Математический анализ. Числовые ряды

25 апреля 2023 г.

Определение. Символ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, или $a_1 + a_2 + a_3 + ...$, где $a_k \in \mathbb{R}$ называется числовым рядом, a_k его членом, а $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ - n-й частичной суммой ряда.

Разумеется, как и всякая уважающая себя сумма, ряд может быть равен конкретному конечному числу или бесконечности. Но, кроме того, его значение может быть вообще не определено (например, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$). Поэтому, как и для несобственных интегралов, логично ввести понятие сходимости (своего рода конечности и равенства ряда конкретному числу). Вводится оно через частичные суммы:

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся (к числу S), если сходится его последовательность частичных сумм (как обычная числовая последовательность, к числу S).

Определение вполне логичное: если в $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ вместо n запихнуть ∞ (т.е. устремить n к бесконечности, иначе говоря), то получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то есть наш числовой ряд как раз. То есть если есть предел у последовательности частичных сумм, то это и есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Поясню на конкретном примере, что такое последовательность частичных сумм. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Этот ряд расходится и называется гармоническим, но это пока не важно. Ряд имеет вид: $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ...$ Его частичные суммы:

$S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$

$S_2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + 1/2$

$S_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3$

$S_4 = \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$

...

Теорема. Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд сходится, то $a_k \to 0$. (Т.е. необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю его k-го члена при $k \to \infty$). (Например, не нужно долго вспоминать определение сходимости, чтобы просто сказать, что по этой теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$ расходится, т.к. $k \not\to 0$).

Так же, как и для несобственных интегралов, для числовых рядов есть критерий Коши сходимости:

Критерий Коши. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ является сходящимся $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n', n'' \geq n(\varepsilon)(n'' \geq n') \Rightarrow |\sum_{k=n'}^{n''} a_k| < \varepsilon$$

Заметим, что он чертовски похож на критерий Коши для несобственных интегралов: интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (1, +\infty) : \forall \xi', \xi'' \geq \delta \Rightarrow |\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)| < \varepsilon$$

Критерий Коши для числовых рядов также зачастую записывают в следующем виде:

Критерий Коши'. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ является сходящимся $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

Заметим, что два приведенных критерия Коши для числовых рядов эквивалентны (ежику понятно, если секунду подумать, то вам будет тоже понятно).

Разумеется, как и в других темах, в числовых рядах критерий Коши используется для доказательства того, что ряд не сходится (то есть используется отрицание критерия Коши):

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \exists n_0(n) \geq n, p_0(n) \in \mathbb{N} : |\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} a_k| \geq \varepsilon$$

Воспользуемся Критерием Коши, чтобы доказать, что гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится:

$$\exists\varepsilon = 1/2 : \forall n \exists n_0 = n, p_0 = n : |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}| \geq |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}|\sum_{k=n+1}^{2n} 1| = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Как вы уже заметили, числовые ряды и несобственные интегралы очень похожи. И даже есть прямая связь между их сходимостью, так называемый интегральный признак:

Интегральный признак сходимости. Пусть функция f монотонно убывает к нулю на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)$ сходятся и расходятся одновременно.

С помощью данного признака получаем шаблон, аналогичный интегралу $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$, только для рядов: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \in (0, 1]$.

Полезный контрпример Условие монотонного убывания к нулю важно. То есть нельзя бездумно говорить, что любые ряд и несобственный интеграл от одной функции одновременно сходятся или расходятся. В этом можно убедиться на примере $\int\limits_{1}^{+\infty} sinx^3 dx$, который сходится (делаем замену $x^3 = t$, дальше по Дирихле) и соответствующего ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} sink^3$, который расходится, т.к. k-й член не стремится к нулю.

