Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

САША ДУРАНЧЕЛУС ПЫТАЕТСЯ ВОССТАНОВИТЬСЯ В МФТИ

IV СЕМЕСТР

Сделал Акантьев Александр (частично спиздил)

осень 2023

Содержание

1 Введение в математический анализ

1.1 Предел числовой последовательности. Единственность предела . . .

1.1.1 Предел числовой последовательности

Определение 1.1. (Эпсилон окрестность)

$$\forall a\,\forall\varepsilon>0\;U_\varepsilon(a)=\{x:\rho(x,a)<\varepsilon\}$$

$$U_\varepsilon(\pm\infty)=(\pm\infty,\pm\frac{1}{\varepsilon})$$

Определение 1.2. (Предел числовой последовательности)

$$a\in\bar{\mathbb{R}}=\lim_{n\to+\infty}a_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N:a_n\in U_\varepsilon(a)$$

Если

$$a\in\mathbb{R}$$

, то последовательность называется сходящейся

1.1.2 Единственность предела

Теорема 1.1. *(Единственность предела) Числовая последовательность может иметь не более чем один предел.*

Доказательство. Предположим, что $\exists l_1,l_2\in\mathbb{R}\mid\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l_1,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l_2$. Тогда:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l_1\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\;\exists N_1\in\mathbb{N}\mid\forall n>N_1\;|x_n-l_1|<\varepsilon\Leftrightarrow l_1-\varepsilon<x_n<l_1+\varepsilon\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=l_2\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\;\exists N_2\in\mathbb{N}\mid\forall n>N_2\;|x_n-l_2|<\varepsilon\Leftrightarrow l_2-\varepsilon<x_n<l_2+\varepsilon\end{cases}$$

Рассмотрим $\varepsilon=\frac{l_2-l_1}{2}>0$, $\forall n>max(N_1,N_2)$:

$$\begin{cases}l_1+\varepsilon=l_1+\dfrac{l_2-l_1}{2}=\dfrac{l_1+l_2}{2}\\ l_2-\varepsilon=l_2-\dfrac{l_2-l_1}{2}=\dfrac{l_1+l_2}{2}\end{cases}$$

□

Теорема 1.2. *(Предел произведения б.м. и ограниченной последовательностей) Если $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ - бесконечно малая, а $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена, то $\{x_ny_n\}_{n=1}^\infty$ - бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ - ограниченная $\Rightarrow\exists M>0\mid\forall n\in\mathbb{N}\;|y_n|\leqslant M$

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ - бесконечно малая $\Rightarrow\forall\varepsilon>0\;\exists N\in\mathbb{N}\mid\forall n>N\;|x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$ □

1.1.3 Свойства предела, связанные с неравенствами

Теорема 1.3. *(Свойства предела)*

1. *(Ограниченность сходящейся последовательности) Если последовательность сходится, то она ограничена.*
2. *(Отделенность от нуля и сохранение знака) Если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* $l \neq 0$, *то* $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ \operatorname{sgn} x_n = \operatorname{sgn} l$ *и* $|x_n| > \frac{|l|}{2}$
3. *(Переход к пределу в неравенстве) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y = y_0$ *и* $\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \ \ x_n \leqslant y_n$, *то* $x_0 \leqslant y_0$
4. *(О промежуточной последовательности) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$ *и* $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ \ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$

Доказательство. 1. По условию, $\exists l \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ |x_n - l| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon := 1 > 0$. Тогда $\forall n > N \ l - 1 < x_n < l + 1$. Отсюда следует, что

$$x_n \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_N, l+1) \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \text{ ограничена сверху}$$
$$x_n \geqslant \min(x_1, x_2, \ldots, x_N, l-1) \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \text{ ограничена снизу}$$

2. По условию, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ |x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$.

