

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Susanne Knies & Alex Kaltenbach  
auf Grundlage eines Skriptes von Marius Müller

Wintersemester 2022/2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Explizite Lösungstechniken</b>	<b>6</b>
1.1	Separation der Variablen . . . . .	6
1.2	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	14
1.2.1	Lineare inhomogene Differentialgleichungen . . . . .	16
1.2.2	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	21
1.2.3	Phasenportraits . . . . .	32
1.2.4	Die Fundamentalmatrix . . . . .	38
1.2.5	Homogene lineare DGLs höherer Ordnung . . . . .	42
1.2.6	Anwendung: Der harmonische Oszillator . . . . .	48
1.3	Integrale der Bewegung . . . . .	53
1.3.1	Energieerhaltung . . . . .	56
1.3.2	Anwendung: Das mathematische Pendel . . . . .	59
1.3.3	Ausblick: Ein nichtlineares System . . . . .	67
<b>2</b>	<b>Existenz, Eindeutigkeit, Globalität</b>	<b>68</b>
2.1	Globaler Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	69
2.1.1	Der Banach’sche Fixpunktsatz . . . . .	71
2.1.2	Das äquivalente Fixpunktproblem . . . . .	76
2.1.3	Globaler Satz von Picard–Lindelöf auf beschränkten Intervallen . . . . .	80
2.1.4	Globaler Satz von Picard–Lindelöf auf unbeschränkten Intervallen . . . . .	84
2.2	Lokaler Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	90
2.2.1	Lokaler Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	90
2.3	Maximalität im lokalen Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	93
2.4	Globalität und stetige Abhängigkeit . . . . .	101
2.4.1	Das Lemma von Gronwall . . . . .	106

# Einführung

Dieses Vorlesungsmanuskript beschäftigt sich mit der Thematik der ‘Gewöhnlichen Differentialgleichungen’. *Differentialgleichungen* (kurz: DGL) sind Gleichungen der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I), \quad (1)$$

wobei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet ist und  $I$  ein offenes Intervall ist. Im Falle  $n > 1$  spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Solche Gleichungen beschreiben — wie wir noch sehen werden — allerlei Zusammenhänge in Natur und Technik. Eine Funktion  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , die (1) für alle  $t \in I$  erfüllt heißt *Lösung* der Differentialgleichung (1) auf  $I$ .

## Beispiel 1.

$$y'(t) = t^3 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

d.h.  $n = 1$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $G = \mathbb{R}$  und  $f(t, z) = t^3$ .

In diesem Fall können wir mithilfe der Grundlagenvorlesungen alle Lösungen bestimmen: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass jede Lösung eine Stammfunktion von  $t^3$  sein muss. Alle solche Stammfunktionen sind gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{4}t^4 + C \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist. Die Menge aller Lösungen von (2) heißt *allgemeine Lösung* von (2). Man könnte also sagen, dass die allgemeine Lösung durch alle Funktionen  $y$  aus Gleichung (3) gegeben ist.

In Kapitel 1 (‘Explizite Lösungstechniken’) wollen wir uns damit beschäftigen, wie man die allgemeine Lösung von komplizierteren Gleichungen explizit mit elementaren Funktionen ausdrücken kann.

Es ist allerdings so, dass man nicht alle Gleichungen explizit lösen kann. Gerade bei *Systemen von Gleichungen* (d.h. im Fall  $n > 1$ ) ist in vielen Fällen an eine explizite Lösung nicht zu denken. Doch auch vergleichsweise einfache Gleichungen haben teils keine explizite Lösung.

## Beispiel 2.

$$y'(t) = e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

Wiederum müsste jede Lösung eine Stammfunktion von  $e^{-t^2}$  sein. Allerdings lässt sich keine solche Stammfunktion mit elementaren Funktionen ausdrücken.

Wir müssen daher Methoden entwickeln, um Lösungen zu beschreiben, auch wenn wir sie nicht kennen. So können wir zum Beispiel sofort zeigen, dass jede Lösung von (4) monoton wachsend sein muss, denn es gilt  $y'(t) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Es ist erstaunlich, wie viele qualitative Eigenschaften ohne explizite Lösung diskutiert werden können.

In Kapitel 2 nähern wir uns der Beschreibung der Eigenschaften von einem theoretischen Standpunkt: Wir fragen uns, ob eine gegebene Differentialgleichung eine Lösung hat und

– wenn ja – wie viele Lösungen es gibt. Außerdem wollen wir wissen, ob man stets eine *globale* Lösung finden kann ( $I = \mathbb{R}$ ) oder ob es Lösungen gibt, die nach einer gewissen Zeit ‘aufhören’, zu existieren. Für all diese Fragestellungen betrachtet man hauptsächlich *Anfangswertprobleme* (kurz: AWP), d.h. man sucht Lösungen mit einem vorgeschriebenen Anfangswert, also von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (5)$$

für ein fixiertes  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Der Anfangswert ist sehr wichtig, denn die Antwort auf die Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Globalität hängt — wie wir sehen werden — stark von dem Anfangswert ab! Stellen wir uns mal folgendes vor: Unsere DGL beschreibt die Bewegung eines Lavapartikels bei einem Vulkanausbruch. Wo unser Lavapartikel sich nach einer gewissen Zeit befindet hängt maßgeblich davon ab, wo es gestartet hat. Falls es tief in der Erde gestartet hat, befindet es sich vielleicht noch im Vulkaninneren. Wurde es aber bei der ersten Eruption bereits ausgespuckt, so wird es mittlerweile an der Oberfläche sein.

Diese Beobachtung zeigt, dass der Anfangswert als Teil des Problems wahrgenommen werden sollte. Wir werden ferner sehen, dass bei sehr vielen AWP die Eindeutigkeitsfrage mit ‘Ja’ beantwortet werden kann. Ein gutes Beispiel dafür kennt man vielleicht noch aus den Analysis-Grundlagenvorlesungen:

**Beispiel 3.** Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

hat die Lösung  $y(t) = e^t$ . Dies könnte man durch Einsetzen einfach nachrechnen (HA). Vielleicht haben Sie die Exponentialfunktion sogar so definiert.

BEHAUPTUNG: Es gibt auch keine weiteren Lösungen.

BEGRÜNDUNG: Sei  $\bar{y} \in C^1(\mathbb{R})$  eine weitere Lösung von (6). Definiere dann  $g(t) := e^{-t}\bar{y}(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Man sieht mit der Produktregel

$$g'(t) = -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}'(t) \stackrel{(6)}{=} -e^{-t}\bar{y}(t) + e^{-t}\bar{y}(t) = 0. \quad (7)$$

Damit ist  $g$  konstant auf  $\mathbb{R}$  und somit gilt  $g(t) = g(0) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Mit der Definition von  $g$  schließen wir also  $e^{-t}\bar{y}(t) = 1$ , was umgestellt nichts anderes heißt als  $\bar{y}(t) = e^t$ . Wir sehen also, dass das AWP eine eindeutige, globale Lösung besitzt.

Die Existenz- und Eindeutigkeitsfrage ist auch im Anwendungskontext sehr wichtig. Es ist ja schließlich so, dass ein Anfangswertproblem stets einen Ablauf eines Naturphänomens beschreibt. Falls es eine eindeutige Lösung gibt, so wissen wir: Unser Modell sagt eindeutig voraus, wie das Phänomen ablaufen wird. Gibt es hingegen mehrere Lösungen, so kann nur eine davon das beschreiben, was die Natur wirklich macht. In einem solchen Fall muss man sich fragen, ob das gegebene Modell das Naturphänomen wirklich vollständig beschreibt.

Der *Satz von Picard-Lindelöf* formuliert eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösung. Diese Bedingung ist jedoch nicht immer erfüllt:

**Beispiel 4.** Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

hat mehrere Lösungen — sogar gleich unendlich viele:

BEHAUPTUNG: Für alle  $a \geq 0$  ist

$$y_a(t) := \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, a] \\ (t - a)^2 & t \in (a, \infty) \end{cases} \quad (9)$$

eine Lösung. Überzeugen Sie sich davon, dass  $y_a$  in  $C^1(\mathbb{R})$  liegt und (8) erfüllt ist (HA).

Auch die Globalitätsfrage ist anwendungsrelevant: Im Anwendungskontext bedeutet Nicht-Globalität einer Lösung meistens, dass ein *singuläres Phänomen* auftritt. Zum Beispiel könnte man einen hängenden Wassertropfen an einem undichten Wasserhahn beschreiben, der erst immer runder wird und dann irgendwann heruntertropft. Das singuläre Phänomen ist hier dann das ‘Heruntertropfen’.

Wieder einmal ist es so, dass auch bei ‘einfach aussehenden’ Gleichungen die Lösungen nicht zwingend global sind. Wir werden aber auch hier Kriterien für die Globalität formulieren. Eine große Hilfe hierbei wird das (vielleicht schon bekannte) *Lemma von Gronwall* sein.

**Beispiel 5.** Für festes  $c \in \mathbb{R}$  hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = c \end{cases} \quad (10)$$

nur im Fall  $c = 0$  eine eindeutige, globale Lösung (nämlich  $y(t) := 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ). Für alle  $c \neq 0$  gibt es eine eindeutige Lösung, die aber nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist — sie existiert nur auf einem kleineren Intervall. Daher ist die Bedingung ‘ $(t \in \mathbb{R})$ ’ aus (10) meistens nicht erfüllt. Details werden wir im Laufe der Vorlesung noch ausarbeiten. Wir werden sehen, dass man stets eine *größtmögliche* Lösung finden kann, d.h. es gibt ein *maximales* offenes Intervall  $I_{\max}$ , das den Anfangswert 0 enthält, sodass

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in I_{\max}) \\ y(0) = c \end{cases} \quad (11)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Wir werden auch sehen, was am Rand von  $I_{\max}$  mit der Lösung “schiefgehen” muss: Sie explodiert ins Unendliche.

# Notationsverzeichnis

- $C^k(A; \mathbb{R}^n)$ . Bezeichnet die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen von  $A$  nach  $\mathbb{R}^n$ . Hierbei ist  $A \subset \mathbb{R}^m$  stets eine offene Menge.
- $\frac{d}{dt}y(t)$  oder  $y'(t)$ . Bezeichnet beides gleichermaßen die Ableitung von  $y$  nach  $t$ , d.h.  $y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ .
- Für  $f \in C^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  bezeichnet  $Df(z) := (\partial_{z_j} f^i(z))_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die *Jacobi-Matrix* von  $f$ . Manchmal schreiben wir auch  $D_z f(z)$ , gerade, wenn  $f$  noch von weiteren Variablen abhängt.
- $\text{dist}(y, A)$  bezeichnet die Distanz eines Vektors  $y \in \mathbb{R}^n$  zu einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\text{dist}(y, A) := \inf\{|x - y| : x \in A\}.$$

- $e_1, \dots, e_n$  bezeichnet stets die kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ .
- $G$ . Bezeichnet stets ein Teilgebiet von  $\mathbb{R}^n$ . Unter einem Gebiet verstehen wir eine offene, zusammenhängende Menge.
- (HA). Die so gekennzeichneten Aussagen sind den Lesenden als Übung überlassen.
- $I$ . Bezeichnet stets ein offenes Intervall  $I = (a, b)$ . Ist  $b < a$  so ist  $I = \emptyset$ . Die leere Menge ist in unserer Konvention ein Intervall.
- $\int^t f(s) \, ds$  bezeichnet das *unbestimmte Integral* über  $f$ . Das heißt: Man bildet eine Stammfunktion von  $f$  und wertet sie an  $t$  aus. Der Wert dieses Ausdrucks ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Wenn diese Konstante explizit aufgeführt wird, so ist mit  $\int^t f(s) \, ds$  stets eine beliebige aber feste Stammfunktion von  $f$  gemeint.
- $\ker(A)$  bezeichnet stets den Kern der Matrix (oder einer linearen Abbildung)  $A$ .
- $\mathbb{R}^{m \times n} / \mathbb{C}^{m \times n}$  bezeichnet die Menge aller (reellwertigen/komplexwertigen) Matrizen mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.
- $\text{Re}/\text{Im}$  bezeichnet Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl. Wie werden es auch für Vektoren benutzen, in dem Fall ist Realteil und Imaginärteil komponentenweise zu verstehen.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet stets das Euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  oder in  $\mathbb{C}^n$ , d.h.  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \bar{w}_i$ , wobei der Querbalken das Konjugiertkomplexe notieren soll.  $|\cdot|$  bezeichnet stets die Euklidische Norm eines Vektors in  $\mathbb{R}^n$ .
- $y^{(n)}(t)$  bezeichnet die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $y \in C^n(I; \mathbb{R})$ .
- $\mathbb{Z}$ . Bedeutet "zu zeigen". Hiermit erläutern wir in einem Beweis, was als nächstes gezeigt werden soll. Dies unterteilt den Beweis dann in verschiedene Abschnitte.

# 1 Explizite Lösungstechniken

Hier lernen wir Verfahren, um Gleichungen mit einer bestimmten Form explizit zu lösen, d.h. die allgemeine Lösung zu bestimmen. Wir gehen im Folgenden immer von der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \quad (12)$$

aus. Hierbei ist wie üblich  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  gegeben und  $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  gesucht.

Wir machen spezielle Annahmen an  $f$  unter denen wir die Gleichung explizit auflösen können.

Wir stellen hierbei stets *instruktive Lösungswege* vor, d.h. Möglichkeiten, sich klarzumachen, wie man auf die Lösung kommt.

## 1.1 Separation der Variablen

Die folgende Lösungstechnik behandelt *skalare* Differentialgleichungen, d.h.  $n = 1$ . Zusätzlich nehmen wir an, dass die Funktion  $f$  *trennbar* ist. Genauer:

**Definition 6.** TRENNBARE VERÄNDERLICHE.

Eine DGL heißt *Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen*, falls sie die Gestalt

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I) \quad (13)$$

hat, wobei  $g \in C^0(I)$  und  $h \in C^0(J)$  für ein offenes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ . Insbesondere heißt das, dass  $f(t, z) = g(t)h(z)$  für alle  $(t, z) \in I \times J$ .

Man beachte, dass ein eindimensionales Gebiet  $G$  gerade ein Intervall ist, daher wurde hier die Notation  $J$  anstatt  $I$  verwendet.

Das folgende instruktive Beispiel zeigt, wie wir eine DGL mit trennbaren Veränderlichen lösen können.

**Beispiel 7.** EXPONENTIELLES WACHSTUM.

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (14)$$

Hier können wir  $g(t) := \alpha$  und  $h(z) := z$  nehmen und erhalten eine DGL mit trennbaren Veränderlichen. Wir wollen die allgemeine Lösung bestimmen.

INSTRUKTIVER LÖSUNGSWEG. Sicherlich ist die Nullfunktion eine Lösung, wie man leicht nachrechnet. OBdA müssen wir also nur nach Lösungen suchen, die nicht die Nullfunktion sind. Wir nehmen nun einfach mal an, dass  $y(t) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dass diese Annahme gerechtfertigt ist, können wir zu dem gegebenen Zeitpunkt nicht begründen. Wenn wir aber am Ende auf eine Lösung kommen, die diese Annahme erfüllt, haben wir trotzdem eine Lösung gefunden und können uns freuen. Unter unserer Annahme können wir (14) umschreiben zu

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (15)$$

Jetzt kann uns mit der ‘Kettenregel rückwärts’ folgendes auffallen: Es gilt

$$\frac{d}{dt} \log y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}. \quad (16)$$

Zusammen mit Gleichung (15) heißt das, dass

$$\frac{d}{dt} \log y(t) = \alpha \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (17)$$

Über diese Gleichung können wir integrieren. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt daher

$$\log y(t) = \alpha t + \beta \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (18)$$

für eine beliebige Konstante  $\beta \in \mathbb{R}$ . Wir können nach  $y(t)$  auflösen und erhalten

$$y(t) = e^{\alpha t + \beta} = e^\beta e^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (19)$$

Definieren wir  $c := e^\beta > 0$ , so haben wir also

$$y(t) = ce^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (20)$$

Dass dies für alle beliebigen  $c > 0$  wirklich eine Lösung ist, könnten wir durch Einsetzen nachrechnen (HA). Wir sehen: Obwohl wir auf dem Weg eine Annahme getroffen haben, konnten wir trotzdem noch Lösungen finden. Allerdings kann es durchaus sein, dass wir aufgrund der Annahme nur einen Teil aller Lösungen finden. So auch hier: Man sieht nämlich beim Einsetzen schnell, dass  $c > 0$  gar nicht benötigt wird! In der Tat: Für alle  $c \in \mathbb{R}$  definiert

$$y(t) = ce^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (21)$$

eine Lösung. Haben wir jetzt alle Lösungen gefunden?

BEHAUPTUNG: Die allgemeine Lösung von (14) ist gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(\mathbb{R}) \mid \exists c \in \mathbb{R} : y(t) = ce^{\alpha t} \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (22)$$

Dass jedes Element aus  $\mathbb{L}$  eine Lösung ist, rechnet man durch Einsetzen nach. Es sei nun  $y_* \in C^1(\mathbb{R})$  eine beliebige Lösung von (14). Wir müssen zeigen, dass  $y_* \in \mathbb{L}$ . Dazu definieren wir  $g(t) := e^{-\alpha t} y_*(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und rechnen

$$g'(t) = -\alpha e^{-\alpha t} y_*(t) + e^{-\alpha t} y'_*(t) \stackrel{(14)}{=} -\alpha e^{-\alpha t} y_*(t) + e^{-\alpha t} \alpha y_*(t) = 0. \quad (23)$$

Damit ist  $g \equiv \text{const.}$ , d.h. es gibt  $c_* \in \mathbb{R}$  so, dass  $e^{-\alpha t} y_*(t) = c_*$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Stellt man das um, so erhält man  $y_*(t) = c_* e^{\alpha t}$ .

Hat man einmal die allgemeine Lösung gefunden, so kann man auch sämtliche Anfangswertprobleme lösen.

**Beispiel 8.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad (24)$$

Da wir im vorigen Beispiel die allgemeine Lösung bestimmt haben wissen wir, dass es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $y(t) = ce^{\alpha t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Nun bestimmen wir  $c$  so, dass der Anfangswert angenommen wird. Dazu setzen wir

$$2 \stackrel{!}{=} y(1) = ce^{\alpha t}|_{t=1} = ce^{\alpha}. \quad (25)$$

Wir stellen um und finden  $c = 2e^{-\alpha}$ . Alles in allem gilt dann

$$y(t) = 2e^{-\alpha}e^{\alpha t} = 2e^{\alpha(t-1)}. \quad (26)$$

**Anwendung 9. EXPONENTIELLER ZERFALL** Wir beschreiben den Zerfall eines radioaktiven Stoffes. Der Zerfall eines Radionuklids erfolgt zufällig mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Daher ist die Anzahl an Zerfällen proportional dazu, wie viele Atomkerne noch vorhanden sind. Die Proportionalitätskonstante, die wir  $\alpha$  nennen, heißt *Zerfallsrate*. Bezeichnet  $N(t)$  die Anzahl der Atomkerne zum Zeitpunkt  $t$ , so werden zwischen den Zeitpunkten ' $t$ ' und ' $t + h$ ' also in etwa  $\alpha N(t)h$  Zerfälle erwartet, wenn  $h$  sehr klein ist.

Für  $N(t)$  heißt das dann folgendes:

$$\underbrace{N(t+h)}_{\text{Bestand bei } t+h} \approx \underbrace{N(t)}_{\text{Bestand bei } t} - \underbrace{\alpha N(t)h}_{\text{zerfallene Atome}}. \quad (27)$$

Die Approximation ist umso besser, je kleiner  $h$  ist. Stellen wir (27) um, so erhalten wir für kleine  $h$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \approx -\alpha N(t). \quad (28)$$

Wie oben bereits diskutiert können wir  $h$  gegen 0 schicken und im Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  Gleichheit erwarten. Wir erhalten

$$N'(t) = -\alpha N(t). \quad (29)$$

Die allgemeine Lösung ist dann (siehe Beispiel 7 (p. 6)) bei einem Anfangsbestand  $N_0$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  gegeben durch

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t} \quad (N_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}) \quad (30)$$

Man sieht: Da  $\alpha > 0$ , so gilt stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0. \quad (31)$$



Um die instruktive Lösungstechnik aus Beispiel 7 (p. 6) einzuüben betrachten wir noch ein anderes Beispiel, welches wir auch schon eingangs als Paradebeispiel für Nicht-Globalität von Lösungen diskutiert haben

**Beispiel 10. NICHT-GLOBALE LÖSUNGEN.** Wir betrachten wie in Beispiel 7 (p. 6)

$$y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in I) \quad (32)$$

wobei wir hier  $I$  zunächst nicht spezifizieren wollen. Wir sehen, dass die Nulllösung  $y(t) = 0$  eine globale Lösung ist. Man findet aber auch noch andere Lösungen:

INSTRUKTIVER LÖSUNGSWEG: Nehmen wir wieder an, dass  $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  und formen um:

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1 \quad (t \in I). \quad (33)$$

In Beispiel 7 (p. 6) haben wir dann mit einer ‘Kettenregel rückwärts’ die linke Seite als Ableitung eines anderen Ausdrucks umgeschrieben. Das wird immer so funktionieren. Allerdings ist es oft etwas schwer zu sehen, was der andere Ausdruck ist. Hier kann man sich Abhilfe schaffen, indem man das unbestimmte Integral bildet

$$\int^t \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds = t + C \quad (34)$$

für eine Integrationskonstante  $C \in \mathbb{R}$ . Mit ‘ $\int^t$ ’ meinen wir stets, dass wir eine Stammfunktion bilden wollen und diese bei  $t$  auswerten wollen. Wir können nun  $u = y(s)$  substituieren und erhalten (mit  $du = y'(s)ds$ )

$$\int^{y(t)} \frac{1}{u^2} du = t + C. \quad (35)$$

Man beachte: Da wir die Substitution durchgeführt haben, müssen wir die Stammfunktion auch bei der substituierten Variable  $y(t)$  auswerten. Das entspricht der Tatsache, dass man bei einer Substitution die Grenzen ‘mitsubstituieren’ muss. Jetzt können wir die Stammfunktion bilden:

$$\left[ -\frac{1}{u} \right]^{y(t)} = t + C. \quad (36)$$

Wir erhalten also

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{t + C} \quad (37)$$

Somit hat unser Weg wiederum auf eine explizite Lösungsformel geführt. Man rechnet auch leicht nach, dass es sich für jedes  $C \in \mathbb{R}$  wirklich um eine Lösung handelt (HA). Allerdings

sehen wir: Jede Lösung, die wir gefunden haben, hat bei  $t = -C$  eine Definitionslücke. Daher ist keine dieser Lösungen global definiert. Wir können nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 & (t \in I_{\max}) \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad (38)$$

betrachten. Hierbei heißt ' $I_{\max}$ ' einfach, dass das größtmögliche Intervall um den Anfangswert 0 genommen werden soll, auf dem die Lösung definiert ist. Nehmen wir die Darstellung aus (37), so können wir berechnen

$$2 \stackrel{!}{=} y(0) = -\frac{1}{t+C} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{C} \quad (39)$$

Dies formt sich um zu  $C = -\frac{1}{2}$ . Dadurch erhalten wir die explizite Lösungsformel

$$y(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - t}. \quad (40)$$

Diese Lösung ist auf  $(-\infty, \frac{1}{2})$  definiert — ein Intervall, was den Anfangswert 0 enthält. Bei  $\frac{1}{2}$  lässt sich die Lösung nicht weiter fortsetzen, weil sie dort eine Definitionslücke hat. BEHAUPTUNG: Das Anfangswertproblem (38) hat die *maximale* Lösung  $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}-t}$ , definiert für  $t \in I_{\max} := (-\infty, \frac{1}{2})$ .

BEGRÜNDUNG: Wie bereits gesagt, rechnet man leicht nach, dass das oben gegebene  $y$  eine Lösung ist. Das Problem: Es könnte ja noch weitere Lösungen geben, denn wir haben beim Lösungsweg ja eine Annahme getroffen – nämlich dass  $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Diese weiteren Lösungen könnten auch theoretisch auf einem Intervall definiert sein, was größer ist als  $I_{\max}$ . In dem Fall wäre die oben genannte Lösung nicht die *maximale* Lösung. Später werden wir ein einfaches Argument kennenlernen, welches solche weiteren Lösungen ausschließt. An dieser Stelle müssen wir uns allerdings mit einem komplizierterem Argument begnügen, was den Lesenden als die folgende Übungsaufgabe überlassen ist.

**Übung 11.** Es sei  $y \in C^1(I)$  eine Lösung von

$$y'(t) = y(t)^2 \quad (t \in I). \quad (41)$$

Zeigen Sie: Gibt es ein  $t_0 \in I$  mit  $y(t_0) \neq 0$ , so gilt  $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

HINWEIS: In einer Umgebung von  $t_0$  gilt  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{y(t)} \right) = -1$ , also

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(t_0)} = t_0 - t. \quad (42)$$

Betrachten Sie  $t_1 := \inf\{t \in I : t \geq t_0, y(t) = 0\}$ . Nehmen Sie an, dass  $t_1 \in I$  und zeigen Sie, dass (42) in  $(t_0, t_1)$  erfüllt ist. Betrachten Sie (42) für  $t \rightarrow t_1 -$  und folgern Sie einen Widerspruch. Insbesondere ist also  $t_1$  am Rand von  $I$  und daher  $y(t) \neq 0$  für alle

$t \in I : t \geq t_0$ . Verfahren Sie analog mit  $t_2 := \sup\{t \in I : t \leq t_0, y(t) = 0\}$ .

SINN DER ÜBUNG: Wir haben mit dieser Übung hergeleitet, dass alle Lösungen des AWP (38) aus dem vorigen Beispiel die Annahme ' $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ ' erfüllen müssen. Mit diesem zusätzlichen Wissen sind die Gleichungen (33)–(37) Äquivalenzumformungen. Es kommen also keine weiteren Lösungen infrage als diejenigen, die wir im vorigen Beispiel gefunden haben. Das zeigt die Behauptung, dass die von uns gefundene Lösung die *maximale* Lösung ist. Das vorige Beispiel ist damit abgeschlossen.

Die Beweistechnik aus dem Hinweis, wo wir uns geschickte Infima definieren, wird übrigens *Prinzip des kleinsten Verbrechers* genannt.

**Übung 12.** LOGISTISCHES WACHSTUM. Betrachten Sie die Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1 - y(t)) & (t \in \mathbb{R}), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (43)$$

wobei  $y_0 \in (0, 1)$  beliebig.

- (a) Bestimmen Sie eine explizite Lösung. Fertigen Sie eine Zeichnung an.
- (b) Zeigen Sie: Jede Lösung erfüllt  $y(t) \in (0, 1)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
- (c) Folgern Sie: Zu jedem  $y_0 \in (0, 1)$  gibt es eine eindeutige globale Lösung.
- (d) Zeigen Sie, dass die Lösung streng monoton ist und einen eindeutigen Wendepunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $y(t_0) = \frac{1}{2}$  besitzt.

TIPP: Es gibt hier zwei Lösungsmöglichkeiten. Eine mit der expliziten Formel aus Teilaufgabe (c) und eine, in der man direkt aus der Gleichung abliest.

SINN DER ÜBUNG: Logistisches Wachstum (allgemeiner beschrieben durch die Gleichung  $y'(t) = \alpha(\beta - y(t))y(t)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ) beschreibt eine Population, die sich aber nur bis zu einem gewissen Grad vermehren kann, weil bei einer zu großen Population z.B. die Nahrung knapp wird. Falls  $y(t) \approx 0$  verhält sich die Population beim Zeitpunkt  $t$  fast wie eine Population mit relativer Geburtenrate  $\alpha\beta$ . Wird  $y(t)$  allerdings größer, so wird die Geburtenrate bis auf 0 gedrückt. Die obige Übung zeigt, dass in diesem Modell die Population nicht beliebig anwachsen kann.

Am Ende dieses Abschnittes fassen wir die wichtigste Erkenntnis, (nämlich den instruktiven Lösungsweg in den Beispielen 7 (p. 6) und 10 (p. 9)) in einem Satz zusammen.

**Satz 13.** Es seien  $g \in C^0(I)$ ,  $h \in C^0(\mathbb{R})$  so, dass  $h(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Ferner sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = g(t)h(y(t)) \quad (t \in I) \quad (44)$$

gegeben. Sei  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  und  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$ . Dann ist  $H$

invertierbar und falls  $G(I) \subset H(\mathbb{R})$  ist

$$y(t) := H^{-1}(G(t)) \quad (t \in I) \quad (45)$$

eine Lösung von (44).

**Beweis.** Zunächst müssen wir zeigen, dass  $H$  invertierbar ist. Hierzu sehen wir zunächst, dass  $\frac{1}{h(z)} \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Nach dem Zwischenwertsatz gilt dann entweder  $\frac{1}{h(z)} > 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$  oder  $\frac{1}{h(z)} < 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Falls  $\frac{1}{h} > 0$ , so gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$H'(z) = \frac{1}{h(z)} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

Hieraus folgt, dass  $H$  streng monoton wachsend ist. Damit ist es invertierbar und außerdem gilt (nach einem Satz aus der Analysis)  $H^{-1} \in C^1(H(\mathbb{R}))$ . Analog folgert man die Invertierbarkeit auch wenn  $\frac{1}{h} < 0$ . In jedem Fall liegt die in (45) definierte Funktion  $y$  in  $C^1(I)$ . Ferner gilt für alle  $t \in I$ , dass

$$H(y(t)) = G(t).$$

Differenzieren wir beide Seiten nach  $t$ , so erhalten wir mit der Kettenregel  $H'(y(t))y'(t) = G'(t)$  für alle  $t \in I$ . Mit der Definition von  $G$  und  $H$  gilt

$$\frac{1}{h(y(t))}y'(t) = g(t) \quad \forall t \in I. \quad (47)$$

Stellen wir dies um, so erhalten wir  $y'(t) = g(t)h(y(t))$ , wie gewünscht.

Separation der Variablen lässt sich auch für Differential-Ungleichungen verwenden — In der Folgenden Übung sehen wir zum Beispiel, was *superexponentielles Wachstum* bedeutet.

#### Übung 14. DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN UND EXPONENTIELLES WACHSTUM.

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (48)$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $\frac{f(z)}{z} \geq c$  für alle  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $y_0 > 0$ . Zeigen Sie, dass

$$y(t) \geq y_0 e^{ct} \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (49)$$

**Weiteres Beispiel.** NICHT-GLOBALE LÖSUNGEN. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t)t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Es sollen explizite Lösungen und deren Existenzintervalle berechnet werden. Bestimmung der Lösung mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = y^2(t)t \\ \Rightarrow & \int_{y_0}^y \frac{1}{\eta^2} d\eta = \int_{t_0}^t \tau d\tau \\ \Rightarrow & \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} = \frac{t^2 - t_0^2}{2} \\ \Rightarrow & y(t) = \frac{2y_0}{2 + y_0(t_0^2 - t^2)} \end{aligned}$$

Der Nenner der Lösung kann Nullstellen haben, diese berechnen wir, um geeignete Fallunterscheidungen für die Bestimmung der Existenzintervallen treffen zu können:

1. Fall  $y_0 > 0$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$ : Der Nenner hat Nullstellen bei  $\pm(\frac{2}{y_0} + t_0^2)^{\frac{1}{2}}$ , so dass

$$I_{\max} = \left( -\left(\frac{2}{y_0} + t_0^2\right)^{\frac{1}{2}} ; +\left(\frac{2}{y_0} + t_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (50)$$

2. Fall  $y_0 < 0$  und  $2 + y_0 t_0^2 > 0$ : In dem Fall ist der Nenner immer positiv, so dass

$$I_{\max} = \mathbb{R}. \quad (51)$$

3. Fall:  $y_0 < 0$  und  $2 + y_0 t_0^2 \leq 0$ : Der Nenner hat wieder Nullstellen bei  $\pm(\frac{2}{y_0} + t_0^2)^{\frac{1}{2}}$ , so dass

$$\begin{aligned} I_{(t_0, y_0)} &= \left( -\infty ; -\left(\frac{2}{y_0} + t_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{oder} \\ I_{(t_0, y_0)} &= \left( \left(\frac{2}{y_0} + t_0^2\right)^{\frac{1}{2}} ; \infty \right) \end{aligned}$$

je nachdem, ob  $t_0 > 0$  oder  $t_0 < 0$ . Man beachte hierbei, dass im 3. Fall  $y_0 < 0$  und stets  $t_0 \in I_{\max}$  gelten muss!

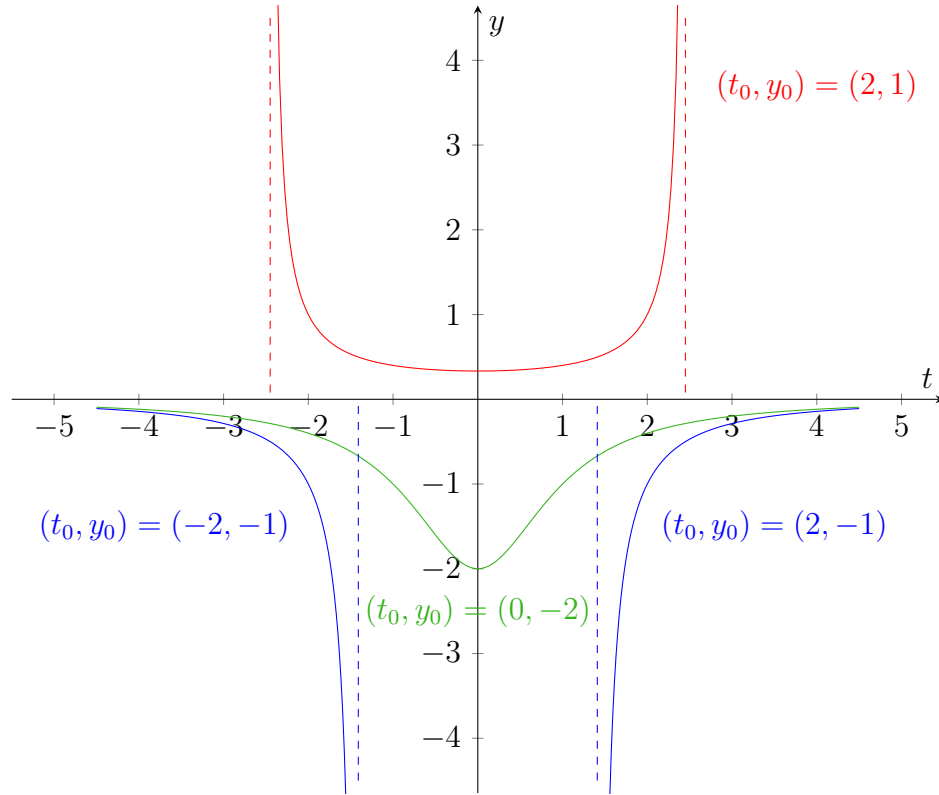


Abbildung 1: Definitionsbereiche der Lösungen der DGL  $y'(t) = y^2(t)t$

## 1.2 Lineare Differentialgleichungen

Im Folgenden soll es um (Systeme von) *linearen* Differentialgleichungen gehen.