Для знакопостоянных рядов, как и для интегралов, есть 2 признака сравнения:

Первый признак сравнения. Пусть $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 : 0 \leq a_k \leq b_k$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (то есть если ряд с бОльшими членами сходится (конечен), то ряд с меньшими - и подавно), а если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Второй признак сравнения. Пусть $\forall k \ a_k > 0, b_k > 0$, а также $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, +\infty)$(то есть равен конечному числу). Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и расходятся одновременно.

Пример 1. Исследовать на абсолютную сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sink^3}{k^2}$$

Решение:

По признаку сравнения: $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится (шаблон). Значит, исходный ряд сходится абсолютно по признаку сравнения.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(e^{1/k^2} - 1)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(e^{1/k^2} - 1) \overset{\text{сх}}{\approx} \sum_{k=2}^{\infty} k(1 + \frac{1}{k^2} - 1) \overset{\text{сх}}{\approx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Полученный ряд расходится(гармонический ряд), следовательно, исходный тоже расходится по признаку сравнения.

Следующие 2 признака также применимы ТОЛЬКО для знакопостоянных рядов. Именно они используются в задаче по числовым рядам на экзамене.

Признак Коши. Пусть $a_k \geq 0 \forall k$ и $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, где q - некоторое число. Тогда:

1. q<1⇒ряд сходится
2. q>1⇒расходится
3. q=1⇒хз

Пример 3. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ((k + \frac{1}{12k}) sin\frac{1}{k})^{k^3}$

Решение:

Пример содержит некое выражение в степени, кратной n, целиком. Поэтому прям руки чешутся применить именно признак Коши, ведь в нем берется корень n-й степени (то есть степень делится на n).

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})sin\frac{1}{k})^{k^2} = [Teilor] = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})(\frac{1}{k}+\frac{1}{6k^3}+o(\frac{1}{k^3})))^{k^2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{12k^2}-\frac{1}{6k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^{k^2} = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{12k^2})^{k^2} = e^{-1/12} < 1$$

.

Значит, числовой ряд сходится по признаку Коши. Это ответ. Рассуждения ниже не входят в решение данного примера, а лишь показывают, по каким соображениям мы разложили синус именно до такой степени.

Заметим, что если разложить синус до первой степени, мы получили бы другой результат:

$$... = \lim_{k\to\infty}((k+\frac{1}{12k})(\frac{1}{k}+o(\frac{1}{k})))^{k^2} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{12k^2}+o(1))^{k^2} = e^{1/12} > 1$$

Но результат этот неверный: из-за o(1): рядом с ним есть член $\frac{1}{12k^2}$, который имеет порядок малости как раз $\leq$ o(1). То есть он "входит в o(1)". А в o(1) вполне могут быть члены порядка $\frac{1}{k^2}$ (-$\frac{1}{6k^2}$ как раз), то есть мы недоразложили бы, получили недостаточную точность.

Признак Даламбера. Пусть $\forall k : a_k > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = q \Rightarrow$:

1. q<1⇒ряд сходится

2. q>1⇒расходится

3. q=1⇒хз

Пример 4. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}(2k)!}{k^k k!}$

Решение:

Здесь мы не видим одной жирной висящей надо всем степени, поэтому будем пользоваться признаком Даламбера, а не Коши. Также факториалы являются признаком того, что надо использовать признак Даламбера.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{2k+2}(2k+2)!k^k k!}{(k+1)^{k+1}(k+1)!3^{2k}(2k)!} = \frac{9(2k+1)(2k+2)k^k}{(k+1)(k+1)^{k+1}} = \frac{9(2k+1)(2k+2)k^k}{(k+1)^2(k+1)^k} =$$

Далее разделим числитель и знаменатель на k^k, а также в последствии воспользуемся замечательным пределом:

$$= \frac{9(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}\right) \to \frac{36}{e} > 1, k \to \infty$$

Значит, ряд расходится по признаку Даламбера.

Знакопеременные ряды.

Признак Лейбница. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ сходится, если a_k монотонно убывает к 0 при $k \to \infty$.