Тогда, рассмотрим $\varepsilon := \frac{|l|}{2} > 0$.

$$l > 0 \Rightarrow x_n > l - \varepsilon = \frac{l}{2} > 0$$
$$l < 0 \Rightarrow x_n < l + \varepsilon = \frac{l}{2} < 0$$

3. От противного. Пусть $x_0 > y_0$. Тогда, по условию:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1 \ x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2 \ y_0 - \varepsilon < y_n < y_0 + \varepsilon$$

Рассмотрим $\varepsilon := \frac{x_0 - y_0}{2} > 0$, $\forall n > \max(N_1, N_2)$:

$$y_n < y_0 + \varepsilon = \frac{x_0 + y_0}{2} = x_0 - \varepsilon < x_n$$

Получили противоречие.

4. По условию,

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1 \ |x_n - l| < \varepsilon \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2 \ |z_n - l| < \varepsilon \end{cases}$$

Отсюда следует: $l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon \Rightarrow |y_n - l| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$

□

1.1.4 Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x_0 \cdot y_0$
4. Если $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство. 1-2. По определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1\ |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2\ |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $\forall n > \max(N_1, N_2)$, тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (x_0 \pm y_0)| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1\ |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$
   Из теоремы выше, $\exists C > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant C$
   $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2\ |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2C}$
   Рассмотрим $\forall n > \max(N_1, N_2)$:

$$|x_n y_n - x_0 y_0| \leqslant |x_n y_n - x_n y_0| + |x_n y_0 - x_0 y_0| = |x_n| \cdot |y_n - y_0| + |y_0| \cdot |x_n - x_0| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. По условию,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1\ |x_n - x_0| < \frac{|y_0|}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2\ |y_n - y_0| < \frac{|y_0|^2}{2(|x_0| + 1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \neq 0$, то начиная с некоторого номера $|y_n| > \frac{|y_0|}{2}$. Будем считать, что это верно $\forall n > N_2$ (иначе можно *подвинуть* наше значение N_2 вправо настолько, что это станет верно).

Рассмотрим $\forall n > \max(N_1, N_2)$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\frac{x_n y_0 - y_n x_0}{y_n y_0}\right| \leqslant \frac{|x_n y_0 - x_0 y_0|}{|y_n| \cdot |y_0|} + \frac{|x_0 y_0 - y_n x_0|}{|y_n| \cdot |y_0|} =$$
$$= \frac{|x_n - x_0|}{|y_n|} + \frac{|x_0| \cdot |y_0 - y_n|}{|y_n| \cdot |y_0|} < |x_n - x_0| \cdot \frac{2}{|y_0|} + |y_0 - y_n| \cdot \frac{2|x_0|}{|y_0|^2} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|x_0|}{|x_0|+1} < \varepsilon$$

□

1.1.5 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Теорема 1.4. *(Вейерштрасса о монотонных последовательностях) Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограниченная сверху и неубывающая последовательность, то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$. *Если же невозрастающая и ограниченная снизу, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$

Доказательство. Приведём доказательство только для ограниченной сверху и неубывающей последовательности.

$$l := \sup\{x_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant l \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ l - \varepsilon < x_N \leqslant l \end{cases}$$

Рассмотрим $\forall n > N$. Тогда

$$l + \varepsilon > l \geqslant x_n \geqslant x_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant x_N > l - \varepsilon \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \Big|\ \forall n > N |x_n - l| < \varepsilon$$

Что и доказывает наше утверждение. □

1.1.6 Число e

Теорема 1.5. *(Число Эйлера) Последовательность* $\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится. Её предел называется числом* e.

$$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажем, что y_n убывает.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} =$$
$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \geqslant \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} =$$
$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = 1, n > 1$$

При этом $\{y_n\}$ - ограниченная снизу последовательность, так как $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n \geqslant 0$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса $\{y_n\}$ сходится. Её предел равен e.