### Definition 16. LINEARE SYSTEME.

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Eine DGL heißt *lineares homogenes System (erster Ordnung)*, falls sie die Form

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (52)$$

hat, wobei  $A \in C^0(I; \mathbb{R}^{n \times n})$  eine stetig von der Zeit abhängige Matrix ist, d.h.

$$f(t, z) := A(t)z \quad (t \in I, z \in \mathbb{R}^n) \quad (53)$$

ist für jedes feste  $t$  linear in der  $z$ -Variablen.

Bemerkenswert an linearen homogenen Systemen ist, dass die allgemeine Lösung

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{R}^n) : y'(t) = A(t)y(t), \forall t \in I\} \quad (54)$$

einen Untervektorraum von  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$  bildet. Das heißt insbesondere, dass Summen und skalare Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind. Diese Beobachtung wird auch oft *Superpositionsprinzip* genannt.

**Beispiel 17.** SPEZIALFALL  $n = 1$ .

Im Falle  $n = 1$  können wir bereits eine Lösung bestimmen. In dem Fall ist nämlich  $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{1 \times 1}) = C^0(I, \mathbb{R})$  eine skalarwertige Abbildung, d.h. die DGL liest sich

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I), \quad (55)$$

wobei  $a \in C^0(I, \mathbb{R})$ . Wir betrachten die DGL als DGL mit getrennten Veränderlichen mit  $g(t) := a(t)$  und  $h(z) := z$ . Unter der Annahme  $y(t) > 0$  für alle  $t \in I$  rechnen wir wieder

$$\frac{d}{dt} \log(y(t)) = \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t), \quad (56)$$

also gilt für eine fest gewählte Stammfunktion  $\int^t a(s) \, ds$  und eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$

$$\log(y(t)) = \int^t a(s) \, ds + C. \quad (57)$$

Es folgt

$$y(t) = \exp \left( \int^t a(s) \, ds + C \right). \quad (58)$$

Definiert man  $c := e^C$ , so erhält man

$$y(t) = c \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right). \quad (59)$$

Da wir die Annahme  $y(t) > 0$  für alle  $t \in I$  getroffen haben muss hier  $c > 0$  sein. Wir wissen aber: Da die Menge aller Lösungen ein Vektorraum ist, muss auch  $y(t) = -c \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right)$  eine Lösung sein. Daher ergibt sich die folgende

**BEHAUPTUNG:** Die allgemeine Lösung von (55) ist gegeben durch

$$\mathbb{L} := \left\{ y \in C^1(I) \mid \exists c \in \mathbb{R} : y(t) = c \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right) \quad \forall t \in I \right\} \quad (60)$$

**BEGRÜNDUNG:**

**Schritt 1.**  $\mathbb{Z}$  Jedes Element aus  $\mathbb{L}$  ist eine Lösung. Dies rechnet man leicht durch Einsetzen in die Gleichung nach. (HA)

**Schritt 2.**  $\mathbb{Z}$  Jede Lösung ist ein Element aus  $\mathbb{L}$ . Wir gehen vor wie in Beispiel 3 (p. 3): Es sei  $y_* \in C^1(I)$  eine Lösung. Definiere nun für  $t \in I$  die Hilfsfunktion  $g(t) := \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) y_*(t)$ . Man rechnet nach, dass für alle  $t \in I$  gilt

$$g'(t) = \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) y'_*(t) + \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) (-a(t)y_*(t)) \stackrel{(55)}{=} 0. \quad (61)$$

Das heißt also, dass es  $c_* \in \mathbb{R}$  gibt mit  $g(t) = c_*$  für alle  $t \in I$ . Setzt man die Definition von  $g$  ein und stellt die Gleichung um, so erhält man  $y_*(t) = c_* \exp\left(-\int^t a(s) \, ds\right)$ .

Wir werden in diesem Kapitel verschiedene Modifikationen vornehmen und Lösungsformeln für ähnliche DGLs kennenlernen. Wir werden die DGLs stets auf die Situation in (55) zurückführen. Daher halten wir nochmal fest

**Wichtige Merkformel 18. LÖSUNGSFORMEL FÜR LINEARE DGL.**

Es sei  $a \in C^0(I; \mathbb{R})$ . Die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (62)$$

ist gegeben durch

$$\mathbb{L} := \left\{ y \in C^1(I) \mid \exists c \in \mathbb{R} : y(t) = c \exp\left(\int^t a(s) \, ds\right) \quad \forall t \in I \right\}. \quad (63)$$

Als Anwendung können wir uns hier eine Population mit zeitabhängiger relativer Geburtenrate vorstellen. So zum Beispiel könnte es sein, dass in einer bestimmten Jahreszeit die Sterberate größer ist als in anderen Jahreszeiten, z.B. durch Hitzewellen. Dies würde die relative Geburtenrate im Sommer kleiner machen als im Winter. Auch die Saisonalität von Viruspopulationen könnte mit einem solchen Modell erfasst werden. Dazu später mehr.

### 1.2.1 Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Im Folgenden studieren wir die Situation, dass die Differentialgleichung eine *Inhomogenität* hat, d.h. zu dem linearen Term wird ein zeitabhängiger Term addiert. Für eine Anwendung einer solchen Gleichung müssen wir uns etwas gedulden — aber nicht lang!

**Definition 19. INHOMOGENE LINEARE DGL.** Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I) \quad (64)$$

heißt *inhomogene lineare DGL*. Hierbei sind  $a, b \in C^0(I; \mathbb{R})$ . In diesem Fall gilt also  $y'(t) = f(t, y(t))$  für

$$f(t, z) := a(t)z + b(t). \quad (65)$$

Wiederum können wir eine explizite Lösungsformel angeben. Hierfür betrachten wir eine geschickte *Hilfsfunktion*, die von Merkformel 18 (p. 16) inspiriert ist.

**Satz 20. LÖSUNGSFORMEL MIT INHOMOGENITÄT.**

Es seien  $a, b \in C^0(I)$ . Gegeben sei die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I). \quad (66)$$



Man definiere

$$e(t) := \exp \left( \int^t a(s) \, ds \right) \quad (t \in I), \quad (67)$$

wobei  $\int^t a(s) \, ds$  eine beliebige feste Stammfunktion von  $a$  ist. Dann ist die allgemeine Lösung von (66) gegeben durch

$$\mathbb{L} := \left\{ y \in C^1(I) : y(t) = e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \right\}. \quad (68)$$

Eigentlich müssten wir bei der obigen Definition von  $\mathbb{L}$  noch dazu schreiben, dass die Formel aus (68) für alle  $t \in I$  gelten soll. Im Folgenden werden wir das manchmal unterdrücken, um die Notation schlank zu halten.

### Beweis.

SCHRITT 1.  $\mathbb{Z}$  : Jedes Element aus  $\mathbb{L}$  ist eine Lösung. Dies rechnen wir an dieser Stelle einfach nach. Sicherlich ist das etwas unbefriedigend, weil man ja irgendwie auf die Formel gekommen sein muss. Die weiteren Ausführungen im Schritt 2 werden die Formel aber *konstruktiv* herleiten. Es sei nun für ein  $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) := e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right). \quad (69)$$

Man rechnet leicht nach, dass  $e'(t) = a(t)e(t)$  für alle  $t \in I$  und damit gilt nach der Produktregel

$$y'(t) = e'(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + e(t) \frac{b(t)}{e(t)} \quad (70)$$

$$= a(t)e(t) \left( c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} \, du \right) + b(t) = a(t)y(t) + b(t). \quad (71)$$

SCHRITT 2.  $\mathbb{Z}$  : Jede Lösung ist ein Element aus  $\mathbb{L}$ . Es sei  $y \in C^1(I)$  eine Lösung. Definiere die *Hilfsfunktion*

$$h(t) := \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) y(t). \quad (72)$$

Wir berechnen mit der Produktregel

$$h'(t) = \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) y'(t) + \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) (-a(t)y(t)) \quad (73)$$

$$= \exp \left( - \int^t a(s) \, ds \right) (y'(t) - a(t)y(t)) = \frac{y'(t) - a(t)y(t)}{\exp \left( \int^t a(s) \, ds \right)} \quad (74)$$

$$\stackrel{(67)}{=} \frac{y'(t) - a(t)y(t)}{e(t)} \stackrel{(66)}{=} \frac{b(t)}{e(t)}. \quad (75)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt dann also für ein  $c \in \mathbb{R}$

$$h(t) = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad (76)$$

Nutzen wir nun die Definition von  $h(t)$  in (72) so erhalten wir

$$y(t) = \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du\right) = e(t) \left(c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du\right). \quad (77)$$

Das heißt  $y$  ist nach Gleichung (68) ein Element aus  $\mathbb{L}$ .

Am Ende dieses Beweises sollten wir uns fragen, wie man auf die Hilfsfunktion  $h$  kommt. Hierzu zunächst folgende Beobachtung: Aus den Ausführungen in Beispiel 17 (p. 15) würde folgen, dass im Falle  $b \equiv 0$  die Hilfsfunktion  $h$  eine Konstante wäre. Diese Lösungstechnik heißt daher *Variation der Konstanten* und kann auch in Form eines *Lösungsansatzes* formuliert werden, wie wir im Folgenden sehen werden. Dieser Lösungsansatz geht auf den Mathematiker Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ([LINK ZUR ORIGINALVERÖFFENTLICHUNG 1766](#)) zurück.

**Beweisreflexion 21.** DIE VARIATION DER KONSTANTEN. Wir betrachten mal wieder die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad (t \in I). \quad (78)$$

Wir wissen aus Beispiel 17 (p. 15), dass jede Lösung der *homogenen DGL*

$$\bar{y}'(t) = a(t)\bar{y}(t), (t \in I) \quad (79)$$

die Gestalt

$$\bar{y}(t) = ce(t), \quad \text{wobei} \quad e(t) := \exp\left(\int^t a(s) ds\right) \quad (80)$$

hat. Hierbei ist  $c \in \mathbb{R}$  eine Konstante. Aus Satz 20 (p. 16) lernen wir, dass die Lösung der inhomogenen Gleichung die folgende Gestalt hat:

$$y(t) = c(t)e(t), \quad (81)$$

wobei  $c(t)$  ein zeitabhängiger Ausdruck ist. Wir wissen aus Satz 20 (p. 16) auch schon, wie  $c(t)$  konkret aussieht. Allerdings ist die Formel dafür schwer zu merken. Man kann aber in jeder konkreten Situation die DGL durch einen *Ansatz* lösen. Das heißt: Wir nehmen an, dass unsere Lösung die Gestalt  $y(t) = c(t)e(t)$  hat und bestimmen dann eine Funktion  $c(t)$ , sodass die Gleichung erfüllt ist. Mit anderen Worten: Wir suchen eine Funktion  $c \in C^1(I; \mathbb{R})$ , sodass

$$y(t) := c(t)e(t) \quad (t \in I), \quad (82)$$

eine Lösung von (78) ist. Dieser Ansatz heißt *Variation der Konstanten*, weil die Konstante  $c$  in (80) durch eine Funktion ersetzt wird.

In der Tat liefert dieser Ansatz stets eine Lösung. Differenzieren wir (82) so erhalten wir (mit der Produktregel und  $e'(t) = a(t)e(t)$ )

$$y'(t) = c(t)e'(t) + c'(t)e(t) = c(t)a(t)e(t) + c'(t)e(t) \stackrel{(82)}{=} a(t)y(t) + c'(t)e(t). \quad (83)$$

Andererseits soll aber nach (78) auch gelten

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t). \quad (84)$$

Setzen wir das mit (83) gleich so erhalten wir

$$a(t)y(t) + c'(t)e(t) = a(t)y(t) + b(t). \quad (85)$$

Subtrahieren wir nun  $a(t)y(t)$  auf beiden Seiten, so bekommen wir

$$c'(t)e(t) = b(t) \quad (86)$$

und als Konsequenz

$$c'(t) = \frac{b(t)}{e(t)}. \quad (87)$$

Durch Integration erhalten wir

$$c(t) = c + \int^t \frac{b(u)}{e(u)} du. \quad (88)$$

Setzen wir dies in (82) ein, so erhalten wir exakt die Lösung aus Satz 20 (p. 16). Ein solcher Lösungsansatz kann auch ins Leere führen, z.B. wenn es keine Lösung gäbe, die die Gestalt in (82) hat. Wie Satz 20 (p. 16) und die obigen Ausführungen zeigen, geht der Ansatz in unserem Fall aber immer auf. Mehr noch: Mit einem solchen Lösungsansatz kann man auch im allgemeineren Kontext stets lineare DGLs mit Inhomogenitäten lösen — dasselbe funktioniert auch für Systeme! Voraussetzung ist aber, dass man die homogene Gleichung bereits gelöst hat, da man stets die Konstante aus der homogenen Lösung (80) variieren muss.

**Beispiel 22.** Wir bestimmen für  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (89)$$

Um eine Lösung zu bestimmen, können wir nun entweder die Lösungsformel verwenden oder die Variation der Konstanten. Wir zeigen hier mal letztere Methode. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $\bar{y}'(t) = \alpha \bar{y}(t)$  ist (siehe Merkformel 18, p. 16) gegeben durch

$$\bar{y}(t) = ce^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (90)$$

Um nun eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden machen wir folgenden Ansatz

$$y(t) \stackrel{!}{=} c(t)e^{\alpha t} \quad (91)$$

und berechnen

$$y'(t) = c'(t)e^{\alpha t} + \alpha c(t)e^{\alpha t} = c'(t)e^{\alpha t} + \alpha y(t). \quad (92)$$

Andererseits gilt laut (89)  $y'(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t}$ . Wir setzen die mit dem obigen Ausdruck gleich und erhalten

$$c'(t)e^{\alpha t} + \alpha y(t) = \alpha y(t) + \gamma e^{\beta t}, \quad (93)$$

also

$$c'(t)e^{\alpha t} = \gamma e^{\beta t}. \quad (94)$$

Umgeformt heißt das

$$c'(t) = \gamma e^{(\beta-\alpha)t}. \quad (95)$$

Integrieren wir so erhalten wir

$$c(t) = \begin{cases} c + \frac{1}{\beta-\alpha} \gamma e^{(\beta-\alpha)t} & \alpha \neq \beta, \\ c + \gamma t & \alpha = \beta. \end{cases} \quad (96)$$

Damit gilt also für die allgemeine Lösung

$$y(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \left( c + \frac{\gamma}{\beta-\alpha} e^{(\beta-\alpha)t} \right) & \alpha \neq \beta \\ e^{\alpha t} (c + \gamma t) & \alpha = \beta. \end{cases} \quad (97)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Funktion im Falle  $\alpha = \beta$  ein anderes Verhalten zeigt, als im Fall  $\alpha \neq \beta$ . Wir werden dieses Phänomen später noch vertiefen.

**Übung 23. BERNOULLI'SCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG.** Es seien  $a, b \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  und  $\gamma > 0, \gamma \notin \mathbb{N}$ . Betrachten Sie das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\gamma & (t \in \mathbb{R}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (98)$$

wobei  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \geq 0$ . Beachten Sie, dass  $y(t)^\gamma$  nur definiert ist, falls  $y(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Zeigen Sie: Ist  $y_0 > 0$  und

$$|1 - \gamma| \int_{\mathbb{R}} |b(t)| \exp \left( - \int_{t_0}^t (1 - \gamma)a(s) \, ds \right) \, dt < y_0^{1-\gamma} \quad (99)$$

so gibt es eine eindeutige globale Lösung  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

- (b) Kann auf die Voraussetzungen ‘ $y_0 > 0$ ’ und (99) verzichtet werden? Falls nein: Geben Sie Gegenbeispiele sowohl für die Eindeutigkeit als auch für die Globalität an.

HINWEIS: Betrachten Sie  $z(t) := y(t)^{1-\gamma}$  und leiten Sie eine Differentialgleichung für  $z$  her.

SINN DER ÜBUNG: Man sieht, dass man nicht nur die standardmäßigen linearen DGLs lösen kann. Mit geschickten *Substitutionen* löst man auch kompliziertere DGLs, die vielfach in der Anwendung auftauchen. Auch die Bernoulli’sche Differentialgleichung wird in der Populationsdynamik angewandt: VGL. [GIPLIN, AYALA (1973)]. Im Falle  $a, b \equiv \text{const.}, a > 0, b < 0$  und “ $\gamma \approx 2$ ” erhält man schließlich das logistische Wachstum aus Übung 12 (p. 11).

### 1.2.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (100)$$

wobei hier  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben und  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  gesucht ist. Dies ist ein Spezialfall von  $y'(t) = A(t)y(t)$  in dem  $A(t) \equiv A$  eine konstante Matrix ist. An dieser Stelle sei noch einmal gesagt, dass wir

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad (101)$$

stets als Spaltenvektor verstehen wollen, und demnach gilt — wie aus der Analysis bekannt — für  $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (102)$$

Die Einträge der Matrix  $A$  bezeichnen wir mit

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad (103)$$

Unsere Differenzialgleichung hat daher — lang ausgeschrieben — die Form

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}y_j(t) \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Wir werden gleich sehen, dass die Globalität von Lösungen stets gewährleistet ist. Daher ist ‘ $t \in \mathbb{R}$ ’ an dieser Stelle keine Einschränkung.

In dieser Sektion ist es sinnvoll, die Situation zu *komplexifizieren*, d.h. zuzulassen, dass die betrachteten Größen  $\mathbb{C}$ -wertig sind. Der Grund ist, dass bei komplexwertigen Matrizen das

*Diagonalisieren* leichter ist — und die Methode des Diagonalisierens werden wir uns stark zunutze machen!

Bevor wir aber damit loslegen, müssen wir zunächst Konventionen für das Differenzieren komplexwertiger Abbildungen treffen:

**Definition 24.** DIFFERENTIATION KOMPLEXWERTIGER ABBILDUNGEN.

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *(stetig) differenzierbar* auf  $I$ , falls  $\operatorname{Re}(g)$  und  $\operatorname{Im}(g)$  als Abbildungen von  $I$  nach  $\mathbb{R}$  (stetig) differenzierbar sind. Die *Ableitung* von  $g$  notieren wir mit

$$g'(t) := \operatorname{Re}(g)'(t) + i \operatorname{Im}(g)'(t). \quad (105)$$

Eine Abbildung  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  heißt (stetig) differenzierbar, falls jede ihrer Komponenten (stetig) differenzierbar ist. Die Ableitung definieren wir dann mit der obigen Konvention exakt wie in Gleichung (102). Die Menge aller stetig differenzierbaren Abbildungen von  $I$  nach  $\mathbb{C}^n$  bezeichnen wir mit  $C^1(I; \mathbb{C}^n)$ .

Alternativ hätte man auch die äquivalente klassische Definition wählen können: Man nennt eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar, falls für alle  $t_0 \in I$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} =: g'(t_0) \quad (106)$$

in  $\mathbb{C}$  existiert. Dass die beiden Aussagen äquivalent sind folgt sofort aus der Beobachtung, dass für alle  $t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}$

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \frac{\operatorname{Re}(g)(t) - \operatorname{Re}(g)(t_0)}{t - t_0} + i \frac{\operatorname{Im}(g)(t) - \operatorname{Im}(g)(t_0)}{t - t_0}. \quad (107)$$

Die Details überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

Die meisten Rechenregeln für das Differenzieren übertragen sich wie gewohnt ins Komplexe, sie bedürfen aber manchmal durchaus einer Herleitung! Um unsere Theorie zu retten werden wir die Kettenregel für die komplexe Exponentialfunktion benötigen, die wir als Übungsaufgabe nochmal klarstellen wollen:

**Übung 25.** RECHENREGELN UND DGLs IN  $\mathbb{C}$ .

- (a) Es sei  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Dann definiert auch  $e^g : t \mapsto e^{g(t)}$ , ( $t \in I$ ) eine stetig differenzierbare Funktion und es gilt

$$\frac{d}{dt} e^{g(t)} = g'(t) e^{g(t)}. \quad (108)$$

- (b) Nun sei  $a \in C^0(I; \mathbb{C})$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung (als Teilmenge von  $C^1(I; \mathbb{C})$ ) der DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (t \in I). \quad (109)$$

**TIPP:** Es gibt bei Übung 25 (a) mehrere Möglichkeiten: Entweder die Verwendung der Euler'schen Formel oder die Ausnutzung von Rechenregeln für Potenzreihen.

**SINN DER ÜBUNG:** Man sieht, dass die Theorie, die wir bisher hergeleitet haben auch im Komplexen ihre Gültigkeit hat.

Man überlegt sich leicht, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch in  $\mathbb{C}$  gilt (HA), mit der folgenden Konvention: Für  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt gilt

$$\int_I g(s) \, ds := \int_I \operatorname{Re}(g(s)) \, ds + i \int_I \operatorname{Im}(g(s)) \, ds. \quad (110)$$

Da alles, was wir in Kapitel 1.2 gemacht haben auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und auf Gleichung (108) beruht hat, verallgemeinern sich Merkformel 18 (p. 16) und Satz 20 (p. 16) leicht auf komplexwertige Situationen. Insbesondere gilt Beispiel 22 (p. 19) auch für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Der Grundstein für die Betrachtung komplexwertiger DGLs ist somit gelegt.

Komplexifizierung kann sich übrigens auch in anderen Kontexten für nicht-lineare DGLs lohnen, so auch zum Beispiel hier:

**\*-Übung 26.** KOMPLEXIFIZIERUNG VON DGLs. Betrachten Sie das System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)^2 - y_2(t)^2 \\ 2y_1(t)y_2(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (111)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

**SINN DER ÜBUNG:** Man sieht, dass sich kompliziert aussehende Differentialgleichungen durch Komplexifizierung substantiell vereinfachen können. Diesen konkreten Fall habe ich auch in meiner eigenen Forschung verwendet, siehe FORSCHUNGSARTIKEL, GLEICHUNG (2.6) UND (2.20) – ACHTUNG: LÖSUNGSSPOILER.

Sind die Differentialgleichungen, die wir betrachten, komplexwertig, so suchen wir auch komplexwertige Lösungen, d.h. für diesen Abschnitt sind Lösungen Elemente aus  $C^1(I; \mathbb{C}^n)$ .

**Definition 27.** DGL-SYSTEM MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN.

Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Eine DGL der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (112)$$

heißt *lineare homogene DGL (erster Ordnung) mit konstanten Koeffizienten*.

Im Falle  $n = 1$  haben wir (112) bereits gelöst. Wir bewegen uns nun schrittweise auf eine Lösung für  $n > 1$  zu. Hierfür untersuchen wir 4 Fälle:

- **Fall 1:**  $A$  hat Diagonalgestalt.
- **Fall 2:**  $A$  ist diagonalisierbar.

- **Fall 3:**  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  hat komplexe Eigenwerte.
- **Fall 4:**  $A$  ist in Jordanscher Normalform.

**Zu Fall 1:** DIAGONALMATRIZEN.  $A$  sei eine *Diagonalmatrix*, d.h.

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} ? \quad (113)$$

In diesem Fall sehen wir mit Gleichung (108), dass sich  $y'(t) = Ay(t)$  vereinfacht zu

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Man beachte: zwei Vektoren sind genau dann gleich wenn alle ihre Komponenten gleich sind. Wir schließen

$$y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots, \quad y_n'(t) = \lambda_n y_n(t). \quad (115)$$

Insbesondere können wir die Differentialgleichungen voneinander *entkoppeln*. Das heißt: wir können jede dieser einzelnen Komponentengleichungen separat lösen. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber der allgemeinen Gestalt in (104). Wir lösen also nun für jede Komponente einzeln. Mit Merkformel 18 (p. 16), angewendet auf jede Komponente, sieht man: Es gibt  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , so, dass

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}, \quad (116)$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Die Umformung auf der rechten Seite (die man beim ersten Lesen ‘rückwärts’ lesen sollte) haben wir gemacht, um die allgemeine Lösung kompakt darstellen zu können. Es gilt nämlich

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}, \quad (118)$$

wobei  $E(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Fundamentalmatrix heißt und in diesem Fall gegeben ist durch

$$E(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (119)$$

Für Diagonalmatrizen ist das System also *entkoppelt*. Wir tasten uns nun weiter vor und sprechen über *diagonalisierbare Matrizen*. Eine Matrix  $A$  heißt *diagonalisierbar*, falls es eine invertierbare Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (120)$$



für gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . In der Linearen Algebra haben Sie gelernt, dass eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar ist, wenn sie  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat. Es gilt dann mit  $S = (v_1, \dots, v_n)$  und  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$A = SDS^{-1} \quad \text{und} \quad D = S^{-1}AS. \quad (121)$$

**Zu Fall 2: DIAGONALISIERBARE MATRIZEN.** Wieder wollen wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (122)$$

finden — diesmal unter der Annahme, dass  $A$  *diagonalisierbar* ist. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ . Wir definieren  $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und schreiben

$$A = SDS^{-1}, \quad (123)$$

wobei  $S$  wie in (121) gewählt ist. Die Differentialgleichung schreibt sich dann

$$y'(t) = SDS^{-1}y(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (124)$$

Wir multiplizieren nun auf beiden Seiten mit  $S^{-1}$  und erhalten

$$S^{-1}y'(t) = DS^{-1}y(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (125)$$

Um die folgende Lösungsidee zu motivieren, wollen wir uns den Ausdruck mal anders geklammert anschauen. Es gilt

$$\frac{d}{dt}[S^{-1}y(t)] = D[S^{-1}y(t)] \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (126)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass wegen der Linearität der Ableitung

$$\frac{d}{dt}[S^{-1}y(t)] = S^{-1}y'(t) \quad (127)$$

gilt (HA). Für eine Lösung  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  können wir nun die Substitution

$$z(t) := S^{-1}y(t), \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (128)$$

definieren. Gleichung (126) liest sich dann wie folgt:

$$z'(t) = Dz(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (129)$$

Hiermit sind wir in derselben Situation wie in Gleichung (113):  $z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  löst  $z'(t) = Dz(t)$ , wobei  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine Diagonalmatrix ist. Wir schließen aus dem vorangegangenen Gedankenexperiment, dass es ein  $c \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$z(t) = E(t)c, \quad \text{wobei } E(t) := \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (130)$$

Wir erinnern uns nun, dass  $z(t) = S^{-1}y(t)$  und folgern

$$y(t) = Sz(t) = SE(t)c \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (131)$$

Damit erhalten wir die folgende

**BEHAUPTUNG:** Ist  $A$  diagonalisierbar mit  $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , so ist die allgemeine Lösung von (121) gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : y(t) = SE(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}, \quad (132)$$

wobei  $E(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Der Fall komplexer Eigenwerte einer reellwertigen Matrix bedingt eine spezielle Struktur der Lösungen des Systems (112), weshalb dieser Fall hier ebenfalls untersucht werden soll.

**Zu Fall 3: KOMPLEXE EIGENWERTE** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit ausschließlich reellwertigen Einträgen hat das charakteristische Polynom  $P(\cdot)$  stets reelle Koeffizienten. Dieses hat zur Folge, dass für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  immer auch sein komplex Konjugiertes  $\bar{\lambda}$  Eigenwert von  $A$  ist. Das gleiche gilt für die zugehörigen Eigenvektoren:

$$Au = \lambda u \iff A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}. \quad (133)$$

Komplexe Eigenwerte treten bei reellen Matrizen also immer paarweise auf. Daher gibt es im Falle eines  $(2 \times 2)$ -Systems entweder zwei komplex zueinander konjugierte Eigenwerte  $\lambda, \bar{\lambda}$  oder ausschließlich reelle Eigenwerte. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Im Fall komplexer Eigenwerte ist also die Diagonalform  $D$  gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Wir wollen diese Struktur untersuchen und setzen  $\lambda = \alpha + i\beta$  und  $u = v + iw$ . Die Transformation auf die Diagonalform (134) erfolgt durch  $D = S^{-1}AS$ , wobei  $S$  die Matrix mit den komplexen Eigenvektoren als Spalten ist,  $S = (u, \bar{u})$ . Zerlegen wir die Gleichung  $Au = \lambda u$  in ihren Real- und Imaginärteil, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A(v + iw) &= (\alpha + i\beta)(v + iw) \\ \iff Av &= \alpha v - \beta w \quad \text{und} \quad Aw = \beta v + \alpha w. \end{aligned} \quad (135)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A(v, w) &= (Av, Aw) \\ &= (v, w) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}}_{=: K_{\alpha, \beta}}. \end{aligned} \quad (136)$$

Setzen wir nun  $T = (v, w)$ , so wird (136) zu

$$\begin{aligned} AT &= TK_{\alpha,\beta} \\ \iff T^{-1}AT &= K_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (137)$$

Die Matrix  $K_{\alpha,\beta}$  heisst reelle Normalform, die Matrix  $T$  ist invertierbar, da  $S$  invertierbar ist. Wie man leicht nachrechnet, wird das System  $z'(t) = K_{\alpha,\beta}z(t)$  durch die Funktionen  $\tilde{z}, \hat{z} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

$$\tilde{z}(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} \quad (138)$$

$$\hat{z}(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \quad (139)$$

gelöst. Mit der Fundamentalmatrix

$$E(t) = (\tilde{z}(t), \hat{z}(t)) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \quad (140)$$

erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{K_{\alpha,\beta}} := \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid z(t) = E(t)c, \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2.\} \quad (141)$$

Durch geeignete Substitution erhalten wir nun die Lösungsmenge für die DGL (122):

$$\begin{aligned} z'(t) &= T^{-1}ATz(t) \\ \iff (Tz)'(t) &= A(Tz(t)) \\ \iff y'(t) &= Ay(t) \quad \text{mit } y(t) = Tz(t). \\ \implies \mathbb{L}_A &= \{y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid y(t) = TE(t)c, \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2.\} \end{aligned} \quad (142)$$

Unser DGL-System lässt sich aber auch für nicht-diagonalisierbare Matrizen lösen — mithilfe der *Jordan-Normalform*! Diese existiert für jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , und somit ist man befähigt beliebige lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten explizit zu lösen.

Betrachten wir also die DGL

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (143)$$

wobei  $A$  beliebig ist. Allgemein hat  $A$  eine Jordan-Normalform: Es gibt eine invertierbare Matrix  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}, \quad (144)$$

wobei  $J_m \in \mathbb{C}^{n_m \times n_m}$ ,  $n_m \geq 1$ ,  $n_1 + \dots + n_r = n$  die einzelnen Jordanblöcke sind, d.h.

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_m I + N, \quad (145)$$

wobei  $N = (n_{ij})_{i,j=1,\dots,n_m}$  die Matrix ist, die auf der ersten Nebendiagonalen nur Einser und sonst Nullen hat, d.h.

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (146)$$

Wir werden wieder in der Lage sein (143) durch Substitutionen so zu vereinfachen, dass wir nur die Gleichung für einen Jordanblock lösen müssen. In der Tat: Definiert man  $\tilde{y}(t) := S^{-1}y(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) so gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{y}'(t) = S^{-1}y'(t) = S^{-1}Ay(t) = S^{-1}AS(S^{-1}y(t)) = S^{-1}AS\tilde{y}(t). \quad (147)$$

Das bedeutet

$$\tilde{y}'(t) = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \tilde{y}(t). \quad (148)$$

Dieses System lässt sich entkoppeln:  $\tilde{y}$  hat die Gestalt  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r)^T$ , wobei  $\tilde{y}_m \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n_m})$  Lösung ist von

$$\tilde{y}_m'(t) = J_m \tilde{y}_m(t) = (\lambda_m I + N) \tilde{y}_m(t). \quad m = 1, \dots, r. \quad (149)$$

Wir müssen für eine Lösung also nur die Funktionen  $\tilde{y}_m$  finden. Das heißt: Wir haben das Problem reduziert auf das Folgende:

$$\text{Finde } z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d) \text{ so, dass } z'(t) = (\lambda I + N)z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (150)$$

Hierbei ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  beliebig und  $I, N \in \mathbb{C}^{d \times d}$  definiert wie in (146). Man beachte, dass wir hier in diesem Kontext unsere Dimension mit  $d$  notieren und nicht wie üblich mit  $n$ , weil wir ja bei dem obigen Entkopplungsschritt ein  $n$ -dimensionales System in viele Teilsysteme zerteilen. Beispielfhaft wollen wir nun (150) für  $d = 2$  lösen.

**Zu Fall 4:  $2 \times 2$ -JORDANBLÖCKE.** Es sei  $d = 2$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Wir bestimmen die allgemeine Lösung für

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (151)$$

Wir schreiben dazu die Gleichung in einzelnen Komponenten aus. Es gilt

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1(t) + z_2(t) \\ \lambda z_2(t) \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Schauen wir nun auf die zweite Komponente, so erhalten wir die Gleichung  $z_2'(t) = \lambda z_2(t)$ . Aus dieser Gleichung schließen wir (siehe Formel 18 (p. 16)), dass es eine Konstante  $c_2 \in \mathbb{C}$

geben muss mit der Eigenschaft, dass

$$z_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (153)$$

Damit ist  $z_2$  schon (bis auf einen freien Parameter  $c_2 \in \mathbb{C}$ ) komplett beschrieben. Setzen wir diese neue Erkenntnis in die erste Komponente von (152) ein, so erhalten wir

$$z_1'(t) = \lambda z_1(t) + z_2(t) = \lambda z_1(t) + c_2 e^{\lambda t}. \quad (154)$$

Diese Gleichung entspricht der Situation aus Beispiel 22 (p. 19) mit  $\alpha = \beta = \lambda$  und  $\gamma = c_2$ . Mit (96) erhalten wir, dass es ein  $c_1 \in \mathbb{C}$  gibt mit

$$z_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = e^{\lambda t} c_1 + t e^{\lambda t} c_2 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (155)$$

Setzen wir dies und (153) zusammen, so erhalten wir für gewisse  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} c_1 + t e^{\lambda t} c_2 \\ e^{\lambda t} c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (156)$$

wobei wir im letzten Schritt eine Matrixmultiplikation ‘rückwärts’ durchgeführt haben, um den Ausdruck in eine angenehme Form zu bringen. Wir schließen — wie immer — dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$\mathbb{L} := \{z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) : z(t) = E(t)c, \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^2\}, \quad (157)$$

wobei

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (158)$$

Wir könnten an dieser Stelle noch in einem Satz formulieren, wie das Ganze in beliebigen Dimensionen aussieht. Es ist aber vielleicht auch ohne einen solchen Satz einsichtig, dass man das obige Verfahren auch auf höherdimensionale Situationen übertragen kann. Außerdem wird man sich den Satz aufgrund der vielen Indizes kaum merken können. Wir sparen uns an dieser Stelle die Arbeit und formulieren einfach nochmal die Quintessenz:

1. Durch eine Substitution ist es stets möglich zu erreichen, dass die Matrix  $A$  in Jordan-Normalform angegeben ist. (Für Details siehe nochmal (147)).
2. Für Jordan-Blöcke lässt sich das System iterativ lösen — Die letzte Gleichung lässt sich stets entkoppeln und separat lösen, woraufhin die Lösung dann in die obigen Gleichungen eingesetzt werden kann.

### **Zusammenfassung 29. ZWEIDIMENSIONALE SYSTEME.**

Zweidimensionale Systeme haben wir damit komplett “abgegrast”. Falls die DGL

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (159)$$

für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gegeben ist, so gibt es folgende Möglichkeiten.

