminus N, \\ 0 & \text{falls } (t, x)^\top \in N, \end{cases}$$

dann ist $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als f.ü. Grenzwert Lebesgue-messbarer Funktionen selbst Lebesgue-messbar, d.h. $u \in L^0(I \times \Omega)$. Die Isometrieeigenschaft folgt aus $|u(t, x)| = |[\tilde{u}(t)](x)| \leq \|\tilde{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty(I; L^\infty(\Omega))}$ und $|[\tilde{u}(t)](x)| = |u(t, x)| \leq \|u\|_{L^\infty(I \times \Omega)}$ für fast alle $t \in I$. \square

3 Charakterisierung der Dualräume und Reflexivität

3.1 Charakterisierung der Dualräume

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $1 \leq p < \infty$ so wissen wir, dass wir den Dualraum $(L^p(\Omega))^*$ von $L^p(\Omega)$ mit dem Raum $L^{p'}(\Omega)$ identifizieren können. Genauer ist die sogenannte *Riesz-Abbildung* $R: L^{p'}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^*$, für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $u \in L^p(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Rf, u \rangle_{(L^p(\Omega))^*} := \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx,$$

ein isometrischer Isomorphismus, d.h. für alle $u^* \in (L^p(\Omega))^*$ existiert ein eindeutiges $f \in L^{p'}(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} u^* &= Rf \quad \text{in } (L^p(\Omega))^*, \\ \|u^*\|_{(L^p(\Omega))^*} &= \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ein analoges Resultat wollen wir für Bochner–Lebesgue-Räume beweisen. Die erste Idee dabei ist, die wir bereits für die Hölder'sche Ungleichung (cf. Satz 2.3) ausgenutzt haben, besteht darin skalare Multiplikation $f(\cdot)u(\cdot)$ durch die duale Paarung $\langle f(\cdot), u(\cdot) \rangle_X$ zu ersetzen. Insbesondere folgt aus Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3) bereits die Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit (mit Konstante 1) der Riesz-Abbildung für Bochner–Lebesgue-Räume.

Korollar 3.1 (Riesz-Abbildung)

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist die Riesz-Abbildung $R_X: L^{p'}(I, X^*) \rightarrow (L^p(I; X))^*$, für alle $f \in L^{p'}(I; X^*)$ und $u \in L^p(I; X)$ definiert durch

$$\langle R_X f, u \rangle_{(L^p(I; X))^*} := \int_I \langle f(t), u(t) \rangle_X \, dt,$$

wohldefiniert, linear und Lipschitz-stetig mit Konstante kleiner gleich 1, d.h. für alle $f \in L^{p'}(I, X^*)$ gilt, dass

$$\|R_X f\|_{(L^p(I; X))^*} \leq \|f\|_{L^{p'}(I, X^*)}.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 2.3. □

Das folgende Theorem zeigt unter welchen Voraussetzungen an den Raum X die Riesz-Abbildung für Bochner–Lebesgue-Räume (cf. Korollar 3.1) ein isometrischer Isomorphismus ist.

Theorem 3.2 (Charakterisierung von $(L^p(I; X))^*$)

Sei $p \in [1, \infty)$ und X reflexiv oder X^* separabel. Dann ist $R_X: L^{p'}(I, X^*) \rightarrow (L^p(I; X))^*$ ein isometrischer Isomorphismus, d.h. für alle $u^* \in (L^p(I; X))^*$ existiert ein eindeutiges $f \in L^{p'}(I, X^*)$, sodass

$$\begin{aligned} u^* &= R_X f \quad \text{in } (L^p(I; X))^*, \\ \|u^*\|_{(L^p(I; X))^*} &= \|f\|_{L^{p'}(I, X^*)}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [Edw65, Chapter 8, Theorem 8.20.3, p. 606 (für X^* separabel) & Theorem 8.20.5, p. 607 (für X reflexiv)]. \square

3.2 Reflexivität

Mit Hilfe von Theorem 3.2 können wir nun die anfangs gestellte Frage nach der Reflexivität von Bochnerräumen beantworten.

Theorem 3.3 (Reflexivität von $L^p(I; X)$)

Sei $p \in (1, \infty)$ und X reflexiv. Dann ist $L^p(I; X)$ reflexiv.

Beweis. Ziel: Die kanonische Isometrie $J_{L^p(I; X)}: L^p(I; X) \rightarrow (L^p(I; X))^{**}$, für alle $u \in L^p(I; X)$ und $u^* \in (L^p(I; X))^*$ definiert durch

$$\langle J_{L^p(I; X)} u, u^* \rangle_{(L^p(I; X))^*} := \langle u^*, u \rangle_{L^p(I; X)}.$$

ist surjektiv.

Beweis des Ziels: Da X reflexiv ist, sind die folgenden Operatoren isometrische Isomorphismen:

- Da X reflexiv ist, die kanonische Isometrie $J_X: X \rightarrow X^{**}$, für alle $x \in X$ und $x^* \in X^*$, definiert durch

$$\langle J_X x, x^* \rangle_{X^*} := \langle x^*, x \rangle_X,$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dann ist insbesondere auch der linear-induzierte Operator

$$\mathcal{J}_X: L^p(I; X) \rightarrow L^p(I, X^{**}),$$

für alle $u \in L^p(I; X)$ definiert durch

$$(J_X u)(t) := J_X(u(t)) \quad \text{in } X^{**} \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

ein isometrischer Isomorphismus (Übung).

- Nach Theorem 3.2 ist die Riesz-Abbildung $R_X: L^{p'}(I, X^*) \rightarrow (L^p(I; X))^*$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann ist die Inverse $R_X^{-1}: (L^p(I; X))^* \rightarrow L^{p'}(I, X^*)$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Der Satz von Schauder (cf. ??) liefert weiter, dass der adjungierte Operator

$$(R_X^{-1})^*: (L^{p'}(I, X^*))^* \rightarrow (L^p(I; X))^{**}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

- Nach Theorem 3.2 ist die Riesz-Abbildung

$$R_{X^*}: L^p(I, X^{**}) \rightarrow (L^{p'}(I, X^*))^*$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen um zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^p(I; X) & \xrightarrow{J_{L^p(I; X)}} & (L^p(I; X))^{**} \\ \downarrow \mathcal{J}_X & & \uparrow (R_X^{-1})^* \\ L^p(I, X^{**}) & \xrightarrow{R_{X^*}} & (L^{p'}(I, X^*))^* \end{array}$$

Abbildung 3.1: Kommutierendes Diagramm

kommutiert. In der Tat gilt für alle $u^* \in (L^p(I; X))^*$ und $u \in L^p(I; X)$, dass

$$\begin{aligned} \langle J_{L^p(I; X)} u, u^* \rangle_{(L^p(I; X))^*} &= \langle u^*, u \rangle_{L^p(I; X)} \\ &= \int_I \langle (R_X^{-1} u^*)(t), u(t) \rangle_X dt \\ &= \int_I \langle (J_X u)(t), (R_X^{-1} u^*)(t) \rangle_{X^*} dt \\ &= \langle R_{X^*}(J_X u), R_X^{-1} u^* \rangle_{L^{p'}(I, X^*)} \\ &= \langle (R_X^{-1})^* R_{X^*}(\mathcal{J}_X u), R_X^{-1} u^* \rangle_{(L^p(I; X))^*} \\ &= \langle ((R_X^{-1})^* \circ R_{X^*} \circ \mathcal{J}_X) u, u^* \rangle_{(L^p(I; X))^*}, \end{aligned}$$

d.h. die kanonische Isometrie

$$J_{L^p(I; X)} = (R_X^{-1})^* \circ R_{X^*} \circ \mathcal{J}_X: L^p(I; X) \rightarrow (L^p(I; X))^{**}$$

ist als Verknüpfung isometrischer Isomorphismen selbst ein isometrischer Isomorphismus. \square

Theorem 3.4 (Gleichmäßige Konvexität)

Sei $p \in (1, \infty)$ und X gleichmäßig konvex. Dann ist $L^p(I; X)$ gleichmäßig konvex.