Покажем, что к тому же пределу сходится и x_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot (1+0) = e$$

□

1.1.7 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Определение 1.3. Последовательность вложенных отрезков - это $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \leqslant b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}\ [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$

Теорема 1.6. *(Принцип Кантора вложенных отрезков) Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение, то есть*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \varnothing$$

Доказательство. $[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}] \Rightarrow ((a_n \leqslant a_{n+1}) \wedge (b_n \geqslant b_{n+1}))$

Следовательно, $\{a_n\}$ - неубывающая, а $\{b_n\}$ - невозрастающая

$a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$, а $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n$, то есть

$$\exists a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$$
$$\exists b = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$$

Так как $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leqslant b_n$, то предельный переход даёт неравенство $a \leqslant b$

Ну а учитывая равенства у пределов, получим $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, то есть $\forall n \in \mathbb{N}\ [a_n; b_n] \supset [a; b]$, что и доказывает непустоту пересечения. □

Определение 1.4. Стягивающейся системой отрезков называется система вложенных отрезков, длины которых образуют б.м. последовательность.

Дополнение. Система стягивающихся отрезков имеет пересечение, состоящее из одной точки.

Доказательство. $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n \Rightarrow 0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \Rightarrow a = b$ □

1.1.8 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Теорема 1.7. *(Предел произведения б.м. и ограниченной последовательностей) Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая, а* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то* $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная $\Rightarrow \exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}\ |y_n| \leqslant M$
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ □

Определение 1.6. Последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, +\infty \text{ или } \infty$$

Теорема 1.8. *(Связь б.м. и б.б. последовательностей) Если $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - б.м. $\Leftrightarrow \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ - б.б.*

Доказательство.
1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - б.м. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ |x_n| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n} \in U_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid n > N\ \left|\dfrac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

□

1.2 Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы ...

1.2.1 Подпоследовательность, частичные пределы

Определение 1.7. Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел

Определение 1.8. Частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется предел её подпоследовательности.

Теорема 1.9. *(Эквивалентное определение частичного предела) Число $l \in \mathbb{R}$ является частичным пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \mid |x_n - l| < \varepsilon$*

Доказательство.
1. l - частичный предел. То есть

$$l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \mid \forall k > K\ |x_{n_k} - l| < \varepsilon$$

   При этом помним, что $\{n_k\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел

   Следовательно, для $\forall N \in \mathbb{N}$ найдётся $K_1 \in \mathbb{N} \mid n_{K_1} > N$, а значит и $n := n_{K_1+1} \Rightarrow n > n_{K_1} > N$, $|x_n - l| < \varepsilon$

   В итоге имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \mid |x_n - l| < \varepsilon$$

2. Пусть для l верно, что $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \mid |x_n - l| < \varepsilon$

   Построим сходящуюся подпоследовательность:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon := 1 & N := 1 & \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid n_1 > 1,\ |x_{n_1} - l| < 1 \\ \varepsilon := 1/2 & N := n_1 & \exists n_2 \in \mathbb{N} \mid n_2 > n_1,\ |x_{n_2} - l| < 1/2 \\ \dots & & \end{array}$$

   По построению $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \mid \forall k > K\ |x_{n_k} - l| < \varepsilon$

□

1.2.2 Верхний и нижний предел числовой последовательности

Определение 1.9. *Верхним пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ называется наибольший из её частичных пределов $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Определение 1.10. *Нижним пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ называется наименьший из её частичных пределов $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Замечание автора. Следует помнить, что частичный предел может быть бесконечным. Следовательно, верхний и нижний тоже.

Теорема 1.10. *(3 определения верхнего и нижнего пределов) Для любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют* <u>*конечные*</u> $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. *Для них справедливы следующие утверждения:*

1. $(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ x_n < L + \varepsilon) \wedge (\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\ x_n > L - \varepsilon)$

   $(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ x_n > l - \varepsilon) \wedge (\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \mid x_n < l + \varepsilon)$

2. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$; $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

Причём определения равносильны (стандартное и эти 2 пункта).

