Лекция 7. Уравнения n-го порядка, разрешенные относит. старшей производной.

(1) $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ $\quad f \in C(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

<u>Опр.</u> Функция $x(t),\ t \in \mathcal{J}$, называется **решением** уравнения (1), если

1) $x(t) \in C^n(\mathcal{J})\ \forall t \in \mathcal{J}$
2) $(t, x(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in \mathcal{J}$
3) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in \mathcal{J}$

Задача Коши: $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ $\quad$ (1)

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_0^1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1} \end{cases} \quad t_0 \in \mathcal{J} \quad (2)$$

Найти решение (1), удовлетворяющее (2).

Теорема существования и единственности

Пусть $f(t, \vec{z}) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$f(t, \vec{z}) \in Lip_{\vec{z}}(\overline{\Omega}_L)$.

Тогда $\exists\, \alpha > 0$ такое, что решение задачи Коши $(1)+(2)$ $\exists!$ на интервале $(t_0 - \alpha; t_0 + \alpha)$.

Д-во:

Уравнение (1) можно свести к нормальной системе ОДУ с помощью замены

$$z_1 = x$$
$$z_2 = \dot{x}$$
$$\vdots$$
$$z_n = x^{(n-1)}$$

В результате для $z_i(t)$ имеем систему

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = f(t, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{cases}$$

Если $\varphi(t)$, $t \in J$ — решение (1), то

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$ — решение системы (3).

Обратно, если $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$ — решение (3), то

$\varphi(t) = z_1(t)$ — решение (1). Следовательно, все утверждения, полученные для систем, верны и для ур-ия n-го порядка.

При условии $f(t,\vec{z}) \in C(\Omega)$

$f(t,\vec{z}) \in Lip_{\vec{z}}(\overline{\Omega}_L)$

$$(4) \quad \vec{z}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

задача Коши (3) + (4) имеет единственное решение согласно основной теореме. ∎

Нормальные системы линейных дифф. ур-ий с переменными коэффициентами.

<u>Опр.</u> Пусть зафиксированы $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ (промежуток), $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ — непрерывные ф-ции на I; $i,j = \overline{1,n}$

Система вида

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \cdot x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \ t \in I$$

называется нормальной линейной системой ДУ.

<u>Опр.</u> Непрерывно дифференцируемые функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, $t \in I$, называются решением линейной системы, если при подстановке в (1) уравнения системы

обращаются в тождества при $t \in I$.

Систему можно записать в матричном виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Задача Коши: Найти решение $\vec{\varphi}(t)$, $t \in I$, системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$, $t_0 \in I$. (2)

Теорема 1 существования и единственности для линейной системы.

Пусть ф-ции $a_{ij}(t)$, $b_i(t) \in C(I)$. Тогда решение задачи Коши (1)+(2) существует на всем I и единственно.

теорема глобальная

Док-во: Возьмём произвольный отрезок $[a,b] \subseteq I$: $t_0 \in [a,b]$.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \quad (1)$$

Правая часть (1) определена в замкнутой выпуклой области $[a,b]\times R^n$. Т.к. $a_{ij}(t), b_i(t)$ непрерывны на $[a,b]$, то они ограничены $\Rightarrow$ производные $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| = |a_{ij}(t)|$ также ограничены $\Rightarrow$ вып. усл. Липшица.

Однако замкнутая область $\bar{\Omega}$ неограничена $\Rightarrow$ из непрерывности $\vec{f}(t,\vec{x})$ не следует огр-ть.

Потребуется более точно оценить $\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|$.

