

# Семинар 4. Частные производные и дифференцируемость

Скубачевский Антон

15 февраля 2023 г.

Пару слов про обозначения. Мы имеем дело с  $n$ -мерным пространством.  $x^{(0)}$  - некая точка в этом пространстве, в которой мы будем определять, что такое частная производная. Точка, т.е. элемент  $n$ -мерного пространства, имеет  $n$  координат:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

**Определение. Частная производная**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Видим, что определение эквивалентно определению производной в 1-мере (предел приращения функции к приращению аргумента), но еще нужно добавить, что мы фиксируем все остальные переменные (считаем их константами), кроме той, по которой мы берем частную производную.

**Частные производные обозначаются кучей способов:**  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = f_{x_i}$

Дадим эквивалентное определение частной производной, в терминах не приращения аргумента, стремящегося к нулю, а в терминах разницы значений в двух очень близких точках (но то, что 2 точки близки, и значит, что приращение аргумента между ними стремится к нулю =)).

### Определение'. Частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \lim_{x_i \rightarrow x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}}$$

Частные производные считаются так же просто, как и обычные: например,  $\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy$ , то есть мы фиксируем все переменные кроме той, по которой берем производную, и берем по методам, изученным еще в школе, в лоб производную по нужной переменной. Частная производная от функции, не зависящей от какой-то переменной, по этой переменной, равна нулю:  $\frac{\partial \ln(\sin y)}{\partial x} = 0$ , так как это по сути производная от константы. Покажем на примере пожирнее, как считать частные производные, чтобы стало совсем понятно, что это как в школе.

**Пример 0.** Найти  $f'_x$  для функции  $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(\sin x + e^y)$

$$f'_x(x, y) = 2x\ln(\sin x + e^y) + \frac{(x^2 + y^2)\cos x}{\sin x + e^y}$$

**Пример 1.** Найти частные производные в точке  $(0, 0)$  функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

В случаях, когда функция задана таким сложным образом в некоторой точке, частную производную в ней приходится считать по определению: если мы посчитаем частную производную в лоб, по школьному, то, подставляя после этого в получившееся выражение точку  $(0, 0)$ , мы получим ноль в знаменателе.

В данном случае  $x^{(0)} = (0, 0)$ . Также известно из условия, что  $f(0, 0) = 0$ . Тогда производная по определению':

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

Замечу, что последний предел  $(0/x)$  действительно равен нулю, это НЕ неопределенность вида  $0/0$ : ведь в числителе не что-то, стремящееся к нулю, а именно просто цифирка 0. А если мы 0 раз возьмем любое, даже сколь угодно большое выражение  $(1/x \text{ при } x \rightarrow \infty)$ , все равно получим ноль.

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Думаю, вы заметили, что считать частные производные по определению в противных точках (а это вам придется делать даже не письменном экзамене) очень просто!

Дадим определение дифференцируемости. Напомню, что даже в случае одной переменной сказать, что определение дифференцируемости: "ну это когда есть производная" неверно. Это не определение, это необходимое и достаточное условие для случая функции одной переменной, и к нему надо еще добавить, что эта производная должна быть конечной. Определение дается именно через приращение функции и  $o()$  малое:

**Определение. Дифференцируемость.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x^{(0)}$ . Тогда  $f$  называется дифференцируемой в этой точке, если ее приращение в этой точке (приращением называется  $\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ) представимо в виде:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + o(|\Delta x|),$$

где  $A_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\Delta x| \rightarrow 0$ .

**Замечание 1.** Сказать в конце определения строчку "где  $A_i \in \mathbb{R}$ ,  $|\Delta x| \rightarrow 0$ " тоже важно.

**Замечание 2.**  $\Delta x$  это вектор из приращений:  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ . Соответственно,  $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$

**Замечание 3.**  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x^{(0)}$  (очень важно, в окрестности какой точки мы смотрим, иначе определение  $o()$  малого лишено смысла), если  $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Теорема.** Функция, дифференцируемая в точке, имеет в это точке все частные производные, причем  $f'_{x_i} = A_i$ . В ОТЛИЧИЕ ОТ СЛУЧАЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ОБРАТНОЕ НЕВЕРНО!