Доказательство. Доказательство приводится только для верхнего предела. Для нижнего просто аналогично.

Рассмотрим последовательность $s_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup\limits_{m \geqslant n} x_m$. Мы можем это сделать, так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена по условию теоремы. Несложно заметить 2 утверждения из данного определения:

$$s_n \geqslant s_{n+1}$$
$$s_n \geqslant \inf\{x_n\}$$

А значит по теореме Вейерштрасса, данная последовательность сходится и имеет предел $L := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \inf\{s_n\}$.

Покажем, что для этой последовательности верен первый пункт. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ |s_n - L| < \varepsilon$$

Так как $s_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, то $x_n \leqslant s_n < L + \varepsilon$ (доказано следствие первой части п.1. из п.2.).

Рассмотрим $N \in \mathbb{N}$ и $s_{N+1} = \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$. Так как $L = \inf\{s_n\}$, то

$$s_{N+1} \geqslant L$$

А так как $s_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, то ещё имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \mid x_n > s_{N+1} - \varepsilon \geqslant L - \varepsilon \Rightarrow x_n > L - \varepsilon$$

(доказано следствие второй части п.1. из п.2.)

Теперь докажем, что из пункта 1. L - наибольший частичный предел $\{x_n\}$. Построим подпоследовательность:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon := 1 & \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid |x_{n_1} - L| < 1 \\ \varepsilon := 1/2 & \Rightarrow N_2' := \max(N_2, n_1)\ \exists n_2 > N_2' \mid |x_{n_2} - L| < 1/2 \\ \ldots & \end{array}$$

Существование номера обусловлено тем, что мы вначале применяем первую часть пункта 1., а затем подставляем во вторую часть пункта 1. $N_i' := \max(N_i, n_{i-1})$ и находим такое $n > N_i'$, что для него верны оба неравенства сразу.

Получили $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$

Рассмотрим произвольную $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что $\exists \lim\limits_{i\to\infty} x_{m_i} = t$ Из уже доказанного пункта 1. следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I \in \mathbb{N} \mid \forall i > I \quad x_{m_i} < L + \varepsilon$$

Совершая предельный переход в неравенстве, получим

$$\forall \varepsilon > 0\ t \leqslant L + \varepsilon$$

Отсюда понятно, что $t \leqslant L$, то есть L действительно наибольший частичный предел. □

Замечание автора. По моему мнению, ключевая идея выше в том, что мы всегда из-за ограниченности можем рассмотреть последовательность s_n и доказать, что её предел либо удовлетворяет другому определению, либо свойством (которое можно принять за определение).

1.2.3 Теорема Больцано—Вейерштрасса

Теорема 1.11. *(Больцано-Вейерштрасса) Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность*

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная, то есть $\exists [a_1; b_1] \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Разделим отрезок пополам. Утверждение: хотя бы 1 из половин содержит бесконечное число членов последовательности.

Пусть $[a_2; b_2]$ - та из половин $[a_1; b_1]$, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Так как $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$.

Следовательно, $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - стягивающаяся система, пусть $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. Докажем, что c - частичный предел.

$x_{n_1} = x_1$; $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$; … ; $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$. Отсюда $0 \leqslant |c - x_{n_k}| \leqslant \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0$. □

Дополнение. Каждая числовая последовательность $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет хотя бы 1 частичный предел, то есть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \mid \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Доказательство. Если последовательность ограничена, то смотрим теорему Больцано-Вейерштрасса.

Если последовательность неограничена сверху, то построим подпоследовательность:

$$\begin{aligned} &M := 1 && \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid x_{n_1} > 1 \\ &M := \max(2, x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) && \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \mid x_{n_2} > \max(2, x_{n_2}) \geqslant 2,\ n_2 > n_1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Получили $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\forall k \in \mathbb{N}\ x_{n_k} > k$. Несложно показать, что данная последовательность - бесконечно большая.