**Fall 1.** Ist  $A$  eine Diagonalmatrix mit reellen Eigenwerten, so kann die Lösungsmenge direkt angegeben werden mit

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) : y(t) = E(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2\}, \quad E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (160)$$

**Fall 2.** Ist  $A$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , und Eigenvektoren  $u, v \in \mathbb{C}^2$ , so ist für  $S = (u, v) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  invertierbar:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

In dem Fall ist

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) : y(t) = SE(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2\}, \quad E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (162)$$

**Fall 3.**  $A$  ist diagonalisierbar mit komplexen Eigenwerten  $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  und Eigenvektoren  $u, \bar{u} \in \mathbb{C}^2$ . Mit  $\lambda = \alpha + i\beta$  und  $u = v + iw$  und  $T = (v, w) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ :

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid y(t) = TE(t)c, \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2\}. \quad (163)$$

mit

$$E(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Dieser Ansatz eignet sich, wenn Lösungen zu reellen Anfangswerte gesucht werden. Trotzdem ist auch dann gelegentlich der komplexe Ansatz aus Fall 2 praktischer, da es sich mit Exponentialfunktionen deutlich einfacher rechnet als mit Sinus - und Cosinusfunktionen.

**Fall 4.** Ist  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  nicht diagonalisierbar, so gibt es genau einen reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m(\lambda) = 2$  und  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  invertierbar mit der Eigenschaft

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J.$$

Dann ist

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) : y(t) = SE(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}^2\} \quad (164)$$

wobei

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Abschließend zeigen wir die Berechnung der Jordanschen Normalform in einem Beispiel.

**Beispiel 30.** NICHT DIAGONALISIERBARES SYSTEM Es soll das System

$$y'(t) = Ay(t) \quad (165)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad (166)$$

gelöst werden. Hierzu bestimmen wir das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix  $A$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = (\lambda + 1)^2$$

so dass  $\lambda = -1$  Eigenwert von  $A$  mit algebraischer Vielfachheit  $m(\lambda) = 2$  ist. Die zugehörige Eigenvektorgleichung

$$(A - \lambda \text{Id})u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (167)$$

liefert  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  als einzigen Eigenvektor zu  $\lambda = -1$ . Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass es einen Vektor  $v$  gibt, welcher die Gleichung

$$(A - \lambda \text{Id})v = u \quad (168)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (169)$$

löst. Dieser ist offensichtlich  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , für den nach (169) gilt:

$$Av = u + \lambda v. \quad (170)$$

Setzen wir nun  $S = (u, v)$ , so gilt

$$\begin{aligned} AS &= A(u, v) = (Au, Av) \\ &= (\lambda u, u + \lambda v) \\ &= (u, v) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= SJ \end{aligned}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{y \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \mid y(t) = SE(t)c, \text{ für ein } c \in \mathbb{R}\}, \quad SE(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & t-1 \\ -2 & 2t-1 \end{pmatrix} \quad (171)$$

### Übung 31. LINEARE DGLs UND DIE JORDAN-NORMALFORM

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(t). \quad (172)$$

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung zu

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} y(t). \quad (173)$$

HINWEIS. Die Jordan-Normalform der unteren Matrix aus Teilaufgabe (b) ist exakt die Matrix aus Teilaufgabe (a).

SINN DER ÜBUNG: Diese Übung soll aufzeigen, dass man mit den entwickelten Methoden auch für höherdimensionale lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten die Lösung explizit hinschreiben kann. Wir trainieren hierbei die in den vorherigen Gedankenexperimenten erlernten Lösungstechniken. Auch wiederholen wir in dieser Übung, wie man die Jordan-Normalform einer gegebenen Matrix findet.

**\*Übung 32. SYSTEME IN JORDAN-NORMALFORM** Finden und beweisen Sie für allgemeine  $d \in \mathbb{N}$  eine Formel für die allgemeine Lösung von

$$z'(t) = (\lambda I + N)z(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (174)$$

wobei  $I$  die  $d \times d$ -Einheitsmatrix ist und  $N \in \mathbb{C}^{d \times d}$  wie in (146) ist.

SINN DER ÜBUNG: Dies ist der letzte Schritt, der uns zu einer allgemeinen Lösungsformel für allgemeine lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten fehlen würde.

### 1.2.3 Phasenportraits

Um uns einen besseren Überblick über das qualitative Lösungsverhalten zu verschaffen, betrachten wir Phasenportraits der Lösungen im Fall der  $(2 \times 2)$ -Systeme. Dazu interpretieren wir die in der Zusammenfassung 29 angegebenen Lösungen als Parameterdarstellung einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , den sogenannten *Phasenkurven* oder *Trajektorien* der Gleichung zu verschiedenen Werten der Konstanten  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ . Fassen wir nun mehrere Trajektorien in einem Diagramm zusammen und orientieren diese mit der üblichen Orientierung von  $\mathbb{R}^2$ , so sprechen wir von einem *Phasenportrait*. Wir unterscheiden die 4 in der Zusammenfassung 29 aufgeführten Fälle:



Fall 1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von Diagonalgestalt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \text{ (} \lambda_1 = \lambda_2 \text{ möglich)} \quad (175)$$

Die Lösung ist nach (160) von der Struktur

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (176)$$

Für  $c_1 = 0$  ist die Trajektorie  $y_1 = 0$ , für  $c_2 = 0$  erhalten wir  $y_2 = 0$  und für  $c_1 = c_2 = 0$  ist die Trajektorie durch  $y_1 = y_2 = 0$  gegeben.

Für  $c_1, c_2 \neq 0$  erhalten wir aus (176)

$$\frac{y_1(t)}{c_1} = e^{\lambda_1 t} = (e^{\lambda_2 t})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \left( \frac{y_2(t)}{c_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

und somit

$$\left( \frac{y_1(t)}{c_1} \right)^{\lambda_2} = \left( \frac{y_2(t)}{c_2} \right)^{\lambda_1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten also die Trajektorien

$$y_2 = c_2 \left( \frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (177)$$

welchen Kurven vom Typ  $y_2 = c y_1^q$  sind, deren Verlauf im wesentlichen von  $q < 0$ ,  $0 < q \leq 1$  oder  $q \geq 1$  abhängt. Die Vorzeichen der  $\lambda_1, \lambda_2$  bestimmen das asymptotische Verhalten. Wir betrachten die folgenden Fälle:

(a) Gelte  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Direkt aus der Lösung (176) sehen wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0,$$

und es ist  $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ . Damit erhalten wir die Phasenportraits in Abbildung 2 für den Fall  $q \neq 1$  und Abbildung 3 für den Fall  $q = 1$ , der  $\lambda_1 = \lambda_2$  bedeutet. Insbesondere laufen alle Trajektorien in die "0" und wir nennen 0 einen *stabilen Knoten*.

(b) Gelte  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Dann gilt für  $c_1, c_2 \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_2(t)| = \infty.$$

Es gilt wiederum  $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ , so dass die Trajektorien die gleiche Form haben wie im Fall  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , einzig die Richtung der Pfeile ist aufgrund des anderen asymptotischen Verhaltens stets umgedreht, also nach außen gerichtet. Das Phasenportrait ist durch Abbildung 4 gegeben und wir nennen 0 einen *instabilen Knoten*.

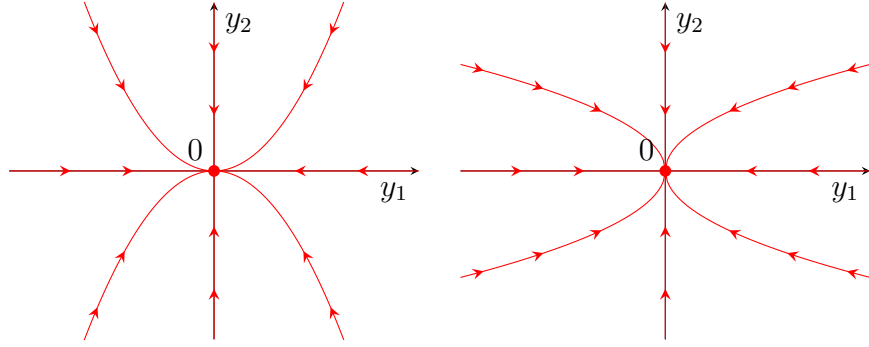


Abbildung 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Links  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ , rechts  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ .

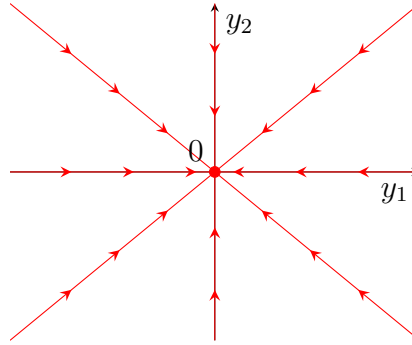


Abbildung 3: zu Fall 1:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  mit  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$ .

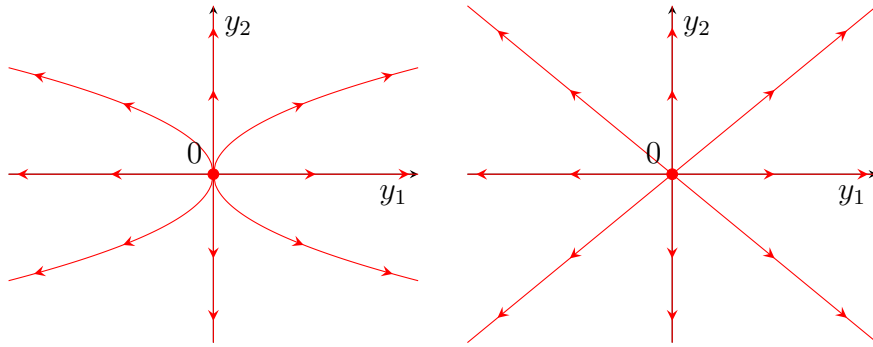


Abbildung 4:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$  mit  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.5$  (links) und  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$  (rechts).

- (c) Gelte  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Dann ist  $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$  und die Trajektorien haben nach Gleichung (177) die Form von Hyperbeln. Es gilt für  $c_2 \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_2(t)| = \infty.$$

Das Phasenportrait ist durch Abbildung 5 gegeben und 0 wird *instabiler Sattelpunkt* genannt. Im Falle  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  gelten die selben Überlegungen und es drehen sich lediglich die Richtungen der Pfeile um.

Fall 2. Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Die Phasenportraits entste-

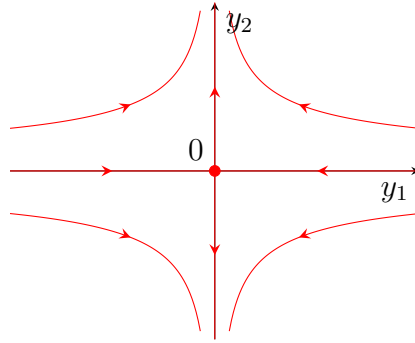


Abbildung 5:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  mit  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -0.5$ .

hen nach (162) aus denen im Fall 1 durch Transformation mit der Matrix  $S$ . Diese ist dargestellt in Abbildung 6.

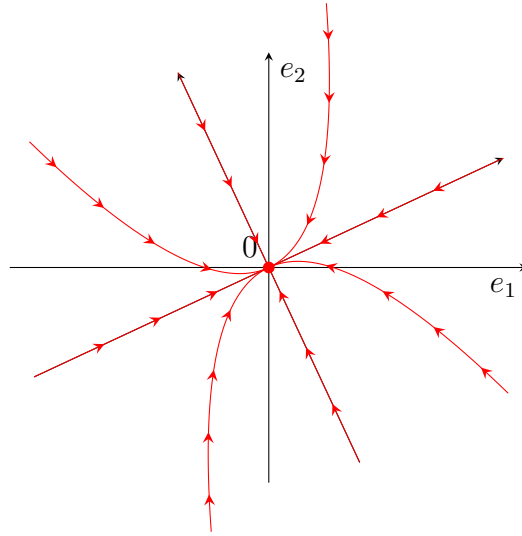


Abbildung 6:  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  bezüglich der Standardbasis,  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$ ,  $v_1, v_2$  Eigenvektoren.

Fall 3. Sei  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  Eigenvektor zu  $\lambda$ : Nach (141) sind die Lösungskurven gegeben durch

$$y(t) = e^{\alpha t} \left( c_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} \right)$$

Die Phasenportraits hängen nun von dem Wert von  $\text{Re}(\lambda) = \alpha$  ab.

(a) Gilt  $a = 0$ , so ist

$$|y(t)| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \text{const} \quad (180)$$

und die Phasenportraits sind gegeben durch Abbildung (7)

(b) Gilt  $a > 0$ , so folgt für Anfangswerte ungleich 0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |z_2(t)| = \infty.$$

Das Phasenportrait ist dann durch Abbildung 8 gegeben und 0 wird ein *instabiler Strudel* genannt.

(c) Gilt  $\alpha < 0$ , so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0.$$

Die Phasenportraits sind ähnlich zu denen im Fall  $\alpha > 0$ , allerdings laufen die Spiralen nun auf den Nullpunkt zu. Sie sind in Abbildung 9 dargestellt und 0 wird ein *stabiler Strudel* genannt.

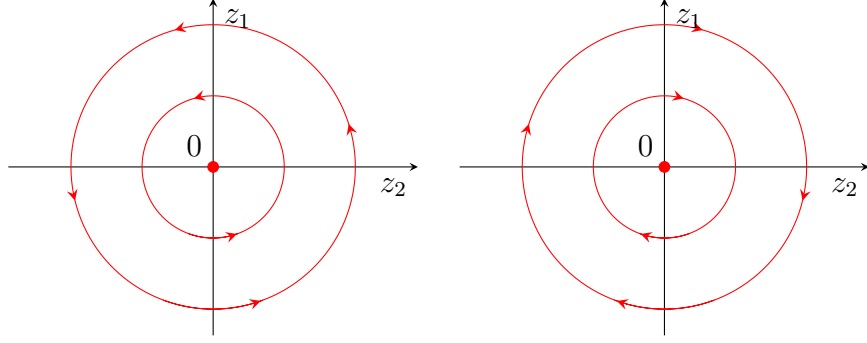


Abbildung 7:  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  für  $\alpha = 0$  und links  $\beta < 0$ , rechts  $\beta > 0$ .

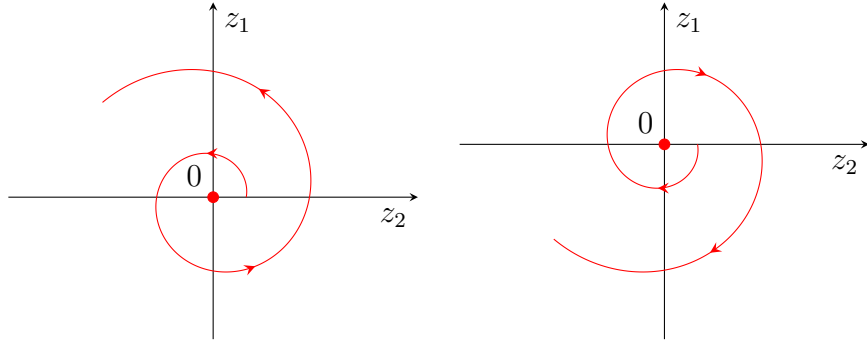


Abbildung 8:  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha > 0$  und links  $\beta < 0$ , rechts  $\beta > 0$ .

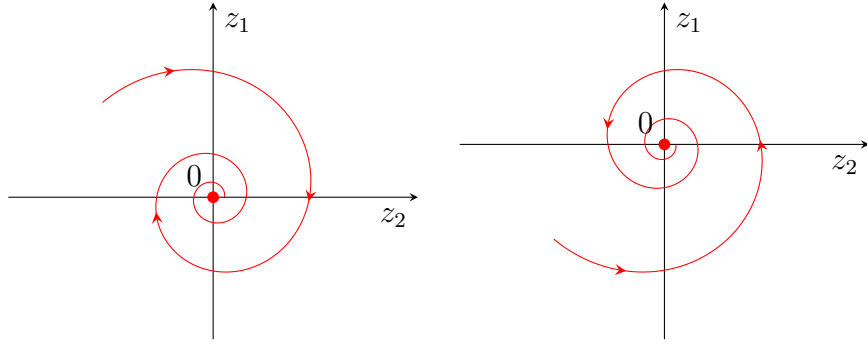


Abbildung 9:  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha < 0$  und links  $\beta < 0$ , rechts  $\beta > 0$ .

Fall 4. Sei zunächst  $A$  in Jordannormalform vorausgesetzt, mit Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Lösung nach (164) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (183)$$

Hieraus folgt direkt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0 \quad (184)$$

für  $\lambda < 0$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t)| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_2(t)| = \infty \quad (185)$$

für  $\lambda > 0$ . Bilden wir den Quotienten  $y_1/y_2$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_2} &= \frac{c_1 + c_2 t}{c_2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \left( \frac{c_1}{c_2} + t \right) y_2 \end{aligned} \quad (186)$$

Um ein Phasenportrait skizzieren zu können, müssen wir aus Gleichung (186) das  $t$  eliminieren. Dieses gelingt mit

$$y_2 = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{y_2}{c_2} \right) \quad (187)$$

so dass

$$y_1 = \left( \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{y_2}{c_2} \right) \right) y_2. \quad (188)$$

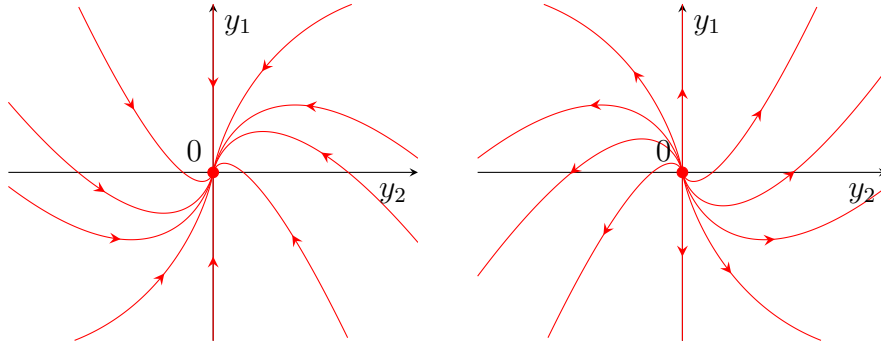


Abbildung 10: Jordan Matrix mit  $\lambda = -1$  (links) und  $\lambda = 1$  (rechts).

#### 1.2.4 Die Fundamentalmatrix

Die Beobachtungen aus dem letzten Abschnitt legen nahe, dass die allgemeine Lösung von  $y'(t) = Ay(t)$  ( $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ) stets von folgender Form ist:

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) : y(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}, \quad (189)$$

wobei  $M \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n \times n})$  eine zeitabhängige Matrix ist. Eine weitere Beobachtung ist, dass  $M(t)$  stets für alle  $t \in \mathbb{R}$  invertierbar ist. Auch dies ist kein Zufall und gilt — wie wir später sehen werden — sogar allgemein für Gleichungen der Form  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ )!

Die Formel in (189) zeigt nochmal explizit, dass die Menge aller Lösungen einen Untervektorraum von  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  bildet (HA). Wir lernen hier sogar mehr: Der Vektorraum in (189) ist (wegen der Invertierbarkeit von  $M(t)$ ) exakt  $n$ -dimensional (HA).

Aus (189) lernen wir auch, dass die allgemeine Lösung komplett durch die Abbildung  $t \mapsto M(t)$  beschrieben werden kann. Weil diese Abbildung so wichtig ist, geben wir dieser einen speziellen Namen.

**Definition 33. FUNDAMENTALMATRIX** Es sei eine lineare DGL

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (t \in I) \quad (190)$$

für  $A \in C^0(I; \mathbb{C}^{n \times n})$  gegeben.

Eine Abbildung  $t \mapsto M(t)$ ,  $(t \in I)$  in  $C^1(I; \mathbb{C}^{n \times n})$  heißt *Fundamentalmatrix* für die DGL falls

1.  $M(t)$  invertierbar für alle  $t \in I$ .
2. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbb{L} := \{y \in C^1(I; \mathbb{C}^n) : y(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\}. \quad (191)$$

Für Systeme mit konstanten Koeffizienten können wir  $t \mapsto M(t)$  bereits explizit angeben. Für Systeme mit nicht-konstanten Koeffizienten müssen wir uns noch ein wenig gedulden ...

Haben wir eine Fundamentalmatrix gefunden, so lassen sich alle Anfangswertprobleme eindeutig lösen. In der Tat: Sei für ein  $t_0 \in I$  und ein  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (192)$$

gegeben und sei  $t \mapsto M(t)$  eine Fundamentalmatrix. Wir wissen, dass die Lösung die Gestalt  $y(t) = M(t)c$ ,  $(t \in I)$  für ein  $c \in \mathbb{C}^n$  hat. Um alle möglichen Werte für  $c$  zu bestimmen betrachten wir

$$y_0 \stackrel{!}{=} y(t_0) = M(t_0)c. \quad (193)$$

Wegen der Invertierbarkeit von  $M(t_0)$  gibt es hierzu genau eine Lösung:  $c = M(t_0)^{-1}y_0$ . Daher ist

$$y(t) = M(t)M(t_0)^{-1}y_0 \quad (t \in I) \quad (194)$$

die einzig mögliche Lösung.

Man kann aus der Fundamentalmatrix noch weitere nützliche Dinge herauslesen.

**Definition 34. FUNDAMENTALSYSTEM.**

Es sei  $t \mapsto M(t)$ ,  $(t \in I)$  eine Fundamentalmatrix für eine lineare homogene DGL  $y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $(t \in I)$ . Die Menge von Abbildungen  $\{t \mapsto M(t)e_1, \dots, t \mapsto M(t)e_n\} \subset C^1(I; \mathbb{C}^n)$ , die jeweils  $t$  auf die Spaltenvektoren von  $M(t)$  schickt, wird *Fundamentalsystem* genannt.

Man sieht: Jedes Element des Fundamentalsystems ist eine Lösung (HA). Außerdem lässt sich jede Lösung auf eindeutige Weise als Linearkombination von Elementen eines gegebenen Fundamentalsystems schreiben. In der Tat: Ist

$$c = c_1e_1 + \dots + c_ne_n \in \mathbb{C}^n \quad (195)$$

beliebig vorgegeben, so ist die Lösung  $y(t) = M(t)c = M(t)(c_1e_1 + \dots + c_ne_n)$  gegeben durch

$$y(t) = c_1(M(t)e_1) + \dots + c_n(M(t)e_n). \quad (196)$$

Da jede Lösung  $y \in \mathbb{L}$  die Gestalt  $y(t) = M(t)c$  für ein eindeutiges  $c \in \mathbb{C}^n$  hat, können wir  $y$  als eindeutige Linearkombination von Elementen des Fundamentalsystems schreiben.

Man beachte, dass wir für die Eindeutigkeit von  $c$  wiederum die Invertierbarkeit von  $M(t)$  benötigen.

Zusammengefasst:

**Merksatz 35.**

Jedes Fundamentalsystem bildet eine *Basis* des Lösungsraumes  $\mathbb{L}$ . (197)

Insbesondere: Existiert eine Fundamentalmatrix  $t \mapsto M(t)$ , so ist  $\mathbb{L}$  ein Vektorraum der Dimension  $n$  (über  $\mathbb{C}$ ).

Diese Eigenschaft rechtfertigt den Namen ‘*Fundamentalsystem*’.

Dankenswerterweise ist es nun so, dass wir zu jeder linearen DGL ein Fundamentalsystem finden können. Beweisen können wir das aber leider erst später.

**Satz 36. EXISTENZ EINER FUNDAMENTALMATRIX.**

Es sei  $A \in C^0(I; \mathbb{C}^{n \times n})$ . Zu jedem linearen DGL-System der Form  $y'(t) = A(t)y(t)$ , ( $t \in I$ ) gibt es eine Fundamentalmatrix  $t \mapsto M(t)$  in  $C^1(I; \mathbb{C}^{n \times n})$ . Insbesondere bildet die Menge aller Lösungen einen ( $\mathbb{C}$ -)Vektorraum der Dimension  $n$ . Ferner hat für alle  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  und  $t_0 \in I$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (198)$$

eine eindeutige Lösung, gegeben durch

$$y(t) = M(t)M(t_0)^{-1}y_0 \quad (t \in I). \quad (199)$$

**Beweis. NUR EINDEUTIGKEIT**

1. Die Existenz einer Fundamentalmatrix zeigen wir später. Falls  $A(t) \equiv A = \text{const.}$  haben wir sie eigentlich schon bewiesen, da wir  $t \mapsto M(t)$  stets explizit angeben können. Man müsste aber an dieser Stelle dann noch die Invertierbarkeit von  $M(t)$  überprüfen (HA).
2. Die Existenz einer Fundamentalmatrix bedingt, dass die allgemeine Lösung ein Vektorraum der Dimension  $n$  ist, siehe Merksatz 35 (p. 40). Auch die eindeutige Existenz einer Lösung eines Anfangswertproblems haben wir bereits in der Diskussion vor (194) diskutiert. Die Kurzfassung nochmal hier: Jede Lösung der DGL ist von der Gestalt  $y(t) = M(t)c$  für ein  $c \in \mathbb{R}^n$ . Damit der Anfangswert  $y(t_0) = y_0$  angenommen wird muss gelten  $M(t_0)c = y_0$ . Da  $M(t_0)$  invertierbar ist, besitzt dieses lineare Gleichungssystem genau eine Lösung  $c = M(t_0)^{-1}y_0$ . Daher ist die eindeutige



Lösung von (198) gegeben durch

$$y(t) = M(t)c = M(t)M(t_0)^{-1}y_0. \quad (200)$$

Mit einer Fundamentalmatrix kann man also DGLs eindeutig lösen. Man beachte jedoch, dass Fundamentalmatrizen selbst nicht eindeutig durch die DGL bestimmt sind:

**\*-Beispiel 37. NICHT EINDEUTIGKEIT VON FUNDAMENTALMATRIZEN.**

Es sei eine lineare DGL gegeben, die eine Fundamentalmatrix  $t \mapsto M(t)$  besitzt. Sei zusätzlich  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine beliebige invertierbare Matrix.

BEHAUPTUNG: Dann ist  $t \mapsto M(t)B$  auch eine Fundamentalmatrix.

BEWEIS: Da  $M(t)$  ein Fundamentalsystem ist gibt es zu jeder Lösung  $y \in \mathbb{L}$  ein  $c \in \mathbb{C}^n$  mit

$$y(t) = M(t)c \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (201)$$

Setzen wir nun  $\tilde{c} := B^{-1}c$ , so erhalten wir

$$y(t) = M(t)B\tilde{c} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (202)$$

Dies zeigt, dass

$$\mathbb{L} \subset \{y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) : y(t) = (M(t)B)\tilde{c} \text{ für ein } \tilde{c} \in \mathbb{C}^n\}. \quad (203)$$

Man erhält in der obigen Mengeninklusion auch Gleichheit, indem man leicht nachrechnet, dass jedes Element  $y(t) = M(t)B\tilde{c}$  auf der rechten Seite die Gleichung löst [denn schließlich hat es ja die Gestalt  $y(t) = M(t)d$  für ein  $d \in \mathbb{C}^n$ ,  $d = B\tilde{c}$ ]. Zum Abschluss ist dann nur noch zu zeigen, dass  $M(t)B$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  invertierbar ist. Dies folgt aber auch leicht daraus, dass

$$\det(M(t)B) = \det(M(t))\det(B) \neq 0 \quad \forall t \in I. \quad (204)$$

Eine Fundamentalmatrix hat für uns einen sehr großen Nutzen: Wir können mit ihr sogar das *inhomogene Problem*

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (205)$$

für ein  $b \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  lösen. Ist  $t \mapsto M(t)$  eine Fundamentalmatrix für das homogene Problem, so können wir die *Variation der Konstanten* (siehe Beweisreflexion 21 (p. 18) und Beispiel 22 (p. 19)) anwenden: Wieder einmal führt uns ein Ansatz der Form

$$y(t) = M(t)c(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (206)$$

für eine Funktion  $c \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  zum Ziel.

**Übung 38. INHOMOGENE SYSTEME.**

Es seien  $\alpha, \omega, d \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ d \sin(\alpha t) \end{pmatrix}. \quad (207)$$

Zeigen Sie: Falls  $\alpha \neq \pm\omega$ , so sind alle Lösungen auf  $I = \mathbb{R}$  beschränkt. Falls  $\alpha = \pm\omega$ , so gibt es unbeschränkte Lösungen.

HINWEIS: Die Lösung des zugehörigen homogenen Problems ist in Anwendung 46 (p. 49) durchgeführt. Die Rechnungen dort dürfen benutzt werden um die Fundamentalmatrix  $t \mapsto M(t)$  zu bestimmen. Damit sollte der Ansatz in (206) in diesem konkreten Fall gut durchführbar sein.

SINN DER ÜBUNG: Wir werden sehen, dass diese DGL auftaucht, wenn wir die Schwingung eines *getriebenen harmonischen Oszillators* beschreiben wollen. Der Fall  $\alpha = \pm\omega$ , der sogenannte *Resonanzfall*, nimmt wegen der unbeschränkten Lösungen eine besondere Bedeutung ein. Mit diesem Fall kann erklärt werden, warum an beim Schreiben an der Tafel manchmal die Kreide quietscht.

Methodisch ist die Aufgabe auch interessant: Wir üben hier auch nochmal die Variation der Konstanten in einer komplexeren Situation ein.

### 1.2.5 Homogene lineare DGLs höherer Ordnung

Mittlerweile können wir schon ziemlich allgemeine lineare Differentialgleichungen lösen. Die Theorie lässt sich auch auf lineare Gleichungen *höherer Ordnung* anwenden.

“Höhere Ordnung” heißt, dass höhere Ableitungen in der Gleichung vorkommen. Das heißt, man hat z.B. eine Gleichung der Form

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad (t \in I). \quad (208)$$

Aus historischen Gründen schreiben wir hier auch oft die gesamte DGL auf eine Seite, d.h.

$$y''(t) - f(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (t \in I). \quad (209)$$

Üblicherweise war die Regularität, die wir gefordert haben immer ‘ $y \in C^1(I)$ ’. Im Kontext von DGLs höherer Ordnung müssen wir natürlich höhere Regularitätsanforderungen stellen, denn schließlich müssen wir ja auch von höheren Ableitungen sprechen können. Daher ändert sich auch unsere Definition eines Lösungsbegriffs.

#### **Definition 39.** LINEARE DGLS HÖHERER ORDNUNG.

Es seien  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ . Eine Differentialgleichung der Form

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (210)$$

heißt *lineare (homogene) DGL zweiter Ordnung*. Eine *Lösung* ist eine Funktion  $y \in C^2(I; \mathbb{C})$  die (210) für alle  $t \in I$  erfüllt. Falls  $a, b$  konstante Funktionen sind, so heißt die DGL *lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Allgemein heißt eine DGL der Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y_0(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (211)$$

eine *lineare (homogene) DGL n-ter Ordnung*. Eine Lösung ist dann eine Funktion  $y \in C^n(I; \mathbb{C})$  so, dass (211) erfüllt ist.

Man beachte, dass auch für solche Gleichungen das *Superpositionsprinzip* gilt, d.h. wieder einmal bildet die allgemeine Lösung

$$\mathbb{L} = \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \ \forall t \in I\} \quad (212)$$

einen Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

Wir werden gleich sehen, dass sich DGLs höherer Ordnung lösen lassen, indem wir sie mithilfe einer geschickten Substitution als System von DGLs erster Ordnung schreiben. Haben die DGLs konstante Koeffizienten  $a, b \equiv \text{const.}$ , so lässt sich die Lösung sogar explizit bestimmen!

#### **Gedankenexperiment 40. RÜCKFÜHRUNG AUF DGL-SYSTEME.**

Wir beschränken uns hier mal (der Einfachheit halber) auf DGLs zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. auf

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (213)$$

für  $a, b \in \mathbb{C}$  zwei Konstanten. Für die Lösung verwenden wir einen einfachen Trick: Wir wandeln die DGL in ein System von DGLs erster Ordnung um. Sei hierzu  $y$  eine Lösung von (213). Wir setzen für  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z_0(t) &:= y(t), \\ z_1(t) &:= y'(t). \end{aligned} \quad (214)$$

Wir berechnen

$$z'_0(t) = y'(t) = z_1(t), \quad (215)$$

$$z'_1(t) = y''(t) \stackrel{(213)}{=} -ay'(t) - by(t) \stackrel{(214)}{=} -az_1(t) - bz_0(t). \quad (216)$$

Alles in Allem heißt das

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_0(t) \\ z'_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ -bz_0(t) - az_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}. \quad (217)$$

Somit schließen wir, dass die Funktion

$$z(t) := \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (218)$$

die folgende DGL erfüllt:

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z(t). \quad (219)$$

Dies ist eine DGL, die wir bereits explizit lösen können! Es wird — wie im letzten Abschnitt erläutert — so sein, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$\tilde{\mathbb{L}} = \{z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) : z(t) = M(t)c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}^n\} \quad (220)$$

für eine Fundamentalmatrix  $t \mapsto M(t)$ , die wir explizit bestimmen können. Eigentlich wollen wir aber nicht die vektorwertige Lösung  $z(t)$  haben, sondern die skalarwertige Gleichung (213) lösen. Wir müssen wieder resubstituieren. Dafür erinnern wir uns, dass  $y(t) = z_0(t)$  die erste Komponente von  $z(t)$  war. Das legt nahe, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y \text{ ist erste Komponente eines Elementes aus } \tilde{\mathbb{L}}\}. \quad (221)$$

Mit (220) und der Tatsache, dass  $\langle v, e_1 \rangle$  stets die erste Komponente eines Vektors  $v \in \mathbb{C}^2$  liefert gilt

$$\mathbb{L} = \{y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : y(t) = \langle M(t)c, e_1 \rangle\}. \quad (222)$$

Diese Formel zeigen wir im Laufe dieses Abschnittes formal und auch ohne die Annahme konstanter Koeffizienten (die wir bei Lichte betrachtet auch hier nicht sonderlich benutzt haben — sie hilft lediglich dabei die Lösung in (220) explizit zu bestimmen).

Wir haben also eine Korrespondenz zwischen linearen Systemen und linearen DGL's höher Ordnung! Das heißt insbesondere, dass wir in den letzten Kapiteln bereits die Kenntnisse erworben haben, um DGLs höherer Ordnung zu lösen – und auch bereits gelöst haben:

#### Übung 41. EINE (INHOMOGENE) DGL HÖHERER ORDNUNG.

Das System aus Übung 38 (p. 41) kann verwendet werden um die allgemeine Lösung einer DGL zweiter Ordnung zu beschreiben. Geben Sie diese DGL an.

SINN DER ÜBUNG: Wir sehen an dieser Übung nochmal, dass wir auch inhomogene lineare DGLs höherer Ordnung bereits gut lösen können, weil wir ja schließlich auch inhomogene lineare Systeme lösen können. Die DGL, die hierbei auftaucht gehört zum *getriebenen harmonischen Oszillator*, welches im Ingenieurwesen sehr relevant ist und was wir später noch besprechen werden.

Das vorherige Gedankenexperiment zeigt, dass wir jede lineare DGL höherer Ordnung auf ein lineares System zurückführen können. Auch für nichtlineare DGLs höherer Ordnung ist ein Ansatz wie in (214) möglich. Wir diskutieren im Rest des Abschnittes, dass  $\mathbb{L}$  aus (221) wirklich die allgemeine Lösung ist.