**Доказательство:**

Зафиксируем все переменные, кроме  $x_1^{(0)}$ , то есть будем давать приращение только по ней. Тогда определение дифференцируемости (имеется в виду, что приращение  $\Delta f$  берется в точке  $x^{(0)}$ , в которой функция дифференцируема):

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + o(|\Delta x|) \Leftrightarrow \Delta f - A_1 \Delta x_1 = o(|\Delta x|)$$

По определению  $o()$  малого это значит, что

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f - A_1 \Delta x_1}{\Delta x_1} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A_1$$

Но  $\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$  по определению частной производной. Значит,  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  существует и равна  $A_1$ . Про производные по остальным переменным доказывается аналогично. Ч.т.д.

**Теорема.** Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

По определению функция непрерывна, когда приращение функции в точке  $x^{(0)}$   $\Delta f \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Устремив в определении дифференцируемости  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим, что  $\Delta f \rightarrow 0$ . Значит,  $f$ -непрерывна в точке  $x^{(0)}$ , ч.т.д.

**Замечание.** Но из непрерывности и существования частных производных не следует дифференцируемость. Рассмотрим пример 1:

**Пример 1(продолжение).**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Мы уже доказали, что у этой функции есть в точке  $(0,0)$  производные. Покажем, что она непрерывна. Покажем также, что при этом она не дифференцируема.

Функция  $f$  будет непрерывна в точке  $(0, 0)$ , если

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(0, 0) = 0$$

Сделаем полярную замену координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{cases}$$

Тогда:

$$\left| \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - f(0,0) \right| = \left| \frac{2\rho^2 \cos\phi \sin\phi}{\rho} - 0 \right| \leq |2\rho| \rightarrow 0$$

Значит, функция непрерывна, ч.т.д.

Исследуем на дифференцируемость. Определение дифференцируемости для функции 2 переменных в точке  $(0,0)$  (здесь  $\Delta x$  это вектор с координатами  $(x,y)$ .  $|\Delta x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ):

$$f(x, y) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \text{ при } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

По определению  $o()$  малого это значит, что:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (1)$$

Будем в дальнейшем выражение (1) использовать для исследования на дифференцируемость. Если предел равен нулю, то функция дифференцируема. Если не нулю, или его не существует, то не дифференцируема.

Итак, исследуем в точке  $(0, 0)$  функцию  $f$  на дифференцируемость:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Составим выражение (1), вспомнив, что у нас уже найдены производные:  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ .  $f(0, 0) = 0$  тоже.

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} / \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2\rho^2 \sin\phi \cos\phi}{\rho^2} = \sin 2\phi = \sqrt{2}/2 \nrightarrow 0 \text{ например, при } \phi = \pi/8 \end{aligned}$$

Значит, функция не дифференцируема в нуле. Получили важный пример, доказывающий, что из существования производных и непрерывности не следует дифференцируемость. Советую его запомнить к экзамену.

**Замечание.** Из непрерывности не следует существование частных производных. Например,  $f(x, y) = |x|$  непрерывна в точке  $(0, 0)$ , но не имеет в ней производной  $f'_x(0, 0)$ , доказываемое это аналогично 1му семестру: односторонние производные не равны, значит, производной нет.

**Замечание.** Из существования частных производных не следует непрерывность.

**Пример 2.** Доказать, что у функции  $f(x, y)$  в точке  $(0, 0)$  существуют частные производные, но она не непрерывна в этой точке:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \neq 0 \\ 0 & x \neq y \text{ or } x = y = 0 \end{cases}$$

Эта функция не непрерывна по направлению  $x = y$  в точке  $(0, 0)$ : предел по этому направлению равен 1 (т.к. значение функции = 1 в каждой точке этого направления), а значение  $f(0, 0) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$ . Следовательно, функция не может быть непрерывной в  $(0, 0)$ , т.к. она не непрерывна в этой точке по одному из направлений.

Посчитаем производный по определению:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

Аналогично,

$$f_y(0, 0) = 0$$

Таким образом, у функции в точке  $(0, 0)$  существуют обе частных производных, но она не непрерывна.

**СЗ §4 4.** Вычислить в точке  $(0; 0)$  частные производные  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  функции

$$f = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

**Решение:**

Данная задача демонстрируем, что смешанные частные производные не всегда равны.

