



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**Έλεγχος επάρκειας ύψους ορθογωνικού πεδίου σε διάτμηση και διάτρηση
και διαστασιολόγησή του σε κάμψη**

Μάθημα: Σύνθεση και Σχεδιασμός Κατασκευών Οπλισμένου Σκυροδέματος

Υπεύθυνος: Διονύσης Μπισκίνης

Εργασία 1/2

Αλέξανδρος Καναβός
A.M.: 1034637

Πάτρα, Απρίλιος 2021

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ορισμός του προβλήματος	1
1.2	Δεδομένα	1
1.3	Στόχος και αντιμετώπιση	1
2	Θεωρία και Μεθοδολογία	3
2.1	Θεωρία	3
2.2	Μεθοδολογία	3
2.2.1	Διάτμηση	3
2.2.2	Διάτρηση	5
2.2.3	Διαστασιολόγηση σε κάμψη	7
3	Αριθμητική εφαρμογή	9
3.1	Επίλυση με χρήση απλής αριθμομηχανής	9
3.1.1	Έλεγχος σε διάτμηση	9
3.1.2	Έλεγχος σε διάτρηση	9
3.1.3	Διαστασιολόγηση σε κάμψη	10
3.2	Επίλυση με χρήση λογισμικού	11
	Βιβλιογραφία	13
	Παράρτημα - Αντιπροσωπευτικός κώδικας H/Y	15
	Ορισμός στοιχείου θεμελίωσης	15
	Σταθερές ποσότητες	15
	Συναρτήσεις υπολογισμού μεγεθών και συνάρτηση output	15
	Κεντρική συνάρτηση main	18

1. Εισαγωγή

1.1 Ορισμός του προβλήματος

Η παρούσα αναφορά πραγματεύεται το πρόβλημα ελέγχου επάρκειας ύψους μεμονωμένου ορθογωνικού πεδίου, που είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο στοιχείο ορθογωνικής διατομής, απουσία συνδετηρίων δοκών. Συγκεκριμένα, ελέγχεται η αντοχή του στοιχείου θεμελίωσης για την ένταση που αναπτύσσεται σε αυτό, κατά τη μεταβίβαση των εντατικών μεγεθών σχεδιασμού του κατακόρυφου στοιχείου στο έδαφος. Τέλος, υπολογίζεται και ο απαιτούμενος οπλισμός του πεδίου με βάση την οριακή κατάσταση αστοχίας σε κάμψη.

1.2 Δεδομένα

Τα δεδομένα (input) του προβλήματος παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν και αφορούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη συστήματος, τα μηχανικά χαρακτηριστικά των χρησιμοποιούμενων υλικών και του εδάφους θεμελίωσης και τα εντατικά μεγέθη στο κέντρο βάσης του πεδίου. Όπου t το βάθος θεμελίωσης και d το στατικό ύψος του πεδίου.

b_x	b_y	h	d	t	c_x	c_y	a_x	a_y
2.3	2.3	0.6	0.55	1.0	0.6	0.4	0	0

Πίνακας 1.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά συστήματος - διαστάσεις σε (m)

M_x	M_y	N_{tot}	$\gamma_{σκ}$	$\gamma_{εδ}$	f_{ck}	f_{yk}
(KNm)	(KNm)	(KN)	(KN/m ³)	(KN/m ³)	(MPa)	(MPa)
550	180	1200	25	20	25	500

Πίνακας 1.2: Εντατικά μεγέθη και μηχανικές ιδιότητες υλικών

1.3 Στόχος και αντιμετώπιση

Στόχος είναι ο έλεγχος επάρκειας του ύψους του στοιχείου θεμελίωσης. Αν το αρχικό ύψος δεν προσφέρει ικανοποιητική αντοχή, τότε επιλέγεται νέο. Αυτό διαπιστώνεται διενεργώντας υπολογισμούς με τη χρήση προγραμματισμού σε γλώσσα C++, αλλά και αναλυτικών σχέσεων με τη χρήση απλής αριθμομηχανής. Τα αποτελέσματα των δύο διαδικασιών, συγκρίνονται τελικά μεταξύ τους, ώστε να επαληθευτεί η σύγκλισή τους.

2. Θεωρία και Μεθοδολογία

2.1 Θεωρία

Με δεδομένες τις διαστάσεις σε κάτοψη του στοιχείου θεμελίωσης, όπως αυτές αναφέρονται στον (Πίν. 1.1), θεωρείται πως έχει προηγηθεί επιτυχώς ο έλεγχος της φέρουσας ικανότητας του εδάφους. Κριτήριο στο παρόν στάδιο είναι η αντοχή του ίδιου του πεδίλου. Όλοι οι έλεγχοι αντοχής του πεδίλου γίνονται με υπόθεση γραμμικής κατανομής τάσεων εδάφους σ κατά τις διευθύνσεις x και y . Οι έλεγχοι αυτοί θεωρούν δηλαδή, ότι το πέδιλο μπορεί να αστοχήσει προτού το έδαφος φτάσει τη φέρουσα ικανότητά του.

2.2 Μεθοδολογία

Σε αυτό το σημείο ορίζονται τρία μεγέθη που είναι απαραίτητα για τη συνέχεια. Οι ροπές M_x και M_y στο κέντρο της βάσης του πεδίλου ισοδυναμούν με δράση της N_{tot} με εκκεντρότητες e_x και e_y κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα.

$$N_{tot} = N + b_x b_y (\gamma_{\sigma\kappa} h + \gamma_{\varepsilon\delta} (t - h)) \quad (2.1)$$

$$e_x = \frac{M_x}{N_{tot}}, e_y = \frac{M_y}{N_{tot}} \quad (2.2)$$

2.2.1 Διάτμηση

Ο έλεγχος σε διάτμηση ξεκινά από μία κάθετη διατομή στο οριζόντιο επίπεδο που ορίζει το πέδιλο, σε απόσταση d από την παρειά σύνδεσης πεδίλου - κατακόρυφου στοιχείου. Στη γενική περίπτωση υπάρχουν τέσσερις τέτοιες διατομές (Σχ. 2.1), δύο κάθετες στον άξονα x και δύο στον y . Με την παραδοχή μονοαξονικής εκκεντρότητας, ορίζονται οι αποστάσεις των δύο διατομών από τον άξονα y , s_x και s'_x και οι αποστάσεις των άλλων δύο διατομών από τον άξονα x , s_y και s'_y . Από τις δύο κάθετες σε κάθε άξονα διατομές, η μία είναι κρίσιμη (μεγαλύτερη τιμή τέμνουσας), συνεπώς προκύπτουν δύο τέμνουσες σχεδιασμού, μία για κάθε διεύθυνση.