Nun wollen wir *Anfangswertprobleme* richtig aufzustellen und lösen. Wir müssen uns allerdings erstmal im Klaren werden, was ein Anfangswertproblem im Kontext von DGLs höherer Ordnung überhaupt sein soll, ganz intuitiv würde man vielleicht wie üblich Probleme wie

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (223)$$

für ein  $y_0 \in \mathbb{C}$  studieren wollen. Gibt es hierbei eine eindeutige Lösung? Leider nein! Dies geht schon allein aus Dimensionsargumenten nicht: Nach unseren visherigen Überlegungen hat

$$\mathbb{L} := \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I\} \quad (224)$$

Dimension 2, es gibt also eine zweielementige Basis. Wähle nun  $b_1, b_2 \in \mathbb{L}$  Funktionen, sodass  $\{b_1, b_2\}$  eine Basis von  $\mathbb{L}$  ist. Es folgt, dass jede Lösung  $y$  von (223) eine Linearkombination

aus  $b_1$  und  $b_2$  sein muss, d.h. es gibt  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  mit

$$y(t) = c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t). \quad (225)$$

Falls (223) eine eindeutige Lösung hat, müssen sich die unbekannten Parameter  $c_1, c_2$  eindeutig bestimmen lassen. Nun ist die einzige Bedingung, die in (223) gestellt wird, dass  $y(t_0) = y_0$ . Wir setzen

$$y_0 \stackrel{!}{=} y(t_0) = c_1 b_1(t_0) + c_2 b_2(t_0). \quad (226)$$

Dies ist eine lineare Gleichung für zwei Unbekannte  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Aus der Linearen Algebra wissen wir: Gibt es bei einem linearen Gleichungssystem weniger Gleichungen als Unbekannte, so ist die Lösung niemals eindeutig. Ein herber Rückschlag für die Theorie der Anfangswertprobleme ...

Man sieht: Damit es eindeutige Lösungen gibt müssen wir mehr vorschreiben als nur einen Anfangswert! Die Frage ist nur: Was müssen wir noch vorschreiben? Wir benötigen irgendeinen weiteren Wert, anbieten tut sich hier die *Anfangsgeschwindigkeit*, also die erste Ableitung am Zeitpunkt  $t_0$ .

**Korollar 42.** Es seien  $a, b \in C^0(I; \mathbb{C})$ ,  $y_0, y_1 \in \mathbb{C}$ ,  $t_0 \in I$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \quad (227)$$

eine eindeutige Lösung  $y \in C^2(I; \mathbb{C})$ . Diese ist gegeben durch die erste Komponente der eindeutigen Lösung des Systems

$$\begin{cases} z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} z(t) \\ z(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (228)$$

**Beweisidee.** Es seien  $\mathbb{L}$  und  $\tilde{\mathbb{L}}$  definiert durch, d.h.

$$\mathbb{L} := \{y \in C^2(I; \mathbb{C}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0\} \quad (229)$$

und

$$\tilde{\mathbb{L}} := \left\{ z \in C^1(I; \mathbb{C}^2) : z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} z(t) \right\}. \quad (230)$$

Es sei ferner  $\Phi : \mathbb{L} \rightarrow \tilde{\mathbb{L}}$ , gegeben durch

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \quad (231)$$

Es sei nun  $y \in C^2(I; \mathbb{C})$  Lösung von (227). Dann gilt  $y \in \mathbb{L}$ ,  $y(t_0) = y_0$  und  $y'(t_0) = y_1$ .

Man beachte:  $z = \Phi(y)$  liegt in  $\tilde{\mathbb{L}}$  und außerdem gilt

$$z(t_0) = (\Phi(y))(t_0) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (232)$$

Mit anderen Worten löst  $z$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} z(t) \\ z(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (233)$$

Dieses AWP hat nach Satz 36 (p. 40) eine eindeutige Lösung! Das zeigt:  $z = \Phi(y)$  ist durch (227) eindeutig bestimmt. Da  $\Phi$  bijektiv ist, ist aber auch  $y = \Phi^{-1}(z)$  eindeutig bestimmt. Diese Aussage könnte man jetzt auch “schulbuchmäßig” beweisen, d.h. Existenz und Eindeutigkeit einzeln zeigen. Wir verzichten an dieser Stelle darauf und überlassen mit den oben angegebenen Ideen den Rest den Lesenden als Übungsaufgabe (HA).

NOCH ZUM ZUSATZ:

Dass  $\Phi^{-1}(z)$  gerade die erste Komponente von  $z = (z_0, z_1)^T$  ist, folgt direkt aus der Definition von  $\Phi$ , d.h. aus  $\Phi(y) = (y, y')^T$ .

Abschließend sei hier Folgendes gesagt: Die Beobachtungen und Techniken übertragen sich völlig analog auch auf DGLs  $n$ -ter Ordnung für  $n \geq 2$ . Die Notation ist hier nur wesentlich aufwändiger, denn die DGL wird stets in ein  $n$ -dimensionales System umgewandelt! Wir stellen hier die Aussagen der Vollständigkeit halber zur Verfügung, es lohnt aber nicht, die Aussagen im Detail zu besprechen.

**\*-Proposition 43. LINEARE DGLS HÖHERER ORDNUNG.**

Es sei für  $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I; \mathbb{C})$  die DGL

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (234)$$

gegeben. Es sei

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (235)$$

Falls  $\tilde{\mathbb{L}}$  die allgemeine Lösung von  $z'(t) = A(t)z(t)$ , ( $t \in I$ ) ist, so ist

$$\mathbb{L} := \{y \in C^n(I; \mathbb{C}) : y \text{ ist erste Komponente eines Elementes von } \tilde{\mathbb{L}}\} \quad (236)$$

die allgemeine Lösung von (234). Ferner ist

$$\Phi : \mathbb{L} \rightarrow \tilde{\mathbb{L}}, \quad \Phi : y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (237)$$

ein Vektorraumisomorphismus zwischen  $\mathbb{L}$  und  $\tilde{\mathbb{L}}$ .

Wieder mal können wir das Anfangswertprobleme eindeutig zu lösen:

**\*-Beobachtung 44.** Für vorgeschriebene  $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$  hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0 & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (238)$$

eine eindeutige Lösung. Diese ist gegeben durch  $y = \Phi^{-1}(z)$ , wobei  $\Phi$  der Vektorraumisomorphismus aus der vorangegangenen Proposition ist und  $z \in C^1(I; \mathbb{C}^n)$  die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) & (t \in I) \\ z(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (239)$$

ist. Hierbei ist

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (240)$$

**Übung 45.** EINE STANDARDAUFGABE ÜBER DGLS HÖHERER ORDNUNG. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0. \quad (241)$$

SINN DER ÜBUNG: Hier soll man eine Gelegenheit bekommen, die in dem Kapitel gelernten

### 1.2.6 Anwendung: Der harmonische Oszillator

Im Folgenden studieren wir Schwingungen. Wir werden herleiten, wie Schwingungen mithilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden können. Unser Ausgangspunkt hierbei ist die *Newton'sche Bewegungsgleichung*. Für ein Teilchen, welches sich in einem Kraftfeld befindet, d.h. auf das eine Kraft wirkt, gilt nach einem Axiom der Physik

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (242)$$

wobei  $\vec{F}$  eine Kraft auf das Teilchen beschreibt,  $m$  dessen Masse und  $\vec{a}$  dessen Beschleunigung. Die Gleichung kann wie folgt als Differentialgleichung aufgefasst werden: Es sei  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  der Ortsvektor des Teilchens. Die Beschleunigung des Teilchens ist dann  $\vec{a}(t) = \vec{x}''(t)$ . Die Kraft  $\vec{F}$  hängt meist nur von dem Ort des Teilchens ab, d.h.  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(t))$ . Im Allgemeinen kann aber auch  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t))$  gelten, d.h. die Kraft kann auch von Zeit und Geschwindigkeit abhängen. Nach der Newton'schen Bewegungsgleichung gilt dann

$$m\vec{x}''(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t), \vec{x}'(t)). \quad (243)$$

Teilt man durch die Masse  $m$  so erhält man eine übliche DGL zweiter Ordnung. Eine einfache Anwendung ist das *Federpendel*. Beim Federpendel schwingt ein Massestück der Masse  $m$ ,

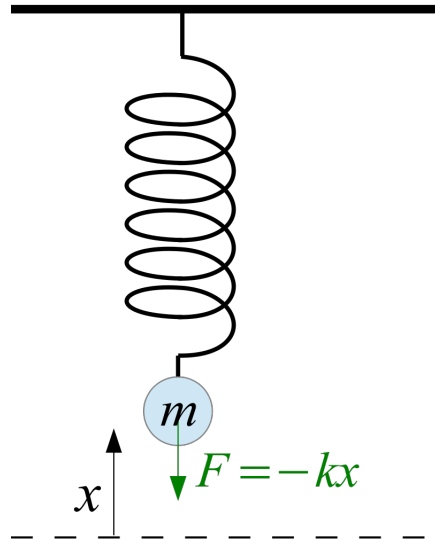


Abbildung 11: Das Federpendel

welches an einer Feder befestigt ist hin und her. Die Auslenkung des Pendels  $x = x(t)$  kann durch eine reellwertige Funktion beschrieben werden. Wir wählen ein Koordinatensystem, sodass  $x = 0$  gerade der *Ruhelage* des Pendels entspricht. D.h. der Koordinatenursprung



befindet sich an dem Punkt, wo das Massestück hänge, wenn es nicht schwingen würde. Die Beschleunigung ist dann gegeben durch  $x''(t)$ . Die Kraft, die auf das Teilchen wirkt, ist gegeben durch die sogenannte *Rückstellkraft* der Feder. Nach dem *Hooke'schen Gesetz* ist diese gegeben durch  $F(x) = -kx$  für eine *Federkonstante*  $k > 0$ , die aus den Materialeigenschaften der Feder berechnet werden kann. Die Newton'sche Bewegungsgleichung liefert damit also

$$mx''(t) = F(x(t)) = -kx(t), \quad (244)$$

mit anderen Worten

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t). \quad (245)$$

Setzen wir  $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ , so erhalten wir

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (246)$$

Dieses Kapitel ist der Lösung dieser Gleichung gewidmet.

**Anwendung 46. BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR DAS FEDERPENDEL.** Es sei  $\omega > 0$  beliebig vorgegeben. Die Gleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (247)$$

ist eine DGL zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung wir bestimmen wollen. Da eine reellwertige physikalische Größe beschrieben wird, sind wir auch nur an reellwertigen Lösungen interessiert. Das heißt wir wollen Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad (248)$$

lösen, wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Anfangsauslenkung und  $v_0 \in \mathbb{R}$  die Anfangsgeschwindigkeit ist. Wir haben bereits im letzten Kapitel besprochen, warum wir Anfangsort *und* Anfangsgeschwindigkeit vorschreiben müssen. Vielleicht kann man sich vor dem hiesigen physikalischen Hintergrund auch gut vorstellen, dass es wirklich notwendig ist die Anfangsgeschwindigkeit zusätzlich vorzugeben.

**SCHRITT 1:** Bestimmen der allgemeinen Lösung. Die Allgemeine Lösung bestimmen wir wie folgt: Wir bilden das zugehörige lineare System, d.h.

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} z(t) =: Az(t), \quad (249)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (250)$$

Dies können wir lösen wie in Zusammenfassung 29 (p. 29). Um eine Lösung zu bestimmen, müssen wir nun die Matrix  $A$  diagonalisieren oder in Jordan-Normalform bringen. Hierzu

berechnen wir zunächst die Eigenwerte.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega). \quad (251)$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben durch  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Nun müssen wir die Eigenvektoren finden. Dazu: Der Eigenraum zum Eigenwert  $i\omega$  ist

$$\ker(A - i\omega I) = \ker \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \right\} \quad (252)$$

Analog berechnen wir den Eigenraum zum Eigenwert  $-i\omega$

$$\ker(A + i\omega I) = \ker \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ -\omega^2 & i\omega \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right\} \quad (253)$$

Damit gilt für  $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}. \quad (254)$$

Definieren wir nun

$$E(t) := \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (255)$$

so gilt nach Zusammenfassung 29 (p. 29), dass

$$M(t) = SE(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} E(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \quad (256)$$

die Fundamentalmatrix ist. Wir führen die Matrixmultiplikation durch und erhalten

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} & -i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix}. \quad (257)$$

Die allgemeine Lösung des Hilfsproblems ist also

$$\tilde{\mathbb{L}} = \{M(t)c : c \in \mathbb{C}^2\} = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ -i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}. \quad (258)$$

Damit ist die allgemeine Lösung für (247) gegeben durch

$$\mathbb{L} = \Phi^{-1}(\tilde{\mathbb{L}}) \hat{=} \text{Menge aller ersten Komponenten von } \tilde{\mathbb{L}} \quad (259)$$

$$= \{c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (260)$$

SCHRITT 2: REALISIERUNG DER ANFANGSWERTE. Es sei nun

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (261)$$

ein Element aus  $\mathbb{L}$ . Wir möchten  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  so bestimmen, dass die Anfangswerte angenommen werden. Dazu setzen wir

$$x_0 \stackrel{!}{=} x(0) \underset{(261)}{=} c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = c_1 + c_2 \quad (262)$$

$$v_0 \stackrel{!}{=} x'(0) \underset{(261)}{=} i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = i\omega c_1 - i\omega c_2. \quad (263)$$

Die Gleichungen (262) – (263) definieren ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1 - c_2 = \frac{v_0}{i\omega} \end{cases} \quad (264)$$

was wir nach  $c_1, c_2$  auflösen können. Wir erhalten

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0}{i\omega} \right) \quad (265)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0}{i\omega} \right). \quad (266)$$

Damit gilt

$$x(t) = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0}{i\omega} \right) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0}{i\omega} \right) e^{-i\omega t}. \quad (267)$$

Dieser Lösung sieht man so überhaupt nicht an, dass sie reellwertig ist. Daher sollten wir sie so vereinfachen, dass sie als reellwertige Lösung erkennbar ist. Mithilfe der Formeln  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  und  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  erhalten wir

$$x(t) = x_0 \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + \frac{v_0}{\omega} \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \quad (268)$$

$$= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (269)$$

Wir haben die Bewegungsgleichung gefunden.

Die Trajektorie in (269) nennt man übrigens *harmonische Schwingung* mit Anfangsort  $x_0$  und Anfangsauslenkung  $v_0$ . Ein physikalisches System, was der Bewegungsgleichung (247) genügt, heißt im Allgemeinen auch *harmonischer Oszillator*. Der Parameter  $\omega$  wird *Eigenfrequenz* genannt.

#### Übung 47. MAXIMALAMPLITUDE DES FEDERPENDELS.

Es sei  $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  wie in Anwendung 46 (p. 49) die Auslenkung des Federpendels, (d.h.

die Lösung von

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0, \end{cases} \quad (270)$$

für  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Anfangsauslenkung und  $v_0 \in \mathbb{R}$  die Anfangsgeschwindigkeit). Bestimmen Sie die *maximale Auslenkung* des Federpendels, d.h.  $\max_{t \in \mathbb{R}} x(t)$ , in Abhängigkeit von  $x_0, v_0$ .

HINWEIS: Entnehmen Sie die explizite Formel für  $x$  aus (269) und bestimmen Sie das Maximum.

SINN DER ÜBUNG: Dies ist ein Beispiel für eine physikalisch relevante Größe, die man aus der Bewegungsgleichung herauslesen kann. Ohne die explizite Lösung der Bewegungsgleichungen hätte man diese Größen nicht bestimmen können.

Das Modell des harmonischen Oszillators kennt noch einige Verallgemeinerungen. Mit den Methoden aus den vorigen Kapiteln wären Sie als Lesende befähigt, die Bewegungsgleichungen in allen Situationen zu bestimmen und sämtliche korrespondierenden Anfangswertprobleme zu lösen. Wir wollen das an dieser Stelle aber nicht vertiefen und weisen nur auf zwei wichtige Verallgemeinerungen hin

1. GEDÄMPFTER HARMONISCHER OSZILLATOR. Zusätzlich zu der Rückstellkraft der Feder  $F_1(t) = -kx(t)$  können wir auch noch eine *Reibungskraft der Luft* berücksichtigen. Diese ist gegeben durch  $F_2(t) = -\rho x'(t)$  für ein  $\rho > 0$ , welches man *Reibungskoeffizient* nennt. Die Gesamtkraft berechnet sich dann durch die Summe beider Kräfte, also  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ . Die Bewegungsgleichung wird dann

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (271)$$

wobei  $\gamma = \frac{\rho}{2m} > 0$  und  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ . Lösungen von (271) kann man wie im vorigen Beispiel, d.h. durch Rückführung auf ein System der Form  $z'(t) = Az(t)$ , bestimmen. Ein Sonderfall tritt hier auf, wenn  $\gamma = \omega$  ist. Dann ist die Matrix  $A$  nämlich nicht diagonalisierbar und man muss mit der Jordan-Normalform arbeiten. In der Physik ist dieser Fall als *Kriechfall* bekannt. Die Reibung ist in dem Fall so stark, dass gar keine Schwingung zustande kommt und das Pendel nur in seine Ausgangslage "zurückkriecht".

2. GETRIEBENER HARMONISCHER OSZILLATOR. Man könnte das Pendel auch mit einer *externen Kraft* anschußen. Zum Beispiel könnte man die Schwingung mit einer Kraft  $F_2(t) = B \sin(\alpha t)$  ( $B \in \mathbb{R}$ ) unterstützen, bzw dagegen arbeiten. Die Gesamtkraft ist dann  $F(t) = -kx(t) + B \sin(\alpha t)$  und die Bewegungsgleichung ist

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = d \sin(\alpha t), \quad (272)$$

wobei  $d = \frac{B}{m} \in \mathbb{R}$ . Das zugrundelegende DGL-System dieser Bewegungsgleichung ist Gegenstand von Übung 38 (p. 41). Bei dieser Übung fällt eine Sache auf: Falls  $\alpha \neq \pm\omega$  ist die Lösung beschränkt. Falls  $\alpha = \pm\omega$ , so ist die Lösung unbeschränkt. Und das, obwohl die externe Kraft beschränkt ist! Man spricht vom *Resonanzfall*. Die

Quintessenz: Treibt man einen Oszillator auch nur ganz leicht mit seiner Eigenfrequenz an, so entstehen Schwingungen mit riesigen Auslenkungen. Dieses Phänomen wurde im Jahre 1940 der “Tacoma Narrows Bridge” im US-Bundesstaat Washington zum Verhängnis. Da leichte(!) Windböen in der Eigenfrequenz der Brücke wehten, stürzte sie auf dramatische Weise ein (siehe YOUTUBE VIDEO ‘TACOMA NARROWS BRIDGE COLLAPSE’). Seitdem gibt es strenge Regularien beim Brückenbau, die das Treffen der Eigenfrequenz verhindern. Auch beim Bau von Hochhäusern spielt das Phänomen eine Rolle.

### 1.3 Integrale der Bewegung

Das Finden von *Erhaltungsgrößen* ist ein hilfreicher Trick zum Finden von Lösungen von Differentialgleichungen. Ein alternativer Name für eine Erhaltungsgröße ist *Integral der Bewegung*.

**Definition 48.** INTEGRAL DER BEWEGUNG. Es sei für  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  die DGL

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in I) \quad (273)$$

gegeben. Ein Ausdruck  $g \in C^1(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  heißt *Integral der Bewegung*, falls für jede Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  gilt

$$\frac{d}{dt}g(t, y(t)) = 0 \quad (t \in I). \quad (274)$$

Das Schöne an einem Integral der Bewegung ist, dass der Ausdruck  $t \mapsto g(t, y(t))$  zeitlich konstant ist. Die Formel

$$g(t, y(t)) = c \quad \forall t \in I \quad (275)$$

(für ein  $c \in \mathbb{R}$ ) erlaubt oft weitreichende Rückschlüsse auf Eigenschaften der Lösung  $y$  — vor allem wenn man  $c$  mithilfe von gegebenen Anfangswerten explizit bestimmen kann! Oft charakterisieren wir ein Integral der Bewegung daher durch die Notation

$$g(t, y(t)) \equiv \text{const.} \quad \forall t \in I \quad (276)$$

Das Konzept des Integrals der Bewegung ist uns nicht neu: Die meisten Lösungen im bisherigen Verlauf der Vorlesung haben wir konstruiert, indem wir ein Integral der Bewegung gefunden haben.

**Beispiel 49.** Für die DGL  $y'(t) = \alpha y(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(t, z) := e^{-\alpha t} z \quad (t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}) \quad (277)$$

ein Integral der Bewegung. In der Tat

$$\frac{d}{dt}g(t, y(t)) = \frac{d}{dt}e^{-\alpha t}y(t) = -\alpha e^{-\alpha t}y(t) + e^{-\alpha t}y'(t) = 0, \quad (278)$$

wobei wir im letzten Schritt nochmal  $y'(t) = \alpha y(t)$  eingesetzt haben.

Einige Typen von Differentialgleichungen können wir allein durch Kenntnis einer Erhaltungsgröße lösen, so wie die Klasse der *exakten Differentialgleichungen*.

Bevor wir diese einführen, benötigen wir das *Lemma von Poincare*

**Lemma 50.** LEMMA VON POINCARÉ. Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein sternförmiges Gebiet und  $F = (F_1, F_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$  auf ganz  $\Omega$ .
2.  $F$  besitzt eine Stammfunktion, d.h. es existiert  $\phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  mit  $F = \nabla \phi$ .

**Beweis.** Siehe Analysis Grundlagen-Vorlesung (HA).

**Beispiel 51.** EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Gegeben sei eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad (279)$$

wobei  $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  zwei reellwertige stetig diffbare Funktionen sind. Wir bezeichnen die Parameter, von denen  $p$  und  $q$  abhängen mit  $p = p(\tau, z)$  und  $q = q(\tau, z)$ . Wir treffen nun die folgende

$$\textbf{Annahme:} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2. \quad (280)$$

Ist diese Annahme erfüllt, so nennen wir eine DGL eine exakte Differentialgleichung. In diesem Fall gibt es (weil  $\mathbb{R}^2$  sternförmig ist) nach dem *Lemma von Poincare* aus der Analysis eine *Stammfunktion*  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  mit

$$\nabla \phi(\tau, z) = \begin{pmatrix} p(\tau, z) \\ q(\tau, z) \end{pmatrix}. \quad (281)$$

BEHAUPTUNG:  $\phi$  ist ein Integral der Bewegung, d.h. für jede Lösung gilt

$$\phi(t, y(t)) \equiv \text{const.} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (282)$$

BEWEIS: Nach der (mehrdimensionalen) Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} \phi(t, y(t)) = D\phi(t, y(t)) \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} = \left\langle \nabla \phi(t, y(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (283)$$

$$\stackrel{(281)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} p(t, y(t)) \\ q(t, y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (284)$$

$$= p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0. \quad (285)$$

Wir haben ein Integral der Bewegung gefunden. In vielen Fällen lässt sich dieses Integral der Bewegung in (282) explizit nach  $y(t)$  auflösen. Somit kann man eine Lösung explizit bestimmen. Ist die Annahme (280) nicht erfüllt, können wir leider keine Stammfunktion finden — denn die Annahme ist auch notwendig (siehe Analysis-Vorlesung, HA)! In diesem Fall erhalten wir also so kein Integral der Bewegung. Manchmal ist es aber möglich, die DGL (279) mit einer Funktion  $\mu(t)$  durchzumultiplizieren, sodass sie exakt wird. Diesen Trick nennt man das Finden eines *integrierenden Faktors*.

**Übung 52. LÖSEN EINER EXAKTEN DGL.** Gegeben sei die DGL

$$4t^3y(t) + (y(t)^2 + 1 + t^4)y'(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (286)$$

Finden Sie ein Integral der Bewegung und zeigen Sie, dass alle Lösungen auf  $I = \mathbb{R}$  beschränkt sind. Können Sie die allgemeine Lösung explizit angeben?

HINWEIS. Für die explizite Lösung greifen Sie auf die Cardani'schen Formeln WIKIPEDIA "CARDANI'SCHE FORMELN" zurück.

SINN DER ÜBUNG: Man sieht: Es ist hier sehr kompliziert, die DGL explizit zu lösen. Ein Integral der Bewegung hinzuschreiben ist aber mit dem vorangegangenen Beispiel relativ einfach. Vielleicht kann man ja auch viele Eigenschaften der Lösung bereits aus dem Integral der Bewegung ablesen. . . In diesem Fall bräuchte man sie vielleicht gar nicht explizit zu kennen! Dies wollen wir im Laufe des nächsten Kapitels einüben. Dort studieren wir ein besonders anschauliches Integral der Bewegung — Die Energieerhaltung! Sie wird viele Rückschlüsse auf das Verhalten der DGL erlauben, ohne, dass man eine Lösung explizit ausrechnen muss.

**\*-Übung 53. DER INTEGRIERENDE FAKTOR.** Gegeben sei eine DGL der Form

$$p(t, y(t)) + q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad (287)$$

wobei  $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  mit  $q(\tau, z) > 0$  für alle  $(\tau, z) \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie: Unter der folgenden

$$\textbf{Annahme:} \quad \frac{1}{q(\tau, z)} \left( \frac{\partial p}{\partial z}(\tau, z) - \frac{\partial q}{\partial \tau}(\tau, z) \right) \quad \text{hängt nur von } \tau \text{ ab,} \quad (288)$$

gibt es ein Integral der Bewegung.

HINWEIS: Multiplizieren Sie (287) mit einem geeigneten Faktor  $m(t)$ , sodass die Situation in Beispiel 51 erreicht wird.

Der Begriff des Integrals der Bewegung lässt sich auch für eine DGL höherer Ordnung formulieren. Bei einer DGL der Form

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad (289)$$

würde man ein Integral der Bewegung als eine Funktion  $g \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  verstehen, für die gilt

$$\frac{d}{dt}g(t, y(t), y'(t)) = 0. \quad (290)$$

Es ist wichtig, dass das Integral der Bewegung hier auch von  $y'(t)$  abhängen darf! Denn um (290) zu verifizieren, muss man stets die Gleichung (289) benutzen. Hängt der Ausdruck aber gar nicht von  $y'(t)$  ab, so wird beim Ableiten in (290) auch niemals  $y''(t)$  ins Spiel kommen. In dem Fall wird man also niemals in der Lage sein, (289) einzusetzen.

### 1.3.1 Energieerhaltung

Wir betrachten eine DGL der Form

$$y''(t) = F(y(t)) \quad (t \in I) \quad (291)$$

wobei  $F \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine Funktion ist. In der Tat ist dies einfach die Newton'sche Bewegungsgleichung (243), in dem Spezialfall, dass die Masse  $m$  auf  $m = 1$  normiert ist und die Kraft  $F$  nur vom Ort (und nicht von der Geschwindigkeit) abhängt. Zusätzlich nehmen wir an, dass

$$F(x) = -\nabla U(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (292)$$

wobei  $U \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  eine Funktion ist und  $\nabla U$  den *Gradienten* von  $U$  bezeichnet. Für  $n = 1$  gibt es ein solches  $U$  im Allgemeinen immer, da  $F$  stets eine Stammfunktion besitzt. Im Fall  $n = 2$  geht es nicht immer: Notwendig ist hierfür z.B. (wenn wir zusätzlich  $F \in C^1$  annehmen), dass  $F$  die sogenannten *Integrabilitätsbedingungen* (siehe Analysis-Vorlesung) erfüllt.

Wir nennen  $U$  im Folgenden das *Potential*.

Um ein Integral der Bewegung zu erhalten, multiplizieren wir (291) im Skalarprodukt mit  $y'(t)$  und erhalten

$$\langle y''(t), y'(t) \rangle = \langle F(y(t)), y'(t) \rangle = -\langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle \quad (293)$$

Wir können nun auf beiden Seiten Ableitungen erkennen. In der Tat gilt nach der (mehrdimensionalen) Kettenregel

$$\frac{d}{dt} U(y(t)) = DU(y(t)) \cdot y'(t) = \langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle \quad (294)$$

und mit der Produktregel

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |y'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i'(t)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2y_i'(t)y_i''(t) = \sum_{i=1}^n y_i'(t)y_i''(t) = \langle y''(t), y'(t) \rangle. \quad (295)$$

Wir erhalten also aus (293)

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |y'(t)|^2 = -\frac{d}{dt} U(y(t)), \quad (296)$$

oder umgeformt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |y'(t)|^2 + U(y(t)) \right) = 0. \quad (297)$$



**Satz 54. ENERGIEERHALTUNG.** Es sei  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von (291), d.h.

$$y''(t) = -\nabla U(y(t)) \quad (t \in I) \quad (298)$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + U(y(t)) \equiv \text{const.} \quad (299)$$

Den ersten Summanden dieses Integrals der Bewegung nennen wir *kinetische Energie* und den zweiten Summanden nennen wir *potentielle Energie*. In diesem Sinne nennen wir das Integral der Bewegung (299) die *Gesamtenergie*.

**Beweis.** Hier machen wir eigentlich nur nochmal dieselbe Rechnung wie am Anfang dieses Abschnittes. Wir berechnen für  $t \in I$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|y'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i'(t)^2 = \sum_{i=1}^n y_i'(t) y_i''(t) = \langle y''(t), y'(t) \rangle \quad (300)$$

und

$$\frac{d}{dt} U(y(t)) = DU(y(t)) \cdot y'(t) = \langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle. \quad (301)$$

Daher erhalten wir mit der Summenregel des Differenzierens und der Linearität des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + U(y(t)) \right) = \langle y''(t), y'(t) \rangle + \langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle \quad (302)$$

$$= \langle y''(t) + \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle = \langle 0, y'(t) \rangle = 0. \quad (303)$$

Im Spezialfall  $n = 1$  kann in den meisten Fällen durch (299) eine Lösung explizit bestimmt werden. In der Tat: Falls

$$\frac{1}{2}y'(t)^2 + U(y(t)) = C, \quad (304)$$

für ein festes  $C \in \mathbb{R}$ , so ist

$$y'(t) = \pm \sqrt{2(C - U(y(t)))}. \quad (305)$$

Die DGL

$$y'(t) = \sqrt{2(C - U(y(t)))} \quad (306)$$

lässt sich vortrefflich mithilfe der Separation der Variablen lösen. Ebenso lässt sich

$$y'(t) = -\sqrt{2(C - U(y(t)))} \quad (307)$$

für ein festes  $C \in \mathbb{R}$  gut lösen. Die Konstante  $C$  taucht nun stets als freier Parameter bei der Lösung auf und kann durch die Anfangswerte bestimmt werden.

Ein Problem bleibt: wenn auf der rechten Seite von (305) das Nullniveau erreicht wird, so kann man vom Fall ‘+’ in den Fall ‘−’ wechseln. Dieses ‘wechseln’ kann theoretisch

unendlich oft passieren. Wie oft es der Vorzeichenwechsel tatsächlich vorkommt, muss im Einzelfall untersucht werden.

Allgemein ist es ratsam, (305) nicht einfach auswendig zu lernen, sondern in jedem konkreten Fall neu herzuleiten. Der Trick ist hier ja immer derselbe: Man multipliziert die DGL  $y''(t) = f(y(t))$  auf beiden Seiten mit  $y'(t)$  und bildet danach die Stammfunktion auf beiden Seiten. Nochmal formal: ist  $U$  eine Stammfunktion von  $-f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , so gilt für  $y \in C^2(I; \mathbb{R})$

$$y''(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in I \quad (308)$$

$$\Rightarrow y''(t)y'(t) = f(y(t))y'(t) \quad \forall t \in I \quad (309)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{2} y'(t)^2 = \frac{d}{dt} (-U)(y(t)) \quad \forall t \in I \quad (310)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} y'(t)^2 + U(y(t)) = c. \quad \forall t \in I \quad (311)$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = \pm \sqrt{2(C - U(y(t)))} \quad \forall t \in I \quad (312)$$

Diese Technik des *Multiplizierens und Integrierens* ist weitläufig in der gesamten Mathematik verbreitet, um Integrale der Bewegung zu finden. Man spricht hier auch von der Idee des *integrierenden Faktors*.

Dass diese Technik zum Ziel führt, geht in letzter Instanz auf eine Beobachtung der Mathematikerin Emmy Noether (1882-1935) zurück (LINK ZUR ORIGINALVERÖFFENTLICHUNG 1918)

Zum Abschluss ein Wort zur Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen: Das Multiplizieren mit  $y'(t)$  ist (im Allgemeinen) keine Äquivalenzumformung (siehe (309))! Daher kann (304) auch mehr Lösungen haben als die Differentialgleichung selbst. Dies tritt insbesondere auf, wenn  $y'(t_0) = 0$  für ein  $t_0 \in I$ , d.h. wenn man in (305) mehrere Möglichkeiten für die Vorzeichenwahl hat. In vielen Fällen kann man das Vorzeichen von  $y'(t)$  aber bereits aus der Gleichung ablesen, siehe Übung 55 (p. 58).

### Übung 55. EXPLIZITE LÖSUNGEN DURCH ENERGIEERHALTUNG - I.

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in \mathbb{R}) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (313)$$

für ein beliebiges  $y_1 \geq 1$ . Ist die Lösung eindeutig?

HINWEIS: Wenden Sie zuerst (durch Multiplizieren der Gleichung mit  $y'(t)$  und Integrieren) den “Energieerhaltungstrick” (s. (308) ff.) an und zeigen Sie mit dessen Hilfe, dass  $y'(t) > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dies erspart Ihnen beim Wurzelziehen dann die Diskussion des Vorzeichens! Außerdem kann so auch die Eindeutigkeitsfrage direkt beantwortet werden!

SINN DER ÜBUNG: Dies ist eines der einfachsten Beispiele, die man in dem Kontext rechnen kann und soll vorbereiten auf das *Fadenpendel*, welches wir im nächsten Abschnitt durchrechnen werden.

Ein weiterer Trick hierzu: Falls  $y''(t) > 0$  für alle  $t \in I$  (was man ja oft direkt aus der Gleichung ablesen kann), so ist  $y'(t)$  monoton und daher kann  $y'(t)$  maximal einmal das Vorzeichen von ‘–’ nach ‘+’ wechseln. Dies hilft zum Beispiel beim Diskutieren der Voraussetzung  $y_1 \geq 1$  in der vorigen Übung.

### Übung 56. EXPLIZITE LÖSUNGEN DURCH ENERGIEERHALTUNG- II.

Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2y(t)} & (t \in I) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (314)$$

für ein beliebiges  $y_1 \in (0, 1)$  gegeben. Zeigen Sie, dass es keine globale Lösung auf  $I = \mathbb{R}$  gibt.

HINWEIS. Angenommen wir hätten eine globale auf  $I = \mathbb{R}$  definierte Lösung. Zeigen Sie, dass  $y'(t) > 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$  gelten muss. Folgern Sie wie in der vorigen Übung

$$y'(t)^2 = e^{2y(t)} - 1 + y_1^2 \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (315)$$

und führen Sie dies durch Separation der Variablen zu einem Widerspruch.