Пример 5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$: $\frac{1}{\sqrt{k}}$ монотонно убывает к нулю при $k \to \infty$, следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ исследовать на сходимость и абсолютную сходимость.

Решение:

При исследовании на просто сходимость нам пригодится, очевидно, признак Лейбница. Рассмотрим $a_k = 1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}} = 2sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ - монотонно $\to 0$ при $k \to \infty$. Это так, потому что аргумент синуса при всех k принадлежит отрезку $[0; \pi/2]$, а синус на этом отрезке является монотонной функцией. Значит, наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ сходится по признаку Лейбница.

Исследуем на абсолютную сходимость. $|(-1)^k(1-cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})| = 2sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{k}} \sim 2(\frac{\pi}{2\sqrt{k}})^2 \sim \frac{1}{k}$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ не сходится абсолютно по признаку сравнения.

Признак Дирихле. Пусть a_k монотонно убывает к нулю ($\downarrow 0$) при $k \to \infty$. Пусть частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. (Частичные суммы ограничены значит, что $\exists M : \forall n |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| < M$). (Обратите внимание, что ограничены именно частичные суммы, а не ряд, что разные вещи.)

Пример 7. Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sink \cdot sink^2}{k}$.

Решение:

Будем решать с помощью признака Дирихле. $a_k = \frac{1}{k} \downarrow 0$. $b_k = sink \cdot sink^2$. Покажем, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены. В ходе решения воспользуемся формулой произведения синусов $2sin\alpha sin\beta = cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)$.

$$|\sum_{k=1}^{n} b_k| = |\sum_{k=1}^{n} sink \cdot sink^2| = |\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(cos(k^2-k) - cos(k^2+k))| =$$

$$= |\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(cosk(k-1) - cosk(k+1))| = \frac{1}{2}|(cos1(1-1) - cos1(1+1) + cos2(2-1) + ...)| =$$

$$= \frac{|cos0 - cosn(n+1)|}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$$

Предпоследнее равенство верно, потому что "соседние члены"взаимосокращаются.

Как видим, частичные суммы ограничены.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{sink \cdot sink^2}{k}$ сходится по признаку Дирихле.

Пример 8. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n} - sinn}$

Решение:

В данном примере мы используем 2 принципиальных приема: разложение по формуле Тейлора до O большого (!) и доказательство, что сумма синусов ограничена.

Итак, начнем с того, что разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{n}$, чтобы разложить по формуле Тейлора. Раскладывать будем $(1 - \frac{sinn}{\sqrt{n}})^{-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n} - sinn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{sinn}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{sinn}{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$$

Свели исходный ряд к трем рядам попроще. Исследуем их на сходимость.

Первый ряд: $\frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$. Осталось показать, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} sink$ ограничены. Разделим и умножим для этого их на $2sin(1/2)$, воспользуемся формулой произведения синусов и заметим, что соседние члены сократятся, как и в предыдущем примере. Умножили и разделили именно на $2sin(1/2)$, чтобы соседи сократились (см. формулу ниже).

$$|\sum_{k=1}^{n} sink| = |\frac{1}{2sin(1/2)}\sum_{k=1}^{n} 2sin(1/2)sink| =$$

$$= |\frac{1}{2sin(1/2)}\sum_{k=1}^{n}(cos(k-1/2)-cos(k+1/2))| = \frac{1}{sin(1/2)}|cos(1/2)-cos(n+1/2)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2sin(1/2)} = \frac{1}{sin(1/2)}$$

То есть частичные суммы ограничены. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим второй ряд. Понизим степень $sin^2 n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-cos2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2n}{2n}$$

Первый из этих рядов расходится (Гармонический ряд), а второй сходится по признаку Дирихле. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n}$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося рядов.

Рассмотрим оставшийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$.

Воспользуемся определением O большого: $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C|g(x)|$.

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})| \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sin^3 n}{n^{3/2}}| \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^{3/2}}|$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (шаблон, полученный нами из интегрального признака). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{\sqrt{n}-sinn}$ расходится как сумма сходящегося, абсолютно сходящегося и расходящегося рядов.