Beweis. Siehe [GGZ74, Kapitel IV, Satz 1.15, p. 136]. \square

4 Verallgemeinerte Zeitableitung und Bochner–Sobolev–Räume

Für das gesamte Kapitel sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

4.1 Verallgemeinerte Zeitableitung

Definition 4.1 (Verallgemeinerte Zeitableitung)

Seien X, Y Banachräume, sodass eine Einbettung $j: X \rightarrow Y$ existiert. Dann hat eine Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(I; X)$ eine verallgemeinerte Zeitableitung (bzgl. j), falls eine Funktion $v \in L^1_{\text{loc}}(I; Y)$ existiert, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$j\left(-\int_I u(t)\varphi'(t) dt\right) = \int_I v(t)\varphi(t) dt \quad \text{in } Y.$$

Wir setzen dann $\frac{d_j u}{dt} := v$ als die verallgemeinerte Zeitableitung (bzgl. j) und $W^{1,1}_{j,\text{loc}}(I; X, Y)$ als den Raum aller verallgemeinerte zeitlich differenzierbaren Funktionen auf I (bzgl. j). Im Fall $X = Y$ und $j = \text{id}_X$, setzen wir $\frac{du}{dt} := \frac{d_{\text{id}_X} u}{dt}$ und $W^{1,1}_{\text{loc}}(I; X) := W^{1,1}_{\text{id}_X, \text{loc}}(I; X, X)$.

Bemerkung 4.2 (Schwache Zeitableitung)

Die verallgemeinerte Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 ist von der schwachen Zeitableitung zu unterscheiden: genauer hat eine Funktion $u: I \rightarrow X$ eine schwache Zeitableitung (bzgl. j) in $t \in I$, falls ein $d_t^j u(t) \in Y$ existiert, sodass

$$j\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right) \rightarrow d_t^j u(t) \quad \text{in } Y \quad (h \rightarrow 0, t+h \in I).$$

Lemma 4.3 (Eindeutigkeit/Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Zeitableitung)

Die verallgemeinerte Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 ist eindeutig bestimmt und damit wohldefiniert.

Die Eindeutigkeit und damit Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 beruht auf dem folgenden Analogon der Fundamentallemmas der Variationsrechnung für Funktionen aus $L^1_{\text{loc}}(I; X)$.

Lemma 4.4 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(I; X)$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$\int_I u(t)\varphi(t) dt = 0 \quad \text{in } X.$$

Dann gilt $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in I$.

Beweis. Sei $K \subseteq I$ ein kompaktes Intervall und setze

- $\delta := \frac{1}{2} \text{dist}(K, \mathbb{R} \setminus I)$;
- $a := \inf K - \delta$;
- $b := \sup K + \delta$.

Dann gilt für alle $h \in (0, \delta)$ und $t \in K$ wegen $\omega_h(t - \cdot) \in C_0^\infty(-h, h) \subseteq C_c^\infty(a, b)$, dass

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{S}_{(a,b)}^h u)(t) &= \int_{B_h^1(t)} (\mathcal{E}_{(a,b)} u)(s) \omega_h(t - s) \, ds \\ &= \int_a^b u(s) \omega_h(t - s) \, ds \\ &= \int_I u(s) \omega_h(t - s) \, ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } X.$$

Wegen $\mathcal{S}_{(a,b)}^h u \rightarrow u|_{(a,b)}$ in $L^1((a, b); X)$ ($h \rightarrow 0$) (cf. Satz 2.15(iii)) folgt, dass $\mathcal{S}_{(a,b)}^h u|_K = 0 \rightarrow u|_K$ in $L^1(K; X)$ ($h \rightarrow 0$) für f.a. $t \in K$ und somit $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in K$ und alle kompakten Intervalle $K \subseteq I$. Schließlich folgt, dass $u(t) = 0$ in X für f.a. $t \in I$. \square

Beweis (von Lemma 4.3). Seien $v_i \in L_{\text{loc}}^1(I; Y)$, $i = 1, 2$, sodass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ und $i = 1, 2$ gilt, dass

$$j \left(- \int_I u(t) \varphi'(t) \, dt \right) = \int_I v_i(t) \varphi(t) \, dt \quad \text{in } Y.$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\int_I (v_1(t) - v_2(t)) \varphi(t) \, dt = 0 \quad \text{in } Y.$$

Das Fundamentallema (cf. Lemma 4.4) liefert unmittelbar, dass $v_1 = v_2$ in $L_{\text{loc}}^1(I; Y)$. \square

Die folgende Proposition zeigt, dass das Verschwinden der verallgemeinerten Zeitableitung im Sinne von Definition 4.1 (wie im Fall der klassischen Zeitableitung im Sinne von Definition 1.25) die Konstanz der Funktion zur Folge hat.

Lemma 4.5 ($\frac{d_j u}{dt} = 0 \Rightarrow u = \text{const}$)

Seien X, Y Banachräume, sodass eine Einbettung $j: X \rightarrow Y$ existiert. Weiter sei $u \in W_{j, \text{loc}}^{1,1}(I; X, Y)$ mit verschwindender verallgemeinerter Zeitableitung $\frac{d_j u}{dt} = 0$ in $L_{\text{loc}}^1(I; Y)$, d.h. für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$j \left(\int_I u(t) \varphi'(t) \, dt \right) = 0 \quad \text{in } Y.$$

Dann existiert ein $u_0 \in X$, sodass $u(t) = u_0$ in X für f.a. $t \in I$.

Bemerkung 4.6

Wegen der Injektivität von $j: X \rightarrow Y$ verschwindet für eine Funktion $u \in W_{j,\text{loc}}^{1,1}(I; X, Y)$ die verallgemeinerte Zeitableitung (bzgl. j), d.h. es gilt $\frac{d_j u}{dt} = 0$ in $L_{\text{loc}}^1(I; Y)$, genau dann, wenn für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$\int_I u(t) \varphi'(t) dt = 0 \quad \text{in } X.$$

Beweis (von Lemma 4.5). Zunächst sehen wir ein, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ mit $\int_I \varphi(t) dt = 0$ gilt, dass

$$\int_I u(t) \varphi(t) dt = \int_I u(t) \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_{\inf I}^t \varphi(s) ds}_{\in C_c^\infty(I)} \right) dt = 0 \quad \text{in } X.$$

Definieren wir

$$u_0 := \int_I u(t) \eta(t) dt \in X, \quad \text{wobei } \eta \in C_c^\infty(I) \text{ mit } \int_I \eta(t) dt = 1,$$

dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\left. \begin{aligned} \int_I (u(t) - u_0) \varphi(t) dt &= \int_I u(t) \varphi(t) dt - \int_I \int_I u(s) \eta(s) \varphi(t) ds dt \\ &= \int_I u(s) \varphi(s) ds - \int_I u(s) \eta(s) \left(\int_I \varphi(t) dt \right) ds \\ &= \int_I u(s) \left(\underbrace{\varphi(s) - \eta(s) \int_I \varphi(t) dt}_{=: \psi \in C_c^\infty(I) \text{ mit } \int_I \psi(t) dt = 0} \right) ds \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } X.$$

Das Fundamentallemma (cf. Lemma 4.4) liefert dann, dass $u(t) = u_0$ in X für f.a. $t \in I$. \square

Lemma 4.7 (Beziehung zur klassischen Zeitableitung)

- (i) Konsistenz: Falls $u \in L_{\text{loc}}^1(I; X)$, sodass $ju \in C^1(I; Y)$, wobei $(ju)(t) := j(u(t))$ in Y für f.a. $t \in I$, dann gilt, dass $u \in W_{j,\text{loc}}^{1,1}(I; X, Y)$ und die klassische Zeitableitung stimmt mit der verallgemeinerten Zeitableitung überein.
- (ii) Produktregel: Für alle $u \in W_{j,\text{loc}}^{1,1}(I; X, Y)$ und $\eta \in C^\infty(I)$ gilt, dass

$$\frac{d_j(u\eta)}{dt} = \frac{d_j u}{dt} \eta + \frac{d\eta}{dt} ju \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(I; Y),$$

wobei $ju \in L_{\text{loc}}^1(I; Y)$ für f.a. $t \in I$ durch $(ju)(t) = j(u(t))$ in Y definiert ist.