### 1.3.2 Anwendung: Das mathematische Pendel

Mithilfe des Energieerhaltungstricks werden wir die Gleichung

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) \quad (316)$$

untersuchen. Diese kommt zustande, wenn wir den Auslenkungswinkel eines schwingenden *Fadenpendels* betrachten. In der Schule haben wir hier für kleine Auslenkungswinkel  $\varphi$  angenommen, dass “ $\sin \varphi \approx \varphi$ ”, die sogenannte *Kleinwinkelnäherung*. Unter dieser Annahme ist die Gleichung dieselbe wie für den harmonischen Oszillator in Sektion 1.2.6. Auf die Annahme, dass der Auslenkungswinkel klein ist, wollen wir aber jetzt verzichten. Denn wir wollen z.B. auch verstehen wann das Pendel einen *Überschlag* macht, d.h. einmal um den Ursprung herum schwingt. Dieses Phänomen können wir mit dem Energieerhaltungstrick begreifen, ohne, dass wir die Lösung der Gleichung explizit bestimmen müssen.

Im Folgenden wiederholen wir nochmal die Gleichung des Fadenpendels und wie sie hergeleitet wird.

### Physikalische Herleitung 57. DAS FADENPENDEL.

Wir betrachten ein schwingendes Fadenpendel. An einem Faden der Länge  $l$  hängt ein Gewicht der Masse  $m$  und schwingt (siehe Abbildung 12). Auf die Masse wirkt nur die *Gewichtskraft*, welche die Masse immer wieder nach unten zieht. Wir möchten die Bewegung beschreiben. Wir sehen, dass wir den Ort nur über den *Auslenkungswinkel*  $\varphi$

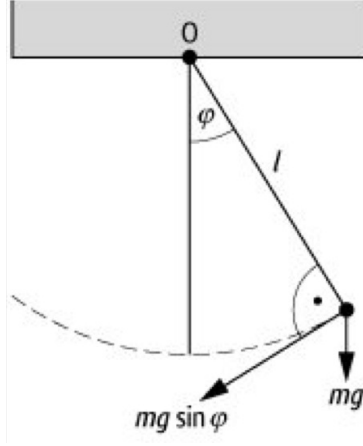


Abbildung 12: Das mathematische Pendel

beschreiben können, d.h. es gilt (wenn wir den Nullpunkt wie in Abbildung 12) legen.

$$\vec{x}(t) = l \begin{pmatrix} \sin \varphi(t) \\ -\cos \varphi(t) \end{pmatrix}. \quad (317)$$

Mit dieser Formel können wir auch Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von  $\varphi$  berechnen, nämlich

$$\vec{x}'(t) = l\varphi'(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (318)$$

und

$$\vec{x}''(t) = l\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + l\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}. \quad (319)$$

Das Masseteilchen bewegt sich nun in der Gewichtskraft. Diese zeigt nach an jedem Punkt proportional zur Erdbeschleunigung unten, d.h.

$$\vec{F}(x_1, x_2) = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (320)$$

Mit dem Newton'schen Bewegungsgesetz (243) erhalten wir

$$m\vec{x}''(t) = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (321)$$

d.h.

$$l\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + l\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (322)$$

Wir wollen eine Differentialgleichung für  $\varphi$  daraus herleiten. Hierzu verfahren wir wie folgt: Wir nehmen auf beiden Seiten von (322) das Skalarprodukt mit

$$v(t) := \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Für die linke Seite ergibt sich

$$\left\langle v(t), l\varphi''(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} + l\varphi'(t)^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = l\varphi''(t).$$

(Hierbei haben wir die Linearität des Skalarproduktes und  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  benutzt). Die rechte Seite berechnet sich mit

$$\left\langle v(t), g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -g \sin \varphi(t).$$

Sind zwei Ausdrücke gleich, so müssen auch ihre Skalarprodukte mit  $v(t)$  gleich sein. Daher folgt aus den vorangegangenen beiden Gleichungen und aus (322)

$$l\varphi''(t) = -g \sin \varphi(t),$$

oder auch

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) \quad (323)$$

mit  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Wir untersuchen nun für ein  $\alpha_0 > 0$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (324)$$

Das heißt, wir betrachten ein Pendel mit Pendeldaten  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , was aus der Ruhelage mit einer (Winkel-)geschwindigkeit  $\alpha_0 > 0$  nach rechts schwingt. Wir fragen uns: Wie groß müssen  $\alpha_0$  und  $\omega$  sein, damit das Pendel einen Überschlag macht?

#### **Anwendung 58. ENERGIEERHALTUNG ALS ÜBERSCHLAGSDETEKTOR.**

Es sei  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  eine Lösung von (324) für  $\alpha_0 > 0$ . Wir stellen uns hier die folgende Frage

$$\text{Schwingt das Pendel oder überschlägt es sich?} \quad (325)$$

Die Antwort auf die Frage wird sicherlich mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\alpha_0$  zusammenhängen: Ist sie klein, so sollte das Pendel schwingen. Ist sie groß, so sollte es sich

überschlagen! Wir multiplizieren die Gleichung mit  $\varphi'(t)$  und finden

$$\varphi''(t)\varphi'(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t)\varphi'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (326)$$

Mit der Kettenregel rückwärts (angewendet wie in der vorigen Sektion) heißt das

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \varphi'(t)^2 = \frac{d}{dt} \omega^2 \cos \varphi(t) \quad (327)$$

Integriert bedeutet dies, dass es ein  $C \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\frac{1}{2} \varphi'(t)^2 = \omega^2 \cos \varphi(t) + C. \quad (328)$$

Setzen wir  $t = 0$  und die Anfangswerte aus (324) ein, so erhalten wir (mit  $\cos 0 = 1$ )

$$\frac{1}{2} \alpha_0^2 = \omega^2 + C, \quad (329)$$

d.h.  $C = \frac{1}{2} \alpha_0^2 - \omega^2$ . Insgesamt gilt also

$$\frac{1}{2} \varphi'(t)^2 = \omega^2 \cos \varphi(t) + \frac{1}{2} \alpha_0^2 - \omega^2. \quad (330)$$

Rein von der Anschauung her könnte man sich zwei plausible Verhaltensweisen des Pendels vorstellen:

FALL 1. (Das Pendel überschlägt sich) Der Auslenkungswinkel wächst mit einer strikt positiven Winkelgeschwindigkeit  $\varphi'(t) > \delta > 0$  an (d.h. das Pendel macht irgendwann einen Überschlag).

FALL 2. (Das Pendel schwingt) Der Auslenkungswinkel erreicht irgendwann eine maximale Auslenkung  $\varphi_{\max} \in (0, \pi)$  und kehrt dann um, d.h. schwingt zurück.

Es könnte natürlich aber auch sein, dass keiner der beiden Fälle zutrifft, so z.B. könnte der Auslenkungswinkel monoton anwachsen und irgendwo stehen bleiben.

Tun wir mal zuerst so, als würde Fall 2 eintreten: Falls das Pendel bei einer Auslenkung  $\varphi_{\max} \in (0, \pi)$  umkehrt, so muss es einen Umkehrzeitpunkt  $t^* > 0$  geben mit  $\varphi'(t^*) = 0$  und  $\varphi(t^*) = \varphi_{\max} \in (0, \pi)$ . Falls es ein solches  $t^*$  gibt, so ergibt Einsetzen von  $t = t^*$  in (330)

$$0 = \omega^2 \cos \varphi(t^*) + \frac{1}{2} \alpha_0^2 - \omega^2, \quad (331)$$

das heißt

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{1}{\omega^2} \left( \omega^2 - \frac{1}{2} \alpha_0^2 \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{\omega^2}. \quad (332)$$

Wann gibt es ein solches  $\varphi_{\max} \in (0, \pi)$ ? Nun ja, da  $\cos : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  bijektiv ist, ist das genau dann der Fall wenn

$$1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{\omega^2} > -1, \quad (333)$$

mit anderen Worten: Einen solchen Punkt  $t^*$  mit Nullableitung kann es nur dann geben wenn

$$\alpha_0^2 < 4\omega^2. \quad (334)$$

VERMUTUNG: Ist  $\alpha_0^2 < 4\omega^2$ , so erwarten wir, dass das Pendel schwingt. Das müssen wir aber noch formal beweisen, denn wir haben einfach so getan, als hätten wir schon einen Punkt  $t^*$  wo  $\varphi'(t^*) = 0$  ist. Und wir haben auch einfach so angenommen, dass das Pendel an diesem Punkt auch wirklich umkehrt.

Das muss nicht zwingend so sein: Die Funktion  $f(x) = x^3$  erfüllt bei  $x = 0$  auch, dass  $f'(x) = 0$  ist. Jedoch kehrt sich  $f$  bei  $x = 0$  nicht um, sondern wächst weiter an! Um den Sachverhalt zu klären benötigen wir ein *Konvexitätsargument*, welches wir in der nächsten Übung genauer besprechen wollen.

Auch haben wir noch nicht diskutiert, dass das Pendel sich tatsächlich überschlägt, wenn  $\alpha_0^2 > 4\omega^2$ .

Ferner ist auch interessant, was im Grenzfall  $\alpha_0^2 = 4\omega^2$  passiert. Schlägt das Pendel über, schwingt es zurück oder kommt es gar zum Stillstand?

Bevor wir den kommenden Satz besprechen können, benötigen wir die folgende Charakterisierung konvexer Funktionen.

### Übung 59. GEOMETRISCHE BEDEUTUNG VON KONVEXITÄT.

Es sei  $f \in C^2((a, b); \mathbb{R})$  konvex.

1. Zeigen Sie: Dann gilt für alle  $x, x_0 \in (a, b)$ , dass

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (335)$$

2. Folgern Sie: Ist  $f'(x_0) = 0$  für ein  $x_0 \in (a, b)$ , so ist  $x_0$  ein globales Minimum von  $f$  auf  $(a, b)$ .
3. Formulieren Sie analoge Versionen von Teil 1 und 2 für konkave Funktionen.
4. Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann konvex wenn für alle  $x, x_0 \in (a, b)$  die Ungleichung (335) gilt.

SINN DER ÜBUNG: Wir werden diese Aussage im nächsten Beweis benötigen. Des Weiteren schadet es nie ein Paar Aussagen über konvexe Funktionen zu kennen. Die geometrische Interpretation der Aussage (335) ist, dass der Graph einer konvexen Funktion stets oberhalb von allen Tangenten an dem Graphen liegt.

**Satz 60. DAS FADENPENDEL** Es sei  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  eine Lösung von (324) mit  $\omega, \alpha_0 > 0$ . Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein.

1.  $\alpha_0^2 > 4\omega^2$ . Dann gilt  $\varphi(t) \geq t\sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}$  für alle  $t \geq 0$ . Insbesondere ist die Lösung unbeschränkt.

2.  $\alpha_0^2 < 4\omega^2$ . Dann gibt es  $\varphi_{\max} \in (0, \pi)$  so, dass  $\varphi(t) \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$  für alle  $t \in [0, \infty)$ .  
Genauer ist  $\varphi_{\max}$  gegeben durch

$$\varphi_{\max} = \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{\omega^2} \right). \quad (336)$$

3.  $\alpha_0^2 = 4\omega^2$ . Dann gilt

$$\varphi(t) = 2 \arctan \left( \sinh \frac{\alpha_0}{2} t \right) \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (337)$$

Insbesondere ist  $\varphi$  monoton und konvergiert gegen  $\pi$  für  $t \rightarrow \infty$ .

**Beweis.** Wie in Anwendung 58 (p. 61) leiten wir her

$$\frac{1}{2} \varphi'(t)^2 = \omega^2 \cos \varphi(t) + \frac{1}{2} \alpha_0^2 - \omega^2. \quad (338)$$

**Nun zu Fall 1.** Angenommen, dass  $\alpha_0^2 > 4\omega^2$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2} \varphi'(t)^2 = \omega^2 \cos \varphi(t) + \frac{1}{2} \alpha_0^2 - \omega^2 \geq \frac{1}{2} \alpha_0^2 - 2\omega^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (339)$$

Wir folgern, dass

$$|\varphi'(t)| \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} \quad \forall t \geq 0. \quad (340)$$

Insbesondere kann  $\varphi'$  nicht mehr das Vorzeichen wechseln, da es kein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\varphi'(t_0) = 0$  geben kann. (Würde  $\varphi'$  nämlich das Vorzeichen wechseln, so ergäbe sich hier ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz). Da  $\varphi'(0) = \alpha_0 > 0$  gilt also  $\varphi'(t) > 0$  für alle  $t \geq 0$ . Mit (340) schließen wir, dass

$$\varphi'(t) \geq \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} \quad \forall t \geq 0. \quad (341)$$

Mit dem Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung erhalten wir

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \varphi'(s) \, ds \geq \int_0^t \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2} \, ds = t \sqrt{\alpha_0^2 - 4\omega^2}. \quad (342)$$

Der erste Fall ist damit geklärt.

**Nun zu Fall 2.** Wir definieren

$$L := \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{\omega^2} \right) \in (0, \pi). \quad (343)$$

Es sei also  $\alpha_0^2 < 4\omega^2$ . Wir nehmen nun an, dass es ein  $\bar{t} > 0$  gibt mit  $|\varphi(\bar{t})| > L$ . O.B.d.A können wir annehmen, dass  $|\varphi(s)| < \pi$  für alle  $s \in [0, \bar{t}]$ , ansonsten verkleinern wir  $\bar{t}$  geeignet. (Hierfür ist wichtig, dass  $L < \pi$ , d.h. wenn  $|\varphi|$  das Niveau  $\pi$  überschreitet, dann muss es nach dem Zwischenwertsatz das Niveau  $L$  bereits vorher überschritten haben).



Wir unterscheiden die Fälle  $\varphi(\bar{t}) > 0$  und  $\varphi(\bar{t}) < 0$ . Falls  $\varphi(\bar{t}) > 0$ , so können wir ein  $\underline{t} \in [0, \bar{t})$  wählen mit  $0 < \varphi(s) < \pi$  für alle  $s \in (\underline{t}, \bar{t})$  und  $\varphi(\underline{t}) < L$ . (Man wähle  $\underline{t}$  einfach kurz vor dem Zeitpunkt, wo  $L$  das erste Mal überschritten wird). Wir behaupten nun, dass  $\varphi$  auf  $(\underline{t}, \bar{t})$  konkav ist. In der Tat:

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in (\underline{t}, \bar{t}), \quad (344)$$

da  $\sin(z) > 0$  für alle  $z \in (0, \pi)$ . Es sei nun  $t^* \in (\underline{t}, \bar{t})$  mit  $\varphi(t^*) = L$ . Nun gilt nach (338)

$$\frac{1}{2}\varphi'(t^*)^2 = \omega^2 \cos(L) + \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0^2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2 = 0. \quad (345)$$

Insbesondere gilt also  $\varphi'(t^*) = 0$ . Nun ist also  $\varphi$  auf  $(\underline{t}, \bar{t})$  konkav und  $\varphi'$  bei  $t^*$  eine Nullstelle hat. Nach Übung 59 (p. 63) hat  $\varphi$  dann aber bei  $t^*$  ein globales Maximum auf  $(\underline{t}, \bar{t})$ , also

$$\varphi(t) \leq \varphi(t^*) = L \quad \forall t \in (\underline{t}, \bar{t}). \quad (346)$$

Hieraus würde aus Stetigkeitsgründen auch folgen, dass  $\varphi(\bar{t}) \leq L$ . Das ist aber ein Widerspruch, da nach unserer Annahme  $\varphi(\bar{t}) > L$ . Es ergibt sich also ein Widerspruch zur Grundannahme, dass das Niveau  $L$  überschritten wird. Im Fall, dass  $\varphi(\bar{t}) < 0$  kann man analog vorgehen: Man wählt sich  $\underline{t} \in [0, \bar{t})$  so, dass  $\varphi(\underline{t}) > -L$  und  $-\pi < \varphi(s) < 0$  für alle  $s \in (\underline{t}, \bar{t})$ . Aus der Differentialgleichung lernt man dann wieder, dass

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin \varphi(t) > 0 \quad \forall t \in (\underline{t}, \bar{t}), \quad (347)$$

d.h.  $\varphi$  ist konvex auf  $(\underline{t}, \bar{t})$ . Nun gibt es auch wieder nun  $t^* \in (\underline{t}, \bar{t})$  mit  $\varphi(t^*) = -L$ . Aus (338) erhält man wiederum

$$\frac{1}{2}\varphi'(t^*)^2 = \omega^2 \cos(-L) + \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2 = 0, \quad (348)$$

da  $\cos$  ungerade ist. Wiederum würde aus der Konvexität (siehe Übung 59 (p. 63)) folgen, dass  $t^*$  eine globale Minimumsstelle von  $\varphi$  in  $(-\underline{t}, \bar{t})$  ist. Ein Widerspruch, da dann das Niveau  $L$  wiederum nicht unterschritten werden kann. Wir haben also gezeigt

$$|\varphi(t)| \leq L \quad \forall t \geq 0 \quad (349)$$

und folgern die Behauptung.

**Nun zu Fall 3.** Hier, im Fall  $\alpha_0^2 = 4\omega^2$ , lösen wir (338) explizit. Nach (338) gilt

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)^2 = \omega^2 \cos \varphi(t) + \frac{1}{2}\alpha_0^2 - \omega^2 = \omega^2(1 + \cos \varphi(t)) \quad (350)$$

Nun benutzen wir, dass  $\cos z = 1 - 2\sin^2(\frac{z}{2})$  für alle  $z \in \mathbb{R}$  und erhalten

$$\frac{1}{2}\varphi'(t)^2 = \omega^2 \left(2 - 2\sin^2 \frac{\varphi(t)}{2}\right) = 2\omega^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (351)$$

Wir kommen auf die DGL

$$\varphi'(t)^2 = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2} = \alpha_0^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (352)$$

Da  $\varphi'(0) > 0$  und  $\cos \frac{\varphi(0)}{2} = 1 > 0$  kann man die Wurzel in einer Umgebung von 0 mit '+'-Vorzeichen ziehen und erhält

$$\varphi'(t) = \alpha_0 \cos \frac{\varphi(t)}{2} \quad \forall t \in [0, M]. \quad (353)$$

Hierbei ist

$$M := \sup\{m \in [0, \infty) : \varphi'(t) > 0 \text{ und } \varphi(t) \in [0, \pi] \quad \forall t \in [0, m]\} > 0. \quad (354)$$

Wir lösen nun (353) auf  $[0, M)$ . Da  $\cos \frac{z}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{z}{2}}}$  (was direkt aus  $\tan(w) = \frac{\sin(w)}{\cos(w)}$  folgt, HA) erhalten wir

$$\varphi'(t) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}}}, \quad (355)$$

d.h.

$$\varphi'(t) \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(t)}{2}} = \alpha_0. \quad (356)$$

Wir integrieren und erhalten

$$\int_0^t \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi(s)}{2}} \varphi'(s) \, ds = \alpha_0 t. \quad (357)$$

Wir substituieren  $u = \varphi(s)$  und erhalten (mit der Tatsache, dass  $\varphi(0) = 0$ )

$$\int_0^{\varphi(t)} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} \, du = \alpha_0 t. \quad (358)$$

Jetzt müssen wir nur noch das Integral auf der linken Seite auswerten. Dazu formen wir um

$$\int_0^{\varphi(t)} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} \, du = \int_0^{\varphi(t)} \frac{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} \, du \quad (359)$$

Nun substituieren wir  $v = \tan \frac{u}{2}$ . Beachte, dass dann gilt  $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{u}{2})$ . Dadurch erhalten wir

$$\int_0^{\varphi(t)} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} \, du = 2 \int_0^{\tan \frac{\varphi(t)}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \, dv = 2 \operatorname{Arsinh} \left( \tan \frac{\varphi(t)}{2} \right), \quad (360)$$

wobei  $\text{Arsinh}(y) := \log(y + \sqrt{1 + y^2})$  die Umkehrfunktion von  $\sinh$  ist (siehe Analysis-Vorlesung). Mit (358) erhalten wir

$$2\text{Arsinh}\left(\tan \frac{\varphi(t)}{2}\right) = \alpha_0 t. \quad (361)$$

Wir lösen nun nach  $\varphi(t)$  auf und erhalten

$$\varphi(t) = 2 \arctan\left(\sinh \frac{\alpha_0}{2} t\right) \quad \forall t \in [0, M). \quad (362)$$

Wir zeigen nun  $M = \infty$ . In der Tat: Angenommen es wäre  $M \in (0, \infty)$  so wäre (wegen der Definition von  $M$  in (354)) entweder  $\varphi(M) \in \{0, \pi\}$  oder  $\varphi'(M) = 0$ . Aus (362) folgt allerdings

$$\varphi(M) = \lim_{t \rightarrow M} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow M} 2 \arctan\left(\sinh \frac{\alpha_0}{2} t\right) = 2 \arctan\left(\sinh \frac{\alpha_0}{2} M\right) \in (0, \pi) \quad (363)$$

und (wieder aus (362))

$$\varphi'(M) = \lim_{t \rightarrow M} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow M} \frac{\alpha_0 \cosh \frac{\alpha_0}{2} t}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0}{2} t} = \frac{\alpha_0 \cosh \frac{\alpha_0}{2} M}{1 + \sinh^2 \frac{\alpha_0}{2} M} > 0. \quad (364)$$

Wir folgern einen Widerspruch zur Annahme und schließen  $M = \infty$ . Wiederum aus (362) folgt

$$\varphi(t) = 2 \arctan\left(\sinh \frac{\alpha_0}{2} t\right) \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (365)$$

Monotonie und Grenzverhalten für  $\varphi$  folgen sofort aus der Monotonie von  $\arctan$  und  $\sinh$ .

Das explizite Ausrechnen des dritten Falles war ziemlich mühsam. Später werden wir einen Weg sehen, wie man ohne die explizite Lösung zeigen kann, dass das Pendel nicht überschwingt. Eigentlich müssen wir aber auch erstmal überhaupt zeigen, dass die Gleichung  $\varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t)$  überhaupt eine Lösung hat, die auf  $[0, \infty)$  definiert ist...

### 1.3.3 Ausblick: Ein nichtlineares System

Ein typisches Beispiel eines nichtlinearen Systems ist das Räuber-Beute-Modell. Beobachtet wird dabei eine Beutepopulation  $x(t)$  und eine Räuberpopulation  $y(t)$ , deren Geburten- und Sterberate gegeben sind durch

$$\begin{array}{ll} b y(t) : \text{Sterberate von } x & a : \text{Geburtenrate von } x \\ d : \text{Sterberate von } y & c x(t) : \text{Geburtenrate von } y \end{array}$$

mit Parametern  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ . Die Modellannahme ist, dass die Sterberate der Beutepopulation  $x$  von der Größe der Räuberpopulation  $y$  abhängt und gleichzeitig die Geburtenrate der Beutepopulation  $y$  von der Größe der Beutepopulation  $x$ . Als einfachsten Ansatz wählt man hier jeweils einen linearen Zusammenhang. Damit erhält man das System zweier nicht-

linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - by(t)x(t) = (a - by(t))x(t) \\y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) = (cx(t) - d)y(t),\end{aligned}\tag{366}$$

auch notiert durch

$$z'(t) = F(z(t)).\tag{367}$$

wobei  $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$  und

$$\begin{aligned}F_1(x(t), y(t)) &= (a - by(t))x(t) \\F_2(x(t), y(t)) &= (cx(t) - d)y(t).\end{aligned}\tag{368}$$

Nichtlineare Systeme explizit zu lösen ist im Allgemeinen nicht möglich, daher ist man an Ergebnissen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen interessiert. Zudem lassen sich geometrische Veranschaulichungen und qualitativen Aussagen über deren Lösungskurven  $(x(t), y(t))$  aus dem System ableiten. Wir beschränken uns zunächst auf stationäre Punkte.

**Definition 61. STATIONÄRER PUNKT.** Ein Punkt  $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$ , der Nullstelle der Funktion  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist, d.h.  $\mathbf{F}(x_s, y_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , heißt stationärer Punkt der Differentialgleichung (368), denn dann gilt für  $t_s \in \mathbb{R}$  mit  $x(t_s) = x_s$  und  $y(t_s) = y_s$

$$\begin{pmatrix} x'(t_s) \\ y'(t_s) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x_s, y_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In dem System (366) ist  $(x_s, y_s)$  mit

$$x_s = \frac{d}{c} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{a}{b}\tag{369}$$

ein stationärer Punkt, wie man durch Einsetzen leicht überprüft. Damit können wir (366) auch schreiben als

$$\begin{aligned}x'(t) &= b(y_s - y(t))x(t) \\y'(t) &= c(x(t) - x_s)y(t).\end{aligned}\tag{370}$$

## 2 Existenz, Eindeutigkeit, Globalität

In Kapitel 1 konnten wir das Räuber–Beute–Modell bereits studieren. Da wir keine explizite Lösungsformel für das Räuber–Beute–Modell angeben konnten, mussten wir annehmen, dass eine eindeutige Lösung in einer offenen Untermenge von  $[0, \infty)$  existiert. Ob diese Annahme sinnvoll bzw. korrekt war, klären wir in diesem Kapitel. Dabei ist das folgende zu beachten

- Würden keine Lösung existieren, dann wäre das Räuber–Beute–Modell nicht sinnvoll, da es dann offenbar nicht erfüllbar wäre.

- Würden mehrere Lösungen existieren, dann wäre das Räuber–Beute–Modell nicht sinnvoll, da es dann keine sicheren Vorhersagen zulassen würde.
- Würden Lösungen nicht stetig von Parametern, wie der Anfangspopulation abhängen, dann wäre das Räuber–Beute–Modell nicht sinnvoll, da dann schon kleinste Störungen der (Mess-)daten zu stark abweichenden Ergebnissen führen würden und es keine sicheren Vorhersagen zulassen würde.

Aus diesen Gründen müssen wir uns der Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und Globalität von Lösungen widmen.

Die zentralen Fragen dieses Kapitels lauten daher: Können wir aus der Differentialgleichung ablesen, ob

- (i) Lösungen existieren (Existenz),
- (ii) genau eine Lösung existiert (Eindeutigkeit),
- (iii) Lösungen stetig von Parametern, wie dem Anfangswert, abhängen (Stabilität)?

Können wir für ein Anfangswertproblem alle drei Fragen mit ‘Ja’ beantworten, dann spricht man von einem *wohlgestellten Problem im Sinne von Hadamard*, siehe *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton University Bulletin. **4**, (1902). Der globale Satz von Picard–Lindelöf liefert uns ein erstes hinreichendes Kriterium, um alle drei Fragen mit ‘Ja’ zu beantworten.

## 2.1 Globaler Satz von Picard–Lindelöf

In diesem Kapitel behandeln wir den *globalen Satz von Picard–Lindelöf* (oder *Satz von Picard–Lindelöf in globaler Version*). Dieser Satz zeigt die globale Existenz, d.h. auf dem gesamten Intervall  $I$ , einer eindeutigen Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  des Anfangswertproblems (kurz AWP)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (371)$$

sowie deren stetige Abhängigkeit vom Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{R}$ , unter gewissen Voraussetzungen an  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Hierbei ist zu beachten, dass  $I = (a, b)$  stets offen ist und  $G = \mathbb{R}^n$  der Ganzraum.

Der Beweis wird sich über die nächsten Abschnitte erstrecken. Hier soll zunächst seine Formulierung diskutiert werden. Zuerst definieren wir das essentielle Kriterium, die an die Funktion  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu stellen ist, damit eindeutige Lösungen existieren bzw. das Anfangswertproblem (371) wohlgestellt im Sinne von Hadamard ist.

**Definition 61.** GLOBALE LIPSCHITZ–BEDINGUNG. Eine Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfüllt eine *globale Lipschitz–Bedingung* auf  $I$ , falls ein  $L > 0$  existiert, sodass

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (372)$$

für alle  $t \in I$  und  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ .

Falls  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine globale Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann können wir von globaler Existenz einer eindeutigen Lösung ausgehen. Das jedenfalls besagt der folgende Satz.

**Satz 62. SATZ VON PICARD–LINDELÖF, GLOBALE VERSION.** Es sei  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  und die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitz-Bedingung auf  $I$ . Dann existiert für alle  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein eindeutiges  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (373)$$

**Beweis.** Später.

Diese Version des Satzes von Picard–Lindelöf enthält noch keinerlei Aussage über die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert. Wir klammern diese Fragestellung zunächst aus und konzentrieren uns zunächst auf die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Man beachte, dass wir dieses Resultat tatsächlich nur für  $G = \mathbb{R}^n$  formulieren und beweisen können. Sind kleinere Gebiete erlaubt, so kann nicht mit einer Lösung auf ganz  $I$  rechnen. Als (pathologisches) Beispiel gilt:

**Übung 63. UNABDINGBARKEIT DER VORAUSSETZUNG ‘ $G = \mathbb{R}^n$ ’ FÜR DEN GLOBALEN SATZ VON PICARD–LINDELÖF.**

Sei  $I := \mathbb{R}$ ,  $G := (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: I \times G \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $(t, z)^\top \in I \times G$  definiert durch

$$f(t, z) := z. \quad (374)$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in \mathbb{R}), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (375)$$

keine Lösung besitzt. Besitzt das Anfangswertproblem auf einer offenen Teilmenge von  $I$  eine eindeutige Lösung?

**SINN DER ÜBUNG:** Man sieht: Schränkt man sein Definitionsgebiet  $G$  zu stark ein, so kann man nicht mit einer globalen Lösung rechnen. Die Einschränkung  $G = (0, 1)$  ist hier natürlich künstlich, weil man dieselbe Funktion auch auf einem größeren Gebiet, nämlich auf  $G = \mathbb{R}$  definieren könnte. Nichtsdestotrotz sieht man, dass man sich für allgemeine Gebiete  $G$  womöglich nur mit einer Lösung auf einem Teilintervall abfinden sollte.

Trotz dieses Mankos: Viele Fälle können wir bereits mit dieser ersten Version des Satzes von Picard–Lindelöf lösen, unter anderem auch das Fadenpendel:

**Übung 64.** GLOBALITÄT DES FADENPENDELS. Zeigen Sie, dass für alle  $\varphi_0, \alpha_0 \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \sin(\varphi(t)) & (t \in \mathbb{R}), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \varphi'(0) = \alpha_0, \end{cases} \quad (376)$$

eine globale Lösung  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  besitzt.

**SINN DER ÜBUNG:** Man sieht hier, dass der Satz von Picard–Lindelöf nicht nur für Gleichungen erster Ordnung, sondern auch für Gleichungen höherer Ordnung angewendet werden kann. Die wichtigen Ideen um Differentialgleichungen höherer Ordnung auf DGLs erster Ordnung zurückzuführen haben wir ja bereits geklärt.

Ohne Lipschitz–Bedingung verlieren wir sofort die Eindeutigkeit, wie wir in Beispiel 4 (p. 4) eindrucksvoll gesehen haben.

Widmen wir uns schließlich dem Beweis des globalen Satzes von Picard–Lindelöf. Dieser beruht im Wesentlichen auf **zwei Hauptzutaten**:

1. Der Banach’sche Fixpunktsatz.
2. Äquivalente Fixpunktformulierung.

Im Folgenden besprechen wir diese zwei Hauptzutaten im Detail, sodass wir Letztere am Ende nur noch zusammenwerfen müssen.

### 2.1.1 Der Banach’sche Fixpunktsatz

Der Banach’sche Fixpunktsatz ist ein mögliches Mittel, um die Frage zu beantworten, wann ein nicht-linearer Operator<sup>1</sup>  $T: M \subseteq X \rightarrow X$ , wobei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq X$  ist, einen Fixpunkt hat, d.h. ein  $x^* \in M$  existiert, sodass

$$Tx^* = x^*.$$

Ein hinreichendes Kriterium dafür ist die sogenannte *k-Kontraktivität*.

**Definition 64.** (*k*-)KONTRAKTIVITÄT. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq X$ . Dann heißt ein Operator  $T: M \subseteq X \rightarrow X$

- (i) *kontraktiv*, falls  $d(Tx, Ty) < d(x, y)$  für alle  $x, y \in M$  mit  $x \neq y$ .
- (ii) *k-kontraktiv*, falls ein  $k \in (0, 1)$  existiert, sodass  $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$  für alle  $x, y \in M$ .

**Bemerkung.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq X$ .

- (i) Dann ist  $T: M \subseteq X \rightarrow X$  genau dann *k-kontraktiv*, wenn  $T: M \subseteq X \rightarrow X$  Lipschitzstetig mit Konstante  $k \in (0, 1)$  ist.
- (ii) *k-Kontraktivität* impliziert Kontraktivität.

<sup>1</sup>In der Funktionalanalysis werden Abbildungen zwischen Funktionenräumen als Operatoren bezeichnet.

- (iii) Kontraktivität impliziert keine  $k$ -Kontraktivität. Zum Beispiel ist  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $Tx := \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , nur kontraktiv, aber nicht  $k$ -kontraktiv.

Der Banach'sche Fixpunktsatz ist von grundlegender Bedeutung für iterative Verfahren, die sowohl zum theoretischen Nachweis von

- Existenz,
- Eindeutigkeit,
- Stabilität,

d.h. Wohlgestelltheit im Sinne von Hadamard, als auch zur

- numerischen Approximation von Lösungen,

benutzt werden.

**Satz 65. BANACH'SCHER FIXPUNKTSATZ.** Es sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $M \subseteq X$  nicht-leer und abgeschlossen, und  $T: M \subseteq X \rightarrow M$   $k$ -kontraktiv. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- Es existiert genau ein  $x_* \in M$ , sodass  $Tx_* = x_*$ , d.h.  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  hat genau einen Fixpunkt.
- Für alle Startwerte  $x_0 \in M$  erfüllt die sogenannte *Picard-Iteration*  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$x_n := Tx_{n-1} \in M, \quad (377)$$

dass  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (bzw.  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ )).

*Zu (i). Existenz.* Sei  $x_0 \in M$  beliebig. Wir definieren die Picard-Iteration  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$  durch (377). Wegen der  $k$ -Kontraktivität von  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq k d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, x_1). \quad (378)$$

Mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel folgt dann aus (378), für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ , dass

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \quad (379)$$

$$\leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-1} k^{n+i} \quad (380)$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \quad (381)$$



Aufgrund von  $k < 1$  folgt aus (379), dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bezüglich  $(X, d)$  ist. Da  $(X, d)$  vollständig ist, existiert also ein  $x^* \in X$ , sodass

$$d(x_n, x^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (382)$$

Da  $M$  abgeschlossen ist, gilt insbesondere  $x^* \in M$ . Schließlich folgt mit der Definition der Picard-Iteration (siehe (377)), (382) und der Stetigkeit von  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ , d.h.

$$d(Tx_n, Tx^*) \leq k d(x_n, x^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

dass

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(x_{n+1}, x^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d.h.  $d(Tx^*, x^*) = 0$ . Die Definitheit von  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  liefert schließlich, dass  $Tx^* = x^*$ .