Ответ: расходится.

Замечание 1: Часто возникает вопрос: а до какого члена в подобных примерах раскладывать по Тейлору? Ответ прост: до того, пока интеграл от О большого не будет сходиться абсолютно. Больше можно, меньше нельзя: если бы разложили до $O(\frac{sin^2 n}{n})$, то мы бы ряд от такого О большого не смогли сверху ограничить сходящимся шаблоном (только $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, что нам бы ничего не дало.)

Замечание 2: Не путайте порядок малости, который мы запихиваем под О большое: если мы пишем $O(\frac{sin^3 n}{n^{3/2}})$, то если бы писали о малое, то оно было бы: $o(\frac{sin^2 n}{n})$

Замечание 3: Также с помощью разложения по Тейлору решаются примеры типа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin(\frac{sinn}{\sqrt[3]{n}})$. Не забывайте, что для разложения нужно, чтобы аргумент раскладываемой функции должен $\to 0$.

Замечание 4. В дз мб есть задача исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$. Данная задача как решается через O большое, начать нужно с вынесения n^2 из-под корня.

Пример 9. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin2nln^2 n}{n^\alpha}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin2nln^2 n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2 n}{n^\alpha} \cdot sin2n$$

Обозначим $a_n = \frac{ln^2 n}{n^\alpha}$; $b_n = sin2n$.

Частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{n} b_k$ ограничены (было для $sinn$ доказано в предыдущем примере).

Осталось найти, при каких α $a_n \downarrow 0$.

Рассмотрим для того, чтобы исследовать на монотонность, функцию $f(x) = \frac{ln^2 x}{x^\alpha}$

$$f'(x) = \frac{2lnx \cdot \frac{1}{x}}{x^\alpha} - \frac{\alpha ln^2 x}{x^{\alpha+1}} = \frac{lnx}{x^{\alpha+1}}(2 - \alpha lnx)$$

$\frac{lnx}{x^{\alpha+1}}$ всегда больше нуля при $x \geq 1$ ($n \geq 1$, т.к. натуральное).

$(2-\alpha lnx)<0$ при $\alpha>0$ (при достаточно больших x). То есть f(x), а вместе с ней и f(n) монотонно убывают при $\alpha>0$. Также очевидно, что $f(x)\to 0$при $\alpha>0$ (при $x\to\infty$). Значит, $a_n\downarrow 0$ при $\alpha>0$.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sin2nln^2n}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha>0$ по признаку Дирихле.

Докажем, что ряд расходится при $\alpha\le 0$ с помощью необходимого условия сходимости. Заметим, что при $\alpha\le 0$ $\frac{sin2nln^2n}{n^\alpha}\nrightarrow 0$ при $n\to\infty$. Значит, ряд расходится.

Докажем, что ряд абсолютно сходится при $\alpha>1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{ln^2n}{n^\alpha}\cdot sin2n|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2n}{n^\alpha}-\text{сх. ряд}$$

Получаем, что наш ряд сходится абсолютно по признаку сравнения.

Докажем, что ряд не сходится абсолютно при $0<\alpha\le 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{ln^2n}{n^\alpha}\cdot sin2n|\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2n}{n^\alpha}\cdot sin^2 2n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2n}{2n^\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2ncos4n}{2n^\alpha}$$

Первый ряд расходится (по интегральному признаку; там шаблонный интеграл), а второй - сходится по признаку Дирихле (см. пункт про сходимость; т.к. $\alpha>0$). Значит, их разность расходится, значит, исходный ряд не сходится абсолютно по признаку сравнения.

Ответ: ряд расходится при $\alpha\le 0$; сходится условно при $\alpha\in(0;1]$; сходится абсолютно при $\alpha>1$.

Пример 10. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся условно. Может ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$:

1. сходиться абсолютно?

2. сходиться условно?

3. расходиться?