Аналогично доказывается случай, когда последовательность неограничена снизу. □

1.2.4 Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Определение 1.11. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, или же *последовательностью Коши*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

Теорема 1.12. *(Критерий Коши) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. 1. Сходимость $\Rightarrow$ фундаментальность

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N\ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда, $\forall p \in \mathbb{N}\ n + p > N \Rightarrow |x_{n+p} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$
$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \leqslant |x_{n+p} - l| + |l - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Фундаментальность $\Rightarrow$ ограниченность

Согласно свойству фундаментальности, положим $\varepsilon := 1 \Rightarrow n := N + 1$. Теперь,

$$\forall p \in \mathbb{N}\ |x_{N+1+p} - x_{N+1}| < 1 \Rightarrow x_{N+1} - 1 < x_{N+1+p} < x_{N+1} + 1$$

Отсюда для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\min(x_1, \ldots, x_{N+1}) - 1 < x_n < \max(x_1, \ldots, x_{N+1}) + 1$$

3. Фундаментальность $\Rightarrow$ ограниченность $\Rightarrow$ сходимость.

Так как последовательность ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \mid \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$$

По определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \mid \forall k > K\ |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

При этом исходная последовательность фундаментальна. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $\forall m > \max(N, n_{K+1})$, тогда

$$|x_m - l| \leqslant |x_m - x_{n_{K+1}}| + |x_{n_{K+1}} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

1.3 Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, ...

1.3.1 Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность

Определение 1.12. (Предел по Коши)

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 1.13. (Предел по Гейне)

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \{x_n\} \subset X \backslash \{a\}\ \lim_{n \to \infty} x_n = a\right) \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Теорема 1.13. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. 1. (К $\Rightarrow$ Г)

Рассмотрим $\forall \{x_n\} \subset X \backslash \{a\} \,\Big|\, \lim_{n \to \infty} x_n = a$. По определению предела

$$\forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > N\ |x_n - a| < \delta$$

Так как $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in X \backslash \{a\}$, то отсюда следует

$$\forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > N\ x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$$

По условию выполнено утверждение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,\Big|\, \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

То есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, для которого верно 2 условия:

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > N\ x_n \in \mathring{U}_\delta(a) \\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

В итоге имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > N\ f(x_n) \in U_\varepsilon(A) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

2. (Г $\Rightarrow$ К)

   Докажем от противного, то есть при выполненности определения Гейне неверно определение Коши:

$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathring{U}_\delta(a) \mid f(x) \notin U_\varepsilon(A)$

Зафиксируем ε и подставим разные δ:

$$\begin{array}{lll} \delta := 1 & \exists x_1 \in \mathring{U}_1(a) & f(x_1) \notin U_\varepsilon(A) \\ \delta := 1/2 & \exists x_2 \in \mathring{U}_{1/2}(a) & f(x_2) \notin U_\varepsilon(A) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta := 1/n & \exists x_n \in \mathring{U}_{1/n}(a) & f(x_n) \notin U_\varepsilon(A) \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Получили последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \mathring{U}_{1/n}(a),\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$

Но при этом, для этой последовательности верно утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ x_n \in \mathring{U}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

А из определения предела по Гейне это будет означать, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \ f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$$

Получили противоречие. (Потому что хотя бы для одного ε, которое мы зафиксировали для последовательности, это выполнено не будет)

□

1.3.2 Свойства пределов функции

1. (о единственности) Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$

   Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E\backslash\{a\}$, $x_n \to a$. По определению Гейне:
   $$f(x_n) \to b \text{ и } f(x_n) \to c$$
   В силу единственности предела последовательности $b = c$. □

2. (о пределе по подмножеству) Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и a – предельная точка множества $D \subset E$, то $\lim_{x\to a} f|_D(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Тогда
   $$f|_D(x_n) = f(x_n) \to b$$
   По определению Гейне, $b = \lim_{x\to a} f|_D(x)$. □