*Eindeutigkeit.* Seien  $x^*, y^* \in M$ , sodass  $Tx^* = x^*$  und  $Ty^* = y^*$ . Aufgrund der  $k$ -Kontraktivität von  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  folgt dann, dass

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k d(x^*, y^*). \quad (383)$$

Aufgrund von  $k < 1$  ist (383) nur wahr, wenn  $d(x^*, y^*) = 0$ , d.h. wenn  $x^* = y^*$  wegen der Definitheit von  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zu (ii). Wurde bereits (i) bewiesen. □

**Bemerkung.** MINIMALITÄT DER VORAUSSETZUNGEN. Werden einzelne Voraussetzungen im Banachschen Fixpunktsatz fallengelassen, dann ist er nicht mehr gültig, wie die folgenden Beispiele zeigen:

- (i) Falls  $M = \emptyset$  und  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  beliebig, d.h.  $M$  muss nichtleer sein
- (ii) Falls  $M = [0, 1]$  und  $T: M \subseteq X \rightarrow [2, 3]$ , d.h.  $T(M) \subseteq M$  muss gelten.
- (iii) Falls  $M = (0, 1)$  und  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ , definiert durch  $Tx := \frac{x}{2}$  für alle  $x \in M$ , d.h.  $M$  muss abgeschlossen sein.
- (iv) Falls  $M = \mathbb{R}$  und  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ , definiert durch  $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$  für alle  $x \in M$ . Dann hat  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  keinen Fixpunkt. Würde ein  $x^* \in M$  existieren, sodass  $Tx^* = x^*$ , dann würde  $\arctan(x^*) = \frac{\pi}{2}$  gelten, ein Widerspruch.

**Gedankenexperiment 66.** FREIBURG-KARTE. Sei  $(X, d) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  ein 1:1-Kartendarstellung von Freiburg. Sei  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  eine affin lineare Transformation, die  $M$  auf eine 1:100-Kartendarstellung von Freiburg  $\tilde{M} \subseteq M$ , abbildet, z.B.

$$Tx := Ax + b \quad (x \in M),$$

wobei  $\|A\|_{2 \times 2} \leq \frac{1}{100}$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ , sodass  $T(M) \subseteq M$ .

Dann  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  lipschitzstetig mit einer Konstanten  $k \in (0, 1)$ . Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert dann ein eindeutiges  $x^* \in M$ , sodass

$$Tx^* = x^*.$$

Das heißt: Legen wir beide Kartendarstellungen übereinander, dann existiert genau ein Punkt, der in beiden Kartendarstellungen genau übereinander liegt. Insbesondere liefert die Picard-Iteration eine Methode diesen Punkt anzunähern, indem wir einen beliebigen Ort in Freiburg wählen und dann iterativ die Abbildung  $T$  anwenden, vgl. Abbildung 13.



Abbildung 13: Picard-Iteration für  $A = \frac{9}{10} \text{id}_{\mathbb{R}^2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b = (0.064, 0.0585)^\top \in \mathbb{R}^2$  und Startwert  $x_0 = (0, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$  konvergiert gegen das Freiburger Münster.

**Übung 67.** A PRIORI UND A POSTERIORI FEHLERABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE PICARD-ITERATION. Es gelten die Voraussetzungen von Satz 65 und sei  $x^* \in M$  der eindeutige Fixpunkt von  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ . Weiter sei  $x_0 \in M$  ein beliebiger Startwert und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$  die resultierende Picard-Iteration, definiert durch (377). Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die *a priori Abschätzung*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \quad (384)$$

und die *a posteriori Abschätzung*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}). \quad (385)$$

In vielen Anwendungen hängt der Fixpunktoperator noch von einem Parameter  $p \in P$  ab. Dabei ist  $(P, d_P)$  ein metrischer Raum, der sogenannte *Parameterraum*. In diesem Fall betrachtet man das von  $p \in P$  abhängige Fixpunktproblem:

$$T_p x_p = x_p, \quad x_p \in M, \quad p \in P,$$

wobei  $T_p: M \subseteq X \rightarrow M, p \in P$ .

**Korollar 68.** STABILITÄT IM BANACHSCHEN FIXPUNKTSATZ. Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 65. Des Weiteren gelte:

- (a)  $T_p: M \subseteq X \rightarrow M, p \in P$ , sind  $k$ -kontraktiv, wobei  $k \in (0, 1)$  von  $p \in P$  unabhängig ist.
- (b) Es existiert ein  $p_0 \in P$ , sodass für alle  $x \in M$  gilt:

$$d(T_p x, T_{p_0} x) \rightarrow 0 \quad (d_P(p, p_0) \rightarrow 0). \quad (386)$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle  $p \in P$  existiert ein eindeutiger Fixpunkt  $x_p \in M$  von  $T_p: M \subseteq X \rightarrow M$ .
- (ii)  $d(x_p, x_{p_0}) \rightarrow 0 \quad (d_P(p, p_0) \rightarrow 0)$ .

Zu (i). Folgt unmittelbar aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Zu (ii). Mit der Dreiecksungleichung und der gleichmäßigen  $k$ -Kontraktivität von  $T_p: M \subseteq X \rightarrow M, p \in P$ , folgt

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\leq d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\leq k d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$d(x_p, x_{p_0}) \leq \frac{1}{1-k} d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \rightarrow 0 \quad (d_P(p, p_0) \rightarrow 0).$$

### 2.1.2 Das äquivalente Fixpunktproblem

In diesem Abschnitt leiten wir eine zum Anfangswertproblem (371) äquivalente Fixpunktformulierung her, auf die wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden können, d.h. wir bestimmen einen vollständigen metrischen Raum  $(X, d)$ , eine nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge  $M$  und einen  $k$ -kontraktiven Operator  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ , dessen Fixpunktformulierung äquivalent zum Anfangswertproblem (371) ist. Die Wahl des metrischen Raums  $(X, d)$  und der nicht-leeren, abgeschlossenen Teilmenge  $M$  ergibt sich dabei in natürlicher Weise durch die Wahl von  $T: M \subseteq X \rightarrow M$ , für den die Existenz eines Fixpunkts äquivalent zur Lösbarkeit des Anfangswertproblems (371) ist. Genauer wählen wir  $(X, d)$  und  $M$  immer so, dass  $T: M \subseteq X \rightarrow M$  wohldefiniert ist und die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

**1. Schritt: Wahl des Fixpunktoperators.** Die Wahl des Fixpunktoperators beruht auf der Tatsache, dass sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (387)$$

auf Basis des *Hauptsatzes über Integral- und Differentialrechnung* äquivalent in ein Integralgleichung umformulieren lässt, nämlich

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (t \in I). \quad (388)$$

Falls  $n > 1$ , so ist das Integral in der obigen Gleichung komponentenweise zu verstehen.

**Proposition 69.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Dann sind für  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  (nur stetig!) die folgende Aussagen äquivalent:

1.  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  löst das Anfangswertproblem (387).
2.  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  erfüllt die Integralgleichung (388).

**Beweis. Schritt 1:** “1.  $\Rightarrow$  2.” Sei  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  so, dass (387) erfüllt ist. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle  $t \in I$ , dass

$$y(t) - y_0 \stackrel{(387)}{=} y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \stackrel{(387)}{=} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (389)$$

Addiert man auf beiden Seiten  $y_0$ , so folgt die Behauptung.

**Schritt 2:** “2.  $\Rightarrow$  1.” Es sei  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  so, dass für alle  $t \in I$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (390)$$

Wir müssen zeigen, dass  $y$  eine Lösung des AWP ist. Damit das überhaupt denkbar ist, muss zuerst gezeigt werden, dass  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  (denn andernfalls könnte man  $y$  überhaupt nicht differenzieren). Hierzu erinnern wir uns an folgende Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist  $g \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $t_0 \in I$  beliebig, so ist

$$G := \int_{t_0}^{\cdot} g(s) \, ds \quad (391)$$

differenzierbar mit  $G' = g$ . Da  $g$  als stetig vorausgesetzt war, gilt sogar, dass  $G$  stetig differenzierbar ist, d.h. in  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$  liegt. Wir wollen nun die Aussage auf  $g(s) := f(s, y(s))$  anwenden. Dazu muss gezeigt werden, dass diese Wahl von  $g$  stetig auf  $I$  ist. Da  $f$  stetig auf  $I \times \mathbb{R}^n$  ist und nach Voraussetzung die Abbildung  $s \mapsto (s, y(s))$  von  $I$  nach  $I \times \mathbb{R}^n$  stetig ist, ist  $g$  tatsächlich als Verkettung stetiger Abbildungen stetig. Wir erhalten daher

aus der vorigen Überlegung, dass  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$G(t) := \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (t \in I) \quad (392)$$

stetig differenzierbar ist mit  $G'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ . Aus (390) folgt, dass  $y(t) = y_0 + G(t)$  für alle  $t \in I$ . Damit ist auch  $y$  stetig differenzierbar auf  $I$  mit

$$y'(t) = G'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I. \quad (393)$$

Außerdem gilt nach (390)

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s)) \, ds = y_0. \quad (394)$$

Mit den vorigen beiden Gleichungen erhalten wir, dass (387) erfüllt ist.

Proposition 69 liefert zwei wichtige Erkenntnisse:

- (i) Jede stetige Lösung der Integralgleichung (388) ist auch Lösung des Anfangswertproblems (387) und umgekehrt, d.h. es reicht zu zeigen, dass  $T : M \subseteq X \rightarrow X$ , wobei  $(X, d)$  und  $M \subseteq X$  noch geeignet zu wählen sind, definiert durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \text{für alle } t \in I, \quad (395)$$

einen Fixpunkt hat.

- (ii) Jede stetige Lösung der Integralgleichung (388) ist automatisch stetig differenzierbar, d.h.  $X = M = C^0(I; \mathbb{R}^n)$  wäre eine geeignete Wahl?

## 2. Schritt: Wahl des vollständigen metrischen Raums und der nichtleeren Teilmenge.

Die in Punkt (ii) beschriebene Wahl ist jedoch noch nicht vollends ausgereift, da es schwierig ist,  $C^0(I; \mathbb{R}^n)$  mit einer Metrik  $d$  auszustatten, sodass  $(C^0(I; \mathbb{R}^n), d)$  vollständig ist. Daher gehen wir zu dem folgenden Teilraum über, für den dies möglich ist:

**Definition 70.** DER RAUM  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Sei  $I \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wir definieren die Menge der beschränkten stetigen Funktionen

$$C_b^0(I; \mathbb{R}^n) := \{f \in C^0(I; \mathbb{R}^n) \mid \sup_{t \in I} |f(t)| < \infty\}, \quad (396)$$

und die Supremumsmetrik  $d_\infty : C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \times C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$  für alle  $f, g \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  durch

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|. \quad (397)$$

An dieser Stelle müsste man eigentlich noch anmerken, dass  $d_\infty(f, g)$  wohldefiniert ist, d.h.  $d_\infty(f, g) < \infty$  für alle  $f, g \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Dies sieht man aber sofort mit der Beobachtung, dass

$$\sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in I} (|f(t)| + |g(t)|) \leq \sup_{t \in I} |f(t)| + \sup_{t \in I} |g(t)|. \quad (398)$$

In der Tat bildet die Menge der beschränkten stetigen Funktionen ausgestattet mit der Supremumsmetrik einen vollständigen metrischen Raum.

**Proposition 71.** Das Paar  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$  definiert einen vollständigen metrischen Raum.

**Beweis.** Übungsaufgabe.

**Übung 72.** (UN)VOLLSTÄNDIGKEIT VON  $(C_b^1(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$ . Wir definieren für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$C_b^1(I; \mathbb{R}^n) := \{f \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n) : f \text{ stetig differenzierbar auf } I\}. \quad (399)$$

Zeigen Sie, dass für  $n = 1$  und  $I = (-1, 1)$  das Paar  $(C_b^1(I; \mathbb{R}), d_\infty)$  einen metrischen Raum definiert, der nicht vollständig ist.

**SINN DER ÜBUNG:** Am liebsten hätten wir das Fixpunktproblem (395) auf einer Menge stetig differenzierbarer Funktionen betrachtet, denn dann wäre auch sofort klar, dass die Lösung des Fixpunktproblems stetig differenzierbar ist.

**HINWEIS:** Zeigen Sie, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^1(I; \mathbb{R})$ , definiert durch  $f_n(t) := \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$  für alle  $t \in (-1, 1)$  und  $n \in \mathbb{N}$ , eine nicht-konvergente Cauchy-Folge ist.

Nun tritt ein weiteres Problem auf: Es ist zwar  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_\infty)$  ein vollständiger metrischer Raum, allerdings gilt im Allgemeinen nicht, dass  $T(C_b^0(I; \mathbb{R}^n)) \subseteq C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , d.h. die im Banachschen Fixpunktsatz geforderte Selbstabbildungseigenschaft ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Ist allerdings  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall und  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , dann gilt das folgende Resultat.

**Übung 73.** Es sei  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall mit  $t_0 \in I$ . Zeigen Sie, dass für alle  $y \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  die Abbildung  $T_y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für alle  $t \in I$  definiert durch

$$T_y(t) := \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \quad (400)$$

ein Element von  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  ist.

**SINN DER ÜBUNG:** In dieser Übung lernt man, dass es notwendig ist, das Definitionsintervall zu verkleinern. Dies ist nämlich notwendig damit die in (395) definierte Abbildung eine *Selbstabbildung* ist, d.h. ihr Bild landet wieder im selben Raum.

### 2.1.3 Globaler Satz von Picard–Lindelöf auf beschränkten Intervallen

Im vorherigen Abschnitt haben wir eine zum Anfangswertproblem äquivalente Fixpunktformulierung, auf die wir den Banachschen Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72) anwenden wollen, hergeleitet. Genauer haben wir eingesehen, dass eine Funktion  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  genau dann Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (401)$$

ist, wenn sie ein Fixpunkt des Fixpunktoperators

$$T: C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I; \mathbb{R}^n), \quad (402)$$

für alle  $y \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \text{ für alle } t \in I. \quad (403)$$

Um die im Banachschen Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72) geforderte Vollständigkeit und Selbstabbildungseigenschaft zu erfüllen, haben wir uns auf ein beschränktes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  beschränkt, sodass auch

$$T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \quad (404)$$

wohldefiniert ist. Für den Spezialfall eines beschränkten Intervalls  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  können wir die folgende Version des globalen Satzes von Picard–Lindelöf beweisen.

**Satz 74.** VON PICARD–LINDELÖF, GLOBALE VERSION (AUF BESCHR. INTERVALLEN). Sei  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall und die Strukturfunktion  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitz–Bedingung auf  $I$  mit Konstante  $L > 0$ . Dann existiert zu beliebigen  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein eindeutiges  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (405)$$

#### Beweis.

— *Beweisidee:* Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72), auf  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  anwenden.

— *Problem:*  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  ist bezüglich der Metrik  $d_\infty$  nicht  $k$ -kontraktiv, denn für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $t \in I$  gilt wegen der globalen Lipschitz–Bedingung, dass

$$\begin{aligned} |(Ty)(t) - (T\tilde{y})(t)| &\leq \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| \, ds \\ &\leq L \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} |y(s) - \tilde{y}(s)| \, ds \\ &\leq L(b - a) d_\infty(y, \tilde{y}), \end{aligned}$$



d.h. für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  gilt, dass

$$d_\infty(Ty, T\tilde{y}) \leq L(b-a) d_\infty(y, \tilde{y}),$$

und im Allgemeinen gilt nicht  $L(b-a) < 1$ .

— *Lösung:* Wir statteten  $C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  mit einer zu  $d_\infty$  äquivalenten Metrik aus, d.h. wir definieren die Metrik  $d_L: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \times C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , durch

$$d_L(y, \tilde{y}) := \sup_{t \in I} e^{-L|t-t_0|} |y(t) - \tilde{y}(t)|.$$

Es gilt für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , dass

$$d_L(y, \tilde{y}) \leq d_\infty(y, \tilde{y}) \leq e^{L(b-a)} d_L(y, \tilde{y}),$$

woraus folgt, dass  $(C_b^0(I; \mathbb{R}^n), d_L)$  ein vollständiger metrischer Raum ist.

— *Eigentlicher Beweis:* Es reicht zu zeigen, dass  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  bezüglich der Metrik  $d_L$   $k$ -kontraktiv ist. Für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $t \in I$  gilt, dass

$$\begin{aligned} e^{-L|t-t_0|} |(Ty)(t) - (T\tilde{y})(t)| &\leq L e^{-L|t-t_0|} \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} |y(s) - \tilde{y}(s)| \, ds \\ &= L e^{-L|t-t_0|} \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} e^{L|s-t_0|} e^{-L|s-t_0|} |y(s) - \tilde{y}(s)| \, ds \\ &\leq d_L(y, \tilde{y}) L \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} e^{L|s-t_0| - L|t-t_0|} \, ds \\ &= (1 - e^{-L|t-t_0|}) d_L(y, \tilde{y}) \\ &= (1 - e^{-L(b-a)}) d_L(y, \tilde{y}), \end{aligned}$$

d.h. für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  gilt, dass

$$d_L(Ty, T\tilde{y}) \leq (1 - e^{-L(b-a)}) d_L(y, \tilde{y}),$$

d.h.  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  ist  $k$ -kontraktiv bezüglich  $d_L$  mit  $k := (1 - e^{-L(b-a)}) \in (0, 1)$ . Der Banachsche Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72), liefert nun einen eindeutigen Fixpunkt  $y \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  von  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Wegen Proposition 69 (p. 77) ist dann  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Wir haben nun eine abstrakte Lösung. Können wir sie auch numerisch bestimmen? Die Antwort lautet Ja, denn der globale Satz von Picard–Lindelöf beruht auf dem Banach’schen Fixpunktsatz. Dieser liefert und wiederum mit der Picard–Iteration eine Möglichkeit die abstrakte Lösung anzunähern.

**Folgerung 75.** Es gelten die Voraussetzungen von Satz 74. Weiter sei  $x_0 \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  ein beliebiger Startwert. Dann erfüllt die Picard–Iteration  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , definiert durch  $x_{n+1} := Tx_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , für  $\kappa := (1 - e^{-L(b-a)}) \in (0, 1)$ , die a priori Abschätzungen

$$d_L(x_n, y) \leq \kappa^n e^{L(b-a)} d_L(x_0, x_1), \quad (406)$$

$$d_\infty(x_n, y) \leq \kappa^n e^{2L(b-a)} d_\infty(x_0, x_1), \quad (407)$$

und die a posteriori Abschätzungen

$$d_L(x_n, y) \leq \kappa e^{L(b-a)} d_L(x_n, x_{n-1}), \quad (408)$$

$$d_\infty(x_n, y) \leq \kappa e^{2L(b-a)} d_\infty(x_n, x_{n-1}). \quad (409)$$

**Beweis.** Die a priori Abschätzung (406) und die a posteriori Abschätzung (408) folgen unmittelbar aus Übung 67. Die a priori Abschätzung (407) und die a posteriori Abschätzung (409) folgen unmittelbar aus (406) bzw. (408) unter Zuhilfenahme der Äquivalenz

$$d_L(y, \tilde{y}) \leq d_\infty(y, \tilde{y}) \leq e^{L(b-a)} d_L(y, \tilde{y}),$$

für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

**Übung 76. ITERIERTE KONTRAKTIONSEIGENSCHAFT.** Sei  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt und  $f \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitz–Bedingung auf  $I$  mit Konstante  $L > 0$ . Zu  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  definiere  $T: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  für alle  $y \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  durch

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $y, z \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , dass

$$d_\infty(T^n y, T^n z) \leq \frac{L^n (b-a)^n}{n!} d_\infty(y, z), \quad (410)$$

wobei  $T^n := \overbrace{T \circ \dots \circ T}^{n\text{-mal}}: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

HINWEIS: Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion, dass

$$|(T^n y)(t) - (T^n z)(t)| \leq L^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} d_\infty(y, z). \quad (411)$$

für alle  $t \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $y, z \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

**Folgerung 77.** Es gelten die Voraussetzungen von Satz 74. Weiter sei  $x_0 \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  ein beliebiger Startwert. Dann erfüllt die Picard–Iteration  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , definiert durch  $x_{n+1} := Tx_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die a priori Abschätzung

$$d_\infty(x_n, y) \leq \frac{L^n(b-a)^n}{n!} d_\infty(x_0, y). \quad (412)$$

**Beweis.** Die a priori Abschätzung (412) folgt unmittelbar aus Übung 76 zusammen mit der Tatsache, dass  $x_n = T^n x_0$  und  $y = T^n y$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , laut der Definition der Picard–Iteration  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  und der Fixpunkteigenschaft von  $y \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

### Übung 78. EINE ANWENDUNG DER PICARD-ITERATION.

- (a) Berechnen Sie die ersten zwei Picard–Iterierten von

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(y(t)) & (t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (413)$$

Verwenden Sie den Startwert  $x_0 \in C_b^0(I)$ , definiert durch  $x_0(t) := 0$  für alle  $t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

- (b) Zeigen Sie (ohne die (413) explizit zu lösen!), dass der Fehler ihrer zweiten Picard–Iterierten kleinergleich  $\frac{1}{32}$  ist, d.h.  $d_\infty(x_2, y) \leq \frac{1}{32}$ .

HINWEIS: Verwenden Sie Aufgabe 2. Zeigen Sie mithilfe der Differentialgleichung (413), dass  $d_\infty(x_0, y) \leq \frac{1}{4}$ .

- (c) Lösen Sie die DGL exakt und zeichnen Sie die Lösung zusammen mit den ersten zwei Picard–Iterierten in ein Koordinatensystem.

SINN DER ÜBUNG: Man sieht, dass man die explizite Lösung mit der Picard-Iteration schnell und effizient approximieren kann.

Da der Banachsche Fixpunktsatz zusätzlich noch eine Stabilitätsaussage enthält (siehe Folgerung 68), lässt sich der globale Satz von Picard–Lindelöf auf beschränkten Intervallen noch um die folgende Stabilitätsaussage erweitern.

**Folgerung 79. STABILITÄT IM SATZ VON PICARD–LINDELÖF.** Es gelten die Voraussetzungen von Satz 74. Dann gilt:

- (i) Für alle  $p \in \mathbb{R}^n$  existiert ein eindeutiges  $y_p \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y_p'(t) = f(t, y_p(t)) & (t \in I), \\ y_p(t_0) = p. \end{cases} \quad (414)$$

- (ii) Es gilt  $d_\infty(y_p, y_{p_0}) \rightarrow 0$  ( $p \rightarrow p_0$ ).

**Beweis.** Zu (i). Nach dem globalen Satz von Picard–Lindelöf (siehe Satz 74) existiert für alle  $p \in \mathbb{R}^n$  ein eindeutiges  $y_p \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , das (414) erfüllt.

Zu (ii). Für alle  $p \in \mathbb{R}^n$  ist  $y_p \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$  eindeutiger Fixpunkt von  $T_p: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$(T_p y)(t) := p + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

für alle  $y \in C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ . Die Operatoren  $T_p: C_b^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ , sind  $k$ -kontraktiv bezüglich  $d_L$ , wobei  $k = (1 - e^{-L(b-a)}) \in (0, 1)$  von  $p \in \mathbb{R}^n$  unabhängig ist. Da  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$  offensichtlich ein metrischer Raum ist, sind alle Voraussetzungen von Folgerung 68 erfüllt. Folgerung 68 liefert daher, dass

$$d_L(y_p, y_{p_0}) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow p_0).$$

Da  $d_L$  und  $d_\infty$  äquivalente Metriken sind, folgt schließlich, dass

$$d_\infty(y_p, y_{p_0}) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow p_0).$$

#### 2.1.4 Globaler Satz von Picard–Lindelöf auf unbeschränkten Intervallen

Wir wollen den globalen Satz von Picard–Lindelöf auf unbeschränkte Intervalle erweitern. Die Technik dazu heißt *Ausschöpfung* und beruht auf folgender Idee

**Beobachtung 80.** AUSSCHÖPFUNG. Für jedes offene Intervall  $I \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Folge  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von offenen Intervallen mit  $J_k \subset \subset I$ ,  $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$  und

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k. \quad (415)$$

BEGRÜNDUNG: Falls  $I = (a, b)$  für  $-\infty < a < b < \infty$ , so kann man  $J_k := (a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k})$  wählen (HA). Falls  $I = (a, \infty)$  für ein  $a > -\infty$ , so tut's  $J_k := (a + \frac{1}{k}, k)$ . Alle anderen Fälle überlassen wir den Lesenden als Übungsaufgabe.

**Satz 81.** VON PICARD–LINDELÖF, GLOBALE VERSION (AUF ALLGEMEINEN INTERVALLEN). Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitz–Bedingung auf  $I$  mit Konstante  $L > 0$ . Dann existiert zu beliebigen  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein eindeutiges  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (416)$$

**Beweis von Satz 81.**

*Schritt 1: Existenz.* Wähle eine Folge  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Teilintervallen mit

$$J_k \subseteq J_{k+1} \subset \subset I \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad t_0 \in J_1, \quad I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k. \quad (417)$$

Da  $f \in C^0(\overline{J_k} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  die globale Lipschitz-Bedingung erfüllt, liefert der globale Satz von Picard–Lindelöf auf beschränkten Intervallen (siehe Satz 74, p. 80), für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein eindeutiges  $y_k \in C^1(J_k; \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'_k(t) &= f(t, y_k(t)) \quad (t \in J_k), \\ y_k(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (418)$$

Nun wollen wir diese Lösungen zu einer Lösung auf ganz  $I$  zusammenkleben. Dazu muss aber folgendes gewährleistet sein:

$$\text{Für alle } l < k \text{ gilt:} \quad y_k(t) = y_l(t) \quad \text{für alle } t \in J_l. \quad (419)$$

Dies folgt allerdings unmittelbar aus der eindeutigen Lösbarkeit von (420) für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Ist nämlich  $l < k$ , das heißt  $J_l \subseteq J_k$ , dann gilt offensichtlich

$$\begin{cases} y'_k(t) = f(t, y_k(t)) \quad (t \in J_l), \\ y_k(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (420)$$

und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (420) für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $y_k(t) = y_l(t)$  für alle  $t \in J_l$ , das heißt (419). Definiere nun  $y_* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$y_*(t) := y_k(t) \quad \text{falls } t \in J_k. \quad (421)$$

Dies ist wohldefiniert: Zu jedem  $t \in I$  gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $t \in J_k$ . Die Definition ist unabhängig von  $k$ , denn falls  $t \in J_k \cap J_l$  für  $k \neq l$ , so gilt nach der obigen Zwischenbehauptung, dass  $y_k(t) = y_l(t)$ . Daher ist es unerheblich, welcher Index jetzt für die Definition von  $y_*$  hergenommen wird. Nun beachte, dass  $y_*$  stetig diffbar bei jedem  $t \in I$  ist, denn jedes  $t \in I$  ist innerer Punkt eines Intervalles  $J_k$  und wir wissen bereits, dass  $y^* \in C^1(J_k; \mathbb{R}^n)$ , da  $y_*|_{J_k} = y_k \in C^1(J_k; \mathbb{R}^n)$ . Außerdem gilt für alle  $t \in J_k$

$$y'_*(t) = y'_k(t) = f(t, y_k(t)) = f(t, y_*(t)). \quad (422)$$

und, das  $t_0 \in J_1$  gilt auch  $y_*(t_0) = y_1(t_0) = y_0$ .

*Schritt 2: Eindeutigkeit.* Es seien  $y, \tilde{y} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  zwei Lösungen. Wir zeigen  $y = \tilde{y}$ . Dazu sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $J_k \subset \subset I$  wie in Schritt 1. Da  $\overline{J_k}$  kompakt ist, sind  $y$  und  $\tilde{y}$  auf  $\overline{J_k}$  beschränkt. Damit gilt  $y, \tilde{y} \in C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$ . Ferner lösen  $y|_{J_k}$  und  $\tilde{y}|_{J_k}$  das AWP (420) auf  $J_k$ . Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (420) für alle  $k \in \mathbb{N}$ , folgt also  $y|_{J_k} = \tilde{y}|_{J_k}$ . Da  $k \in \mathbb{N}$  beliebig war, folgt, dass  $y = \tilde{y}$  auf  $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$ .

**Übung 82. PICARD-ITERATION UND AUSSCHÖPFUNG.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine globale Lipschitz-Bedingung auf  $I$ . Weiter sei  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Sei  $J := (a, b) \subset\subset I$ ,  $x \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  und  $T: C_b^0(J; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  definiert durch

$$(T\tilde{y})(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \quad (423)$$

für alle  $\tilde{y} \in C_b^0(J; \mathbb{R}^n)$  und  $t \in I$ . Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$(T\tilde{y})(a) := \lim_{t \downarrow a} (T\tilde{y})(t), \quad (T\tilde{y})(b) := \lim_{t \uparrow b} (T\tilde{y})(t), \quad (424)$$

wohldefiniert sind.

- (b) Wählen Sie nun  $x_0 := 0 \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  und  $(J_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((a_k, b_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Ausschöpfung von  $I$ , d.h.  $J_k \subseteq J_{k+1} \subset\subset I$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k = I$ , mit  $t_0 \in J_1$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  sei  $T_k: C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$  definiert durch gegeben durch

$$(T_k \tilde{y})(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s)) \, ds \quad (425)$$

für alle  $\tilde{y} \in C_b^0(J_k; \mathbb{R}^n)$  und  $t \in J_k$ . Definieren Sie nun für  $k \in \mathbb{N}_0$  die rekursive Folge

$$x_{k+1}(t) := \begin{cases} (T_k x_k)(t) & t \in (a_k, b_k), \\ (T_k x_k)(b_k) & t \in I \cap [b_k, \infty), \\ (T_k x_k)(a_k) & t \in I \cap (-\infty, a_k]. \end{cases} \quad (426)$$

Zeigen Sie, dass  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $C^0(I; \mathbb{R}^n)$  liegt und punktweise gegen die Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  des AWP's

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (427)$$

konvergiert.

**SINN DER ÜBUNG:** Diese Übung zeigt, dass auch im Fall von unbeschränkten Intervallen eine Picard-Iteration definiert werden kann, die gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Allerdings verlieren wir dann Informationen über die Konvergenzgeschwindigkeit. Genauer können wir nur mit punktweise Konvergenz rechnen und nicht wie im Fall von beschränkten Intervallen mit gleichmäßiger Konvergenz und zugehörigen Konvergenzratenresultaten.

**Übung 83. PICARD-ITERATION FÜR LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.** Es sei für

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & (t \in \mathbb{R}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (428)$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf  $\mathbb{R}$  hat.
- (b) Beweisen Sie, dass die Picard-Iterierten mit Startwert  $x_0 := 0 \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$  gegeben sind durch

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j y_0 \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (429)$$

- (c) Zeigen Sie, dass für alle  $(a, b) \subset \subset \mathbb{R}$  jede Komponente der matrixwertigen Folge  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^0(I; \mathbb{R}^{n \times n})$  gegeben durch

$$M_k(t) := \sum_{j=0}^k \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j \quad (430)$$

gleichmäßig auf  $(a, b)$  konvergent ist.

- (d) Bezeichnen Sie für  $t \in \mathbb{R}$

$$M(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j. \quad (431)$$

Zeigen Sie, dass  $M$  eine Fundamentalmatrix für die DGL  $y'(t) = Ay(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist.

HINWEIS. Vergessen Sie in Teilaufgabe (d) nicht, die Invertierbarkeit von  $M(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  zu beweisen.

SINN DER ÜBUNG: Zwar haben wir in der Vorlesung für alle denkbaren Matrizen  $A$  eine Fundamentalmatrix bestimmt, aber eine kompakte Formel dafür hatten wir nie. Diese reichen wir jetzt mit der Theorie der Picard-Iteration nach: (431) ist eine kompakte Darstellung einer Fundamentalmatrix, zumindest für Systeme mit konstanten Koeffizienten. Analog zur Exponentialreihe schreibt man oft

$$e^{(t-t_0)A} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j. \quad (432)$$

und nennt diese Reihe die *Matrixexponentialfunktion*.

Ein nützliches Hilfsmittel, um festzustellen, ob eine Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitz-Bedingung auf  $I$  erfüllt, ist die Ableitung bezüglich der zweiten Komponente auf Beschränktheit hin zu überprüfen.

**Proposition 84. DIFFERENZIERBARKEIT UND LIPSCHITZBEDINGUNG.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  so, dass für alle  $t \in I$  die Abbildung  $f_t : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für alle  $z \in G$  definiert durch

$$f_t(z) := f(t, z)$$

auf  $G$  differenzierbar ist. Ferner gelte, dass  $F := ((t, z)^\top \mapsto D_z f_t(z)) \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^{n \times n})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\sup_{(t,z)^\top \in I \times G} \|F(t, z)\|_{2 \times 2} \leq L < \infty$ .
- (ii)  $f : I \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist bezüglich der zweiten Komponente gleichmäßig lipschitzstetig mit Konstante  $L > 0$ , d.h. für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I \times G$  gilt

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

In Kurznotation bezeichnet man für festes  $t \in I$  die Funktion  $f_t$  auch oft mit  $f(t, \cdot) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Das  $(\cdot)$  stellt man sich dann als *Platzhalter* vor, in den etwas eingesetzt werden kann. Man fordert also hier, dass für alle  $t \in I$  die Funktion  $f(t, \cdot) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $G$  differenzierbar sein soll und die Abbildung  $(t, z) \mapsto D_z f(t, z)$  stetig auf  $I \times G$  ist.

**Beweis.**

Zu (i)  $\Rightarrow$  (ii). Seien  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I \times G$  beliebig aber fest. Definiere die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$  durch

$$g(\lambda) := f(t, z_2 + \lambda(z_1 - z_2)). \quad (433)$$

Man beachte, dass wegen der Konvexität von  $G$  gilt, dass  $z_2 + \lambda(z_1 - z_2) \in G$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ , sodass  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tatsächlich wohldefiniert ist. Dann gilt:

- Es ist  $g \in C^1([0, 1])$  mit  $g'(\lambda) = F(t, z_2 + \lambda(z_1 - z_2))(z_1 - z_2)$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .
- Es ist  $g(1) = f(t, z_1)$  und  $g(0) = f(t, z_2)$ .

Daher erhält mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der Kettenregel im Mehrdimensionalen und (i), dass

$$\begin{aligned} |f(t, z_1) - f(t, z_2)| &= |g(1) - g(0)| = \left| \int_0^1 g'(\lambda) \, d\lambda \right| \\ &= \left| \int_0^1 F(t, z_2 + \lambda(z_1 - z_2))(z_1 - z_2) \, d\lambda \right| \\ &\leq \int_0^1 |F(t, z_2 + \lambda(z_1 - z_2))| |z_1 - z_2| \, d\lambda \\ &\leq L |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Da  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I \times G$  beliebig waren, folgt damit (ii).



Zu (ii)  $\Rightarrow$  (i). Sei  $(t, z_0)^\top \in I \times G$  beliebig aber fest. Dann gilt nach (ii) für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $z_0 + h \in G$ , dass

$$|f(t, z_0 + h) - f(t, z_0)| \leq L|z_0 + h - z_0| = L|h|.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\left| \frac{f(t, z_0 + h) - f(t, z_0)}{|h|} - F(t, z_0) \frac{h}{|h|} \right| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Wir folgern schließlich, dass

$$|F(t, z_0)| = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ z_0 + h \in G}} \left| \frac{f(t, z_0 + h) - f(t, z_0)}{|h|} \right| \leq L.$$

Da  $(t, z_0)^\top \in I \times G$  beliebig war, folgt damit (i).