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_x και $\frac{|e_x|}{b_x} \leq \frac{1}{6}$:

$$V_{Ed,x} = N_{tot} \left(1 + \frac{3|e_x|}{b_x} \left(1 + \frac{2s_x}{b_x} \right) \right) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right) - (N_{tot} - N) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right) \quad (2.3a)$$

$$V'_{Ed,x} = N_{tot} \left(1 - \frac{3|e_x|}{b_x} \left(1 - \frac{2s'_x}{b_x} \right) \right) \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right) - (N_{tot} - N) \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right) \quad (2.3b)$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_x και $\frac{|e_x|}{b_x} > \frac{1}{6}$:

$$V_{Ed,x} = \frac{4}{9} N_{tot} \frac{\left(2.5 - \frac{6|e_x|}{b_x} + \frac{s_x}{b_x} \right) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right)}{\left(1 - \frac{2|e_x|}{b_x} \right)^2} - (N_{tot} - N) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right) \quad (2.4a)$$

$$V'_{Ed,x} = \frac{4}{9} N_{tot} \frac{\left(1 - \frac{3|e_x|}{b_x} + \frac{s'_x}{b_x} \right)^2}{\left(1 - \frac{2|e_x|}{b_x} \right)^2} - (N_{tot} - N) \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right) \quad (2.4b)$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_y και $\frac{|e_y|}{b_y} \leq \frac{1}{6}$:

$$V_{Ed,y} = N_{tot} \left(1 + \frac{3|e_y|}{b_y} \left(1 + \frac{2s_y}{b_y} \right) \right) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right) - (N_{tot} - N) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right) \quad (2.5a)$$

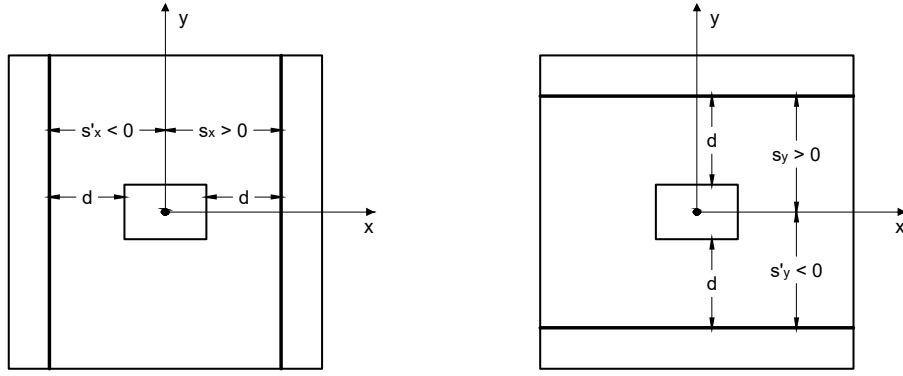
$$V'_{Ed,y} = N_{tot} \left(1 - \frac{3|e_y|}{b_y} \left(1 - \frac{2s'_y}{b_y} \right) \right) \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right) - (N_{tot} - N) \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right) \quad (2.5b)$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_y και $\frac{|e_y|}{b_y} > \frac{1}{6}$:

$$V_{Ed,y} = \frac{4}{9} N_{tot} \frac{\left(2.5 - \frac{6|e_y|}{b_y} + \frac{s_y}{b_y} \right) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right)}{\left(1 - \frac{2|e_y|}{b_y} \right)^2} - (N_{tot} - N) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right) \quad (2.6a)$$

$$V'_{Ed,y} = \frac{4}{9} N_{tot} \frac{\left(1 - \frac{3|e_y|}{b_y} + \frac{s'_y}{b_y} \right)^2}{\left(1 - \frac{2|e_y|}{b_y} \right)^2} - (N_{tot} - N) \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right) \quad (2.6b)$$

Για διαξονική εκκεντρότητα οι τέμνουσες σχεδιασμού δίνονται πάλι από τις ίδιες σχέσεις με απόλυτη ακρίβεια ή κατά προσέγγιση στην περίπτωση ανάπτυξης αδρανούς περιοχής.



Σχήμα 2.1: Κρίσιμες διατομές για τον έλεγχο πεδίου σε διάτμηση

Οι δύο κρίσιμες τέμνουσες σχεδιασμού συγκρίνονται με την αντοχή σε τέμνουσα ανά διεύθυνση. Ελέγχεται δηλαδή αν:

$$V_{Ed,x} \leq V_{Rd1,x} = \left(\max \left\{ \frac{180}{\gamma_c} (100\rho_{1,x})^{1/3}, 35\sqrt{1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} f_{ck}^{1/6}} \right\} \left(1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} \right) f_{ck}^{1/3} \right) b_y d \quad (2.7a')$$

$$V_{Ed,y} \leq V_{Rd1,y} = \left(\max \left\{ \frac{180}{\gamma_c} (100\rho_{1,y})^{1/3}, 35\sqrt{1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} f_{ck}^{1/6}} \right\} \left(1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} \right) f_{ck}^{1/3} \right) b_x d \quad (2.7b')$$

Όπου $\gamma_c = 1.5$ και $\rho_{1,x}, \rho_{1,y}$ τα γεωμετρικά ποσοστά των ράβδων οπλισμού της κάτω επιφάνειας που διαπερνούν τις κρίσιμες διατομές.