Вычислим первые частные производные при  $x^2 + y^2 \neq 0$ :

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

При  $x^2 + y^2 = 0$ :

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4 \cdot x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4 \cdot y} = 0.$$

Вычислим  $f''_{xy}(0, 0)$ :

$$f''_{xy}(0, 0) = (f'_x)'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^4 \cdot y} = -1.$$

Вычислим  $f''_{yx}(0, 0)$ :

$$f''_{yx}(0, 0) = (f'_y)'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^4 \cdot x} = 1.$$

**Определение. Непрерывная дифференцируемость.** Функция называется непрерывно дифференцируемой в точке, если у нее существуют и непрерывны частные производные по всем переменным в этой точке.

Таким образом, чтобы доказать, что функция непрерывно дифференцируема в точке, нужно сначала найти по-школьному все ее производные как функции  $x$ , и потом сверить их предел в данной точке со значением в этой точке. Для примера рассмотрим, как исследовать функцию на непрерывность, дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость в случае функции одной переменной (задача из прошлого семестра):

**Пример 4.** Функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

исследовать на непрерывность, дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость при всех  $\alpha$ .

Решение:

Во-первых, очевидно, что при всех  $\alpha$  при всех  $x \neq 0$  наша функция непрерывно дифференцируема как композиция непрерывно дифференцируемых функций (ну и, следовательно, дифференцируема и, следовательно, непрерывна).

Значит нам нужно исследовать поведение функции только в точке 0.

1) Исследуем на непрерывность в нуле. То есть по определению непрерывности нужно найти  $\alpha$ , при которых

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Очевидно, что при  $\alpha > 0$  этот предел равен нулю, т.к.  $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0$  при  $\alpha > 0$ , следовательно, по теореме о двух милиционерах, предел есть и равен нулю.

Теперь осталось доказать отсутствие непрерывности при  $\alpha \leq 0$ , то есть что  $\neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (ну или что этот предел не равен  $f(0)$ ). Мы докажем, что его не существует, пользуясь определением предела по Гейне. Нужно доказать, что  $\exists x'_n, x''_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n).$$

Возьмем  $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$  и  $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ , обе  $\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\sin(x'_n) = 0$$

$$\sin(x''_n) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \begin{cases} 1, \alpha = 0 \\ \infty, \alpha < 0 \end{cases}$$

Следовательно, предела нет в нуле по определению Гейне.



Итак, функция непрерывна в нуле при  $\alpha > 0$ , а в остальных точках при всех  $\alpha$

2) Дифференцируемость: в случае таких странно заданных функций следует действовать по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \operatorname{sign} x = 0 \text{ при } \alpha > 1,$$

т.к.  $\sin \frac{1}{x}$  - функция ограниченная, а  $|x|^{\alpha-1}$  - бесконечно малая.  $\operatorname{sign} x$  взялся при делении модуля икса на икс, т.к.  $(|x| = x \operatorname{sign} x)$ . Итак, мы доказали, что при  $\alpha > 1$  функция дифференцируема в нуле (ну и значит в каждой точке, т.к. в остальных точках, как мы уже заметили, она дифференцируема).

Но из этого не следует, что при  $\alpha \leq 1$  функция не дифференцируемая в нуле. Это надо показать. Т.е. надо показать, что  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \operatorname{sign} x$  при  $\alpha \leq 1$ . Показывается отсутствие предела обычно с помощью определения по Гейне: возьмем 2 последовательности  $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$  и  $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ , обе  $\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда при таких последовательностях:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x'_n} \operatorname{sign} x'_n = 0,$$

$$\text{т.к. } \sin(2\pi n) = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x''_n|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x''_n} \operatorname{sign} x''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |x''_n|^{\alpha-1} \operatorname{sign} x''_n \neq 0,$$

$$\text{т.к. } \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} |x''_n|^{\alpha-1} = \begin{cases} 1, \alpha = 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$$

Т.о., мы получили, что по определению предела функции по Гейне не существует предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x)$  при  $\alpha \leq 1$ , где  $g(x) = |x|^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \operatorname{sign} x$ , т.к.  $\exists x'_n, x''_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x''_n)$$

(Один равен нулю, а второй единице или бесконечности).

Резюме исследования на дифференцируемость: при  $\alpha > 1$  функция дифференцируема во всех точках. При  $\alpha \leq 1$  функция дифференцируема во всех точках кроме  $x = 0$ .

3). Исследуем на непрерывную дифференцируемость в точке  $x = 0$ . Для этого возьмем производную и исследуем производную на непрерывность в нуле (напомним, что непрерывная дифференцируемость - непрерывность производной как функции).