Beweis. (Übung). \square

Der linear-induzierte Operator $\mathcal{A}: L_{\text{loc}}^1(I; X) \rightarrow L_{\text{loc}}^1(I; Y)$ (cf. Satz 1.21) ist stabil unter verallgemeinerter zeitlicher Differenzierbarkeit und kommutiert mit der verallgemeinerten Zeitableitung.

Satz 4.8 (Linear-induzierter Operator)

Sei $A: X \rightarrow Y$ ein linear und stetiger Operator. Dann ist der linear-induzierte Operator $\mathcal{A}: W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X) \rightarrow W_{\text{loc}}^{1,1}(I; Y)$, für alle $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t) = A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

ist wohldefiniert. Insbesondere gilt für alle $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$, dass

$$\frac{d\mathcal{A}u}{dt} = \mathcal{A}\left(\frac{du}{dt}\right) \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(I; Y),$$

d.h. der linear-induzierte Operator kommutiert mit der verallgemeinerten Zeitableitung (cf. Abbildung 4.1).

$$\begin{array}{ccc} W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & W_{\text{loc}}^{1,1}(I; Y) \\ \downarrow \frac{d\cdot}{dt} & & \downarrow \frac{d\cdot}{dt} \\ L_{\text{loc}}^1(I; X) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & L_{\text{loc}}^1(I; Y) \end{array}$$

Abbildung 4.1: Kommutatives Diagramm.

Beweis (von Satz 4.8). Sei $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$ beliebig, aber fest. Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ mit Definition 4.1 und Satz 1.21, dass

$$\left. \begin{aligned} - \int_I (\mathcal{A}u)(t) \varphi'(t) dt &= A\left(- \int_I u(t) \varphi'(t) dt\right) \\ &= A\left(\int_I \frac{du}{dt}(t) \varphi(t) dt\right) \\ &= \int_I \mathcal{A}\left(\frac{du}{dt}\right)(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \right\} \quad \text{in } Y,$$

d.h. $\mathcal{A}u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; Y)$ mit $\frac{d\mathcal{A}u}{dt} = \mathcal{A}\left(\frac{du}{dt}\right)$ in $L_{\text{loc}}^1(I; Y)$. □

Korollar 4.9

Seien X, Y Banach-Räume, sodass eine Einbettung $j: X \rightarrow Y$ existiert. Dann gilt für alle $u \in W_{\text{loc},j}^{1,1}(I; X, Y)$, dass $ju \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; Y)$ mit

$$\frac{dju}{dt} = \frac{dju}{dt} = j\left(\frac{du}{dt}\right) \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(I; Y),$$

wobei $ju \in L_{\text{loc}}^1(I; Y)$ für f.a. $t \in I$ durch $(ju)(t) = j(u(t))$ in Y definiert ist.

Beweis. (Übung). □

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Auch für Bochner-integrierbare Funktionen gilt der Zusammenhang zwischen absoluter Stetigkeit und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Definition 4.10 (Absolutstetigkeit, Vitali, 1905)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann heißt eine Funktion $u: \bar{I} \rightarrow X$ absolut stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jedes endliche System disjunkter Teilintervalle $[a_i, b_i] \subseteq \bar{I}$, $i = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, mit Gesamtlänge $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^m \|u(b_i) - u(a_i)\|_X < \varepsilon.$$

Dann bezeichnen wir mit $AC(\bar{I}; X)$ die Menge der absolut stetigen Funktionen auf \bar{I} mit Werten in X .

Bemerkung 4.11 (Beziehung zu anderen Stetigkeitsbegriffen)

(i) Ist $u: \bar{I} \rightarrow X$ Lipschitz stetig, d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq L |t - s| \quad \text{für alle } t, s \in I,$$

dann ist $u: \bar{I} \rightarrow X$ absolut stetig.

(ii) Ist $u: \bar{I} \rightarrow X$ absolut stetig, dann ist $u: \bar{I} \rightarrow X$ gleichmäßig stetig.

Satz 4.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil I)

Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Falls $v \in L^1_{\text{loc}}(I; X)$ und $t' \in I$, dann ist die Funktion $u_c: I \rightarrow X$, definiert durch

$$u_c(t) := \int_{t'}^t v(s) \, ds \quad \text{für alle } t \in I,$$

lokal absolut stetig, d.h. $u_c \in AC(K; X)$ für alle kompakten Intervalle $K \subseteq I$, und verallgemeinert zeitlich differenzierbar mit

$$\frac{du_c}{dt}(t) = v(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I. \quad (4.13)$$

(ii) Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, $v \in L^1(I; X)$ und $t' \in \bar{I}$, dann ist die Funktion $u_c: \bar{I} \rightarrow X$, definiert durch

$$u_c(t) := \int_{t'}^t v(s) \, ds \quad \text{für alle } t \in \bar{I},$$

absolut stetig, d.h. $u_c \in AC(\bar{I}; X)$, und verallgemeinert zeitlich differenzierbar mit (4.13).

Beweis. Zu (i).

1. Lokale Absolutstetigkeit: Sei $K \subseteq I$ ein kompaktes Intervall. Dann folgt die Absolutstetigkeit von $u_c: K \rightarrow X$ aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals, denn für jedes endliche System disjunkter Teilintervalle $[a_i, b_i] \subseteq K$, $i = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, gilt wegen Korollar 1.19(ii), dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|u_c(b_i) - u_c(a_i)\|_X &= \sum_{i=1}^m \left\| \int_{a_i}^{b_i} v(s) \, ds \right\|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} \|v(s)\|_X \, ds. \end{aligned}$$

2. Verallgemeinerte Differenzierbarkeit: Für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$\left. \begin{aligned} - \int_I u_c(t) \varphi'(t) \, dt &= - \int_I \left(\int_{t'}^t v(s) \, ds \right) \varphi'(t) \, dt \\ &= - \int_I \int_I \chi_{(t', \sup I)}(t) \chi_{(t', t)}(s) v(s) \varphi'(t) \, ds \, dt \\ &\quad + \int_I \int_I \chi_{(\inf I, t')}(t) \chi_{(t, t')}(s) v(s) \varphi'(t) \, ds \, dt \\ &= - \int_I \int_I \chi_{(t', \sup I)}(s) \chi_{(s, \sup I)}(t) v(s) \varphi'(t) \, ds \, dt \\ &\quad + \int_I \int_I \chi_{(\inf I, t')}(s) \chi_{(\inf I, s)}(t) v(s) \varphi'(t) \, ds \, dt \\ &= - \int_{t'}^{\sup I} v(s) \left(\int_s^{\sup I} \varphi'(t) \, dt \right) \, ds \\ &\quad + \int_{\inf I}^{t'} v(s) \left(\int_{\inf I}^s \varphi'(t) \, dt \right) \, ds \\ &= \int_{t'}^{\sup I} v(s) \varphi(s) \, ds + \int_{\inf I}^{t'} v(s) \varphi(s) \, ds \\ &= \int_I v(s) \varphi(s) \, ds. \end{aligned} \right\} \quad \text{in } X,$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen die Identitäten (Übung)

$$\begin{aligned} \chi_{(t', \sup I)}(t) \chi_{(t', t)}(s) &= \chi_{(t', \sup I)}(s) \chi_{(s, \sup I)}(t) \quad \text{für alle } t, s \in I, \\ \chi_{(\inf I, t')}(t) \chi_{(t, t')}(s) &= \chi_{(\inf I, t')}(s) \chi_{(\inf I, s)}(t) \quad \text{für alle } t, s \in I, \end{aligned}$$

und im vorletzten Gleichheitszeichen den klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Tatsache, dass φ einen kompakten Träger in I hat, ausgenutzt haben.

