Лекция 2. 3. Интегрирующий множитель

Пусть $M, N: \Omega \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируемые

Ω - односвязная область

$$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0 \qquad (1)$$

Опр. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x,y) \not\equiv 0$ $\Omega \to \mathbb{R}$, наз. интегрирующим множителем уравнения (1), если при умножении на неё уравнение (1) станет уравнением в полных дифференциалах.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial N}{\partial y} + N \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)= N\frac{\partial \mu}{\partial y}-M\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Пусть $N\neq 0$ $\forall (x,y)\in\Omega$, то
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}}{N}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Предположим, что μ не зав. от x

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}}{N}=\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}$$
, если левая часть зависит только от y, то

$$\mu = Ce^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}}{N}dx}$$

4. Уравнение Бернулли

Пусть $a, b : I\to\mathbb{R}$ непрерывные ф-ции; задано число $n\neq 0$ и $n\neq 1$

(2) $y'=a(x)y+b(x)y^n$ наз. уравнением Бернулли

Замена $z(x)=y^{1-n}$ (при $n>0$ $y\equiv 0$ – решение)

Будем считать, что $y\neq 0$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)y^{-n}(ay + by^n) = (1-n)ay^{1-n} +$$
$$+ b(1-n) = (1-n)az + b(1-n)$$

Получили линейное уравнение.

Метод Бернулли (или метод "uv").

Пусть $y(x) = u(x)v(x)$

$$u'v + v'u = auv + bu^n v^n$$

Потребуем, чтобы $v' - av = 0$. Выбираем одно самое простое решение $v(t) \neq 0$, подставляем в (2)

$$u'v = bu^n v^n$$ и получаем уравнение на $u(x)$.

5. Уравнение Риккати.

Пусть $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ — непрерывные ф-ции.
интервал

Уравнение $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ (3) наз. уравнением Риккати

Пусть известно какое-то решение $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ - реш.
Замена $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ сводит (3) к ур-ию Бернулли (2):

$$z' + \cancel{\tilde{y}'} = a(z^2 + 2z\tilde{y} + \cancel{\tilde{y}^2}) + b(z + \cancel{\tilde{y}}) + \cancel{c}$$

$$z' = az^2 + 2\tilde{y}z + bz$$

$$z' = (b + 2\tilde{y})z + az^2$$ — ур-ие Бернулли.

6. Методы понижения порядка ДУ.

(4) $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, $\quad F : \Omega \to \mathbb{R}$

1. Явно не входит $y, y', \dots, y^{(k-1)}$.

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geqslant k \geqslant 1$$

Замена $z = y^{(k)}(x)$ понижает на k порядок ур.

2. Явно не входит x

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Новая неизвестная функция $z(y) = y'$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z, \dots$$

$$F(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$ порядок понизился на 1

3. Однородное уравнение

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ и $F(x, \cdot)$ положительно однородна

$F(x, \lambda y, \lambda y', .., \lambda y^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$ $\forall \lambda > 0$

(понимается как алгебраич. ур-ие) $\forall y, y', .. y^{(n)}$

Замена $y' = yz$, $z = z(x)$

$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$, и т.д.

$$F(x, y, yz, y(z^2+z'), ...) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} F(x, 1, z, z^2+z', ...) = 0 \\ F(x, -1, -z, ...) = 0 \end{array}\right.$$

4. Обобщенно-однородное уравнение $\exists S: \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$F(\lambda x, \lambda^S y, \lambda^{S-1} y', .., \lambda^{S-n} y^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', .. y^{(n)}) = 0$

Замена $x = e^t$ (при $x > 0$), $x = -e^t$ (при $x < 0$)

$y = ze^{St}$, $z = z(t)$. – новая функция

Получим уравнение, не содержащее t.

для $n=2$ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ze^{St}) = \frac{dz}{dt} \cdot e^{-t} \cdot e^{st} + z \cdot se^{st}e^{-t} =$

$$= (z' + zs)e^{(s-1)t}$$

$$y'' = e^{-t}\left((z'' + z's)e^{(s-1)t} + e^{(s-1)t}(s-1)(z' + zs)\right) =$$

$$= e^{(s-2)t}\left(z'' + z'(2s-1) + z \cdot s(s-1)\right)$$

$$0 = F(x, y, y', y'') = F\left(e^t, e^{st}z, e^{(s-1)t}(z'+zs)\, e^{(s-2)t}(z''+\ldots)\right) = 0$$

$$\Updownarrow \quad \lambda = e^t$$

$$F(1, z, z'+zs, z'' + z'(2s-1) + zs(s-1)) = 0$$

не содержит t.

7. Нормальные системы ОДУ. Задача Коши.

$n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ (непр.), $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Эта система называется нормальной системой ДУ.

Опр. Решением системы (1) наз. непрерывно дифф. ф-ция $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, определенную на некотором интервале I, такую, что $\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\forall t \in I$

Зададим отображение $\vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$ (2) эквивалентная запись

$\dot{\vec{x}}$ покомпонентное дифференц.

Пусть задан вектор $(t_0, \vec{x_0}) \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases} \quad (3)$$ — Задача Коши

Решение задачи Коши (3) — решение ДУ (2), удовлетворяющее нач. условию $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$.

Функция $\vec{x} : I \to R^n$ наз. непродолжаемым (глобальным) решением (2) (или (3)), если $\forall$ решения $\vec{\tilde{x}} : \tilde{I} \to R^n$, для которого, $x(t) = \tilde{x}(t)$, $I \subset \tilde{I}$, выполняется, что $I = \tilde{I}$