2.2.2 Διάτμηση

Για σχετικά μικρές εκκεντρότητες e_x και e_y , πιο κρίσιμος από τον έλεγχο σε διάτμηση είναι συνήθως ο έλεγχος σε διάτμηση. Ως κρίσιμη διατομή σε διάτμηση ορίζεται η κατακόρυφη επιφάνεια που περιβάλλει τη βάση του κατακορύφου στοιχείου σε απόσταση $0 \leq a \leq 2d$ από την περίμετρό του. Η διατρητική τάση αντοχής, αυξάνεται αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης a με μέγιστη τιμή $v_{Rd,max}$.

$$v_{Rd,c}(a) = \left(\max \left\{ \frac{0.18}{\gamma_c} (100\rho_1)^{1/3}, 0.035\sqrt{1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} f_{ck}^{1/6}} \right\} \left(1 + \sqrt{\frac{0.2}{d}} \right) f_{ck}^{1/3} \right) \frac{2d}{a} \quad (2.8a')$$

$$v_{Rd,max} = 0.3 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} \quad (2.8b')$$

Ο έλεγχος που πρέπει να γίνει είναι:

$$max v_{Ed}(a) \leq v_{Rd,c}(a) \quad (2.9)$$

Η μέγιστη δρώσα διατρητική τάση είναι:

$$\max v_{Ed}(a) = \beta(a) \frac{V_{Ed,red}(a)}{u(a)d} \quad (2.10)$$

Όπου:

$$V_{Ed,red}(a) = \left(1 - \frac{A'}{b_x b_y}\right) (R_N - W_f) - \frac{12A'}{b_x b_y} \left(\frac{a_x e_x}{b_x^2} + \frac{a_y e_y}{b_y^2}\right) R_N \quad (2.11)$$

$$A' = \pi a^2 + c_x c_y + 2a(c_x + c_y) \quad (2.12)$$

$$u(a) = 2(\pi a + c_x + c_y) \quad (2.13)$$

Ο συντελεστής $\beta(a)$ δίνει την αύξηση της δρώσας διατρητικής τάσης ως προς τη μέση δρώσα λόγω εκκεντροτήτων:

$$e_{x,red}(a) = \frac{M_{Edx,red}(a)}{V_{Ed,red}(a)}, e_{y,red}(a) = \frac{M_{Edy,red}(a)}{V_{Ed,red}(a)} \quad (2.14)$$

Η δρώσα μειωμένη ροπή είναι:

$$M_{Edx,red}(a) = e_x R_N - \frac{A'}{b_x b_y} a_x (R_N - W_f) - \frac{12R_N}{b_x b_y} \left(\frac{(I'_x + a_x^2 A') e_x}{b_x^2} + \frac{a_x a_y A' e_y}{b_y^2}\right) \quad (2.15a)$$

$$M_{Edy,red}(a) = e_y R_N - \frac{A'}{b_x b_y} a_y (R_N - W_f) - \frac{12R_N}{b_x b_y} \left(\frac{(I'_y + a_y^2 A') e_y}{b_y^2} + \frac{a_x a_y A' e_x}{b_x^2}\right) \quad (2.15b)$$

Όπου:

$$W_f = b_x b_y h \gamma_{\sigma\kappa} + (b_x b_y - c_x c_y) (t - h) \gamma_{\varepsilon\delta} \quad (2.16a)$$

$$I'_x = \frac{\pi a^2 (c_x^2 + a^2)}{4} + \frac{a c_x^3}{6} + \frac{c_y (2a + c_x)^3}{12} \quad (2.16b)$$

$$I'_y = \frac{\pi a^2 (c_y^2 + a^2)}{4} + \frac{a c_y^3}{6} + \frac{c_x (2a + c_y)^3}{12} \quad (2.16\gamma)$$

- Αν $e_{x,red}(a) > 0$ και $e_{y,red}(a) = 0$:

$$\beta(a) = 1 + k e_{x,red}(a) \frac{u(a)}{W_x(a)} \quad (2.17)$$

$$W_x(a) = \frac{c_x^2}{2} + c_x c_y + 2a c_y + \pi a c_x + 4a^2 \quad (2.18)$$

$$- c_x/c_y \leq 0.5 \rightarrow k = 0.45, c_x/c_y = 1.0 \rightarrow k = 0.60$$

$$- c_x/c_y = 2.0 \rightarrow k = 0.70, c_x/c_y \geq 3.0 \rightarrow k = 0.80$$

- Αν $e_{x,red}(a) = 0$ και $e_{y,red}(a) > 0$:

$$\beta(a) = 1 + k e_{y,red}(a) \frac{u(a)}{W_y(a)} \quad (2.19)$$

$$W_y(a) = \frac{c_y^2}{2} + c_x c_y + 2ac_x + \pi a c_y + 4a^2 \quad (2.20)$$

$$- c_y/c_x \leq 0.5 \rightarrow k = 0.45, c_y/c_x = 1.0 \rightarrow k = 0.60$$

$$- c_y/c_x = 2.0 \rightarrow k = 0.70, c_y/c_x \geq 3.0 \rightarrow k = 0.80$$

- Αν $e_{x,red}(a) > 0$ και $e_{y,red}(a) > 0$:

$$\beta(a) = 1 + 1.8 \sqrt{\left(\frac{e_{x,red}(a)}{c_y + 2a}\right)^2 + \left(\frac{e_{y,red}(a)}{c_x + 2a}\right)^2} \quad (2.21)$$

2.2.3 Διαστασιολόγηση σε κάμψη

Το πέδιλο κατά την κάμψη του λειτουργεί σαν ένας ανεστραμμένος διπλός πρόβολος και στις δύο διευθύνσεις x και y , με εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια, όπου και τοποθεείται εσχάρα οπλισμού με συνολικό εμβαδόν $A_s x$ και $A_s y$ ανά διεύθυνση. Κρίσιμες σε κάμψη διατομές είναι οι παράλληλες στους άξονες x και y κατακόρυφες διατομές του πεδίου, οι οποίες εφάπτονται της περιμέτρου του υποστυλώματος.