Zu (ii). Folgt analog zu (i) (Übung). \square

Satz 4.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil II)

Für jedes $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$ existiert ein eindeutiger stetiger Repräsentant $u_c \in C^0(I; X)$. Insbesondere gilt für alle $t, t' \in I$, dass

$$u_c(t) = u_c(t') + \int_{t'}^t \frac{du}{dt}(s) \, ds \quad \text{in } X. \quad (4.15)$$

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\frac{du}{dt} \in L^1(I; X)$, dann gilt, dass $u_c \in AC(\bar{I}; X)$ mit (4.15) für alle $t, t' \in \bar{I}$.

Beweis. 1. Fall: ($I \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt oder $\frac{du}{dt} \notin L^1(I; X)$). Sei zunächst $t' \in I$ beliebig, aber fest. Aus Satz 4.12(i) folgt, dass die Funktion $v: I \rightarrow X$, für alle $t \in I$ definiert durch

$$v(t) := \int_{t'}^t \frac{du}{dt}(s) \, ds,$$

lokal absolut stetig ist, in $W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$ liegt und

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I$$

erfüllt. Wegen der Linearität der verallgemeinerten Zeitableitung gilt, folgt zusammen mit Lemma 4.5, dass ein $u_0 \in X$ existiert, sodass $u(t) = u_0 + v(t)$ in X für f.a. $t \in I$. Da $v: I \rightarrow X$ lokal absolut stetig ist, ist $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(I; X)$ f.ü. gleich der stetigen Funktion $u_c := u_0 + v: I \rightarrow X$. Schließlich folgt wegen $u_c(t') = u_0 + v(t') = u_0$ in X , dass für alle $t, t' \in I$ gilt, dass

$$u_c(t) = u_0 + v(t) = u_c(t') + \int_{t'}^t \frac{du}{dt}(s) \, ds \quad \text{in } X.$$

2. Fall: ($I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und $\frac{du}{dt} \in L^1(I; X)$). Wir gehen analog zum vorherigen Fall vor, nutzen nun allerdings Satz 4.12(ii). □

Allgemeiner gilt

Satz 4.16 (von Kōmura, 1967)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und X reflexiv. Dann ist jedes $u \in AC(\bar{I}; X)$ für f.a. $t \in I$ klassisch differenzierbar mit Ableitung $\frac{du}{dt}(t) \in X$ und die resultierende Funktion $\frac{du}{dt}: I \rightarrow X$ ist Bochner-integrierbar. Insbesondere gilt für alle $t', t \in \bar{I}$, dass

$$u(t) = u(t') + \int_{t'}^t \frac{du}{dt}(s) \, ds \quad \text{in } X.$$

Beweis. Siehe [Bré73, Cor. A.2]. □

4.3 Bochner–Sobolev–Räume

Definition 4.17 (Bochner–Sobolev–Räume)

Seien X, Y Banach-Räume, $j: X \rightarrow Y$ eine Einbettung und $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann ist der Bochner–Sobolev-Raum (bzgl. j) definiert durch

$$W_j^{1,p,q}(I; X, Y) := \left\{ u \in L^p(I; X) \mid \exists \frac{d_j u}{dt} \in L^q(I; Y) \right\}.$$

Falls $X = Y$ und $j = \text{id}_X$, dann setzen wir

$$W^{1,q}(I, X) := W_{\text{id}_X}^{1,p,q}(I; X, Y).$$

Aus der Vollständigkeit von Bochner–Lebesgue-Räumen (cf. Theorem 2.5) und der Stetigkeit von $\frac{d_j}{dt}$ folgt direkt die Vollständigkeit von Bochner–Sobolev-Räumen.

Theorem 4.18 (Vollständigkeit)

Für $p, q \in [1, \infty]$ ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ausgestattet mit der Norm

$$\| \cdot \|_{W_j^{1,p,q}(I; X, Y)} := \| \cdot \|_{L^p(I; X)} + \left\| \frac{d_j \cdot}{dt} \right\|_{L^q(I; Y)},$$

ein Banach-Raum.

Beweis. 1. Vektorraumeigenschaften: (Übung).

2. Vollständigkeit: Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ein Cauchy-Folge. Dann sind sowohl $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$ als auch $(\frac{d_j u_n}{dt})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^q(I; Y)$ Cauchy-Folgen. Da $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ vollständig sind (cf. Theorem 2.5), existieren $u \in L^p(I; X)$ und $v \in L^q(I; Y)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } L^p(I; X) && (n \rightarrow \infty), \\ \frac{d_j u_n}{dt} &\rightarrow v && \text{in } L^q(I; Y) && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\left. \begin{aligned} j \left(- \int_I u(t) \varphi'(t) dt \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} j \left(- \int_I u_n(t) \varphi'(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \frac{d_j u_n}{dt}(t) \varphi(t) dt \\ &= \int_I v(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \right\} \quad \text{in } Y,$$

d.h. $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ mit $\frac{d_j u}{dt} = v$ in $L^q(I; Y)$ und $u_n \rightarrow u$ in $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ($n \rightarrow \infty$). \square

Aus der Separabilität/Reflexivität von Bochner–Lebesgue-Räumen (cf. Theorem 2.14, Theorem 3.3) folgt direkt die Separabilität/Reflexivität von Bochner–Sobolev-Räumen.

Theorem 4.19 (Separabilität & Reflexivität)

Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für $p, q \in [1, \infty)$ und separable Banach-Räume X, Y ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ separabel.
- (ii) Für $p, q \in (1, \infty)$ und reflexive Banach-Räume X, Y ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ reflexiv.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass der Produktraum $\Sigma := L^p(I; X) \times L^q(I; Y)$ ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_\Sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, für alle $(u, v)^\top \in \Sigma$ definiert

$$\|(u, v)^\top\|_\Sigma := \|u\|_{L^p(I; X)} + \|v\|_{L^q(I; Y)},$$

ein Banach-Raum ist (Übung). Weiter stellen wir fest, dass $\Pi: W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \rightarrow \Sigma$, für alle $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ definiert durch

$$\Pi u := \left(u, \frac{d_j u}{dt} \right)^\top \quad \text{in } \Sigma,$$

eine lineare Isometrie ist. Insbesondere ist Bild $R(\Pi)$ ein Banach-Raum und die Abbildung $\Pi: W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \rightarrow R(\Pi)$ ein isometrischer Isomorphismus auf sein Bild.

Zu (i). Für $p, q \in [1, \infty)$ und separable X, Y , sind $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ separabel (cf. Theorem 2.14). Insbesondere ist dann auch der Produktraum Σ separabel und folglich das Bild $R(\Pi)$. Da Separabilität stabil unter Isomorphismen ist, ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ separabel.