3. (о зажатой функции) Пусть $\exists \sigma > 0 \ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E \ (f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x))$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Тогда $\exists \lim_{x\to a} h(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $x_n \subset E\backslash\{a\}$, $x_n \to a$. Тогда $\exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0 (x_n \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. По условию $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to b$. Тогда, по свойству предела последовательности, $h(x_n) \to b \Rightarrow b = \lim_{x\to a} h(x)$. □

4. (арифметические опреации с пределами) Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Тогда справедливы следующие утверждения:
1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$.
3. Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ $\forall x \in E$, то $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{b}{c}$.

Заключение следует понимать так: если существует величина справа, то существует величина слева и они равны.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \in E$ с условиями $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По свойствам предела последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n) \cdot g(x_n) \to b \cdot c$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c}$. Осталось воспользоваться определением предела по Гейне. $\square$

5. (о локализации) Если $\exists \sigma > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\sigma(a) \cap E$ $(f(x) = g(x))$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то $\exists \lim_{x\to a} g(x) = b$.

Доказательство. Если в определении Коши предел f для $\epsilon > 0$ подходит $\delta > 0$, то в поределении Коши предел g подходит $\delta' = min\{\delta, \sigma\}$. $\square$

6. (о локализации ограниченности) Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, то $\exists C > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$ $(|f(x)| \leqslant C)$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$ $(b - 1 < f(x) < b + 1)$. Положим $c = |b| + 1$. Тогда $|f(x)| < c$. $\square$

7. (О пределе композиции.) Пусть $E, D \subset \mathbb{R}$ и $f : E \longrightarrow D$ и $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, такие что $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Пусть выполнено одно из двух условий:
1) $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности множества a или
2) $g(b) = c$. Тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c = \lim_{y\to b} g(y)$.

Доказательство. Зафиксируем $\epsilon > 0$. По определению предела

$$\exists \sigma > 0\ \forall y \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D\ (g(y) \in B_\epsilon(c))$$

$$\exists \delta > 0\ \forall y \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (f(x) \in B_\sigma(b))$$

1) Уменьшая δ, если необходимо, можно считать, что $f(x) \neq b$ на $\overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x) \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D$. Поэтому $g(f(x)) \in B_\epsilon(c) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.
2) Если $f(x) = b$ для некоторого $x \in B_\delta(a)$, то $g(f(x)) = c \in B_\epsilon(c)$. Поэтому $\forall x \in B_\delta(a) \cap E$ $(g(f(x)) \in B_\epsilon(c)) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. $\square$

1.3.3 Критерий Коши существования предела функции

Теорема 1.14. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}_{\text{Условие Коши}}$

Доказательство. Докажем необходимость:
Из определения предела:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По неравенству треугольника: $\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \varepsilon$

Докажем достаточность:
Рассмотрим $\forall \{x_n\} \subset X \backslash \{a\} \bigm| \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Из определения предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \bigm| \forall n > N\ x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$$

Согласно этому утверждению и условию Коши, мы получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \bigm| \forall n, m > N\ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Что в точности означает фундаментальность последовательности $f(x_n)$, то есть она сходящаяся. □

1.3.4 Различные типы пределов

Определение 1.14. Пусть f определена на $(a; b) \mid -\infty < a < b < +\infty$

Левосторонним пределом в точке b называется $B \in \bar{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ такое, что

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x,\ b - \delta < x < b\ \ f(x) \in U_\varepsilon(B)$
2. $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a; b),\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$

Обозначается как

$$f(b - 0) := \lim_{x\to b-0} f(x) = B$$

Правосторонним пределом в точке a называется $A \in \bar{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ такое, что

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x,\ a < x < a + \delta\ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$
2. $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a; b),\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Обозначается как

$$f(b + 0) := \lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

Определение 1.15. $(b - \delta; b)$ называется *левосторонней* окрестностью точки b.
$(a; a + \delta)$ называется *правосторонней* окрестностью точки a.