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \operatorname{sign} x - |x|^{\alpha} x^{-2} \cos \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \operatorname{sign} x - |x|^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

Аналогично предыдущим двум пунктам убеждаемся, что производная будет непрерывна в нуле при  $\alpha > 2$ :

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |f'(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha |x|^{\alpha-1} + |x|^{\alpha-2}) = 0, \alpha > 2$$

(Тут использовалось, что модуль суммы меньше суммы модулей.)

Далее убеждаемся с помощью определения предела по Гейне в том, что при  $\alpha \leq 2$  производная не будет непрерывна. Аналогично берем те же последовательности.

Задача решена.

**Теорема.** Из непрерывной дифференцируемости в точке следует дифференцируемость в этой точке.

Но из дифференцируемости не следует непрерывная дифференцируемость. Докажем это с помощью следующего примера (его стоит тоже к экзамену запомнить).

**Пример 5.** Исследовать на дифференцируемость и непрерывную дифференцируемость в точке  $(0,0)$  функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Для исследования на дифференцируемость найдем по определению частные производные в  $(0,0)$ :

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 0) / (x - 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

(предел равен нулю как произведение бесконечно малой функции на ограниченную). Аналогично найдем производную по  $y$ :

$$f'_y(0,0) = 0$$

Чтобы доказать, что функция дифференцируема, запишем выражение (1):

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Значит, функция дифференцируема в точке  $(0,0)$ .

Покажем, что не непрерывно дифференцируема в  $(0,0)$ . Для этого найдем "по-школьному" частные производные при  $(x,y) \neq (0,0)$ :

$$f'_x(x,y) = 2x \left( \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{\cos \frac{1}{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \right)$$

Докажем теперь, что эта частная производная как функция не является непрерывной в точке  $(0,0)$ , то есть либо у нее нет предела в этой точке, либо этот предел не равен ее значению в этой точке  $f'_x(0,0)$ . Оказывается, предела нет. Докажем, что предела не существует, по Гейне.

Возьмем  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0)$  - последовательность Гейне в точке  $(0,0)$ .

$$f'_x(x_n, y_n) = 2x_n (\sin(2\pi n) - 2\pi n \cdot \cos(2\pi n)) = -2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) = -2\sqrt{2\pi n} (-1)^n \rightarrow$$

Значит, предела нет по Гейне. Значит, эта производная в нуле не непрерывна. Значит,  $f$  - не непрерывно дифференцируема в нуле (т.к. по крайней мере одна производная не непрерывна).

Примеры типа "исследовать на дифференцируемость" типичные в экзаменационной работе. Давайте решим пару таких номеров из экзаменов прошлых лет.

**Пример 6.** Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0,0)$  функцию  $f(x,y) = y + \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y})$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \ln 3 - \ln 3}{y} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{y + \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y}) - \ln 3 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y}/3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(1 + \frac{\rho \sqrt[3]{\cos^2 \phi \sin \phi}}{3})}{\rho} = \\ &= [\text{разложим логарифм по формуле Тейлора до 1го порядка}] = \\ &= \frac{\frac{\rho \sqrt[3]{\cos^2 \phi \sin \phi}}{3} + o(\rho)}{\rho} \end{aligned}$$

При  $\phi = \pi/4$ , например, первое слагаемое равно  $\frac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0$ . Второе же (о малое) стремится к нулю. Значит, их сумма не стремится к нулю. Следовательно, функция не дифференцируема в точке  $(0;0)$ . На примере этого примера мы видим, что производные, посчитанные в нуле по определению, не всегда равны нулю =).

**Пример 7.** Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0;0)$  функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+y) - y \ln(1+x) + \frac{xy}{2}(y-x)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{else} \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{0 + 0 + 0}{x(x^2 + 0)^{3/2}} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

В этом примере придется раскладывать по формуле Тейлора аж до 3го порядка малости. До 3го, чтобы члены второго порядка сократились с выражением  $\frac{xy}{2}(y-x)$ . А если разложим только до 2го, в числителе останется лишь  $o()$  малое - верный признак того, что мы недоразложили. Будем сразу писать  $o(\rho^3)$ , а не от  $x$  и  $y$  для удобства. Также в знаменателе сразу сделаем замену  $x^2 + y^2 = \rho$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\
& = \frac{x(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(\rho^3)) - y(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(\rho^3)) + \frac{xy}{2}(y - x)}{\rho^4} = \\
& = \frac{\frac{xy^3 - yx^3}{3} + o(\rho^4)}{\rho^4} = \frac{\frac{\rho^4}{3}(\cos\phi\sin^3\phi - \sin\phi\cos^3\phi)}{\rho^4} + o(1) = \cos\phi\sin^3\phi - \sin\phi\cos^3\phi + o(1)
\end{aligned}$$

Получили сумму двух слагаемых: одно стремится к нулю, а второе – нет. Следовательно, их сумма не стремится к нулю, следовательно, исходная функция не дифференцируема.