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_x και $\frac{|e_x|}{b_x} \leq \frac{1}{6}$:

$$M_{Ed,x} = N_{tot} b_x \left(0.5 + \frac{2|e_x|}{b_x} \left(1 + \frac{s_x}{b_x} \right) \right) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right)^2 - 0.5 (N_{tot} - N) b_x \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right)^2 \quad (2.22a')$$

$$M'_{Ed,x} = N_{tot} b_x \left(0.5 - \frac{2|e_x|}{b_x} \left(1 - \frac{s'_x}{b_x} \right) \right) \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right)^2 - 0.5 (N_{tot} - N) b_x \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right)^2 \quad (2.22b')$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_x και $\frac{|e_x|}{b_x} > \frac{1}{6}$:

$$M_{Ed,x} = \frac{4}{27} N_{tot} b_x \frac{\left(4 - \frac{9|e_x|}{b_x} + \frac{s_x}{b_x} \right) \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right)^2}{\left(1 - \frac{2|e_x|}{b_x} \right)^2} - 0.5 (N_{tot} - N) b_x \left(0.5 - \frac{s_x}{b_x} \right)^2 \quad (2.23a')$$

$$M'_{Ed,x} = \frac{4}{27} N_{tot} b_x \frac{\left(1 - \frac{3|e_x|}{b_x} + \frac{s'_x}{b_x} \right)^3}{\left(1 - \frac{2|e_x|}{b_x} \right)^2} - 0.5 (N_{tot} - N) b_x \left(0.5 + \frac{s'_x}{b_x} \right)^2 \quad (2.23b')$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_y και $\frac{|e_y|}{b_y} \leq \frac{1}{6}$:

$$M_{Ed,y} = N_{tot} b_y \left(0.5 + \frac{2|e_y|}{b_y} \left(1 + \frac{s_y}{b_y} \right) \right) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right)^2 - 0.5 (N_{tot} - N) b_y \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right)^2 \quad (2.24a)$$

$$M'_{Ed,y} = N_{tot} b_y \left(0.5 - \frac{2|e_y|}{b_y} \left(1 - \frac{s'_y}{b_y} \right) \right) \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right)^2 - 0.5 (N_{tot} - N) b_y \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right)^2 \quad (2.24b)$$

Για μονοαξονική εκκεντρότητα e_y και $\frac{|e_y|}{b_y} > \frac{1}{6}$:

$$M_{Ed,y} = \frac{4}{27} N_{tot} b_y \frac{\left(4 - \frac{9|e_y|}{b_y} + \frac{s_y}{b_y} \right) \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right)^2}{\left(1 - \frac{2|e_y|}{b_y} \right)^2} - 0.5 (N_{tot} - N) b_y \left(0.5 - \frac{s_y}{b_y} \right)^2 \quad (2.25a)$$

$$M'_{Ed,y} = \frac{4}{27} N_{tot} b_y \frac{\left(1 - \frac{3|e_y|}{b_y} + \frac{s'_y}{b_y} \right)^3}{\left(1 - \frac{2|e_y|}{b_y} \right)^2} - 0.5 (N_{tot} - N) b_y \left(0.5 + \frac{s'_y}{b_y} \right)^2 \quad (2.25b)$$

Για διαξονική εκκεντρότητα οι τέμνουσες σχεδιασμού δίνονται πάλι από τις ίδιες σχέσεις με απόλυτη ακρίβεια ή κατά προσέγγιση στην περίπτωση ανάπτυξης αδρανούς περιοχής.

3. Αριθμητική εφαρμογή

3.1 Επίλυση με χρήση απλής αριθμομηχανής

3.1.1 Έλεγχος σε διάτμηση

Με την υπόθεση ίδιου στατικού ύψους και στις δύο διευθύνσεις και χωρίς οπλισμό διάτμησης είναι:

$$s_x = d + 0.5c_x + a_x = 0.85m, s'_x = -d - 0.5c_x + a_x = -0.85m$$

$$s_y = d + 0.5c_y + a_y = 0.75m, s'_y = -d - 0.5c_y + a_y = -0.75m$$

Είναι $\frac{|e_x|}{b_x} = 0.199 > \frac{1}{6}$ και $\frac{|e_y|}{b_y} = 0.065 \leq \frac{1}{6}$ άρα:

$$(Εξ. 2.4α') \rightarrow V_{Ed,x} = 306.72KN$$

$$(Εξ. 2.4β') \rightarrow V'_{Ed,x} = -14.23KN$$

$$(Εξ. 2.5α') \rightarrow V_{Ed,y} = 253.34KN$$

$$(Εξ. 2.5β') \rightarrow V'_{Ed,y} = 119.75KN$$

Για $\rho_1 = 0.0013$, δηλαδή χρησιμοποιώντας τον κατασκευαστικά ελάχιστο κατά EC2 και στις δύο διευθύνσεις θα είναι:

$$(Εξ. 2.7α') \rightarrow V_{Rd1,x} = 448.94KN$$

$$(Εξ. 2.7β') \rightarrow V_{Rd1,y} = 448.94KN$$

Οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} V_{Ed,x,max} = 306.72KN \leq V_{Rd1,x} = 448.94KN \\ V_{Ed,y,max} = 253.34KN \leq V_{Rd1,y} = 448.94KN \end{array} \right\} \Rightarrow OK$$

