Математический анализ. Семинар 5

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

3 октября 2017

1 Семинар 5

Теорема 1 (О замене переменных в кратном интеграле)**.** *Пусть F:*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

–отображение открытого измеримого множества $G \subset R^2_{uv}$ *на открытое измеримое множество* $G^* \subset R^2_{xy}$ *со свойствами:*

1. *F взаимно однозначно отображает* G *на* G^**,*
2. *F непрерывно дифференцируемо на* G*,*
3. *Якобиан отображения* $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ *на* G
4. *F, J непрерывно продолжимы на* $\bar{G}$
5. *функция f непрерывна на* G^* *и непрерывна продолжима на* $\bar{G}^*$*.*

Тогда

$$\iint\limits_{G*} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv$$

То есть если переходим в кратном интеграле к новым переменным, умножаем подынтегральную функцию на модуль Якобиана.

Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{G} xy^2dxdy$, где $G = \{x^2+y^2 \leq a^2;\ x \geq 0\}$.

Решение: Задача двумерная, видим в условии x^2+y^2. В такой момент у нас должен срабатывать триггер на полярную замену координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Здесь r - расстояние до начала координат, всегда ≥ 0, а φ – угол между осью OX и радиус-вектором точки (x,y): $\varphi \in [0;2\pi]$. Но в нашем случае в условии написано $x \geq 0$. То есть $r\cos\varphi \geq 0$. Т.к. $r \geq 0$, получаем отсюда $\cos\varphi \geq 0$. Значит, $\varphi \in [0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$. Также по условию $r^2 \leq a^2$, т.е. $r \leq a$. При переходе от координат (x,y) к (r,φ) нужно также не забыть домножить подынтегральное выражение на модуль Якобиана, равный r для полярных координат.

$$\iint\limits_G xy^2dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a r^4 \cos\varphi \sin^2\varphi dr + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^4 \cos\varphi \sin^2\varphi dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\cos\varphi \int\limits_0^a r^4 dr + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \sin^2\varphi d\cos\varphi \int\limits_0^a r^4 dr = \frac{a^5}{5}\left(\left.\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_0^{\pi/2} + \left.\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_{3\pi/2}^{2\pi} \right) = \frac{2a^5}{15}$$

1.1 №8.144(6)

$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ -?

Где G - область, ограниченная поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$
Сделаем замену на сферические координаты.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\psi \\ y = r\sin\phi\cos\psi \\ z = rsin\psi \end{cases}$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\cos\psi & -r\cos\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi & r\cos\phi\cos\psi & -r\sin\phi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\psi r^2(\sin^2\phi\sin\psi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\psi\cos\psi) + 0+$$
$$+ r\cos\psi r(\cos^2\phi\cos^2\psi + \sin^2\phi\cos^2\psi) =$$
$$= r^2\sin^2\psi\cos\psi + r^2\cos^2\psi\cos\psi = r^2 cos\psi$$

Это якобиан для перехода от декартовых прямоугольных к сферическим координатам. Чтобы его каждый раз не считать, советую его запомнить.

В сферических координатах $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $r \in [0, R]$, где R - радиус сферы.

Из $x^2+y^2+z^2=z$, подставив значения переменных в новых координатах и сократив обе части на r, получаем:

$$r = \sin\psi.$$

Т.к. $r \geq 0$, имеем: $\psi \in [0, \pi/2]$. Значения $\psi \in [-\pi/2, 0]$ нам не подходят: синус <0 в четвертой четверти.

Подставим в пределы интегрирования условия сферических координат:

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{sin\psi} r(r^2 \cos\psi) dr = 2\pi \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi \cos\psi d\psi =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\psi d\sin\psi = \frac{\pi}{10}$$

1.2 §8№148(3)

$$I = \iiint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dxdydz$$
$$G : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Переход к обобщенным сферическим координатам:

$$x = arcos\phi \cos\psi$$
$$y = br \sin\phi \cos\psi$$
$$z = cr \sin\psi$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\phi\cos\psi & -ar\sin\phi\cos\psi & -ar\cos\phi\sin\psi \\ b\sin\phi\cos\psi & br\cos\phi\cos\psi & -br\sin\phi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix} =$$
$$= abc\sin\psi r^2(\sin^2\phi\sin\psi\cos\phi + \cos^2\phi\sin\psi\cos\psi) +$$
$$+ abcr^2\cos\psi(\cos^2\phi\cos^2\psi + \sin^2\phi\cos^2\psi) =$$
$$= abcr^2\sin^2\psi\cos\psi + abcr^2\cos^2\psi\cos\psi = abcr^2cos\psi$$

$$\int\limits_0^1 dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} abcr^2 cos\psi d\phi = abc2\pi \int_0^1 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2} r^2 \cos\psi d\psi =$$