**Пример 7.** Исследовать на дифференцируемость в точке (2;0) функцию:

$$f(x, y) = (x^2 + xy - 4)\sqrt{x^2 + y^2 + xy - 4x - 2y + 4}$$

Чтобы исследовать в привычной точке (0,0), сразу сделаем замену  $z = x - 2$ :

$$f(z, y) = (z^2 + 4z + zy + 2y)\sqrt{z^2 + y^2 + yz}$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f'_z(0, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{((z + 2)^2 - 4)\sqrt{z^2}}{z} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = 0 \text{ аналогично}$$

Для того, чтобы было удобно оценивать сверху, предел выражения (1) будем от модуля искать. Также сделаем замену  $z = \rho\cos\phi$ ;  $y = \rho\sin\phi$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(z, y) - f(0, 0) - f'_z(0, 0)z - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{f(z, y)}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right| = \\
& = \left| \frac{(z^2 + 4z + zy + 2y)\sqrt{z^2 + y^2 + yz}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right| = \\
& = \left| \frac{(\rho^2\cos^2\phi + 4\rho\cos\phi + \rho^2\cos\phi\sin\phi + 2\rho\sin\phi)\rho\sqrt{1 + \cos\phi\sin\phi}}{\rho} \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\rho(\rho \cos^2 \phi + 4 \cos \phi + \rho \cos \phi \sin \phi + 2 \sin \phi)| \cdot 2 \leq \\
&\leq 2(|\rho^2 \cos^2 \phi| + |4 \rho \cos \phi| + |\rho^2 \cos \phi \sin \phi| + |2 \rho \sin \phi|) \leq \\
&\leq 2(\rho^2 + 4\rho + \rho^2 + 2\rho) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Значит, функция дифференцируема в исследуемой точке.

**Определение. Дифференциал.** Линейная функция

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

называется дифференциалом функции  $f$  в точке  $x^{(0)}$ . Для симметричности записи вместо  $\Delta x_i$  пишут  $dx_i$  и называют их дифференциалами независимых переменных.

Например, дифференциал функции 3 переменных в точке  $x^{(0)}$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид:

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

В записи дифференциала справа всегда должны стоять дифференциалы независимых переменных (кроме случая, когда все производные = 0, тогда 0). Т.е. если у вас записано  $df(x^{(0)}) = 47$  - это заведомо неверно. Вы значит посеяли где-то дифференциал независимой переменной.

**Пример 8.** Найти первый дифференциал в точке  $(1; 0; 1)$  функции  $f = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$

Найдем для этого частные производные:

$$f'_x = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0 \text{ при } x=1, y=0, z=1$$

Аналогично,

$$f'_y(1, 0, 1) = 0$$

$$f'_z(1, 0, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$df(1, 0, 1) = f'_x(1, 0, 1)dx + f'_y(1, 0, 1)dy + f'_z(1, 0, 1)dz = -\frac{1}{2}dz$$

Второй дифференциал обозначается  $d^2f$  ("дэ два эф") и является по опреелению дифференциалом от первого дифференциала. Второй и старшие дифференциалы от независимой переменной равны 0. Дифференциал в квадрате обозначается  $(dx)^2 = dx^2$  ("дэ икс квадрат"), и он, разумеется, не совпадает с  $d^2x$ .

Формула для вычисления второго дифференциала:

$$d^2f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) dx_i dx_j$$

Здесь  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  - вторая частная производная: сначала берется по  $x_i$ , потом по  $x_j$ . Обозначается также  $f''_{x_i x_j}$ . Например,  $(\ln x \cdot y^2)''_{xy} = (\frac{y^2}{x})'_y = \frac{2y}{x}$ . Если вторая производная берется по 2 разным переменным (а не по  $xx$  или  $yy$ ), то такую вторую производную называют смешанной.