Теорема 1.15. *(Связь предела и односторонних пределов) Пусть f ограничена в $U_\delta(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Доказательство. 1. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta,\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Отсюда следует, что $\forall x \mid a < x < a+\delta,\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$ и $\forall x \mid a-\delta < x < a,\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$, что равносильно утверждению справа.

2. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 \;\Big|\; \forall x,\ a-\delta_1 < x < a \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 \;\Big|\; \forall x,\ a < x < a+\delta_2 \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Выберем $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, получим

$$\delta_1 \geqslant \delta \Rightarrow a-\delta_1 \leqslant a-\delta$$
$$\delta_2 \geqslant \delta \Rightarrow a+\delta_2 \geqslant a+\delta$$

Рассмотрим $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$:

$$a < x < a+\delta \Rightarrow a < x < a+\delta_2$$
$$a-\delta < x < a \Rightarrow a-\delta_1 < x < a$$

Любой из этих случаев ведёт к тому, что $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. А значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \;\Big|\; \forall x,\ x \in \mathring{U}_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Что равносильно левой стороне утверждения.

□

1.3.5 Существование односторонних пределов у монотонной функции

Теорема 1.16. *(Существование односторонних пределов монотонной функции) Если f монотонна на $(a;b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, то*

$$\exists \lim_{x\to a+0} f(x) \in \bar{\mathbb{R}},\ \lim_{x\to b-0} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$$

причём если f неубывающая, то

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x\in(a;b)} f(x),\ \lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{x\in(a;b)} f(x)$$

если f невозрастающая, то

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \sup_{x\in(a;b)} f(x),\ \lim_{x\to b-0} f(x) = \inf_{x\in(a;b)} f(x)$$

Доказательство. Пусть f неубывающая. Положим $\sup\limits_{x\in(a;b)} f(x) := M$

1. $M = +\infty$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a;b) \mid f(x_0) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Отсюда $\exists\delta := b - x_0 > 0 \mid \forall x, b - \delta < x < b \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leqslant f(x)$, то есть $f(x_0) \in U_\varepsilon(+\infty)$. В итоге

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \;\Big|\; \forall x,\ b - \delta < x < b\ \ f(x) \in U_\varepsilon(M) \Leftrightarrow \lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty = M$$

2. $M < +\infty$. Тогда
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a; b) \mid f(x_0) \in (M - \varepsilon; M]$$

   Отсюда уже аналогично получим, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \;\Big|\; \forall x,\ b - \delta < x < b\ f(x) \in U_\varepsilon(M) \Leftrightarrow \lim_{x\to b-0} f(x) = M$$

   Если $a = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ вместо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

   Если $b = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ вместо $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

□

1.4 Непрерывность функции в точке. Свойства ...

1.4.1 Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность.

Определение 1.16. Если f определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется *непрерывной* в точке x_0.

Определение 1.17. Если f определена на $[x_0; x_0 + \delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то f называется *непрерывной справа* в точке x_0.

Определение 1.18. Если f определена на $[x_0 - \delta_0; x_0]$, где $\delta_0 > 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то f называется *непрерывной слева* в точке x_0.

Теорема 1.17. *Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f непрерывна в точке x_0*
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \;\Big|\; (\forall x,\ |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
3. $\left(\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

1.4.2 Свойства непрерывных функций

1.4.3 Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

Теорема 1.18. *(Переход к пределу под знаком непрерывной функции)*
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и g непрерывна в точке b, то $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b)$

Доказательство. Рассмотрим $\left(\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \neq a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Положим $y_n := f(x_n)$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b)$$

□

1.4.4 Непрерывность сложной функции.

Дополнение. (Следствие теоремы выше. Непрерывность сложной функции) Если f непрерывна в a, g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a.