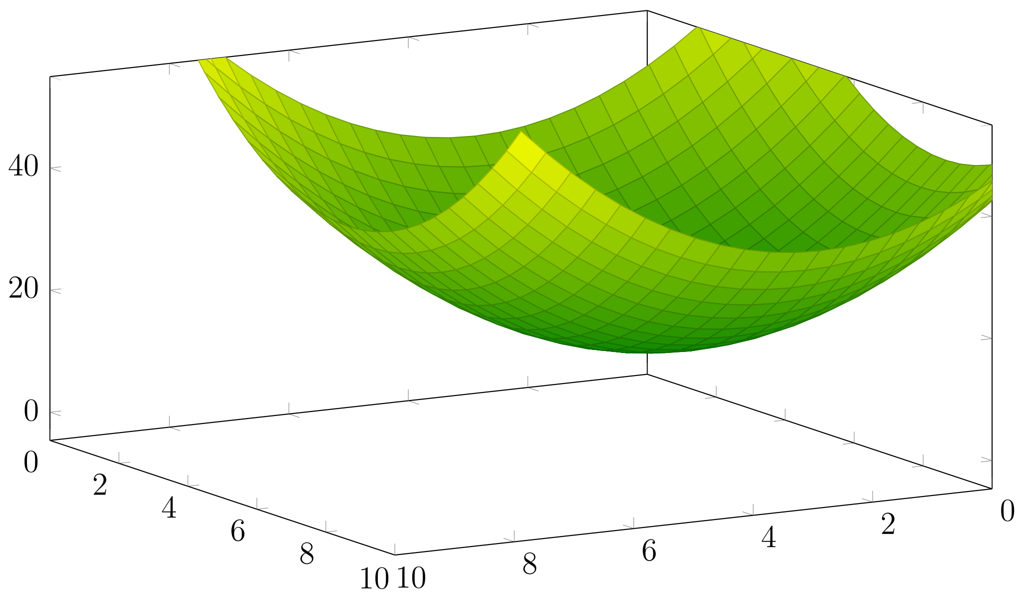
$$= 2\pi abc2 \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r^2 dr = [r = sint] = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{\pi}{8} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t d4t =$$
$$= \frac{1}{4}\pi^2 abc$$

1.3 №133(5)

$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$ поменять порядок интегрирования с xyz на xzy

На рис. ниже представлен график $z = x^2 + y^2$. Область интегрирования: первый октант (x>0, y>0), причем z лежит между нулевой плоскостью $z = 0$ и этим параболоидом. То есть интересующая нас область ниже параболоида. Отметим, что максимальное значение, которое может принимать z, достигается при $x = y = 1$, и равно $z = 1^2 + 1^2 = 2$.



Внешняя переменная интегрирования - x. Значит, при составлении интегральной суммы мы нашинковываем область тонкими плоскими кусочками, у каждого $x = x_0 = const$. Такой кусочек показан на рис.1. Красным цветом выделена область интегрирования. Видим, что в области I z меняется от 0 до x^2, а y - от 0 до 1. В области II z меняется от x^2 до $x^2 + y_{max}^2 = x^2 + 1$ (своего максимального значения), а y - от нашего графика, зависящего от x и z, до 1.

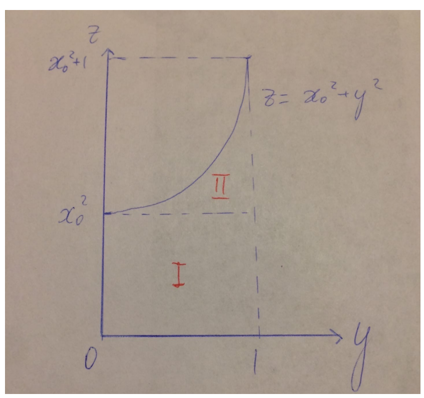


Рис. 1: сечение при $x = x_0$

Ответ: $\int_0^1 dx(\int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy)$

1.4 §8 №146(3)

$$I = \iiint_G (x^2+y^2)dxdydz$$

$$G : \begin{cases} x^2+y^2 = 2z \\ z = 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Делаем замену на цилиндрические координаты. Якобиан = r, проверьте сами.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 r dr = \frac{16\pi}{3}$$

1.5 №9.16(5) Геометрические приложения

Обьем считается так: $\mathbb{V}_G = \iiint\limits_G dxdydz$ Вопрос: найти

$$\mathbb{V}_G$$

$$G : (x^2+y^2+z^2)^2 = axyz, \ \ a > 0 \ \ x, y, z > 0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\psi \\ y = r\sin\phi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

x, y, z > 0, значит, действия происходят в первом октанте, значит:

$$\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]; \psi \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

$r(\psi,\phi) = a\cos\phi\cos\psi\sin\phi\cos\psi\sin\psi$ (из уравнения $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$).

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{r(\psi,\phi)} r^2\cos\psi dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi a^3\cos^3\phi\cos^3\psi\sin^3\phi\cos^3\psi\sin^3\psi d\phi = \dots = \frac{a^3}{360}$$

(Интегралы по ϕ и ψ считаются отдельно и друг от друга не зависят)