Zu (ii). Für $p, q \in (1, \infty)$ und reflexive X, Y , sind $L^p(I; X)$ und $L^q(I; Y)$ reflexiv (cf. Theorem 2.14). Insbesondere ist dann auch der Produktraum Σ reflexiv und folglich das Bild $R(\Pi)$. Da Reflexivität stabil unter Isomorphismen ist, ist $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ reflexiv. \square

$$\begin{array}{ccc} W_j^{1,p,q}(I; X, Y) & \xrightarrow{\Pi} & R(\Pi) \subseteq \Sigma \\ & & \begin{array}{l} \nearrow \text{proj}_{L^p(I; X)} \\ \searrow \text{proj}_{L^q(I; Y)} \end{array} \\ & & \begin{array}{l} L^p(I; X) \\ L^q(I; Y) \end{array} \end{array}$$

Abbildung 4.2: Abbildungsdiagramm zum Beweis von Theorem 2.14.

Lemma 4.20 (Einbettung)

Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall ist, dann ist die aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (cf. Satz 4.14(ii)) resultierende Abbildung

$$(\cdot)_c: W^{1,1}(I; X) \rightarrow AC(\bar{I}; X) \subseteq C_b^0(I; X),$$

die jeder Funktion $u \in W^{1,1}(I; X)$ ihren absolut stetigen Repräsentanten $u_c \in AC(\bar{I}; X)$ zuweist, eine Einbettung. Insbesondere gilt für alle $u \in W^{1,1}(I; X)$, dass

$$\|u_c\|_{C_b^0(I; X)} \leq \frac{1}{|I|} \|u\|_{L^1(I; X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^1(I; X)}.$$

Beweis. (Übung). \square

4.4 Dichte Teilmengen

In diesem Abschnitt identifizieren wir einige wichtige dichte Teilmengen von Bochner–Sobolev–Räumen.

Lemma 4.21 (Spezielle dichte Teilmenge)

Sei $p \in [1, \infty)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Dann liegt die Menge

$$M(C^\infty(\bar{I}); D) := \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i d_i \mid n \in \mathbb{N}, \varphi_i \in C^\infty(\bar{I}), d_i \in D, i = 1, \dots, n \right\}$$

dicht in $W^{1,p}(I; X)$.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I; X)$ beliebig, aber fest. Dann existiert laut Korollar 2.11 und wegen der Dichtheit von D in X Folgen $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M(C_c^\infty(I); D)$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, sodass

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow \frac{du}{dt} && \text{in } L^p(I; X) && (n \rightarrow \infty), \\ d_n &\rightarrow u_c(0) && \text{in } X && (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei $u_c \in AC(\bar{I}; X)$ der absolut stetige Repräsentant von $u \in W^{1,p}(I; X) \hookrightarrow W^{1,1}(I; X)$ (da $\lambda^1(I) < \infty$) aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (cf. Satz 4.14) ist. Wir definieren $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I}; X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$u_n(t) := d_n + \int_{\inf I}^t v_n(s) \, ds \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in \bar{I}.$$

Dann gilt insbesondere, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M(C^\infty(\bar{I}); D)$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} d_i^n \eta_i^n(t) \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in I,$$

wobei $k_n \in \mathbb{N}$, $d_i^n \in D$ und $\eta_i^n \in C_c^\infty(I)$, $i = 1, \dots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{\inf I}^t v_n(s) \, ds = \sum_{i=1}^{k_n} d_i^n \underbrace{\left(\int_{\inf I}^t \eta_i^n(s) \, ds \right)}_{C^\infty(\bar{I})} \quad \text{in } X \quad \text{für alle } t \in \bar{I}.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (cf. Satz 4.14) folgt weiter, dass

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &\rightarrow \frac{du}{dt} && \text{in } L^p(I; X) && (n \rightarrow \infty), \\ u_n &= d_n + \int_{\inf I}^{(\cdot)} v_n(s) \, ds \rightarrow u_c(\inf I) + \int_{\inf I}^{(\cdot)} \frac{du}{dt}(s) \, ds = u_c && \text{in } C^0(\bar{I}; X) && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Nutzen wir, dass $C^0(\bar{I}; X) \hookrightarrow L^p(I; X)$ (da $\lambda^1(I) < \infty$), so folgt schließlich, dass $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(I; X)$ ($n \rightarrow \infty$), d.h. M liegt dicht in $W^{1,p}(I; X)$. \square

Theorem 4.22 (Fortsetzung durch Spiegelung)

Sei $I = (0, T)$, $0 < T < \infty$, $p, q \in [1, \infty]$ und $j: X \rightarrow Y$ eine Einbettung. Für $u \in L^p(I; X)$ definieren wir die Fortsetzung durch Spiegelung für alle $t \in 3I := (-T, 2T)$ durch

$$(\mathcal{F}_I u)(t) := \begin{cases} u(-t) & t \in (-T, 0), \\ u(t) & t \in [0, T], \\ u(2T - t) & t \in (T, 2T). \end{cases}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $\mathcal{F}_I: L^p(I; X) \rightarrow L^p(3I; X)$ ist wohldefiniert, linear und stetig.
- (ii) $\mathcal{F}_I^-: L^q(I; Y) \rightarrow L^q(3I; Y)$, für alle $v \in L^q(I; Y)$ und $t \in 3I$ definiert durch

$$(\mathcal{F}_I^- v)(t) := \begin{cases} -v(-t) & t \in (-T, 0), \\ v(t) & t \in [0, T], \\ -v(2T - t) & t \in (T, 2T), \end{cases}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig.

- (iii) $\mathcal{F}_I: W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \rightarrow W_j^{1,p,q}(3I; X, Y)$ ist wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$, dass

$$\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} = \mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) \quad \text{in } L^q(I; Y).$$

Beweis. Zu (i).

1. Wohldefiniertheit: Sei $u \in L^p(I; X)$ beliebig, aber fest.

1.1 Bochner-Messbarkeit: Wegen Definition 1.2 existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(I; X)$, sodass

$$s_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in I.$$

Mittels einer Fallunterscheidung folgt dann, dass $(\mathcal{F}_I s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(3I; X)$ und

$$(\mathcal{F}_I s_n)(t) \rightarrow (\mathcal{F}_I u)(t) \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für f.a. } t \in 3I,$$

d.h. $\mathcal{F}_I u \in L^0(3I; X)$.

1.2 p -Integrabilität: Wegen $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ folgt aus dem Transformationsatz, dass

$$\int_{3I} \|(\mathcal{F}_I u)(t)\|_X^p dt = 3 \int_I \|u(t)\|_X^p dt < \infty,$$

d.h. $\mathcal{F}_I u \in L^p(3I; X)$.

2. Linearität: Die Linearität folgt mit Hilfe einer Fallunterscheidung.

3. Stetigkeit: Für alle $u \in L^p(I; X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{F}_I u\|_{L^p(3I; X)} = 3^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I; X)}.$$

Zu (ii). Bis auf offensichtliche Anpassungen gehen wir analog zu (i) vor.