**Теорема.** Пусть у функции  $f$  двух переменных  $x, y$  частные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда  $f''_{xy} = f''_{yx}$

В большинстве задач эти производные будут равны.

**Второй дифференциал для случая функции 2 переменных:**

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= f_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yx}(x_0, y_0)dydx + f_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = \\ &= [ \text{если вторые смешанные производные непрерывны} ] = \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yy}(x_0, y_0)dy^2 \end{aligned}$$

**Пример 9.** Посчитать второй дифференциал в точке  $u(2, 0) = 1$  от функции  $u(x, y)$ , неявно заданной уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + u^2 - 8xu - u + 8 = 0 \quad (2)$$

**Первый способ.** Найдем первые производные от обеих частей (2).

$$(2)'_x : 4x + 2uu_x - 8u - 8xu_x - u_x = 0 \quad (3)$$

Подставим в (3)  $u(2, 0) = 1$ :

$$8 + 2u_x - 8 - 16u_x - u_x = 0 \Rightarrow u_x(2, 0, 1) = 0$$

$$(2)'_y : 4y + 2uu_y - 8xu_y - u_y = 0 \quad (4)$$

Подставим в (4)  $u(2, 0) = 1$ :

$$2u_y + 2uu_y - 8xu_y - u_y = 0 \Rightarrow u_y(2, 0, 1) = 0$$

Тогда первый дифференциал

$$du(2, 0, 1) = u_x(2, 0, 1)dx + u_y(2, 0, 1)dy$$

Вторые производные будем искать аналогично, беря производные от обеих частей (3) и (4). (именно (3) и (4), а не от  $u_x(2, 0, 1) = 0$ !)

$$(3)'_x : 4 + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 8u_x - 8u_x - 8xu_{xx} - u_{xx} = 0$$

Подставим сюда  $u(2, 0) = 1$ ;  $u_x(2, 0, 1) = 0$ ;  $u_y(2, 0, 1) = 0$ :

$$4 + 2u_{xx} - 16u_{xx} - u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx}(2, 0, 1) = \frac{4}{15}$$

$$(3)'_y : 2u_yu_x + 2uu_{xy} - 8u_y - 8xu_{xy} - u_{xy} = 0 \Rightarrow u_{xy}(2, 0, 1) = 0$$

$$(4)'_y : 4 + 2u_y^2 + 2uu_{yy} - 8xu_{yy} - u_{yy} = 0$$

$$4 - 15u_{yy}(2, 0, 1) = 0 \Rightarrow u_{yy}(2, 0, 1) = \frac{4}{15}$$

Тогда по формуле для второго дифференциала имеем:

$$d^2u(2, 0, 1) = u_{xx}(2, 0, 1)dx^2 + 2u_{xy}(2, 0, 1)dxdy + u_{yy}(2, 0, 1)dy^2 = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2$$

**Второй способ.** Будем сразу искать дифференциалы от обеих частей:

$$d(2) : 4xdx + 4ydy + 2udu - 8udx - 8xdy - du = 0 \quad (5)$$

Подставим  $u(2, 0) = 1$ :

$$8dx + 2du - 8dx - 16dy - du = 0 \Rightarrow du(2, 0, 1) = 0$$

Видим, что первые дифференциалы в обоих случаях совпали. Возьмем теперь второй дифференциал от обеих частей (5). Когда его будем



братъ, учтем, что вторые дифференциалы от независимых переменных равны 0:  $d^2x = d^2y = 0$ , а также что записывают  $(dx)^2 = dx^2$ ;  $(dy)^2 = dy^2$ ;  $(du)^2 = du^2$

$$d(5) : 4dx^2 + 4xd^2x + 4dy^2 + 4yd^2y + 2du^2 + 2ud^2u - 8dudx - 8ud^2x - 8dxdy - 8xd^2y - 8dydu - 8yd^2u - d^2u = 0$$

Подставим сюда  $u(2, 0) = 1$ ;  $du(2, 0, 1) = 0$  и учтем, что вторые дифференциалы независимых переменных = 0:

$$4dx^2 + 4dy^2 + 2du^2 + 2d^2u - 16d^2u - d^2u = 0$$

Имеем:

$$d^2u(2, 0, 1) = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2$$

**Формула Тейлора.** Для случая функции 2 переменных разложение по формуле Тейлора в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  до  $o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$  (при условии, что все частные производные до второго порядка включительно существуют и непрерывны):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