3.1.2 Έλεγχος σε διάτρηση

Κρίσιμη διατομή επιλέγεται αυτή σε απόσταση $a = 0.3m$, η οποία πρόκύπτει στη συνέχεια και από την επίλυση με τη χρήση λογισμικού. Οι τέσσερις πρόβολοι του πεδίου ορίζουν το γεωμετρικό όριο μέχρι το οποίο αναζητείται η κρίσιμη διατομή.

$$L_{\pi\rho,+x} = b_x/2 - c_x/2 - a_x = 0.85, L_{\pi\rho,-x} = b_x/2 - c_x/2 + a_x = 0.85$$

$$L_{\pi\rho,+y} = b_x/2 - c_x/2 - a_x = 0.95, L_{\pi\rho,-y} = b_x/2 - c_x/2 + a_x = 0.95$$

Από (Εξ. 2.8α' - 2.8β'), με $\rho_1 = \max(0.26f_{ctm}/f_{yk}, 0.0013) = 0.0013$ είναι:

$$\left. \begin{aligned} v_{Rd,c}(a) &= 1301 \text{ KN/m}^2 \\ v_{Rd,max} &= 3825 \text{ KN/m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{Rd,max} \geq v_{Rd,c}(a) \Rightarrow OK$$

(Εξ. 2.12 - 2.13) $\rightarrow A' = 1.122 \text{ m}^2$ και $u(a) = 3.884 \text{ m}$

(Εξ. 2.11, 2.16α') $\rightarrow V_{Ed,red}(a) = 851.12 \text{ KN}$ και $W_f = 119.75 \text{ KN}$

(Εξ. 2.16β' - 2.16γ') $\rightarrow I'_x = 0.1001 \text{ m}^4$ και $I'_y = 0.0756 \text{ m}^4$

Άρα οι μειωμένες ροπές είναι:

(Εξ. 2.15α' - 2.15β') $\rightarrow M_{Edx,red}(a) = 526 \text{ KNm}$ και $M_{Edy,red}(a) = 174.16 \text{ KNm}$

Και οι αντίστοιχες εκκεντρότητες:

(Εξ. 2.14) $\rightarrow e_{x,red}(a) = 0.618 \text{ m}$ και $e_{y,red}(a) = 0.204 \text{ m}$

Εφόσον $e_{x,red}(a) > 0$ και $e_{y,red}(a) > 0$ από (Εξ. 2.21) θα είναι: $\beta(a) = 2.153$

Άρα τελικά από (Εξ. 2.10) $\rightarrow \max v_{Ed}(a) = 857.81 \text{ KN/m}^2$

Και επίσης: $\max v_{Ed}(a) \leq v_{Rd,c}(a) \Rightarrow 857.81 \leq 1301 \Rightarrow OK$

Από τους ελέγχους σε διάτμηση και διάτρηση που διενεργήθηκαν συμπεραίνεται πως το ύψος του πεδίου επαρκεί.

3.1.3 Διαστασιολόγηση σε κάμψη

Κρίσιμες διατομές σε κάμψη είναι οι παράλληλες της περιμέτρου του υποστυλώματος, συνεπώς οι κρίσιμες αποστάσεις που απαιτούνται για την ανάλυση έχουν ως εξής:

$$s_x = 0.5c_x + a_x = 0.3 \text{ m}, s'_x = -0.5c_x + a_x = -0.3 \text{ m}$$

$$s_y = 0.5c_y + a_y = 0.2 \text{ m}, s'_y = -0.5c_y + a_y = -0.2 \text{ m}$$

Είναι $\frac{|e_x|}{b_x} = 0.199 > \frac{1}{6}$ και $\frac{|e_y|}{b_y} = 0.065 \leq \frac{1}{6}$ άρα:

(Εξ. 2.23α') $\rightarrow M_{Ed,x} = 340.42 \text{ KNm}$

(Εξ. 2.23β') $\rightarrow M'_{Ed,x} = 3.56 \text{ KNm}$

(Εξ. 2.24α') $\rightarrow M_{Ed,y} = 276.97 \text{ KNm}$

(Εξ. 2.24β') $\rightarrow M'_{Ed,y} = 144.18 \text{ KNm}$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει $M_{Ed,x,max} = 340.42 \text{ KNm}$ και $M_{Ed,y,max} = 276.97 \text{ KNm}$.

- Διεύθυνση x :

Για τη μέγιστη ροπή, ανά μονάδα πλάτους του πεδίου θα είναι $340.42/2.3 = 148 \text{ KNm/m}$.

Οι κρίσιμες σε κάμψη διατομές απέχουν από το άκρο του πεδίου $l = 1.15 - 0.3 =$

$0.85 \text{ m} \leq 2d = 1.1 \text{ m}$. Άρα εμφανίζεται κοντός πρόβολος, συνεπώς λαμβάνεται προσεγ-