Zu (iii). Sei $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ beliebig, aber fest. Der linear induzierte Operator $j: L^1(I; X) \rightarrow L^1(I; Y)$ ist eine Einbettung und es gilt $ju \in W^{1,1}(I; Y)$ mit

$$\frac{d(ju)}{dt} = \frac{d_j u}{dt} \quad \text{in } L^1(I; Y). \quad (4.23)$$

Wegen Lemma 4.21 existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I}, Y)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow ju && \text{in } W^{1,q}(I; Y) && (n \rightarrow \infty), \\ (u_n)_c &= u_n \rightarrow (ju)_c && \text{in } C^0(\bar{I}; Y) && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wegen des Hauptsatzes gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{-T}^0 u_n(-t) \varphi'(t) dt &= u_n(0) \varphi(0) + \int_{-T}^0 \frac{du_n}{dt}(-t) \varphi(t) dt && \text{in } Y, \\ \int_0^T u_n(t) \varphi'(t) dt &= [u_n(t) \varphi(t)]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \frac{du_n}{dt}(t) \varphi(t) dt && \text{in } Y, \\ \int_T^{2T} u_n(2T-t) \varphi'(t) dt &= -u_n(T) \varphi(T) + \int_T^{2T} \frac{du_n}{dt}(2T-t) \varphi(t) dt && \text{in } Y. \end{aligned}$$

Addition der drei Gleichungen liefert für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$\int_0^T (\mathcal{F}_I u_n)(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^T \mathcal{F}_I^- \left(\frac{du_n}{dt} \right) (t) \varphi'(t) dt \quad \text{in } Y.$$

Der anschließende Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert schließlich für alle $\varphi \in C_c^\infty(3I)$, dass

$$j \left(\int_0^T (\mathcal{F}_I u)(t) \varphi'(t) dt \right) = - \int_0^T \mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) (t) \varphi'(t) dt \quad \text{in } Y.$$

Insgesamt folgt, dass $\mathcal{F}_I u \in W_j^{1,p,q}(3I; X, Y)$ mit

$$\frac{d_j}{dt} \mathcal{F}_I u = \mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) \quad \text{in } L^q(3I; Y).$$

Zusammen mit (i), (ii) folgt schließlich, dass $\mathcal{F}_I: W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \rightarrow W_j^{1,p,q}(3I; X, Y)$ wohldefiniert, linear und stetig ist. \square

Mit Hilfe von Fortsetzung mittels Spiegelung (cf. Theorem 4.22) können wir nun den Faltungsglättungsoperator (cf. Satz 2.15) zu einem Glättungsoperator für den Raum $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ fortsetzen.

Theorem 4.24 (Faltungsglättungsoperator)

Sei $I = (0, T)$, $0 < T < \infty$, $p, q \in [1, \infty]$ und $j: X \rightarrow Y$ eine Einbettung. Wir definieren den Faltungsglättungsoperator $\mathcal{S}_I^h: L^p(I; X) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; X)$ für alle $u \in L^p(I; X)$ durch

$$\widehat{\mathcal{S}}_I^h u := \mathcal{S}_{3I}^h \mathcal{F}_I u|_I \in C^\infty(\mathbb{R}; X),$$

Dann gilt für alle $u \in W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$:

(i) Es gilt $(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)_{h>0} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}; X)$ mit $\text{supp}(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u) \subseteq [-h - T, 2T + h]$ für alle $h > 0$ und

$$\frac{d_j}{dt} \widehat{\mathcal{S}}_I^h u = \mathcal{S}_{3I}^h \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right) \quad \text{in } L^q(I; Y) \quad \text{für alle } h \in I.$$

(ii) $\|\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\|_{W_j^{1,p,q}(I; X, Y)} \leq c \|u\|_{W_j^{1,p,q}(I; X, Y)}$ für alle $h > 0$.

(iii) Falls $q, p < \infty$, dann gilt, dass

$$\widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I \rightarrow u \quad \text{in } W_j^{1,p,q}(I; X, Y) \quad (h \rightarrow 0).$$

Beweis. Zu (i). Dass $(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)_{h>0} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}; X)$ mit $\text{supp}(\widehat{\mathcal{S}}_I^h u) \subseteq [-h - T, 2T + h]$ für alle $h > 0$ folgt aus Satz 2.15. Weiter gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$, dass

$$\left. \begin{aligned} j \left(- \int_I (\widehat{\mathcal{S}}_I^h u)(t) \varphi'(t) dt \right) &= j \left(- \int_I \left(\int_{B_h^1(t)} (\mathcal{E}_{3I}(\mathcal{F}_I u))(s) \omega_h(t-s) \varphi'(t) ds \right) dt \right) \\ &= j \left(- \int_I \left(\int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s) \omega_h(t-s) \varphi'(t) ds \right) dt \right) \\ &= j \left(- \int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s) \left(\int_I \omega_h(t-s) \varphi'(t) dt \right) ds \right) \\ &= j \left(- \int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s) \left(\int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s) \varphi'(t) dt \right) ds \right) \\ &= j \left(- \int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s) (\omega_h * \varphi')(s) ds \right) \\ &= j \left(- \int_{3I} (\mathcal{F}_I u)(s) (\omega_h * \varphi)'(s) ds \right) \\ &= \int_{3I} \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right)(s) (\omega_h * \varphi)(s) ds \\ &= \int_{3I} \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right)(s) \left(\int_{\mathbb{R}} \omega_h(t-s) \varphi(t) dt \right) ds \\ &= \int_I \left(\int_{3I} \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right)(s) \omega_h(t-s) ds \right) \varphi(t) dt \\ &= \int_I \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{3I} \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right)(s) \omega_h(t-s) ds \right) \varphi(t) dt \\ &= \int_I \left(\mathcal{S}_{3I}^h \left(\frac{d_j \mathcal{F}_I u}{dt} \right) \right)(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \right\} \quad \text{in } Y,$$

d.h. es gilt, dass

$$\frac{d_j}{dt} \widehat{\mathcal{S}}_I^h u = \mathcal{S}_{3I}^h \left(\frac{d_j \mathcal{F}_X u}{dt} \right) \quad \text{in } L^q(I; Y) \quad \text{für alle } h \in I.$$

Zu (ii). Wegen Satz 2.15(ii) und Satz 4.22(i) gilt, dass

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{S}}_I^h u\|_{L^p(I; X)} &\leq \|\mathcal{S}_{3I}^h(\mathcal{F}_I u)\|_{L^p(3I; X)} \\ &\leq \|\mathcal{F}_I u\|_{L^p(3I; X)} \\ &\leq c \|u\|_{L^p(I; X)}. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt wegen (i), Satz 2.15(ii) und Satz 4.22(ii),(iii), dass

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d_j}{dt} \widehat{\mathcal{S}}_I^h u \right\|_{L^q(I; Y)} &\leq \left\| \mathcal{S}_{3I}^h \left(\frac{d_j}{dt} \mathcal{F}_I u \right) \right\|_{L^q(3I; Y)} \\ &\leq \left\| \mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) \right\|_{L^q(3I; Y)} \\ &\leq c \left\| \frac{d_j u}{dt} \right\|_{L^q(I; Y)}. \end{aligned}$$

Zu (iii). Falls $p, q \in [1, \infty)$, dann gilt wegen Satz 2.15(iii)), dass

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I &= \mathcal{S}_{3I}^h(\mathcal{F}_I u)|_I \rightarrow \mathcal{F}_I u|_I = u && \text{in } L^p(I; X) \quad (h \rightarrow 0), \\ \frac{d_j}{dt} \widehat{\mathcal{S}}_I^h u \Big|_I &= \mathcal{S}_{3I}^h \left(\mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) \right) \Big|_I \rightarrow \mathcal{F}_I^- \left(\frac{d_j u}{dt} \right) \Big|_I = \frac{d_j u}{dt} && \text{in } L^q(I; Y) \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

d.h. es gilt, dass $\widehat{\mathcal{S}}_I^h u|_I \rightarrow u$ in $W_j^{1,p,q}(I; X, Y)$ ($h \rightarrow 0$). □

5 Gelfand-Dreier und verallgemeinerte partielle Integrationsformel

5.1 Gelfand-Dreier

Definition 5.1 (Gelfand-Dreier)

Falls V ein Banach-Raum ist, H ein Hilbert-Raum und $i: V \rightarrow H$ eine dichte Einbettung, d.h. $R(i)$ liegt dicht in H . Dann heißt das Tripel

$$(V, H, i)$$

Gelfand-Dreier (oder Gelfand-Tripel, Evolutionstripel).