Также определим последовательные приближ.

$$\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\vec{\varphi}_{n+1}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(\tau)\vec{\varphi}_n(\tau) + \vec{b}(\tau) \right) d\tau, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\|\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\tau, \bar{\varphi}_1(\tau)) - f(\tau, \bar{x}_0)\| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\bar{\varphi}_1 - \bar{x}_0\| d\tau \right|$$

Ф-ции $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_1$ непрерывны на отрезке $[a, b]$

$\Rightarrow$ ограничены $\Rightarrow \|\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_0\| \leq C$ — нек. постоянная

$$\|\bar{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1\| \leq L \cdot C \cdot |t - t_0| \leq LC(b-a).$$

Далее по индукции $\|\vec{\varphi}_{n+1} - \vec{\varphi}_n\| \leq L^n \cdot C \dfrac{|t-t_0|^n}{n!} \leq$

$$\le L^n C \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Рассмотрим ряд $\vec{\varphi}_0 + \vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0 + \ldots + \vec{\varphi}_{n+1} - \vec{\varphi}_0 + \ldots$.

Он мажорируется рядом $\|\vec{\varphi}_0\| + C + CL(b-a) + \ldots$

$+ CL^n \frac{(b-a)^n}{n!} + \ldots$, который сх-ся по пр. Даламбера.

$$\Rightarrow \vec{\varphi}_n(t) \rightrightarrows \vec{\varphi}(t) \in C[a,b]$$

$\vec{\varphi}(t)$ явл. решением

$$\sup_{[a,b]} \left\| \int_{t_0}^{t} (\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau))) d\tau \right\| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}\| d\tau \right|$$

$$\le \sup_{[a,b]} \|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}\| \cdot L \cdot (b-a) \rightrightarrows 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, \vec{\varphi}_n) d\tau \rightrightarrows \int_{t_0}^{t} f(\tau, \vec{\varphi}) d\tau \quad \text{при } n \to \infty, \ t \in [a,b]$$

$\Rightarrow \vec{\varphi}$ - решение ЗК.

Единственность следует из основной теор.

Т.к. $[a, b]$ - произвольный отрезок, содержащий t_0, и лежащий в I, то $\vec{\varphi}_n(t)$ сходится в каждой точке I и на всем I явл. решением ур-ия.

Сл-вие: Если $\vec{x}(t_0) = \vec{0}$ для однородной системы ($\vec{b} = \vec{0}$), то единств. реш ЗК является $\vec{x}(t) = \vec{0}$, $t \in I$.

Фундаментальное решение однородной системы ДУ

Решения линейной одноp. системы образуют линейное векторное пр-во.

Размерность и базис — ?

Опр. Вектор-ф-ции $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_k(t)$, $t \in I$, называются линейно независимыми на I, если равенство $c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_k\vec{x}_k(t) = \vec{0}$ где c_i — const, справедливо для всех $t \in I$ лишь тогда и только тогда, когда $c_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Опр. Определителем Вронского системы ф-ций $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, $t \in I$ называется определитель:

$$W(t) \equiv W(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

Лемма 1. Если $\vec{x_1}, .., \vec{x_n}$, $t \in I$ — линейно зависимы, то $W(t) \equiv 0$, $t \in I$

Д-во: если $\overline{x_1}, .., \overline{x_n}$ лин. зав., то $\exists\, c_k \neq 0$

$$\Rightarrow -\vec{x_k} = \frac{c_1 \vec{x_1}}{c_k} + .. + \frac{c_n \overline{x_n}}{c_k}$$

получим лин зав. столбец в $W \Rightarrow W \equiv 0$

Лемма 2. Если $\vec{x_1}, .., \overline{x_n}$ — решения одн. сист.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \quad (2),$$ то след. условия эквивалентны:

1) $W(t) = 0 \quad \forall t \in I$

2) $\exists\, t_0 \in I \quad W(t_0) = 0$

3) $\vec{x_i}$ — лин. зависимы

Д-во: 2) $\to$ 3) $\exists C_i : \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{x}_i(t_0)}_{\vec{x} \text{ — это тоже решение по следствию оно } \equiv \vec{0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}_i$ лин. зав.

3) $\to$ 1) по лемме 1

Лемма 3. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — реш. (2), $t \in I$.

Следующие условия эквив:

1) x_i — лин. незав.

2) $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

3) $\exists t_0 : W(t_0) \neq 0$

Очевидно.