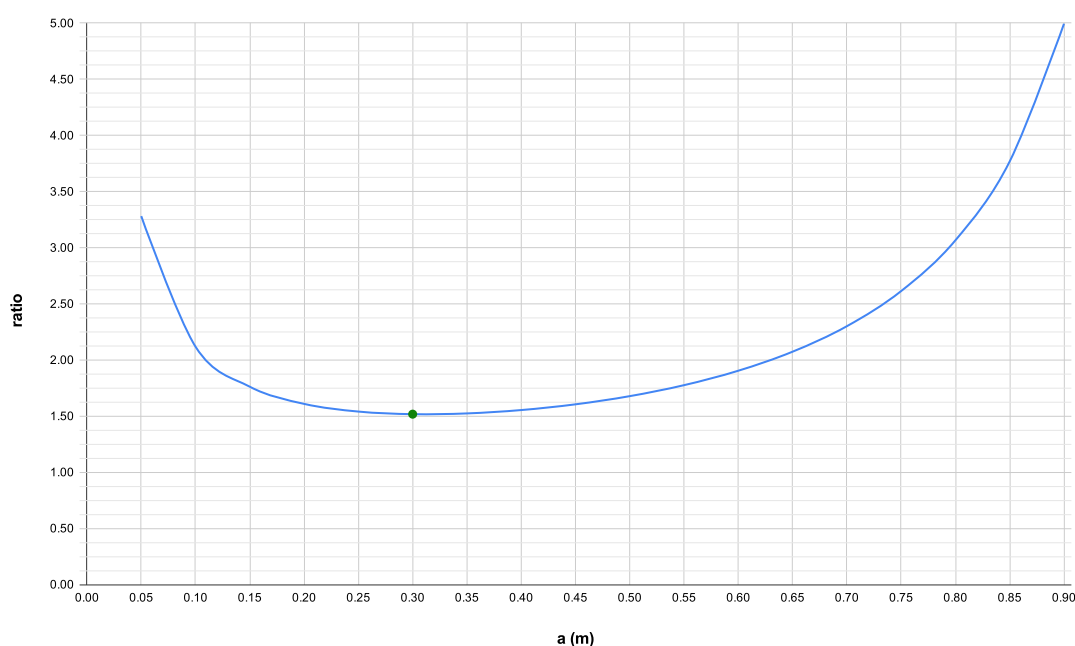
γιστικά $z = 0.85d$ και είναι $A_s = \frac{M_{sd}}{0.85 \cdot d \cdot f_{yd}}$.

- Απαιτούμενος οπλισμός: $A_s = \frac{148}{0.85 \cdot 0.55 \cdot 434.78} = 728 \text{ mm}^2/\text{m}$

- Κατασκευαστικά ελάχιστος οπλισμός: $A_{s,min} = 0.0013 \cdot 1000 \cdot 550 = 715mm^2/m$
- Τοποθετούνται $\Phi 14/200 = 770mm^2/m$
- Διεύθυνση y :
 Για τη μέγιστη ροπή, ανά μονάδα πλάτους του πεδίου θα είναι $276.97/2.3 = 120.4KNm/m$.
 Οι κρίσιμες σε κάμψη διατομές απέχουν από το άκρο του πεδίου $l = 1.15 - 0.2 = 0.95m \leq 2d = 1.1m$. Άρα εμφανίζεται κοντός πρόβολος, συνεπώς λαμβάνεται προσεγγιστικά $z = 0.85d$ και είναι $A_s = \frac{M_{sd}}{0.85 \cdot d \cdot f_{yd}}$.
 - Απαιτούμενος οπλισμός: $A_s = \frac{120.4}{0.85 \cdot 0.55 \cdot 434.78} = 592mm^2/m$
 - Κατασκευαστικά ελάχιστος οπλισμός: $A_{s,min} = 0.0013 \cdot 1000 \cdot 550 = 715mm^2/m$
 - Τοποθετούνται $\Phi 14/200 = 770mm^2/m$

3.2 Επίλυση με χρήση λογισμικού

Στο παρόν μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα επίλυσης του τμήματος της προηγούμενης αριθμητικής εφαρμογής που αφορά τον έλεγχο σε διάτρηση. Τα παρακάτω αποτελέσματα (Πίν. 3.1) παρήχθησαν με λογισμικό που αναπτύχθηκε σε γλώσσα C++ (βλ. Παράρτημα) και υπολογίζει τη μεταβολή του λόγου αντοχής προς καταπόνηση για τις διάφορες τιμές του a (Σχ. 3.1). Σημειώνεται πως οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν σε ικανοποιητικό βαθμό, αλλά γενικώς η χρήση H/Y συνίσταται για μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων και σαφή μείωση του υπολογιστικού φόρτου. Βέβαια, απαραίτητη προϋπόθεση για το τελευταίο, αποτελεί η πλήρης κατανόηση του εκάστοτε προβλήματος και των σχέσεων που το περιγράφουν.



Σχήμα 3.1: Μεταβολή του λόγου αντοχής προς καταπόνηση για τις διάφορες τιμές του a

a (m)	inside —	u (m)	A' (m ²)	V_{Ed,red} (KN)	I'_x (m ⁴)	I'_y (m ⁴)	M_{Edx,red} (KNm)	M_{Edy,red} (KNm)	e_{x,red} (m)	e_{y,red} (m)	β —	v_{Rd,c} (KN/m ²)	maxv_{Ed} (KN/m ²)	v_{Rd,c}/maxv_{Ed} —
0.00	true	2.000	0.240	1031.24	0.0072	0.0032	548.30	179.75	0.531	0.174	3.449	inf	3233.49	inf
0.05	true	2.314	0.347	1009.21	0.0139	0.0071	546.71	179.45	0.541	0.177	3.003	7813.94	2381.18	3.28153
0.10	true	2.628	0.471	983.98	0.0235	0.0132	544.44	178.98	0.553	0.181	2.709	3906.97	1844.39	2.11829
0.15	true	2.942	0.610	955.54	0.0364	0.0219	541.40	178.30	0.566	0.186	2.503	2604.64	1478.44	1.76174
0.20	true	3.256	0.765	923.89	0.0531	0.0340	537.47	177.37	0.581	0.191	2.353	1953.48	1214.11	1.60898
0.25	true	3.570	0.936	889.04	0.0741	0.0500	532.52	176.13	0.598	0.198	2.241	1562.78	1014.49	1.54047
0.30	true	3.884	1.122	850.97	0.1002	0.0708	526.36	174.52	0.618	0.205	2.155	1302.32	858.29	1.51734
0.35	true	4.199	1.324	809.70	0.1322	0.0974	518.80	172.47	0.640	0.213	2.089	1116.27	732.45	1.52402
0.40	true	4.513	1.542	765.23	0.1712	0.1308	509.62	169.89	0.665	0.222	2.038	976.74	628.55	1.55395
0.45	true	4.827	1.776	717.54	0.2181	0.1723	498.54	166.70	0.694	0.232	2.001	868.21	540.93	1.60502
0.50	true	5.141	2.025	666.65	0.2743	0.2230	485.30	162.78	0.727	0.244	1.975	781.39	465.69	1.67790
0.55	true	5.455	2.290	612.55	0.3409	0.2845	469.58	158.04	0.766	0.258	1.959	710.35	400.03	1.77574
0.60	true	5.769	2.570	555.24	0.4195	0.3582	451.04	152.34	0.812	0.274	1.954	651.16	341.91	1.90447
0.65	true	6.084	2.867	494.72	0.5116	0.4458	429.31	145.58	0.867	0.294	1.960	601.07	289.80	2.07405
0.70	true	6.398	3.179	431.00	0.6189	0.5492	404.01	137.60	0.937	0.319	1.980	558.13	242.55	2.30104
0.75	true	6.712	3.507	364.06	0.7432	0.6701	374.70	128.27	1.029	0.352	2.020	520.92	199.27	2.61410
0.80	true	7.026	3.850	293.93	0.8863	0.8106	340.94	117.42	1.159	0.399	2.093	488.37	159.25	3.06652
0.85	false	7.340	4.209	220.58	1.0504	0.9728	302.25	104.90	1.370	0.475	2.232	459.64	121.94	3.76912
0.90	false	7.654	4.584	144.02	1.2375	1.1590	258.13	90.53	1.792	0.628	2.540	434.10	86.90	4.99535