Satz 5.2 (über Gelfand-Dreier)

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Der adjungierte Operator $i^*: H^* \rightarrow V^*$, definiert durch

$$\langle i^*(h^*), v \rangle_V := \langle h^*, i(v) \rangle_H \quad \text{für alle } h^* \in H^*, v \in V,$$

ist eine Einbettung.

(ii) Die kanonische Einbettung $e := i^* \circ R \circ i: V \rightarrow V^*$, wobei $R: H \rightarrow H^*$ den Riesz-Isomorphismus bezeichnet, erfüllt

$$\langle e(u), v \rangle_V = \langle i(u), i(v) \rangle_H \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Insbesondere gilt:

$$V \xhookrightarrow{i} H \xrightarrow{R} H^* \xhookrightarrow{i^*} V^*.$$

(iii) Falls V reflexiv ist, dann ist $e: V \rightarrow V^*$ eine dichte Einbettung.

Beweis. Zu (i).

1. Linearität und Stetigkeit: Da $i: V \rightarrow H$ linear und stetig ist, ist auch der adjungierte Operator $i^*: H^* \rightarrow V^*$ linear und stetig.

2. Injektivität: Sei $h^* \in \ker(i^*)$, d.h. für alle $v \in V$ gilt, dass

$$0 = \langle i^*(h^*), v \rangle_V = \langle h^*, i(v) \rangle_H.$$

Wegen der Dichtheit von $R(i)$ in H folgt weiter, dass für alle $h \in H$ gilt, dass $0 = \langle h^*, h \rangle_H$, d.h. $h^* = 0$ in H^* .

Zu (ii). Für alle $u, v \in V$ gilt, dass

$$\langle e(u), v \rangle_V = \langle R(i(u)), i(v) \rangle_H = \langle i(u), i(v) \rangle_H.$$

Zu (iii). (Übung). □

Beispiel 5.3

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Dann gilt:

- (i) $(V, H, i) = (W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), \text{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)})$ ist ein Gelfand-Dreier, denn
 - $i = \text{id}_{W_0^{1,2}(\Omega)}: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist eine Einbettung;
 - $R(i) = W_0^{1,2}(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$, da $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.
- (ii) $(V, H, i) = (W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), \text{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)})$, $p \geq \frac{2d}{d+2}$, ist ein Gelfand-Dreier, denn
 - $i = \text{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist eine Einbettung für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ ($\Leftrightarrow \frac{dp}{d-p} \geq 2$ für $p < d$);
 - $R(i) = W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$, da $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.
- (iii) $(V, H, i) = (W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), L^2(\Omega), \text{id}_{W_0^{1,p}(\Omega)})$, $p \geq 1$, ist ein Gelfand-Dreier, denn
 - $i = \text{id}_{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)}: W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist eine Einbettung;
 - $R(i) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$, da $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt.

Lemma 5.4

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier und $p \in (1, \infty)$.

Dann sind für $u \in L^p(I; V)$ und $w \in L^{p'}(I; V^*)$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ mit

$$\frac{d_e u}{dt} = w \quad \text{in } L^{p'}(I; V^*).$$

- (ii) Für alle $v \in V$ und $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$-\int_I (i(u(t)), i(v))_H \varphi'(t) dt = \int_I \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t) dt.$$

Bemerkung 5.5

In Lemma 5.4(ii) kann $v \in V$ durch $v \in D$, wobei D dicht in V liegt, ersetzt werden.

Beweis (von Lemma 5.4). Laut Definition 4.1 ist (i) äquivalent dazu, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, dass

$$e\left(-\int_I u(t)\varphi'(t) dt\right) = \int_I w(t)\varphi(t) dt \quad \text{in } V^*.$$

Dies ist wieder äquivalent dazu, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ und $v \in V$ gilt, dass

$$\left\langle e\left(-\int_I u(t)\varphi'(t) dt\right), v \right\rangle_V = \left\langle \int_I w(t)\varphi(t) dt, v \right\rangle_V.$$

Da $\langle e(\cdot), v \rangle_V \in V^*$ und $\langle \cdot, v \rangle_V \in V^{**}$ für alle $v \in V$, ist Letzteres wegen Satz 1.21 äquivalent dazu, dass

$$-\int_I \langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t) dt = \int_I \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t) dt.$$

Wegen Satz 5.2(ii) ist Letzteres wiederum äquivalent zu (ii). □

5.2 Verallgemeinerte partielle Integrationsformel

Theorem 5.6 (Verallgemeinerte partielle Integrationsformel)

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, $p \in (1, \infty)$ und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für jedes $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ hat die Funktion $iu \in L^p(I; H)$, definiert durch

$$(iu)(t) := i(u(t)) \quad \text{in } H \quad \text{für f.a. } t \in I,$$

einen stetigen Repräsentanten $i_c u \in C^0(\bar{I}; H)$. Insbesondere ist die resultierende Abbildung $i_c: W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \rightarrow C^0(\bar{I}; H)$ eine Einbettung.

(ii) Für alle $u, v \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ und $t, t' \in \bar{I}$ mit $t' \leq t$ gilt, dass

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u}{dt}(s), v(s) \right\rangle_V ds = [((i_c u)(s), (i_c v)(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e v}{dt}(s), u(s) \right\rangle_V ds.$$

Korollar 5.7

Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 5.6.

Dann gilt für alle $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ und $t, t' \in \bar{I}$ mit $t' \leq t$, dass

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u}{dt}(s), u(s) \right\rangle_V ds = \frac{1}{2} \|(i_c u)(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|(i_c u)(t')\|_H^2.$$

Beweis (von Korollar 5.7). Nutze Theorem 5.6 im Fall $v = u$. □

Beweis (von Theorem 5.6). Zu (i).

1. Wohldefiniertheit von i_c : Sei $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ beliebig, aber fest. Wegen Satz 4.24 (iii) existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I}; V)$, sodass

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$, dass $(\frac{1}{2} \|i(u_n(\cdot)) - i(u_k(\cdot))\|_H^2)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I})$ (Übung) mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|i(u_n(t)) - i(u_k(t))\|_H^2 \right) &= \left(i \left(\frac{du_n}{dt}(t) \right) - i \left(\frac{du_k}{dt}(t) \right), i(u_n(t)) - i(u_k(t)) \right)_H \\ &= \left\langle e \left(\frac{du_n}{dt}(t) \right) - e \left(\frac{du_k}{dt}(t) \right), u_n(t) - u_k(t) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \frac{d_e u_n}{dt}(t) - \frac{d_e u_k}{dt}(t), u_n(t) - u_k(t) \right\rangle_V, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen Satz 5.2(ii) und im dritten Gleichheitszeichen Korollar 4.9 ausgenutzt haben.