Запомнить эту формулу очень просто:  $f(x, y) = f(\text{точке}) + \text{первый дифференциал}$ , где вместо  $dx$  и  $dy$  стоят приращения  $(x - x_0)$  и  $(y - y_0)$  +  $1/2 \cdot (\text{второй дифференциал, где вместо дифференциалов независимых переменных соответствующие приращения}) + o()$ . Не забудьте главное заменить  $dx$  и  $dy$  на  $(x - x_0)$  и  $(y - y_0)$ , иначе получится полный бред.

**Пример 9.(продолжение)** Разложить  $u(x, y)$  по формуле Тейлора до  $o((x - 2)^2 + (y)^2)$ :

$$u(x, y) = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(\frac{4}{15}(x - 2)^2 + \frac{4}{15}(y)^2) + o((x - 2)^2 + (y)^2)$$

# 1 Дифференцирование неявной функции.

**Теорема.** Пусть каждая из  $m$  функций  $f_1, \dots, f_m$  от  $n$  переменных дифференцируема в точке  $x^{(0)} \in R^n$ . Пусть функция  $g$   $m$  переменных дифференцируема в точке  $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ . Тогда сложная функция  $h(x) := g(f_1(x), \dots, f_m(x))$  дифференцируема в точке  $x^{(0)}$  и для ее частных производных справедливы равенства

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n$$

А теперь простыми словами=)

Вот у нас есть функция  $g$ . Она сложная: зависит от функций  $f_1, \dots, f_m$ , каждая из которых в свою очередь зависит от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ :  $g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ . Заметим, что  $m$  и  $n$  - в общем случае разные числа, то есть  $g$  зависит от  $m$  аргументов, а  $f$  - от  $n$  аргументов. Тогда встает вопрос: как взять производную  $\frac{\partial g}{\partial x_j}$  ( $j$  - некоторое число от 1 до  $n$ )? То есть как найти производную сложной функции. От  $x_j$  зависит каждая из функций  $f_1, \dots, f_m$ . Значит логично, что надо сначала взять производную от  $g$  по этим функциям по очереди, а потом от этих функций по конкретной переменной  $x_j$ . Ну и оказывается, все это добро надо еще сложить. Получается

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \text{справедливо } \forall j = 1, \dots, n$$

Чтобы глаза не разбегались от двух индексов, и было понятно, какой из них фиксированный, возьмем производную по  $x_2$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}$$

Если у нас только 2 переменных, то есть  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , а функций  $f$  3 штуки:  $f_1, f_2, f_3$ , то, например,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f_3} \frac{\partial f_3}{\partial x}$$

**Пример 10.**

Решить с помощью перехода к полярной системе координат. Задача очень важная: понадобится в дальнейшем и будет на экзамене:

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

Выразим для начала новые координаты через старые:

$$\begin{cases} \phi = \arctg(\frac{x}{y}) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x \sqrt{y^2}}{y \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \phi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r}$$

По формуле производной сложной функции:

$$\frac{\partial u(r, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(r, \phi)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Подставим все полученное в исходное уравнение:

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$r \cos \phi \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\cos \phi}{r} \right) - r \sin \phi \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \phi - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\sin \phi}{r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} r \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \cos^2 \phi - \frac{\partial u}{\partial r} r \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \sin^2 \phi = 0$$

$$u_\phi = 0 \Rightarrow u \text{ не зависист от } \phi \Rightarrow u = u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2}) = u(x^2 + y^2)$$

Ответ:  $u = f(x^2 + y^2)$  где функция f любая.

**Пример 11.** Переписать  $z_{tt}(t, x)$  в координатах  $u = x - at; v = x + at$

$$z_t = z_u u_t + z_v v_t = z_u \cdot (-a) + a z_v$$

Когда ниже будем выражать производную, применим при дифференцировании по t функций  $z_u$  и  $z_v$  то же правило, что и при дифференцировании функции  $z$  по t строчкой выше.

$$z_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(z_u \cdot (-a) + a z_v) = -a z_{uu} u_t + z_{uv} (-a) v_t + a z_{vv} v_t + a z_{vu} u_t = a^2 z_{uu} - a^2 z_{uv} - a^2 z_{vu} + a^2 z_{vv}$$