Viele Differentialgleichungen sind nicht explizit zeitabhängig, d.h.  $y'(t) = f(y(t))$  für ein  $f \in C^0(G)$ . Solche Differentialgleichungen nennt man autonom. Der obige Satz zeigt, dass in dem Fall  $f \in C^1(G)$ , wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex ist, die Beschränktheit der Ableitung ein äquivalentes Kriterium für Lipschitzstetigkeit ist.

Schließlich erinnern wir uns an das motivierende Beispiel des gesamten Kapitels, dem Räuber–Beute–Modell welches zu gegebenen Parametern  $x_s, y_s, b, c > 0$  und Anfangspopulationen  $x_0, y_0 \geq 0$  nach Populationsentwicklungen  $x \in C^1(I; \mathbb{R})$  und  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$  sucht, sodass

$$\begin{aligned} x'(t) &= b(y_s - y(t))x(t) \quad (t \in I), \\ y'(t) &= c(x(t) - x_s)y(t) \quad (t \in I), \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{434}$$

Die Strukturfunktion des Räuber–Beute–Modells  $f \in C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  ist für alle  $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} b(y_s - y)x \\ c(x - x_s)y \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  und es gilt für alle  $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ , dass

$$Df(x, y) := \begin{pmatrix} b(y_s - y) & -bx \\ cy & c(x - x_s) \end{pmatrix}.$$

Nach Proposition 84 erfüllt  $f \in C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  eine globale Lipschitz–Bedingung auf  $I$  genau dann, wenn  $L := \sup_{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2} |Df(x, y)| < \infty$ . Allerdings gilt

$$|Df(x, y)|^2 \geq \min\{b, c\} |(x, y)^\top|^2 \rightarrow \infty \quad (|(x, y)^\top| \rightarrow \infty).$$

Infolgedessen ist der globale Satz von Picard–Lindelöf (Satz 81) nicht auf das Räuber–Beute–Modell anwendbar.

## 2.2 Lokaler Satz von Picard–Lindelöf

Für viele Anfangswertprobleme, wie beispielsweise das Räuber–Beute–Modell (434), ist die globale Lipschitz–Bedingung nicht erfüllt und damit der globale Satz von Picard–Lindelöf (siehe Satz 81) nicht anwendbar. Allerdings sehen wir im Fall des Räuber–Beute–Modells auch, dass häufig zumindest  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  mit  $f_t \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$  für alle  $t \in I$  und  $F := ((t, z)^\top \mapsto D_z f_t(x)) \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^{n \times n})$ , d.h. die Voraussetzungen von Proposition 84, erfüllt ist. Daher existiert für alle  $(t_0, y_0)^\top \in I \times G$  Konstanten  $\varepsilon, r, L > 0$ , die alle von  $(t_0, y_0)^\top \in I \times G$  abhängen können, sodass  $I_\varepsilon(t_0) := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset I$ ,  $B_r^n(y_0) \subset G$  und

$$L := \sup_{(t,y)^\top \in I_\varepsilon(t_0) \times B_r^n(y_0)} |F(t, y)| < \infty. \quad (435)$$

Aus (435) folgt zusammen mit Proposition 84 wiederum, dass

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2| \quad (436)$$

für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I_\varepsilon(t_0) \times B_r^n(y_0)$ , d.h. die Strukturfunktion erfüllt zumindest eine lokale Lipschitz–Bedingung.

**Definition 85.** **LOKALE LIPSCHITZ–BEDINGUNG.** Eine Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfüllt eine *lokale Lipschitz–Bedingung*, falls es zu jedem  $(t_0, y_0) \in I \times G$  Konstanten  $\varepsilon, r, L > 0$  existieren, sodass  $I_\varepsilon(t_0) \subset I$ ,  $B_r^n(y_0) \subset G$  und

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|. \quad (437)$$

für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I_\varepsilon(t_0) \times B_r^n(y_0)$ .

Die lokale Lipschitz–Bedingung erlaubt es uns zumindest die Kurzzeitexistenz von Lösungen zu beweisen, d.h. die Existenz auf einem Kurzzeitintervall  $I_\delta(t_0) \subset I$ , wobei  $\delta < \varepsilon$ . Bevor wir allerdings den lokalen Satz von Picard–Lindelöf beweisen, zeigen wir zunächst eine Variante, die es uns erlaubt die Intervallgrenze  $\delta > 0$  explizit anzugeben, falls wir zusätzliche Informationen haben.

### 2.2.1 Lokaler Satz von Picard–Lindelöf

#### Lokaler Satz von Picard–Lindelöf mit expliziten Intervallgrenzen

Der folgende Satz wird auch häufig als der lokale Satz von Picard–Lindelöf bezeichnet. Sein Vorteil gegenüber der Variante, die wir im darauffolgenden Abschnitt zeigen, ist, dass wir das Intervall, auf dem die Lösung mindestens existiert, explizit angeben können.

**Satz 86.** **VON PICARD–LINDELÖF, LOKALE VERSION (MIT EXPLIZITEN GRENZEN).** Die Strukturfunktion  $f \in C^0(\overline{I_\varepsilon(t_0)} \times \overline{B_r^n(y_0)}; \mathbb{R}^n)$ , wobei  $\varepsilon, r > 0$ , erfülle eine gleichmäßige Lipschitz–Bedingung mit Konstante  $L > 0$  bezüglich des zweiten Arguments, d.h.

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|.$$

für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in I_\varepsilon(t_0) \times B_r^n(y_0)$ . Wir setzen  $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{r}{2K}\}$ , wobei  $K :=$

$\sup_{(t,y)^\top \in \overline{I_\varepsilon(t_0)} \times \overline{B_r^n(y_0)}} |f(t,y)| < \infty$ . Dann existiert genau ein  $y \in C^1(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I_\delta(t_0)) , \\ y(t_0) = y_0 . \end{cases} \quad (438)$$

### Beweis.

— *Beweisidee:* Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72) anwenden auf  $T_\varepsilon : C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$(T_\varepsilon y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

für alle  $y \in C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$  und  $t \in I_\varepsilon(t_0)$ , an.

— *Problem 1:*  $T_\varepsilon : C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$  ist nicht wohldefiniert, denn für  $y \in C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$  gilt im Allgemeinen nicht, dass

$$y(t) \in \overline{B_r^n(y_0)} \quad \text{für alle } t \in I_\varepsilon(t_0) ,$$

d.h.  $f(t, y(t)) \in \mathbb{R}^n$  ist nicht wohldefiniert.

— *Lösung zu Problem 1:* Wir betrachten den eingeschränkten Fixpunktoperator  $T_\varepsilon : M_\varepsilon \subseteq C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$ , wobei

$$M_\varepsilon := \left\{ y \in C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n) \mid y(t) \in \overline{B_r^n(y_0)} \text{ für alle } t \in I_\varepsilon(t_0) \right\} .$$

— *Problem 2:*  $T_\varepsilon : M_\varepsilon \subseteq C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(I_\varepsilon(t_0), \mathbb{R}^n)$  ist keine Selbstabbildung, d.h.  $T_\varepsilon(M_\varepsilon) \not\subseteq M_\varepsilon$ , denn für alle  $y \in M_\varepsilon$  und  $t \in I_\varepsilon(t_0)$  gilt, dass

$$|(T_\varepsilon y)(t) - y_0| \leq \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} |f(s, y(s))| \, ds \leq 2K\varepsilon \not\leq r .$$

— *Lösung zu Problem 2:* Für  $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{r}{2K}\}$ ,  $y \in M_\delta$  und  $t \in I_\delta(t_0)$  gilt, dass

$$|(T_\delta y)(t) - y_0| \leq 2K\delta \leq r ,$$

d.h.  $T : M_\delta \subseteq C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n) \rightarrow M_\delta$  ist wohldefiniert.

— *Eigentlicher Beweis:*

- $(C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n), d_L)$  ist ein vollständiger metrischer Raum, wobei  $d_L : C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $y, \tilde{y} \in C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$  durch

$$d_L(y, \tilde{y}) := \sup_{t \in I_\delta(t_0)} e^{-L|t-t_0|} |y(t) - \tilde{y}(t)|$$

definiert ist.

- $M_\delta$  ist abgeschlossen in  $(C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n), d_L)$ , denn ist  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M_\delta$  eine Folge, die  $d_L(y_k, y) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für ein  $y \in C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$  erfüllt, dann folgt  $y_k(t) \rightarrow y(t)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für alle  $t \in I_\delta(t_0)$ , sodass wegen der Abgeschlossenheit von  $\overline{B_r^n(y_0)}$  gilt, dass

$$y(t) \in \overline{B_r^n(y_0)} \quad \text{für alle } t \in I_\varepsilon(t_0).$$

- $T_\delta : M_\delta \subseteq C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n) \rightarrow M_\delta$  ist bezüglich  $d_L$   $k$ -kontraktiv mit  $k := (1 - e^{-2L\delta}) \in (0, 1)$ , denn für alle  $y, \tilde{y} \in M_\delta$  und  $t \in I_\delta(t_0)$  gilt

$$\begin{aligned} e^{-L|t-t_0|} |(T_\delta y)(t) - (T_\delta \tilde{y})(t)| &\leq L e^{-L|t-t_0|} \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} |y(s) - \tilde{y}(s)| \, ds \\ &\leq (1 - e^{-2L\delta}) d_L(y, \tilde{y}), \end{aligned}$$

d.h. für alle  $y, \tilde{y} \in M_\delta$  gilt, dass

$$d_L(Ty, T\tilde{y}) \leq (1 - e^{-2L\delta}) d_L(y, \tilde{y}).$$

Der Banachsche Fixpunktsatz (siehe Satz 65, p. 72), liefert nun einen eindeutigen Fixpunkt  $y \in C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$  von  $T : M_\delta \subseteq C_b^0(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n) \rightarrow M_\delta$ . Analog zu Proposition 69 (p. 77) ist dann  $y \in C^1(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$  eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

## Lokaler Satz von Picard–Lindelöf ohne expliziten Intervallgrenzen

Fordert man nur eine lokale Lipschitz–Bedingung, dann lässt sich ein ähnliches Resultat zu Satz 86 beweisen. Allerdings verliert man dann die expliziten Intervallgrenzen.

**Satz 87. VON PICARD–LINDELÖF, LOKALE VERSION (OHNE EXPLIZITEN GRENZEN).** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz–Bedingung auf  $I$ . Weiter seien  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Dann gibt existieren ein  $\delta > 0$  und ein  $y \in C^1(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I_\delta(t_0)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (439)$$

**Beweis.** Da  $f$  eine lokale Lipschitz–Bedingung auf  $I$  erfüllt, existieren Konstanten  $\varepsilon, r, L > 0$ , sodass  $\overline{I_\varepsilon(y_0)} \subset I$ ,  $\overline{B_r^n(y_0)} \subset G$  und

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \text{für alle } (t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in \overline{I_\varepsilon(t_0)} \times \overline{B_r^n(y_0)}.$$

Für  $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{r}{2K}\}$ , wobei  $K := \sup_{(t,z)^\top \in \overline{I_\varepsilon(t_0)} \times \overline{B_r^n(y_0)}} |f(t, z)|$ , liefert der lokale Satz von Picard–Lindelöf mit expliziten Intervallgrenzen (siehe Satz 86, p. 90) die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Maximalität im lokalen Satz von Picard–Lindelöf

Wir können mittlerweile die lokale Existenz einer Lösung beweisen. Allerdings können wir noch keinerlei Aussage darüber treffen, dass auch eine maximale Lösung existiert. Maximalität ist hier so zu verstehen, dass sich die gefundene Lösung nicht weiter fortsetzen lässt und jede gefundene lokale Lösung des Anfangswertproblems Einschränkung der maximalen Lösung ist.

**Definition 88.** NICHT-FORTSETZBARE LÖSUNG UND MAXIMALE LÖSUNG. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein offenes Gebiet,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$  und  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ .

- (i) Eine Lösung  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; G)$ ,  $\hat{I} \subseteq I$ , eines Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = f(t, \hat{y}(t)) & (t \in \hat{I}), \\ \hat{y}(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (440)$$

heißt *nicht-fortsetzbar*, falls es kein offenes Intervall  $J \supsetneq \hat{I}$  gibt, sodass ein  $z \in C^1(J; G)$  existiert mit  $z|_{\hat{I}} = \hat{y}$  und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J), \\ z(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (441)$$

- (ii) Eine Lösung  $y_{\max} \in C^1(I_{\max}; G)$ ,  $I_{\max} \subseteq I$ , eines Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'_{\max}(t) = f(t, y_{\max}(t)) & (t \in I_{\max}), \\ y_{\max}(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (442)$$

heißt *maximal*, falls für jedes offene Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$ , sodass eine Lösung  $z \in C^1(J; G)$  von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J), \\ z(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (443)$$

existiert, bereits gilt, dass  $J \subseteq I_{\max}$  und  $y_{\max}|_J = z$ .

Die folgende Übungsaufgabe verdeutlicht die Beziehung zwischen einer nicht-fortsetzbaren Lösung und einer maximalen Lösung. Es wird deutlich, dass Maximalität die stärkere Eigenschaft ist und sich von Nichtfortsetzbarkeit vor allem durch die zusätzliche Eindeutigkeitseigenschaft unterscheidet.

**Übung 88.** NICHT-FORTSETZBARE LÖSUNG VS. MAXIMALE LÖSUNG. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein offenes Gebiet,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in G$  und  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Jede maximale Lösung  $y_{\max} \in C^1(I_{\max}; G)$ ,  $I_{\max} \subseteq I$ , des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'_{\max}(t) = f(t, y_{\max}(t)) & (t \in I_{\max}), \\ y_{\max}(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (444)$$

ist nicht-fortsetzbar.

- (ii) Eine nicht-fortsetzbare Lösung  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; G)$ ,  $\hat{I} \subseteq I$ , des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = f(t, \hat{y}(t)) & (t \in \hat{I}), \\ \hat{y}(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (445)$$

muss nicht maximal sein.

TIPP: Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Denken Sie daran, dass sich die Definitionen der beiden Begriffe vor allem durch die in der Maximalität geforderten Eindeigkeitseigenschaft unterscheiden.

Die Übung 89 zeigt, dass falls wir die Existenz einer maximalen Lösung beweisen wollen, zunächst die Existenz einer nicht-fortsetzbaren Lösungen zeigen müssen.

### 1. Schritt: Existenz einer nicht-fortsetzbaren Lösung

Wir werden nun ein Verfahren besprechen, das es erlaubt, die gefundenen Kurzzeitleösungen zu einer nicht-fortsetzbaren Lösung fortzusetzen.

**Proposition 90.** EXISTENZ EINER NICHT-FORTSETZBAREN LÖSUNG. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein offenes Gebiet,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $I$ . Dann gibt es ein offenes Intervall  $\hat{I} \subseteq I$  mit  $t_0 \in \hat{I}$  und eine nicht-fortsetzbare Lösung  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; G)$ .

### Beweis.

*Beweisidee:* Wir gehen ähnlich wie im Beweis des globalen Satzes von Picard–Lindelöf auf allgemeinen Intervallen (vgl. Satz 81, p. 84) mit einem Ausschöpfungsargument vor, d.h. wir schöpfen das “maximale” Intervall  $\hat{I}$  monoton durch Intervalle  $I_j \subseteq I_{j+1} \subseteq \hat{I}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , aus, auf denen eindeutige Kurzzeitleösungen  $y_j \in C^1(I_j; \mathbb{R}^n)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , existieren. Dabei treten im Vergleich zum Beweis des globalen Satzes von Picard–Lindelöf auf allgemeinen Intervallen (vgl. Satz 81, p. 84) die folgenden Schwierigkeiten auf:

*Schwierigkeit 1:* Das Intervall  $\hat{I}$  ist im Vorhinein nicht bekannt, d.h. wir müssen  $\hat{I}$  zunächst konstruieren.

*Schwierigkeit 2:* Falls  $\hat{I}$  konstruiert ist, können wir nicht einfach die Ausschöpfung in

Beobachtung 80 (p. 84) nutzen, da wir nicht sichern können, dass für alle  $j \in \mathbb{N}$  auf ganz  $I_j$  eine Lösung  $y_j \in C^1(I_j; \mathbb{R}^n)$  existiert (denn wir haben ja nur Kurzzeitexistenz).

Genauer gehen wir in den folgende Schritten vor:

1. Lokale Existenz von Lösungen.
2. Ausschöpfungsargument, d.h.
  - 2.1. Konstruktion von  $\hat{I}$  und Ausschöpfung  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .
  - 2.2. Zusammenkleben von Ausschöpfungslösungen.
  - 2.3. Nichtfortsetzbarkeit.

*1. Lokale Existenz von Lösungen:* Für jedes  $J \subseteq I$  bezeichne  $(AWP)_J$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in J), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (AWP)_J$$

Nach dem lokalen Satz von Picard–Lindelöf (vgl. Satz 87, 92) existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $(AWP)_{I_\delta(t_0)}$  eine Lösung  $y_{kurz} \in C^1(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$  hat.

*2. Ausschöpfungsargument:*

*2.1 Konstruktion von  $\hat{I}$  und Ausschöpfung  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ :*

*2.1.1 Konstruktion von  $\hat{I}$ :* Setze  $\hat{I} := (t_-, t_+)$ , wobei

$$t_+ := \sup\{\bar{t} \geq t_0 \mid (AWP)_{(t_0-\delta, \bar{t})} \text{ hat Lösung } \bar{y} \text{ mit } \bar{y}|_{I_\delta(t_0)} = y_{kurz}\}, \quad (446)$$

$$t_- := \inf\{\underline{t} \leq t_0 \mid (AWP)_{(\underline{t}, t_0+\delta)} \text{ hat Lösung } \underline{y} \text{ mit } \underline{y}|_{I_\delta(t_0)} = y_{kurz}\}. \quad (447)$$

Wegen  $(AWP)_{I_\delta(t_0)}$  gilt, dass  $t_+ \geq t_0 + \delta$  und  $t_- \leq t_0 - \delta$ .

*2.1.2 Konstruktion von Ausschöpfung  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ :* Setze  $I_j := (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , wobei  $(\bar{t}_j)_{j \in \mathbb{N}}, (\underline{t}_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq I$ , sodass

$$\begin{aligned} \bar{t}_j &\uparrow t_+ & (j \rightarrow \infty) & \text{ (monoton wachsend) }, \\ \underline{t}_j &\downarrow t_- & (j \rightarrow \infty) & \text{ (monoton fallend) }, \end{aligned}$$

und

für alle  $j \in \mathbb{N}$  hat  $(AWP)_{(t_0-\delta, \bar{t}_j)}$  eine Lösung  $\bar{y}_j \in C^1((t_0 - \delta, \bar{t}_j); \mathbb{R}^n)$ ,  
 für alle  $j \in \mathbb{N}$  hat  $(AWP)_{(\underline{t}_j, t_0+\delta)}$  eine Lösung  $\underline{y}_j \in C^1((\underline{t}_j, t_0 + \delta); \mathbb{R}^n)$ ,  
 für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt  $\bar{y}_j|_{I_\delta(t_0)} = \underline{y}_j|_{I_\delta(t_0)} = y_{kurz}$ .

Für alle  $j \in \mathbb{N}$  definiere dann  $y_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $t \in (\underline{t}_j, \bar{t}_j)$  durch

$$y_j(t) := \begin{cases} \underline{y}_j(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}_j(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases}. \quad (448)$$

Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ , dass

$$y_j \in C^1(I_j; \mathbb{R}^n),$$

denn  $\bar{y}_j \in C^1((t_0 - \delta, \bar{t}_j); \mathbb{R}^n)$ ,  $\underline{y}_j \in C^1((\underline{t}_j, t_0 + \delta); \mathbb{R}^n)$  und  $\bar{y}_j|_{I_\delta(t_0)} = \underline{y}_j|_{I_\delta(t_0)} = y_{kurz} \in C^1(I_\delta(t_0); \mathbb{R}^n)$ . Weiter gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ , dass  $y_j \in C^1(I_j; \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von  $(AWP)_{I_j}$ , denn

$$y'_j(t) = \begin{cases} \underline{y}'_j(t) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ \bar{y}'_j(t) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} = \begin{cases} f(t, \underline{y}_j(t)) & t \in (\underline{t}_j, t_0] \\ f(t, \bar{y}_j(t)) & t \in (t_0, \bar{t}_j) \end{cases} \stackrel{(448)}{=} f(t, y_j(t)), \quad (AWP)_{I_j}$$

$$y_j(t_0) = y_{kurz}(t_0) = y_0.$$

**2.2 Zusammenkleben von Ausschöpfungslösungen:** Definiere  $\hat{y}: \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $t \in \hat{I}$  durch

$$\hat{y}(t) := y_j(t) \quad \text{falls } t \in I_j \text{ für ein } j \in \mathbb{N},$$

**2.2.1 Wohldefiniertheit von  $\hat{y}$ :** Die Wohldefiniertheit  $\hat{y}$  folgt aus der *Zwischenbehauptung*:

$$\text{Für alle } k, j \in \mathbb{N}, \text{ sodass } k > j \text{ gilt } y_k|_{I_j} = y_j.$$

*Beweis der Zwischenbehauptung:* Wir definieren für alle  $k, j \in \mathbb{N}$  mit  $k > j$

$$A_{k,j} := \{t \in I_j \mid y_k(t) = y_j(t)\}. \quad (449)$$

Wir zeigen, dass  $A_{k,j}$  und  $I_j \setminus A_{k,j}$  offen sind. Da  $I_j = A_{k,j} \cup (I_j \setminus A_{k,j})$  zusammenhängend ist, muss dann entweder  $A_{k,j} = I_j$  oder  $A_{k,j} = \emptyset$  gelten. Der Fall  $A_{k,j} = \emptyset$  ist ausgeschlossen, denn  $y_k|_{I_\delta(t_0)} = y_j|_{I_\delta(t_0)} = y_{kurz}$  und somit (siehe (449)) gilt  $I_\delta(t_0) \subseteq A_{k,j}$ .

*Schritt 1.*  $I_j \setminus A_{k,j}$  ist offen, denn

$$I_j \setminus A_{k,j} \stackrel{(449)}{=} \{t \in I_j \mid |y_k(t) - y_j(t)| > 0\} = h^{-1}((0, \infty)), \quad (450)$$

wobei  $h \in C^0(I_j)$  für alle  $t \in I_j$  durch  $h(t) := |y_k(t) - y_j(t)|$  definiert ist. Daher ist  $I_j \setminus A_{k,j}$  als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen.

*Schritt 2.*  $A_{k,j}$  ist offen. Es sei  $\tau \in A_{k,j}$ , d.h.  $y_k(\tau) = y_j(\tau)$ . Wir zeigen, dass ein  $\eta > 0$  existiert, sodass  $I_\eta(\tau) \subseteq A_{k,j}$ . Hierzu definieren wir  $y_* := y_k(\tau) = y_j(\tau)$ . Da  $f$  die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, gibt es Konstanten  $\varepsilon, r, L > 0$ , sodass  $\overline{I_\varepsilon(\tau)} \subset I_j$ ,  $\overline{B_r^n(y_*)} \subset G$  und

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad (451)$$



für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in \overline{I_\varepsilon(\tau)} \times \overline{B_r^n(y_*)}$ . Für  $\tilde{\delta} := \min\{\varepsilon, \frac{r}{2K}\} > 0$ , wobei

$$L = \max_{(t,z)^\top \in \overline{I_\varepsilon(\tau)} \times \overline{B_r^n(y_*)}} |f(t, z)|,$$

existiert daher ein eindeutiges  $y_\tau \in C^1(I_{\tilde{\delta}}(\tau); \mathbb{R}^n)$  mit  $y_\tau(t) \in \overline{B_r^n(y_*)}$  für alle  $t \in I_{\tilde{\delta}}(\tau)$ , sodass

$$\begin{cases} y'_\tau(t) = f(t, y_\tau(t)) & (t \in I_{\tilde{\delta}}(\tau)), \\ y_\tau(\tau) = y_* . \end{cases} \quad (452)$$

Wegen der Stetigkeit von  $y_j$  und  $y_k$  (und wegen  $y_j(\tau) = y_k(\tau) = y_*$ ) existiert ein  $\eta \in (0, \tilde{\delta})$  so, dass  $y_j(t), y_k(t) \in \overline{B_r^n(y_*)}$  für alle  $t \in I_\eta(\tau)$ . Daraus folgert man, dass  $y_k|_{I_\eta(\tau)}, y_j|_{I_\eta(\tau)} \in C^1(I_\eta(\tau); \mathbb{R}^n)$  beides Lösungen sind von

$$\begin{cases} y'_\tau(t) = f(t, y_\tau(t)) & (t \in I_\eta(\tau)), \\ y_\tau(\tau) = y_* . \end{cases} \quad (453)$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit folgert man nun, dass  $y_k|_{I_\eta(\tau)} = y_j|_{I_\eta(\tau)}$ , d.h.  $I_\eta(\tau) \subseteq A_{k,j}$ . Die Offenheit von  $A_{k,j}$  ist damit gezeigt.

Wie wir oben schon erklärt haben, folgt aus Schritt 1 und Schritt 2 auch die Zwischenbehauptung und damit die Wohldefiniertheit von  $\hat{y}$ .

2.2.2  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$  löst  $(AWP)_{\hat{I}}$ : Für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $\hat{y}|_{I_j} = y_j \in C^1(I_j; \mathbb{R}^n)$  mit

$$\begin{cases} (\hat{y}|_{I_j})'(t) &= y'_j(t) = f(t, y_j(t)) = f(t, (\hat{y}|_{I_j})(t)) & (t \in I_j), \\ \hat{y}(t_0) &= y_0 . \end{cases}$$

Wegen  $\hat{I} = \bigcup_{j=1}^\infty I_j$  folgt dann sogar, dass  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; \mathbb{R}^n)$  mit

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) &= f(t, \hat{y}(t)) & (t \in \hat{I}), \\ \hat{y}(t_0) &= y_0 . \end{cases} \quad (454)$$

2.3 *Nichtfortsetzbarkeit*: Gäbe es nun ein  $J \supsetneq \hat{I}$  und  $z \in C^1(J; G)$ , das  $(AWP)_J$  löst und  $z|_{\hat{I}} = \hat{y}$  erfüllt, so wäre wegen der Definition von  $t_+$  (vgl. (446)) und  $t_-$  (vgl. (447))

$$t_+ \geq \sup(J) \quad \text{und} \quad t_- \leq \inf(J) .$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $z|_{I_{\tilde{\delta}}(t_0)} = \hat{y}|_{I_{\tilde{\delta}}(t_0)} = y_{kurz}$ . Wir erhalten schließlich, dass

$$\hat{I} \supsetneq J, \quad (455)$$

ein Widerspruch zu  $J \supsetneq \hat{I}$ . Es folgt, dass  $\hat{y}$  nicht fortsetzbar ist.

## 2. Schritt: Existenz einer maximalen Lösung

Eine nicht-fortsetzbare Lösung ist konstruiert. Nun muss nur noch deren Maximalität geklärt werden. Hierbei ist zu klären, dass jede weitere Lösung eine Einschränkung der nicht-fortsetzbaren Lösung aus der vorigen Proposition sein muss.

**Proposition 91.** MAXIMALITÄT EINER NICHT-FORTSETZBAREN LÖSUNG. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein offenes Gebiet,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $I$ . Es sei  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; G)$  eine nicht-fortsetzbare Lösung von (440). Dann ist  $\hat{y} \in C^1(\hat{I}; G)$  eine maximale Lösung.

**Beweis.** Sei  $J \subseteq I$  ein offenes Intervall mit  $t_0 \in J$ , sodass es eine Lösung  $z \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$  von

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J), \\ z(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (456)$$

existiert. Zu zeigen ist, dass  $J \subseteq \hat{I}$  und  $\hat{y}|_J = z$ .

1. *Schritt:*  $(\hat{y}|_O = z|_O)$ , wobei  $O := J \cap \hat{I}$ . Es ist  $O := J \cap \hat{I}$  ein offenes Intervall und  $t_0 \in O$ . Definiere nun

$$A := \{t \in O \mid z(t) = \hat{y}(t)\}. \quad (457)$$

*Zwischenbehauptung.*  $A = O$ .

*Beweis der Zwischenbehauptung.* Wir zeigen, dass  $A$  und  $O \setminus A$  offen sind.

*Schritt 1:* ( $O \setminus A$  offen). Es gilt

$$O \setminus A = \{t \in O \mid z(t) \neq \hat{y}(t)\} = \{t \in O \mid |z(t) - \hat{y}(t)| > 0\} = h^{-1}((0, \infty)), \quad (458)$$

wobei  $h \in C^0(O)$  für alle  $t \in O$  durch  $h(t) := |z(t) - \hat{y}(t)|$  definiert ist. Daher ist  $O \setminus A$  als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen.

*Schritt 2:* ( $A$  offen). Sei  $\tau \in A$ , d.h.  $z(\tau) = \hat{y}(\tau)$ . Wir werden zeigen, dass es ein  $\eta > 0$  gibt mit  $I_\eta(\tau) \subset A$ . Dazu definieren wir  $y_* := z(\tau) = \hat{y}(\tau)$ .

Da  $f$  die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, gibt es Konstanten  $\varepsilon, r, L > 0$  so, dass  $\overline{I_\varepsilon(\tau)} \subseteq I_j$ ,  $\overline{B_r^n(y_*)} \subseteq G$  und

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad (459)$$

für alle  $(t, z_1)^\top, (t, z_2)^\top \in \overline{I_\varepsilon(\tau)} \times \overline{B_r^n(y_*)}$ . Für  $\tilde{\delta} := \min\{\varepsilon, \frac{r}{2K}\} > 0$ , wobei

$$K = \max_{(t, z)^\top \in \overline{I_\varepsilon(\tau)} \times \overline{B_r^n(y_*)}} |f(t, z)|,$$

existiert daher ein eindeutiges  $y_\tau \in C^1(I_{\tilde{\delta}}(\tau); \mathbb{R}^n)$  mit  $y_\tau(t) \in \overline{B_r^n(y_*)}$  für alle  $t \in I_{\tilde{\delta}}(\tau)$ , sodass

$$\begin{cases} y'_\tau(t) = f(t, y_\tau(t)) & (t \in I_{\tilde{\delta}}(\tau)), \\ y_\tau(\tau) = y_*. \end{cases} \quad (460)$$

Wähle nun  $\eta \in (0, \tilde{\delta})$  so klein, dass  $\hat{y}(t), z(t) \in \overline{B_r^n(y_*)}$  für alle  $t \in I_\eta(\tau)$ . Daraus folgert man, dass  $\hat{y}|_{I_\eta(\tau)}, z|_{I_\eta(\tau)} \in C^1(I_\eta(\tau); \mathbb{R}^n)$  beides Lösungen von

$$\begin{cases} y'_\tau(t) = f(t, y_\tau(t)) & (t \in I_\eta(\tau)), \\ y_\tau(\tau) = y_*, \end{cases} \quad (461)$$

sind. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit folgert man nun, dass  $\hat{y}|_{I_\eta(\tau)} = z|_{I_\eta(\tau)}$ , d.h.  $I_\eta(\tau) \subseteq A$ . Die Offenheit von  $A$  ist gezeigt.

2. *Schritt:* ( $J \subseteq \hat{I}$ ) Nehmen wir an, dass  $J \not\subseteq \hat{I}$ , so wäre  $\hat{J} := J \cup \hat{I} \supsetneq \hat{I}$ . Weiter wäre  $\hat{J}$  auch ein offenes Intervall, da  $t_0 \in J$  und  $t_0 \in \hat{I}$ . Definiere nun  $\hat{z}: \hat{J} \rightarrow G$  durch

$$\hat{z}(t) := \begin{cases} \hat{y}(t) & t \in \hat{I} \\ z(t) & t \in J \end{cases}. \quad (462)$$

Die Funktion  $\hat{z}: \hat{J} \rightarrow G$  ist wohldefiniert, da  $\hat{y}|_O = z|_O$ . Außerdem gilt  $\hat{z} \in C^1(\hat{J}; \mathbb{R}^n)$  mit

$$\begin{cases} \hat{z}'(t) = f(t, \hat{z}(t)) & (t \in \hat{J}), \\ \hat{z}(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (463)$$

Damit wäre nach (462)  $\hat{z}$  aber eine Fortsetzung von  $\hat{y}$  auf  $\hat{J} \supsetneq \hat{I}$ . Eine solche Fortsetzung kann es aber nicht geben, weil  $\hat{y}$  die Eigenschaft aus Definition 88 (i) (p. 93) erfüllen muss. Wir erhalten einen Widerspruch und schließen  $\hat{J} = \hat{I}$ , also  $J \subseteq \hat{I}$ . Insbesondere gilt auch  $O = J \cap \hat{I} = J$  und damit  $\hat{y}|_J = z$ .

Final können den lokalen Satz von Picard–Lindelöf mit zusätzlicher Maximalitätsaussage beweisen.

**Satz 91.** SATZ VON PICARD–LINDELÖF, LOKALE VERSION MIT MAXIMALITÄT. Die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz–Bedingung. Dann existiert zu jedem  $(t_0, y_0) \in I \times G$  ein eindeutiges offenes Intervall  $I_{\max} = I_{\max}(t_0, y_0) \subseteq I$  mit  $t_0 \in I_{\max}$  und eine eindeutige Funktion  $y_{\max} \in C^1(I_{\max}; G)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (Eindeutige Lösbarkeit)  $y = y_{\max}$  löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I_{\max}), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (464)$$

- (Maximalität) Falls  $J \subseteq I$  ein offenes Intervall mit  $t_0 \in J$  ist, sodass das AWP

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J), \\ z(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (465)$$

eine Lösung  $z \in C^1(J; G)$  besitzt, dann gilt  $J \subseteq I_{\max}$  und  $y_{\max}|_J = z$ .

**Beweis.** 1. *Existenz einer maximalen Lösung.* Aus Proposition 90 (p. 94) folgt, dass es eine nicht-fortsetzbare Lösung gibt. Nach Proposition 91 (p. 98) erfüllt diese auch die Maximalitätsbedingung aus Satz 2.3.

2. *Eindeutigkeit der maximalen Lösung.* Angenommen es gäbe zwei maximale Lösungen  $y_{\max}^1 \in C^1(I_{\max}^1; \mathbb{R}^n)$  und  $y_{\max}^2 \in C^1(I_{\max}^2; \mathbb{R}^n)$ , die beide die Maximalitätsbedingung aus Satz 2.3 erfüllen. Verwenden wir die Maximalitätsbedingung von  $y_{\max}^1$  mit  $J = I_{\max}^2$  und  $z = y_{\max}^2$ , so erhalten wir, dass  $I_{\max}^2 \subseteq I_{\max}^1$  und  $y_{\max}^2(t) = y_{\max}^1(t)$  für alle  $t \in I_{\max}^2$ . Mit Vertauschung der Rollen folgt  $I_{\max}^1 \subseteq I_{\max}^2$  und  $y_{\max}^1(t) = y_{\max}^2(t)$  für alle  $t \in I_{\max}^1$ . Alles zusammen ergibt  $I_{\max}^1 = I_{\max}^2$  und  $y_{\max}^1 = y_{\max}^2$ .

Endlich haben wir den Hauptsatz dieser Vorlesung — den lokalen Satz von Picard–Lindelöf — bewiesen. Zum Abschluss bleibt hier noch die folgende Frage: Kann man die lokale Lipschitz-Bedingung auch noch abschwächen? Gibt es noch eindeutige Lösungen, falls nur gilt  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ ?