Mit dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in \bar{I}$ mit $t' \leq t$, dass

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u_n}{dt}(s) - \frac{d_e u_k}{dt}(s), u_n(s) - u_k(s) \right\rangle_V ds = \left[\frac{1}{2} \|i(u_n(s)) - i(u_k(s))\|_H^2 \right]_{s=t'}^{s=t}.$$

Mit der Hölder'schen Ungleichung (cf. Satz 2.3) folgt weiter für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in \bar{I}$ mit $t' \leq t$, dass

$$\begin{aligned} \|i(u_n(t)) - i(u_k(t))\|_H^2 &\leq \|i(u_n(t')) - i(u_k(t'))\|_H^2 \\ &\quad + 2 \left\| \frac{d_e u_n}{dt} - \frac{d_e u_k}{dt} \right\|_{L^{p'}(I; V^*)} \|u_n - u_k\|_{L^p(I; V)} \\ &\leq \|i(u_n(t')) - i(u_k(t'))\|_H^2 + 2 \|u_n - u_k\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)}^2. \end{aligned}$$

Nutzen wir dann, dass $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a, b \geq 0$, und Bilden wir den Mittelwert $\frac{1}{T} \int_I \cdot dt'$ in der resultierenden Ungleichung, dann erhalten wir für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $t \in \bar{I}$, dass

$$\begin{aligned} \|i(u_n(t)) - i(u_k(t))\|_H &\leq \frac{1}{T} \|iu_n - iu_k\|_{L^1(I; H)} + \sqrt{2} \|u_n - u_k\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)} \\ &\leq c \|u_n - u_k\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)}, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung ausgenutzt haben, dass $i: L^p(I; V) \rightarrow L^1(I; H)$ (wegen $p > 1$ und der Stetigkeit von $i: V \rightarrow H$) stetig ist (cf. Korollar 2.2(iii), Korollar 2.4(i)). Bilden wir das Maximum bezüglich $t \in \bar{I}$ auf der linken Seite, dann folgt für alle $k, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|iu_n - iu_k\|_{C_b^0(\bar{I}; H)} \leq c \|u_n - u_k\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)}.$$

Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ eine Cauchy-Folge ist, muss auch $(iu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(\bar{I}; H)$ eine Cauchy-Folge sein. Da $C^0(\bar{I}; H) = C_b^0(\bar{I}; H)$ (cf. Bemerkung 1.24) ein Banach-Raum ist (cf. Satz 1.26), existiert daher ein $i_c u \in C^0(\bar{I}; H)$, sodass

$$iu_n \rightarrow i_c u \quad \text{in } C^0(\bar{I}; H) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da $C^0(\bar{I}; H) \hookrightarrow L^p(I; H)$ und $i: L^p(I; V) \rightarrow L^p(I; H)$ stetig ist (cf. Korollar 2.2(iii)) gilt insbesondere, dass

$$\begin{aligned} iu_n &\rightarrow i_c u & \text{in } L^p(I; H) & \quad (n \rightarrow \infty), \\ iu_n &\rightarrow iu & \text{in } L^p(I; H) & \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes zeigt dann, dass $i_c u \in C^0(\bar{I}; H)$ ein stetiger Repräsentant von $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ ist. Da höchstens ein stetiger Repräsentant existieren kann, ist die Abbildung $i_c: W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \rightarrow C^0(\bar{I}; H)$ wohldefiniert.

2. Injektivität von i_c : Folgt aus der Injektivität von $i: V \rightarrow H$.

3. Stetigkeit von i_c : Sei $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ beliebig, aber fest. Analog zum vorherigen Vorgehen (mit “ $u_k = 0$ ”) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|iu_n\|_{C_b^0(\bar{I}; H)} \leq c \|u_n\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)}.$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt dann, dass

$$\|i_c u\|_{C_b^0(\bar{I}; H)} \leq c \|u\|_{W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)},$$

d.h. die Abbildung $i_c: W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \rightarrow C^0(\bar{I}; H)$ ist stetig.

Zu (ii). Seien $u, v \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ beliebig, aber fest. Wegen Satz 4.24(iii) existieren Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{I}; V)$, sodass

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) && (n \rightarrow \infty), \\ v_n &\rightarrow v && \text{in } W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Aus (i) folgt dann unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} iu_n &\rightarrow i_c u && \text{in } C^0(\bar{I}; H) && (n \rightarrow \infty), \\ iv_n &\rightarrow i_c v && \text{in } C^0(\bar{I}; H) && (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in \bar{I}$ gilt, dass

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u_n}{dt}(s), v_n(s) \right\rangle_V ds = [((iu_n)(s), (iv_n)(s))]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e v_n}{dt}(s), u_n(s) \right\rangle_V ds.$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt dann für alle $t, t' \in \bar{I}$,

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u}{dt}(s), v(s) \right\rangle_V ds = [((i_c u)(s), (i_c v)(s))]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e v}{dt}(s), u(s) \right\rangle_V ds. \quad \square$$

Theorem 5.6(i) sichert die Wohldefiniertheit der folgenden Anfangswertaufgabe:

Definition 5.8 (Evolutionsgleichung)

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, $p \in (1, \infty)$ und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Weiter sei $(f, u_0)^\top \in L^{p'}(I; V^*) \times H$ ein Paar von Daten und $\mathcal{A}: W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \rightarrow L^{p'}(I; V^*)$ ein (möglicherweise nicht-linearer) Operator. Dann heißt die Anfangswertaufgabe, die nach einer Funktion $u \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ sucht, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d_e u}{dt} + \mathcal{A}u &= f && \text{in } L^{p'}(I; V^*), \\ (i_c u)(0) &= u_0 && \text{in } H, \end{aligned} \tag{EG}$$

Evolutionsgleichung. Hierbei ist $i_c u \in C^0(\bar{I}; H)$ der stetige Repräsentant aus Theorem 5.6(i).

Das nächste Kapitel widmet sich Fragen der Lösbarkeit der Evolutionsgleichung (EG). Genauer untersuchen wir den Operator

$$\left(\frac{d_e}{dt} + \mathcal{A}, i_c(\cdot)(0) \right)^\top : W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \rightarrow L^{p'}(I; V^*) \times H,$$

auf Eigenschaften wie (Demi-)Stetigkeit, Surjektivität, Injektivität, Existenz einer Inversen (d.h. eines Lösungoperators zu (EG)) sowie deren Stetigkeitseigenschaften.

Literaturverzeichnis

- [BF13] Franck Boyer and Pierre Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible navier-stokes equations and related models*, Applied mathematical sciences, vol. 183, Springer, New York; Heidelberg; London [u.a.], 2013 (eng).
- [Bog07] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I and II*, Berlin: Springer, 2007 (English).
- [Bré73] Haïm Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Math. Stud., vol. 5, Elsevier, Amsterdam, 1973 (French).
- [Bré11] Haïm Brézis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Mathematics, Springer, New York; Heidelberg [u.a.], 2011 (eng).
- [BT38] Salomon Bochner and A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly valued functions*, Ann. Math. (2) **39** (1938), 913–944 (English).
- [DHHR11] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, and Michael Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011. MR 2790542
- [Edw65] R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, 1965 (English).
- [Els09] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, 6. ed., Springer-Lehrbuch, Grundwissen Mathematik, Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2009 (ger).
- [Emm04] Etienne Emmrich, *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen. Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*, Wiesbaden: Vieweg, 2004 (German).
- [GGZ74] Herbert Gajewski, Konrad Gröger, and Klaus Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Mathematische Lehrbücher und Monographien /2, vol. 38, Akad.-Verl., Berlin, 1974 (ger).
- [Hal80] Jack K. Hale, *Ordinary differential equations. 2nd ed*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 21. Orig. publ. by Wiley-Interscience. Huntington, New York: Robert E. Krieger Publishing Company. XVII, 361 p. \$ 27.50 (1980)., 1980.

- [Kal23] Alex Kaltenbach, *Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents*, Lect. Notes Math., vol. 2329, Cham: Springer, 2023 (English).
- [LM87] Rüdiger Landes and Vesa Mustonen, *A strongly nonlinear parabolic initial-boundary value problem.*, *Ark. Mat.* **25** (1987), 29–40 (eng).
- [Pet38] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Am. Math. Soc. **44** (1938), 277–304 (English).
- [Rou05] Tomas Roubíček, *Nonlinear partial differential equations with applications*, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [Sim87] Jacques Simon, *Compact sets in the space $L^p(I, B)$* , Ann. Math. Pure Appl **146** (1987), 65–96 (eng).
- [Zeid90] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*, Springer, New York, 1990, Linear monotone operators.
- [Zeid93] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. Volume I: Fixed-point theorems. Translated from the German by Peter R. Wadsack.*, 2. corr. printing ed., New York: Springer-Verlag, 1993 (English).