Πίνακας 3.1: Αποτελέσματα (output) του προγράμματος και κρίσιμη διατομή

Βιβλιογραφία

- Μπισκίνης Διονύσης. *Στοιχεία Θεμελίωσης: Υπολογισμός και Κατασκευαστική Διαμόρφωση*. Πάτρα, Ελλάδα: Ψηφιακό αρχείο σημειώσεων, 2021.
- Φαρδής Μιχαήλ. *Μαθήματα οπλισμένου σκυροδέματος Μέρος III*. Πάτρα, Ελλάδα: Τμήμα Εκτυπώσεων Τυπογραφείου Πανεπιστημίου Πατρών, 2018.

Παράρτημα - Αντιπροσωπευτικός κώδικας Η/Υ

Ορισμός στοιχείου θεμελίωσης

```
#ifndef FOOTINGSYSTEM_H
#define FOOTINGSYSTEM_H

struct Footingsystem
{
    double bx{};
    double by{};
    double h{};
    double d{};
    double cx{};
    double cy{};
    double ax{};
    double ay{};
    double t{};
    double f_ck{};
    double f_yk{};
    double Mx{};
    double My{};
    double Ntot{};
};

#endif
```

Σταθερές ποσότητες

```
#ifndef CONSTANTS_H
#define CONSTANTS_H

namespace constants
{
    inline constexpr double pi{3.141592};
    inline constexpr double g_con{25.0};
    inline constexpr double g_soil{20.0};
    inline constexpr double step{0.05};
    inline constexpr double gcSF{1.5};
}

#endif
```

Συναρτήσεις υπολογισμού μεγεθών και συνάρτηση output

```
#include "constants.h"
#include "footingsystem.h"
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <omanip>

double vRdc(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double rho1{std::max(0.26 * 0.3 / ref.f_yk * std::pow(ref.f_ck, 2.0/3.0), 0.0013)};
    double p1{(0.18/constants::gcSF) * std::pow(100.0 * rho1, 1.0/3.0)};
    double p2{1.0 + std::sqrt(0.2/ref.d)};
    double p3{0.035 * std::sqrt(p2) * std::pow(ref.f_ck, 1.0/6.0)};
    double p4{pow(ref.f_ck, 1.0/3.0) * 2.0 * ref.d/a};
    double result{std::max(p1, p3) * p2 * p4};
    return 1000.0 * result;
}
```

```

double vRd_max(const Footingsystem& ref)
{
    double fcd{0.85 * ref.f_ck / constants::gcSF};
    double result{0.3 * fcd * (1 - ref.f_ck / 250)};
    return 1000.0 * result;
}

double area(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double result{constants::pi * std::pow(a, 2) + ref.cx * ref.cy + 2.0 * a * (ref.cx + ref.cy)};
    return result;
}

double weight(const Footingsystem& ref)
{
    double result{ref.bx * ref.by * ref.h * constants::g_con +
        constants::g_soil * (ref.bx * ref.by - ref.cx * ref.cy) * (ref.t - ref.h)};
    return result;
}

double e_x(const Footingsystem& ref)
{
    return ref.Mx / ref.Ntot;
}

double e_y(const Footingsystem& ref)
{
    return ref.My / ref.Ntot;
}

double VEd_red(double ex, double ey, double area, double weight, const Footingsystem& ref)
{
    double p1{1.0 - area/(ref.bx * ref.by)};
    double p2{ref.Ntot - weight};
    double p3{12.0 * area/(ref.bx * ref.by)};
    double p4{(ref.ax * ex / std::pow(ref.bx, 2) + ref.ay * ey / std::pow(ref.by, 2)) * ref.Ntot};
    double result{p1 * p2 - p3 * p4};
    return result;
}

double u(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double result{2.0 * (constants::pi * a + ref.cx + ref.cy)};
    return result;
}

double max_vEd(double vedred, double u, double beta, const Footingsystem& ref)
{
    double result{beta * vedred / (u * ref.d)};
    return result;
}

double I_x(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double p1{(1.0/4.0) * constants::pi * std::pow(a, 2) * (std::pow(ref.cx, 2) + std::pow(a, 2))};
    double p2{(1.0/6.0) * a * std::pow(ref.cx, 3)};
    double p3{(1.0/12.0) * ref.cy * std::pow(2 * a + ref.cx, 3)};
    double result{p1 + p2 + p3};
    return result;
}

double I_y(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double p1{(1.0/4.0) * constants::pi * std::pow(a, 2) * (std::pow(ref.cy, 2) + std::pow(a, 2))};
    double p2{(1.0/6.0) * a * std::pow(ref.cy, 3)};
    double p3{(1.0/12.0) * ref.cx * std::pow(2.0 * a + ref.cy, 3)};
    double result{p1 + p2 + p3};
    return result;
}

double W_x(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double result{(1.0/2.0) * std::pow(ref.cx, 2) + ref.cx * ref.cy
        + 2.0 * a * ref.cy + constants::pi * a * ref.cx + 4.0 * std::pow(a, 2)};
    return result;
}

double W_y(double a, const Footingsystem& ref)
{
    double result{(1.0/2.0) * std::pow(ref.cy, 2) + ref.cx * ref.cy
        + 2.0 * a * ref.cx + constants::pi * a * ref.cy + 4.0 * std::pow(a, 2)};
    return result;
}