1. Пусть $a_n=b_n=\frac{sinn}{n}$, тогда $a_nb_n=\frac{sin^2n}{n^2}$.

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся по признаку Дирихле. Но они не сходятся абсолютно, т.к.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{sinn}{n}| \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos2n}{2n}$$

Первый ряд расходится как гармонический, а второй сходится по признаку Дирихле. Значит, их разность расходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится абсолютно. Значит он сходится условно.

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2n}{n^2}$ сходится абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{sin^2n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \text{сходится}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно по признаку сравнения.

2. Пусть $a_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{cosn}{\sqrt{n}}$, тогда $a_n b_n = \frac{sin2n}{2n}$.

В этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходятся условно (доказывается, как и в предыдущем пункте).

3. Пусть $a_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{sinn}{\sqrt{n}}$, тогда $a_n b_n = \frac{sin^2n}{n}$.

В этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится (доказывается, как и обычно, с помощью понижения степени sin^2n).

Пример 11. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно. Что можно сказать про сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

Ответ прост: этот ряд также сходится абсолютно, т.к. последовательность его частичных сумм ограничена (а значит, сходится, как монотонная ограниченная функция. Монотонна, потому что сумма модулей, которые ≥ 0):

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$$

У нас в курсе есть даже более сильное утверждение:

Теорема. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

А справедливо ли аналогичное 11 примеру заключение для несобственных интегралов? В отличие от рядов, оно будет неверно. Рассмотрим следующий пример:

Пример 12. Пусть $f(x), g(x)$ интегрируемы на отрезке $[1, a]$ $\forall a > 1$. Пусть $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ и $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходятся абсолютно. Сходится ли абсолютно интеграл $I_3 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$?

Придумаем пример функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, чтобы это было неверно.

Используем для этого геометрический смысл определенного интеграла: площадь под графиком. Возьмем $f(x) = g(x) = n^2$ при $n \in \mathbb{N}$; при $x \in [n; n+\frac{1}{n^4}]$ и равные нулю при остальных значениях x. Тогда, посчитав интеграл, как площадь под графиком, то есть сумму прямоугольничков с основанием $\frac{1}{n^4}$ и высотой n^2, получаем:

$$\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int\limits_1^{+\infty} |g(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4}$$

То есть I_1, I_2 сходятся абсолютно.

При этом основания совпадают у прямоугольничков $f(x)$ и $g(x)$, причем совпадают с основанием прямоугольничков для произведения этих функций $f(x)g(x)$. А вот высота $f(x)g(x)$ будет равна $n^2 \cdot n^2 = n^4$. Тогда:

$$I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Получили, что I_3 может вообще расходиться, даже если I_1 и I_2 сходятся абсолютно. Можно подобрать $f(x)$ и $g(x)$ таким образом, что I_3 сойдется условно.

Теорема (Римана). Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда для любого A можно переставить члены ряда так, что сумма ряда будет равна A. (это очень интересная теорема. Алгоритм такой перестановки может быть дан как доп вопрос на высокую оценку на экзе. Кому интересно, гляньте Бесов, §15.4 теорема 4).

Пример 13. (Подсказка, как решать задачу из дз). Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\ln a} e^{in\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\ln a + i\alpha}\right)^n\right) = ...$$

далее сумма геометрической прогрессии.

Пример 14. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Решение.

Не факт. Приведем пример, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится. Возьмем $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Зададим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следующим образом: $a_1 = b_1$, $a_2 = a_3 = -b_1/2$, $a_4 = b_2$, $a_5 = a_6 = -b_2/2$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_1) + (b_2 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_2) + ...$$

Данный ряд сходится, т.к. его частичная сумма $\leq b_n \to 0$. А ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = (b_1^3 - \frac{1}{8}b_1^3 - \frac{1}{8}b_1^3) + (b_2^3 - \frac{1}{8}b_2^3 - \frac{1}{8}b_2^3) + ... = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.