Математический анализ. Семинар 3

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

19 сентября 2017

1 Семинар 3

1.1 Теорема о неявной функции.

Определение 1. *Функция F $X \to R$ -неявная функция, определённая уравнением $F(x, y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in X$*

Если на некотором множестве $E \in R^2$ уравнения $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ эквивалентны, то говорят, что уравнение разрешимо относительно у на этом множестве.

Теорема 1 (Теорема о неявной функции)**.** *Пусть функция f двух переменных удовлетворяет следующим условиям:*

1. *F - непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0)*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$*
3. *$(F'_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad F'_y$ - непрер. в $(x_0, y_0))$ (или) ($\exists F'_y$ и сохраняет знак) (достаточно выполнения любого из этих 2 условий)*

$\Rightarrow \exists$ прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0), на которой $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ Если F еще и дифференцируема в (x_0, y_0)
$\Rightarrow f$ - дифференцируема и $f'(x) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$
Добавление: если >2 переменных то

$$f'_{x_i} = -\frac{F_{x_i}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Теорема 2 (О системе неявных функций)**.** *Пусть выполнено:*

1. $F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ *- непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности* $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ $j = \overline{1, m}$

2. $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0;\ j = \overline{1, m}$

3. $$\mathcal{J} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots y_m)} \neq 0 \qquad \text{в точке } (x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Тогда $\exists Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)}) \Rightarrow \{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^m \Leftrightarrow \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m$

4. $$\begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1}, \dots, (f_1)'_{x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (f_m)'_{x_1}, \dots, (f_m)'_{x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (F_1)'_{y_1}, \dots, (F_1)'_{y_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (F_m)'_{y_1}, \dots, (F_m)'_{y_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (F_1)'_{x_1}, \dots, (F_1)'_{x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (F_m)'_{x_1}, \dots, (F_m)'_{x_n} \end{pmatrix}^{-1}$$

Зачем нужно это всё?

Теорема о неявной функции(система)

$\Downarrow$

Теорема об обратном отображении в ТФКП

$\Downarrow$

Можно работать с конформными отображениями областей

$\Downarrow$

Переходим к более приятным для работы областям для решения, к примеру, уравнений математической физики

Теорема 3 (Следствие)**.** *Отображение открытого множества непрерывно $\Leftrightarrow$ Прообраз всякого открытого множества открыт.*

Теорема 4 (о локальной обратимости отображения)**.** *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, отображение f: $G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на G и якобиан его $J \neq 0$ на G. Тогда $\forall x^{(0)} \in G$, $\forall y^{(0)} = f(x^{(0)})\ \exists U(x^{(0)}), U(y^{(0)})$: f осуществляет взаимнооднозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$*

Рассмотрим задачу, в которой вроде бы выполняются условия данной теоремы, но все же что-то не то.

1.2 Задача

Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями $u = e^x cosy$, $v = e^x siny$ показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимнооднозначным. Найти множество значений отображения f.

Решение:

Найдем Якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x cosy & -e^x siny \\ e^x siny & e^x cosy = e^{2x}(sin^2 y + cos^2 y) = e^{2x} > 0 \end{vmatrix}$$

Значит, якобиан не равен 0 ни в одной точке.

Отображение, кроме того, очевидно, непрерывно дифференцируемо.

То есть условия вышеуказанной теоремы выполняются.

При этом отображение не взаимнооднозначно: образ точки $(x_0, 0)$: $u(x_0, 0) = e^{x_0}$, $v(x_0, 0) = 0$, а образ точки $(x_0, 2\pi)$: $u(x_0, 2\pi) = e^{x_0}$, $v(x_0, 2\pi) = 0$. То есть 2 разных точки отобразились в одну. Значит, отображение не инъективно, а значит, не взаимнооднозначно.

Теореме выше это никак не противоречит: теорема утверждает, что для каждой точки найдется окрестность (возможно, небольшая), которая взаимнооднозначно отобразится. Теорема не говорит, что область целиком отобразится взаимнооднозначно.