```

```

        return result;
    }

double MED_x_red(double ex, double ey, double area, double weight, double giotax, const Footingsystem& ref)
{
    double p1{ex * ref.Ntot};
    double p2{area * ref.ax * (ref.Ntot - weight) / (ref.bx * ref.by)};
    double p3{12.0 * ref.Ntot / (ref.bx * ref.by)};
    double p4{ex * (giotax + area * std::pow(ref.ax, 2)) / std::pow(ref.bx, 2)};
    double p5{ey * ref.ax * ref.ay * area / std::pow(ref.by, 2)};
    double result{p1 - p2 - p3 * (p4 + p5)};
    return result;
}

double MED_y_red(double ex, double ey, double area, double weight, double giotay, const Footingsystem& ref)
{
    double p1{ey * ref.Ntot};
    double p2{area * ref.ay * (ref.Ntot - weight) / (ref.bx * ref.by)};
    double p3{12.0 * ref.Ntot / (ref.bx * ref.by)};
    double p4{ey * (giotay + area * std::pow(ref.ay, 2)) / std::pow(ref.by, 2)};
    double p5{ex * ref.ax * ref.ay * area / std::pow(ref.bx, 2)};
    double result{p1 - p2 - p3 * (p4 + p5)};
    return result;
}

double e_x_red(double medxred, double vedred)
{
    return medxred / vedred;
}

double e_y_red(double medyred, double vedred)
{
    return medyred / vedred;
}

double betaFun(double exred, double eyred, double a, double u, double wx, double wy, const Footingsystem& ref)
{
    if (exred > 0 && eyred == 0)
    {
        // values of k case A (omitted)
    }

    else if (exred == 0 && eyred > 0)
    {
        // values of k case B (omitted)
    }

    else if (exred > 0 && eyred > 0)
    {
        double p1{std::pow(exred / (ref.cy + 2.0 * a), 2)};
        double p2{std::pow(eyred / (ref.cx + 2.0 * a), 2)};
        double p3{std::sqrt(p1 + p2)};
        return 1.0 + 1.8 * p3;
    }
}

double limitFinder(const Footingsystem& ref)
{
    double pos_x{ref.bx / 2.0 - ref.ax - ref.cx / 2.0};
    double neg_x{ref.bx / 2.0 + ref.ax - ref.cx / 2.0};
    double pos_y{ref.by / 2.0 - ref.ay - ref.cy / 2.0};
    double neg_y{ref.by / 2.0 + ref.ay - ref.cy / 2.0};
    double min_x{std::min(pos_x, neg_x)};
    double min_y{std::min(pos_y, neg_y)};
    return std::min(min_x, min_y);
}

void printer(const Footingsystem& ref)
{
    std::cout << std::fixed;
    std::cout << std::setprecision(5);
    double a{0.0};
    const double* ptrIncr{constants::step};
    double limit_equation{2.0 * ref.d};

    std::cout << "a, u(a), A(a), Vedred(a), Ix(a), Iy(a), MEDxred(a), MEDyred(a),  

        exred(a), eyred(a), beta(a), vRdc(a), maxvEd(a), vRdc(a) / maxvEd(a), vRdmax \n";

    while(a <= limit_equation)
    {
        double temp_medxred{MED_x_red(e_x(ref), e_y(ref), area(a, ref), weight(ref), I_x(a, ref), ref)};
        double temp_medyred{MED_y_red(e_x(ref), e_y(ref), area(a, ref), weight(ref), I_y(a, ref), ref)};
    }
}

```

```

        double temp_vedred{VEd_red(e_x(ref), e_y(ref), area(a, ref), weight(ref), ref));
        double temp_exred{e_x_red(temp_medxred, temp_vedred)};
        double temp_eyred{e_y_red(temp_medyred, temp_vedred)};
        double temp_beta{betaFun(temp_exred, temp_eyred, a, u(a, ref), W_x(a, ref), W_y(a, ref), ref)};
        double temp_maxved(max_vEd(temp_vedred, u(a, ref), temp_beta, ref));
        double temp_vrdc(vRdc(a, ref));

        std::cout << a << ", " << u(a, ref) << ", " << area(a, ref) << ", " << temp_vedred << ", " << I_x(a, ref) << ", " <<
        I_y(a, ref) << ", " << temp_medxred << ", " << temp_medyred << ", " << temp_exred << ", " << temp_eyred << ", " <<
        temp_beta << ", " << temp_vrdc << ", " << temp_maxved << ", " << temp_vrdc / temp_maxved << ", " << vRd_max(ref) << '\n';
        a += *ptrIncr;
    }

    ptrIncr = nullptr;
}

```

Κεντρική συνάρτηση main

```

#include "footingsystem.h"
#include "calculations.h"

int main()
{
    //Struct initialization
    Footingsystem sample{2.3, 2.3, 0.6, 0.55, 0.6, 0.4, 0.0, 0.0, 1.0, 25.0, 500.0, 550.0, 180.0, 1200.0};

    //Call printer function to get the output
    printer(sample);

    //exit point
    return 0;
}

```