Was die Eindeutigkeit anbelangt, lautet die Antwort auf jeden Fall *nein*, denn das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (466)$$

hat nach Beispiel 4 (p. 4) unendlich viele globale Lösungen, gegeben durch

$$y_a(t) := \begin{cases} 0 & t \leq a \\ (t - a)^2 & t > a \end{cases} \quad \text{für ein } a \geq 0. \quad (467)$$

Die Existenz von (nicht-fortsetzbaren) Lösungen kann aber noch gewährleistet werden:

**Satz 92. SATZ VON PEANO.**

Es sei  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$ . Dann besitzt

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (468)$$

eine nicht-fortsetzbare Lösung  $y \in C^1(J; G)$  (für ein  $J \subset I$ ).

**Beweis.** Ohne Beweis.

Man kann also in der Tat fast jede DGL lösen, die man hinschreiben kann.

## 2.4 Globalität und stetige Abhängigkeit

Im vorherigen Abschnitt –genauer in Satz 2.3 (p. 99)– haben wir gezeigt, dass falls  $f$  lokal Lipschitz ist, so existiert zu jedem Anfangswertproblem eine *eindeutige maximale Lösung*. “Maximal” ist hierbei in folgendem Sinne gemeint: Jede weitere Lösung ist eine Einschränkung der maximalen Lösung auf ein Teilintervall. Dieser Satz ist mehr als zufriedenstellend. Wir finden zu jedem gegebenen Anfangswertproblem eine *bestmögliche* Lösung  $y_{\max} \in C^1(I_{\max}; G)$ . Jedoch gibt es noch ein Problem. Nehmen wir mal an, wir haben eine Lösung eines Anfangswertproblems gefunden. Wie können wir dann sicherstellen, ob die gefundene Lösung tatsächlich die maximale Lösung ist?

Mit anderen Worten fragen wir uns: Was muss schiefgehen, damit eine Lösung sich nicht weiter vergrößern lässt?

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass an einem festen Randpunkt des maximalen Existenzintervalles  $I_{\max} \subseteq I$  nur drei Phänomene auftreten können

- (i) (*Escape-Situation*)  $\text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \rightarrow 0$ , wenn  $\text{dist}(t, \mathbb{R} \setminus I_{\max}) \rightarrow 0$  (d.h. die Lösung erreicht den Rand des Definitionsbereiches  $G$ ).
- Falls  $G = \mathbb{R}^n$  so kann dieses Phänomen nicht auftreten.
- (ii) (*Blow-Up-Situation*)  $|y(t)| \rightarrow \infty$ , wenn  $\text{dist}(t, \mathbb{R} \setminus I_{\max}) \rightarrow 0$  (d.h. die Lösung explodiert).
- (iii) (*Rechts/Links-Globalität*)  $\partial I_{\max} \cap \partial I \neq \emptyset$  (d.h. mindestens ein Randpunkt von  $I_{\max}$  ist ein Randpunkt von  $I$ ).
- (iii.a) Falls  $\inf(I_{\max}) = \inf(I)$ , dann heißt  $y$  *linksglobale Lösung*.
- (iii.b) Falls  $\sup(I_{\max}) = \sup(I)$ , dann heißt  $y$  *rechtsglobale Lösung*.
- (iii.a) Falls  $I_{\max} = I$ , dann heißt  $y$  *globale Lösung*.

Dass nur diese drei Fälle auftreten können, wird in folgendem Satz formuliert.

**Satz 93. MAXIMALITÄTSKRITERIUM.** Sei  $I = (a, b)$ , wobei  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $I$  und sei  $y \in C^1(J; G)$ ,  $J = (t_-, t_+) \subset I$ , so, dass

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in J), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (469)$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $J = I_{\max}$  und  $y = y_{\max}$ .
- (ii) Es gilt  $t_+ = b$  oder

$$\liminf_{t \uparrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)|+1} \right\} = 0. \quad (470)$$

Ferner gilt  $t_- = a$  oder

$$\liminf_{t \downarrow t_-} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)|+1} \right\} = 0. \quad (471)$$

Hierbei verwenden wir für den Fall  $G = \mathbb{R}^n$  die Konvention  $\text{dist}(z, \emptyset) = \infty$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$ .

Wesentliches Hilfsmittel im Beweis des Maximalitätskriteriums (vgl. Satz 93, p. 101) ist das sogenannte *Escape-Lemma*. Letzteres zeigt, dass eine maximale Lösung jedes Kompaktum  $K \subset G$  verlassen muss.

**Lemma 94. ESCAPE-LEMMA.** Sei  $I = (a, b)$ ,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in G$ . Die Strukturfunktion  $f \in C^0(I \times G; \mathbb{R}^n)$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $U$  und  $y_{\max} \in C^1(I_{\max}; G)$ , wobei  $I_{\max} = (t_-, t_+)$  mit  $t_- < t_0 < t_+$ , die eindeutige maximale Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I_{\max}), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (472)$$

Sei  $K \subset G$  kompakt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Falls  $y_{\max}(t) \in K$  für alle  $t \in [t_0, t_+)$ , so gilt  $t_+ = b$ .
- (ii) Falls  $y_{\max}(t) \in K$  für alle  $t \in (t_-, t_0]$ , so gilt  $t_- = a$ .

#### Beweis.

Zu (i). Angenommen es gelte  $t_+ < b$ . Dann gilt  $\overline{I_{\max}^+} \times K \subset I \times G$ , wobei  $I_{\max}^+ := (t_0, t_+)$ , und schließlich  $f \in C^0(\overline{I_{\max}^+} \times K; \mathbb{R}^n)$ . Insbesondere ist  $\sup_{(t,z)^\top \in \overline{I_{\max}^+} \times K} |f(t, z)|$ . Wegen  $y_{\max}(t) \in K$  für alle  $t \in I_{\max}^+$  ist  $(s \mapsto f(s, y_{\max}(s))) : I_{\max}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  Riemann-integrierbar, d.h.

$$\left( t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, y_{\max}(s)) \, ds \right) \in C^0(\overline{I_{\max}^+}; \mathbb{R}^n).$$

Folglich gilt, dass  $y_{\max} \in C^0(\overline{I_{\max}^+}; \mathbb{R}^n)$ , denn der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert für alle  $t \in I_{\max}$ , dass

$$y_{\max}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{\max}(s)) \, ds,$$

und die rechte Seite kann stetig zu  $t = t_+$  fortgesetzt werden. Der lokale Satz von Picard–Lindelöf (vgl. Satz 87, p. 92) liefert weiter ein  $\delta > 0$  und  $y_+ \in C^1(I_\delta(t_+); \mathbb{R}^n)$ , sodass

$$\begin{cases} y'_+(t) = f(t, y_+(t)) & (t \in I_\delta(t_+)), \\ y_+(t_+) = y_{\max}(t_+). \end{cases} \quad (473)$$

Definiere nun  $J := I_{\max} \cup I_\delta(t_+)$ , d.h.  $J \supsetneq I_{\max}$ , und  $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $t \in J$  durch

$$z(t) := \begin{cases} y_{\max}(t) & \text{falls } t \in I_{\max} \\ y_+(t) & \text{falls } I_\delta(t_+) \setminus I_{\max} \end{cases}.$$

Dann gilt  $z \in C^0(J; \mathbb{R}^n)$ , denn  $y_{\max} \in C^0(I_{\max}; \mathbb{R}^n)$ ,  $y_+ \in C^0(I_\delta(t_+) \setminus I_{\max}; \mathbb{R}^n)$  und

$y(t_+) = y_+(t_+)$ , und für alle  $t \in J$  gilt, dass

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{cases} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{\max}(s)) \, ds & \text{falls } t \in I_{\max} \\ y_{\max}(t_+) + \int_{t_+}^t f(s, y_+(s)) \, ds & \text{falls } I_{\delta}(t_+) \setminus I_{\max} \end{cases} \\ &= \begin{cases} y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{\max}(s)) \, ds & \text{falls } t \in I_{\max} \\ y_0 + \int_{t_0}^{t_+} f(s, y_{\max}(s)) \, ds + \int_{t_+}^t f(s, y_+(s)) \, ds & \text{falls } I_{\delta}(t_+) \setminus I_{\max} \end{cases} \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $z \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$  mit

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in J), \\ z(t_+) = y_0. \end{cases} \quad (474)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $y_{\max}$ .

**Beweis.** (des Maximalitätskriteriums (vgl. Satz 93, p. 101))

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Angenommen (470) gilt nicht. Dann existieren  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $\tilde{t} \in I_{\max}$ ,  $\tilde{t} < t_+$ , sodass für alle  $t \in (\tilde{t}, t_+)$

$$\min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} \geq \varepsilon, \quad (475)$$

d.h. für alle  $t \in (\tilde{t}, t_+)$  gilt

$$\text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{|y(t)| + 1} \geq \varepsilon \quad \left[ \Leftrightarrow |y(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]. \quad (476)$$

Setze nun

$$K_{\varepsilon} := \overline{B_{\frac{1}{\varepsilon}-1}(0)} \cap \{z \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \varepsilon\}. \quad (477)$$

Dann ist wegen (476)  $K_{\varepsilon}$  kompakt und  $y(t) \in K_{\varepsilon}$  für alle  $t \in (\tilde{t}, t_+)$ .

$$K := y([t_0, \tilde{t}]) \cup K_{\varepsilon}. \quad (478)$$

Dann ist  $K$  kompakt, denn  $y([t_0, \tilde{t}])$  ist kompakt und  $y(t) \in K$  für alle  $t \in [t_0, t_+)$ . Aus dem Escape Lemma (vgl. Lemma 94, 102) folgt nun, dass  $t_+ = b$ . Wir haben damit also gezeigt, dass  $t_+ = b$  oder (470). Analog zeigen wir auch, dass  $t_- = a$  oder (471).

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Falls  $t_+ = b$  und  $t_- = a$ , so haben wir bereits eine größtmögliche Lösung, und somit ist klarerweise  $J = (a, b) = I_{\max}$  ein maximales Lösungsintervall. Falls

$$\liminf_{t \rightarrow t_-} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0 \quad (479)$$

so ist die Lösung  $y$  eine *nicht-fortsetzbare* Lösung, denn entweder ist sie unbeschränkt oder jede Fortsetzung müsste am Rand des Gebietes  $G$  beginnen. Beides ist nicht zulässig. Laut Lemma 91 (p. 98) ist nun aber jede nicht-fortsetzbare Lösung gleich die maximale Lösung.

Wir haben nun ein Kriterium kennengelernt, welches äquivalent zur Maximalität ist. Ferner kann es benutzt werden, um Globalität zu zeigen: Gilt für eine maximale Lösung

$$\liminf_{t \rightarrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} \neq 0, \quad (480)$$

so gilt  $t_+ = b$ , d.h. die Lösung existiert so lang wie nur möglich. Wir werden nun lernen, wie wir (480) in konkreten Anwendungen nachprüfen können, ohne die Lösung explizit zu kennen.

**Beispiel 95.** RECHTSGLOBALITÄT MIT HILFSFUNKTION. Wir betrachten das DGL-System

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t)^3 + y_1(t)y_2(t)^2 \cosh(y_2(t)) \\ y_2'(t) = -y_2(t) - y_1(t)^2 y_2(t) \cosh(y_2(t)) \end{cases} \quad (481)$$

BEHAUPTUNG: Für alle  $y_0 = (y_{1,0}, y_{2,0})^T \in \mathbb{R}^2$  gibt es eine maximale Lösung  $y : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2$  von (481) mit  $y(0) = y_0$  und  $I_{\max} \supset [0, \infty)$ .

BEGRÜNDUNG.

SCHRITT 1. Existenz einer maximalen Lösung. Hierfür müssen wir nachrechnen, dass  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(t, (z_1, z_2)) := \begin{pmatrix} -z_1^3 + z_1 z_2^2 \cosh(z_2) \\ -z_2 - z_1^2 z_2 \cosh(z_2) \end{pmatrix} \quad (482)$$

Eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Hierfür genügt es nach Proposition 84 (p. 88) zu zeigen, dass  $f$  in beiden Variablen  $z_1, z_2$  stetig differenzierbar ist. Dies ist den Lesenden als Übungsaufgabe überlassen. Mit der lokalen Version von Picard–Lindelöf schließen wir die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = (y_{0,1}, y_{0,2}). \end{cases} \quad (483)$$

Diese sei im Folgenden gegeben durch  $y \in C^1(I_{\max}; \mathbb{R}^2)$ .

SCHRITT 2. Rechtsglobalität. **ZZ:**  $I_{\max} \supset [0, \infty)$ . Es sei  $I_{\max} = (t_-, t_+)$  mit  $t_- < 0 < t_+$ , da  $t_0 = 0$  ja der Anfangswert ist. Angenommen  $t_+ < \infty$ . Dann gilt nach (484)

$$\liminf_{t \rightarrow t_+} \min \left\{ \text{dist}(y(t), \mathbb{R}^2 \setminus G), \frac{1}{|y(t)| + 1} \right\} = 0. \quad (484)$$

Da  $G = \mathbb{R}^2$  ist der erste Term in dem Minimumsausdruck konstant gleich unendlich und



damit für die Minimumsbildung in (484) vernachlässigbar. Wir schließen

$$\liminf_{t \rightarrow t_+} \frac{1}{|y(t)| + 1} = 0, \quad (485)$$

d.h.

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| = \infty. \quad (486)$$

Betrachte nun  $h(t) := |y(t)|^2 = y_1(t)^2 + y_2(t)^2$  und berechne

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2(y_1(t)y_1'(t) + y_2(t)y_2'(t)) \\ &\stackrel{(481)}{=} 2(y_1(t)(-y_1(t)^3 + y_1(t)y_2(t)^2 \cosh(y_2(t))) + y_2(t)(-y_2(t) - y_1(t)^2 y_2(t) \cosh(y_2(t)))) \\ &= 2(-y_1(t)^4 + y_1(t)^2 y_2(t)^2 \cosh(y_2(t)) - y_2(t)^2 - y_1(t)^2 y_2(t)^2 \cosh(y_2(t))) \\ &= -2y_1(t)^4 - 2y_2(t)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $h$  monoton fallend und es gilt für alle  $t \in (0, t_+)$

$$|y(t)|^2 = h(t) \leq h(0) = |y_0|^2 = y_{0,1}^2 + y_{0,2}^2. \quad (487)$$

Insbesondere gilt

$$|y(t)| \leq \sqrt{y_{0,1}^2 + y_{0,2}^2} \quad \forall t \in (0, t_+). \quad (488)$$

Daher gilt auch

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| \leq \sqrt{y_{0,1}^2 + y_{0,2}^2}, \quad (489)$$

ein Widerspruch zu (486). Es folgt, dass die Annahme falsch sein muss und daher gilt  $t_+ = \infty$ . Die Behauptung ist gezeigt. Bei dem Beweis war die Monotonie der Hilfsfunktion  $h$  von entscheidender Bedeutung. Diese muss man leider für jedes Problem aufs Neue "erraten".

**\*Übung 96. RECHTSGLOBALITÄT DURCH KONTROLLE DER NORM.** Betrachten Sie für einen beliebigen Anfangswert  $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})^T \in \mathbb{R}^2$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + (1 - y_1^2(t) - y_2^2(t))y_2(t). \\ (y_1(0), y_2(0)) = (y_{0,1}, y_{0,2}). \end{cases} \quad (490)$$

Zeigen Sie: Es existiert eine maximale Lösung  $y_{\max} = (y_1, y_2) : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die auch rechtsglobal ist, d.h.  $I_{\max} \supset [0, \infty)$ .

HINWEIS: Betrachten Sie  $f'(t)$  für  $f(t) := |y(t)|^2$ .

SINN DER ÜBUNG: Hier sieht man, dass man eine Kontrolle der Norm auch erreichen kann, wenn sie nicht zwingend monoton fallend ist.

**Übung 97. LYAPUNOW-FUNKTIONEN.** Es erfülle  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitzbedingung. Eine Funktion  $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  heißt *Lyapunow-Funktion* für  $f$ , falls

- $\text{grad}V(z) \cdot f(t, z) \leq 0$  für alle  $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
- $V^{-1}((-\infty, c])$  ist kompakt für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Es sei nun für ein beliebiges  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (491)$$

gegeben, wobei  $f$  eine Lyapunow-Funktion besitzt. Zeigen Sie, dass  $I_{\max} \supset [t_0, \infty)$ .

2. Es sei  $E \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  und

$$f(t, z) = -\text{grad } E(z) \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^n. \quad (492)$$

Zeigen Sie, dass  $E$  eine Lyapunow-Funktion für  $f$  ist, falls  $E^{-1}((-\infty, c])$  kompakt ist.

**SINN DER ÜBUNG:** Hier wird die Technik aus dem vorigen Beispiel verallgemeinert: Man zeigt Globalität, indem man die Bedingung (484) ausschließt. Um dies tun zu können, muss man das *Explodieren* der Lösung verhindern. Im vorigen Beispiel haben wir das Explodieren dadurch verhindert, dass die euklidische Norm entlang einer Lösung abnimmt. In dieser Übung werden wir dies verallgemeinern: Die allgemeine Lyapunow-Funktion  $V$  nimmt entlang der Lösung ab. Ein großer Anwendungsbereich sind hier *Gradientenflüsse*, d.h. Lösungen von

$$y'(t) = -\text{grad } E(y(t)). \quad (493)$$

### 2.4.1 Das Lemma von Gronwall

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass wir Globalität dadurch nachweisen können, dass Kompakta in endlicher Zeit nicht verlassen werden. Um das Verlassen von Kompakta auszuschließen, müssen wir das *Wachstum von Lösungen* verstehen. Ein fundamentales Hilfsmittel hierbei ist das *Lemma von Gronwall*, benannt nach dem schwedisch-amerikanischen Mathematiker *T.H. Grönwall (1877-1932)*. Mit ihm kann man nicht nur das Wachstum von Lösungen verstehen, sondern auch das Wachstum von *Funktionen von Lösungen*. Dies erlaubt uns zum Beispiel auch, zu quantifizieren, wie stark sich Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten unterscheiden.

**Lemma 98. DAS LEMMA VON GRONWALL.** Es seien  $u_0, t_0, T \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < T$ , und  $u, v \in C^0([t_0, T]; \mathbb{R})$  zwei Funktionen mit  $v(t) \geq 0$  für alle  $t \in [t_0, T]$ . Es gelte für alle  $t \in [t_0, T]$ ,

dass

$$u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^t u(s)v(s) \, ds \quad (494)$$

Dann folgt für alle  $t \in [t_0, T]$ , dass

$$u(t) \leq u_0 \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right). \quad (495)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir definieren die Funktion  $h_\varepsilon : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $t \in [t_0, T]$  durch

$$h_\varepsilon(t) := (u_0 + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right). \quad (496)$$

Wir stellen fest, dass  $h_\varepsilon(t_0) = u_0 + \varepsilon$  und für alle  $t \in (t_0, T)$ , dass

$$h'_\varepsilon(t) = (u_0 + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right) v(t) = v(t)h_\varepsilon(t). \quad (497)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung gilt daher für alle  $t \in [t_0, T]$ , dass

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t h'_\varepsilon(s) \, ds = (u_0 + \varepsilon) + \int_{t_0}^t h_\varepsilon(s)v(s) \, ds. \quad (498)$$

*Zwischenbehauptung.* Für alle  $t \in [t_0, T]$  gilt, dass

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t).$$

*Beweis der Zwischenbehauptung.* Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es existiert ein  $\tilde{t} \in [t_0, T]$  mit  $u(\tilde{t}) > h_\varepsilon(\tilde{t})$ . Wir arbeiten mit dem *Prinzip des kleinsten Verbrechers*, d.h. wir setzen

$$\tau := \inf \{ t \in [t_0, T] \mid u(t) > h_\varepsilon(t) \}. \quad (499)$$

Dies ist wohldefiniert, da laut Annahme das Infimum über eine nichtleere Menge gebildet wird. Beachte, dass  $\tau > t_0$ , denn mit  $t = t_0$  in (494) sieht man  $u(t_0) \leq u_0 < u_0 + \varepsilon = h_\varepsilon(t_0)$ , weswegen aus Stetigkeitsgründen  $u(t) < h_\varepsilon(t)$  für  $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$  klein genug, gilt. Da  $\tau$  der kleinste Zeitpunkt des Übersteigens ist, muss für alle  $t \in [t_0, \tau)$  gelten, dass

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t). \quad (500)$$

Dies impliziert wegen der Stetigkeit auch, dass

$$u(\tau) \leq h_\varepsilon(\tau).$$

Da  $u$  aber  $h_\varepsilon$  direkt nach  $\tau$  übersteigen wird (siehe (499)), gilt sogar

$$u(\tau) = h_\varepsilon(\tau). \quad (501)$$

Andererseits gilt wegen der Annahme (494)

$$u(\tau) \leq u_0 + \int_{t_0}^{\tau} u(s)v(s) \, ds \stackrel{(500), v \geq 0}{=} u_0 + \int_{t_0}^{\tau} h_\varepsilon(s)v(s) \, ds \quad (502)$$

$$< u_0 + \varepsilon + \int_{t_0}^{\tau} h_\varepsilon(s)v(s) \, ds \stackrel{(498)}{=} h_\varepsilon(\tau). \quad (503)$$

Dies zeigt  $u(\tau) < h_\varepsilon(\tau)$ , was ein offensichtlicher Widerspruch zu (501) ist. Die Zwischenbehauptung ist gezeigt. Wir folgern daher für alle  $t \in [t_0, T]$  und  $\varepsilon > 0$

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t) = (u_0 + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right). \quad (504)$$

Lassen wir  $\varepsilon \rightarrow 0$  streben, so erhalten wir (495).

### Übung 99. LINEARE DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN.

Es seien  $a, b \in C^0(I; [0, \infty))$  und  $z \in C^1(I; \mathbb{R})$  so, dass

$$\begin{cases} z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t) & \forall t \in I. \\ z(t_0) \leq y_0 \end{cases} \quad (505)$$

Ferner sei  $y \in C^1(I, \mathbb{R})$  die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) & (t \in I). \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (506)$$

Zeigen Sie, dass  $z(t) \leq y(t)$  für alle  $t \in I$  mit  $t \geq t_0$ .

HINWEIS. Zeigen Sie eine Abschätzung der Form wie in (494) für  $u := z - y$

SINN DER ÜBUNG: Dies ist ein wichtiges Tool, um Lösungen abzuschätzen. Wir werden es im Laufe dieser Vorlesung zwar nicht benutzen, aber Differentialungleichungen haben in der Forschung durchaus eine große Bedeutung. Manchmal wird in der Literatur das Gronwall-Lemma so formuliert!

Wir wollen nun lernen, das Gronwall-Lemma zu benutzen, um Globalität von Lösungen zu zeigen. Wir werden in der folgenden Proposition eine Wachstumsabschätzung für  $f$  diskutieren, die benutzt werden kann, um eine Blow-Up-Situation auszuschließen.

**Proposition 100.** GLOBALITÄT DURCH LINEARES WACHSTUM. Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $I$  und sei  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Ferner gebe es

$c \in C^0(I; [0, \infty))$  so, dass für alle  $(t, x)^\top \in I \times \mathbb{R}^n$

$$|f(t, z)| \leq c(t) (1 + |z|). \quad (507)$$

Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (508)$$

gegeben. Dann gibt es eine eindeutige globale Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Es sei  $I = (a, b)$ . Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung  $y \in C^1(I_{\max}; \mathbb{R}^n)$  folgt aus der lokalen Lipschitz-Bedingung, siehe Satz 2.3 (p. 99). Es sei  $I_{\max} = (t_-, t_+) \subset (a, b)$ .

*Schritt 1.* Wir zeigen  $t_+ = b$ . Angenommen  $t_+ < b$ . Das heißt auch insbesondere  $t_+ < \infty$ . Dann gilt nach dem Maximalitätskriterium (Satz 93, p. 101) (angewendet auf den Spezialfall  $G = \mathbb{R}^n$ ), dass

$$\liminf_{t \rightarrow t_+} \frac{1}{|y(t)| + 1} = 0,$$

d.h.

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| = \infty. \quad (509)$$

Wir werden nun mithilfe des Gronwall-Lemmas zeigen, dass (509) nicht eintreten kann. Wähle  $T \in [t_0, t_+)$  beliebig. Wir machen für  $t \in [t_0, T]$  folgende Beobachtung

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |(y(t) - y_0) + y_0| \leq |y(t) - y_0| + |y_0| \\ &= |y_0| + \left| \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \right| \leq |y_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \right| \\ &\leq |y_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| \, ds = |y_0| + \int_{t_0}^t c(s)(1 + |y(s)|) \, ds \\ &= |y_0| + \int_{t_0}^t c(s) \, ds + \int_{t_0}^t c(s)|y(s)| \, ds \\ &\leq |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds + \int_{t_0}^t |y(s)|c(s) \, ds. \end{aligned}$$

Wir sehen nun, dass (494) erfüllt ist für

$$\begin{aligned} u &:= |y(\cdot)|, \\ v &:= c, \\ u_0 &:= |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds. \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $u_0 \in \mathbb{R}$ , da  $c$  auf dem kompakten Intervall  $[t_0, t_+]$  stetig ist und daher beschränkt ist, sodass  $\int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds < \infty$  sofort aus  $t_+ < \infty$  folgt. Dann gilt für alle  $t \in [t_0, T]$ , dass

$$u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^t u(s)v(s) \, ds. \quad (510)$$

Mit dem Lemma von Gronwall 98 folgt für alle  $t \in [t_0, T]$ , dass

$$u(t) \leq u_0 \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right), \quad (511)$$

d.h. für alle  $t \in [t_0, T]$  gilt, dass

$$|y(t)| \leq \left( |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) \exp \left( \int_{t_0}^t c(s) \, ds \right). \quad (512)$$

Da  $T < t_+$  beliebig war, folgern wir, dass für alle  $t \in [t_0, t_+)$

$$|y(t)| \leq \left( |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) \exp \left( \int_{t_0}^t c(s) \, ds \right). \quad (513)$$

Daher berechnen wir

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |y(t)| \leq \left( |y_0| + \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) \exp \left( \int_{t_0}^{t_+} c(s) \, ds \right) < \infty, \quad (514)$$

ein Widerspruch zu (509). Dies zeigt  $t_+ = b$ .

*Schritt 2.* Wir zeigen  $t_- = a$ . Betrachte dazu das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z'(t) = -f(-t, z(t)), \\ z(-t_0) = y_0. \end{cases} \quad (515)$$

Noch präziser

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)), \\ z(-t_0) = y_0, \end{cases} \quad (516)$$

wobei  $g \in C^0((-b, -a) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  für alle  $(t, z)^\top \in (-b, -a) \times \mathbb{R}^n$  durch

$$g(t, w) := -f(-t, w),$$

definiert ist. Unser neues Intervall auf dem das Anfangswertproblem gestellt ist, ist also  $(-b, -a)$ . Man zeigt leicht, dass  $g$  auf  $(-b, -a)$  eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt und es daher eine eindeutige maximale Lösung auf einem Teilintervall von  $(-b, -a)$  gibt. Beachte nun, dass  $z(t) := y(-t)$ ,  $t \in (-t_+, -t_-)$ , eine Lösung von (515) ist. In der Tat:

$$z'(t) = -y'(-t) = -f(-t, y(-t)) = -f(-t, z(t)), \quad (517)$$

und

$$z(-t_0) = y(t_0) = y_0. \quad (518)$$

*Zwischenbehauptung.* Die Lösung  $z : (-t_+, t_-) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $z(t) = y(-t)$  ist auch die maximale Lösung für (515).

*Beweis der Zwischenbehauptung.* Sei  $\tilde{z} \in C^1((c, d); \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von (515). Definiere  $\tilde{y} : (-d, -c) \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $t \in (-d, -c)$  durch

$$\tilde{y}(t) := \tilde{z}(-t). \quad (519)$$

Dann gilt für alle  $t \in (-d, -c)$

$$\tilde{y}'(t) = -\tilde{z}'(-t) = -[-f(t, \tilde{z}(-t))] = f(t, \tilde{y}(t)), \quad (520)$$

d.h.  $\tilde{y}$  löst (508). Damit gilt (aufgrund der Maximalität von  $y$ ), dass  $y|_{(-d, -c)} = \tilde{y}$ . Wir folgern, dass  $(c, d) \subset (-t_+, -t_-)$  und für alle  $t \in (c, d)$ , dass

$$\tilde{z}(t) = \tilde{y}(-t) = y(-t) = z(t). \quad (521)$$

Es folgt die Maximalität von  $z$ .

Daher ist  $(-t_+, -t_-)$  auch das maximale Existenzintervall für (515). Nehmen wir nun an, dass  $t_- > a$ . Dann gilt  $-t_- < -a$ . Allerdings erfüllt die Funktion  $g$  aus (516) für alle  $(t, z)^\top$ , dass

$$|g(t, z)| = |-f(-t, z)| = |f(-t, z)| \leq c(-t)(1 + |z|) \stackrel{\tilde{c}(t) := c(-t)}{=} \tilde{c}(t)(1 + |z|), \quad (522)$$

wobei  $\tilde{c} := c(-(\cdot)) \in C^0((-b, -a); [0, \infty))$ . Aus Schritt 1 folgt, dass dann die maximale Lösung von (516) bis zum größtmöglichen Zeitpunkt  $-a$  existieren muss. Dies zeigt

$$-t_- = \text{Maximalpunkt der maximalen Lösung von (516)} = -a, \quad (523)$$

mit anderen Worten  $t_- = a$ . Die Behauptung ist gezeigt.

Eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Lemma von Gronwall (Lemma 98, p. 106) ist die folgende quantitative Stabilitätsaussage für den globale Satz von Picard–Lindelöf.

**Satz 101. STETIGE ABHÄNGIGKEIT.** Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine globale Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante  $L > 0$ . Ferner seien  $y, z \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  die eindeutigen Lösungen zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (t \in I), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (524)$$

und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & (t \in I), \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (525)$$

Dann gilt

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in I. \quad (526)$$

**Beweis.**

*Schritt 1. Abschätzung (526) für  $t \geq t_0$ .* Wir arbeiten mit dem Lemma von Gronwall. Es seien  $y$  und  $z$  wie in der Aussage. Wir definieren für  $t \in I$

$$u(t) := |y(t) - z(t)|. \quad (527)$$

Es sei  $T > t_0$  beliebig. Nun gilt für  $t \in [t_0, T]$

$$u(t) = |y(t) - z(t)| = \left| \left( y_0 + \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \right) - \left( z_0 + \int_{t_0}^t z'(s) \, ds \right) \right| \quad (528)$$

$$= \left| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t (y'(s) - z'(s)) \, ds \right| \quad (529)$$

$$\leq |y_0 - z_0| + \left| \int_{t_0}^t (y'(s) - z'(s)) \, ds \right| \quad (530)$$

$$\leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)| \, ds \quad (531)$$

$$\stackrel{(524), (525)}{\leq} |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \, ds. \quad (532)$$

Nun verwenden wir, dass  $f$  eine globale Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante  $L > 0$  erfüllt (siehe Definition 2.1) und erhalten

$$u(t) \leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t L |y(s) - z(s)| \, ds, \quad (533)$$

und mit (527) umgeschrieben erhalten wir

$$u(t) \leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^t u(s) \cdot L \, ds. \quad (534)$$

Nun verwenden wir das Lemma von Gronwall (Lemma 98, p. 106) mit  $u_0 := |y_0 - z_0|$  und  $v(s) := L$  (für alle  $s \in [t_0, T]$ ). Daher haben wir für alle  $t \in [t_0, T]$

$$u(t) \leq u_0 \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) \, ds \right) = |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)}, \quad (535)$$

mit anderen Worten (da  $T > t_0$  beliebig war)

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0, \quad (536)$$



also auch

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{L|t-t_0|} \quad \forall t \geq t_0, \quad (537)$$

*Schritt 2: Abschätzung für  $t < t_0$ .* Dazu lassen wir wiederum die Zeit rückwärts laufen: Definiere  $\tilde{y}(t) := y(-t)$  und  $\tilde{z}(t) := z(-t)$ . Es lösen  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  die DGLn

$$\tilde{y}'(t) = -y'(-t) = -f(-t, y(-t)) = -f(t, \tilde{y}(t)) \quad (538)$$

und analog

$$\tilde{z}'(t) = -f(-t, \tilde{z}(t)). \quad (539)$$

Man hat also, falls  $I = (a, b)$

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = -f(t, \tilde{y}(t)) & (t \in (-b, -a)) \\ \tilde{y}(-t_0) = y_0 \end{cases} \quad (540)$$

und

$$\begin{cases} \tilde{z}'(t) = -f(t, \tilde{z}(t)) & (t \in (-b, -a)) \\ \tilde{z}(-t_0) = z_0. \end{cases} \quad (541)$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Abbildung

$$\tilde{f} : (-b, -a) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \tilde{f}(t, z) := -f(-t, z) \quad (542)$$

auch eine globale Lipschitz-Bedingung mit derselben Lipschitzkonstante  $L > 0$  erfüllt (HA). Daher gilt nach Schritt 1 (wobei wir hier der Zeit den Namen  $\tau$  geben)

$$|\tilde{y}(\tau) - \tilde{z}(\tau)| \leq e^{L(\tau - (-t_0))} |y_0 - z_0| \quad \forall \tau \geq -t_0. \quad (543)$$

Substituieren wir  $\tau := -t$  und verwenden  $\tilde{y}(\tau) = y(-\tau) = y(t)$ , sowie  $\tilde{z}(\tau) = z(t)$ , so erhalten wir

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t_0 - t)} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in \mathbb{R} : -t \geq -t_0, \quad (544)$$

das heißt

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |y_0 - z_0| \quad \forall t \leq t_0. \quad (545)$$

Dies und (537) zeigen die Behauptung.

Wie so oft ist hier wieder die Frage, ob die globale Lipschitz-Bedingung zu einer lokalen Lipschitz-Bedingung abgeschwächt werden kann. Eine Verallgemeinerung der Aussage von Satz 101 ist jedoch nicht offensichtlich: Denn die (maximalen) Lösungen zu zwei verschiedenen Anfangswerten sind ja nicht einmal auf demselben Intervall definiert. Aus diesem Grund sollte man zufrieden sein, wenn die Lösungen *für kurze Zeit* stetig voneinander abhängen.

Auf kleinen Intervallen kann die stetige Abhängigkeit auch nur unter einer lokalen Lipschitz-Bedingung erhalten werden.

**Übung 102.** STETIGE ABHÄNGIGKEIT UNTER LOKALER LIPSCHITZ-BEDINGUNG. Es erfülle  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  eine lokale Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante  $L > 0$ .

Ferner seien  $y, z$  die eindeutigen maximalen Lösungen zu

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (546)$$

und

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)), \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (547)$$

Zeigen Sie: Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , ein  $L > 0$  und ein  $r > 0$  mit

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad \forall z_0 \in B_r(y_0) \quad (548)$$

SINN DER ÜBUNG: Dies ist nochmal eine gute Übung für *global-to-local Techniken*. Kann man die Abschätzung im vorigen Satz für kleine Mengen *lokalisieren*?