Множество значений отображения: $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0;0)\}$ (для всех точек(u_0, v_0), кроме (0,0) мы можем найти (x_0, y_0): $f(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$)

1.3 §5#60(1)

Найти в точке (0,1) все частные производные неявной функции
$u^3 + 2xyu + 1 = 0$
Для начала найдем значение функции u в этой точке, а потом посчитаем производные.

$$u^3 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow u(0,1) = -1$$

$$u_x = -\frac{F_x}{F_u} = \frac{-2uy}{3u^2 + 2xy} = \frac{2}{3}$$

$$u_y = -\frac{F_y}{F_u} = -\frac{-2ux}{3u^2 + 2xy} = 0$$

1.4 §3 № 86

Решить с помощью перехода к полярной системе координат. Задача очень важная: понадобится в дальнейшем и будет на экзамене:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Выразим для начала новые координаты через старые:

$$\begin{cases} \phi = arcctg(\frac{x}{y}) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x\sqrt{y^2}}{y\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Подставим все полученное в исходное уравнение:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$r\cos\phi\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\cos\phi}{r}\right) - r\sin\phi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi - \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\sin\phi}{r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cos^2\phi - \frac{\partial u}{\partial r}r\cos\phi\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\sin^2\phi = 0$$

$u_\phi = 0 \Rightarrow u$ не зависист от $\phi \quad \Rightarrow u = u(r) = u(\sqrt{x^2+y^2}) = u(x^2+y^2)$
Ответ: $u = f(x^2+y^2)$ где функция f любая.

1.5 Задача на замену переменных в уравнении второго порядка

Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

к переменным:

$$u = x - at;\ v = x + at$$

Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ находится аналогично.
Сначала найдем первую производную:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Из условия посчитаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}(-a) + \frac{\partial z}{\partial v}(a).$$

Посчитаем вторую производную:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial z}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial z}{\partial u}(-a)) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial z}{\partial v}(a)) = -a\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial u}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial v}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial v}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Выразили. Производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ можно найти аналогично. После подставить обе найденные производные в исходное уравнение, и получится уравнение в новых координатах.

1.6 Задача на нахождение второго дифференциала

Найти второй дифференциал неявной функции, заданной уравнением:

$$u^3 + ux + y^2 = 0; \;\; u(-2,1) = 1$$

Первый способ - взять дифференциал два раза от обеих частей уравнения.

Первый раз:

$$3u^2du + xdu + udx + 2ydy = 0 \tag{1}$$

Подставив в (1) u(-2,1) = 1, получим выражение для первого дифференциала в этой точке:

$$du(-2,1,1) = -dx - 2dy \tag{2}$$

Возьмем от (1) еще раз дифференциал. Получим:

$$6udu^2 + 3u^2d^2u + dxdu + xd^2u + dudx + ud^2x + 2dy^2 + 2yd^2y = 0$$

Подставим сюда du(-2,1,1) = -dx-2dy, а также u(-2,1) = 1. Получим:

$$6(dx+2dy)^2+3d^2u+2dx(-dx-2dy)-2d^2u+2dy^2=0$$

Здесь учтено, что старшие дифференциалы независимых переменных равны нулю: $d^2x = d^2y = 0$. Выразим d^2u, это и будет ответ:

$$d^2u(-2,1,1) = -4dx^2 - 20dxdy - 26dy^2$$

Можно было эту задачу решать и другим способом, беря не дифференциал, а производную от обеих частей пару раз, а потом воспользовавшись формулой:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

1.7 Задача на решение уравнения в частных производных с помощью замены

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$u = x; \;\; v = y - \alpha z; \;\; \alpha = const$$

Далее будем обозначать частные производные $z_x, \; z_y$

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u \cdot 1 + z_v(-\alpha z_x) \Rightarrow z_x = \frac{z_u}{1+\alpha z_v}$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u \cdot 0 + z_v(1-\alpha z_y) \Rightarrow z_y = \frac{z_v}{1+\alpha z_v}$$

Подставив в изначальное уравнение, имеем:

$$\frac{z_u}{1+\alpha z_v} + \alpha\frac{z_v}{1+\alpha z_v} = 1$$

Приведя к общему знаменателю, имеем:

$$z_u = 1$$

Проинтегрировав, имеем ответ:

$$z = u + f(v) = x + f(y - \alpha z),$$

где f - произвольная функция.