Замечание. (Предел сложной функции) Для того, чтобы из $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$ следовало $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$, достаточно потребовать, чтобы $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки a.

1.4.5 Точки разрыва, их классификация.

Определение 1.19. Пусть f определена в проколотой окрестности точки x_0. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Замечание. Неравенство полагается верным также и в тех случаях, когда хоть одна из частей не определена.

Определение 1.20. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$, то точка разрыва называется *точкой разрыва первого рода.*

В противном случае *точкой разрыва второго рода.*

Определение 1.21. Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$ и $\neq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва.*

Определение 1.22. Если хотя бы 1 из односторонних пределов бесконечен, то x_0 называется *точкой бесконечного разрыва.*

Определение 1.23. Величину $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ называется *скачком функции* в точке x_0.

1.4.6 Разрывы монотонных функций.

Теорема 1.19. *(О точках разрыва монотонной функции) Если $f(x)$ монотонна на $(a; b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то она может иметь на $(a; b)$ лишь точки разрыва 1го рода, причём неустранимого разрыва, и число таких точек разрыва не более чем счётно.*

Доказательство. $\forall x_0 \in (a; b) \ \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$

Считая f неубывающей функцией, то

$$\forall x < x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \Rightarrow f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0)$$

$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, иначе бы точки разрыва не было.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1 - 0) < f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0) < f(x_2 + 0)$

Отсюда $(f(x_1 - 0); f(x_1 + 0)) \cap (f(x_2 - 0); f(x_2 + 0)) = \varnothing$. То есть, мы получили систему непересекающихся отрезков на прямой действительных чисел, которая является не более чем счётным множеством (каждому отрезку можно сопоставить рациональное число внутри него). □

Пример. (Функция Римана)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ если } x = \dfrac{m}{n} \\ 0, \text{ если } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Докажем, что f непрерывна в $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: зафиксируем произвольный $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$M = \{x \mid f(x) \geqslant \varepsilon\}$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то любой элемент M - рациональное число, имеющее вид в несократимой дроби $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \frac{1}{n} \geqslant \varepsilon \Rightarrow n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$$

То есть число таких n конечно. Это значит, что число рациональных точек, попавших в $U_\delta(x_0) \cap M$, конечно (в самом деле, бесконечность может достигаться только за счёт m, а это мы ограничили пересечением). Ну а раз так, то найдётся $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(x_0) \cap M = \varnothing$. Иными словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \Bigm| \forall x \in U_\delta(x_0) \ \ f(x) < \varepsilon$$

это означает непрерывность функции Римана в любой иррациональной точке.

Теперь докажем, что $f(x)$ разрывна во всех рациональных точках. Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}$ и мы снова зафиксировали $\varepsilon > 0$. Какую δ-окрестность точки x_0 ни взять, там найдётся иррациональное число, для которого $f(x) = 0 \Rightarrow$ получим разрывность.

Таким образом, функция Римана непрерывна $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ и разрывна $\forall x \in \mathbb{Q}$.

1.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность...

1.5.1 Ограниченность

Непрерывность на множестве

Определение 1.24. Функция называется *непрерывной на множестве* X, если

$$\forall x_0 \in X \quad \Big(\forall \{x_n\} \subset X, \lim_{x \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)\Big)$$

или по Коши

$$\forall x_0 \in X \quad \big(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \bigm| \forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$$

Замечание. Не стоит думать, что непрерывность на множестве - это непрерывность в каждой точке этого множества. Это не так. Как минимум потому, что мы не требуем определённость функции в некоторой окрестности точки из X.

Теорема 1.20. *(Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях) Если f непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть f - неограничена сверху (снизу аналогично). Это означает

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_{\frac{1}{\varepsilon}} \in [a; b] \mid f(x_{\frac{1}{\varepsilon}}) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Последовательно будем брать $\varepsilon := 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Получим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a;b]$, $f(x_n) > n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a;b]$$

А из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, что неверно ($f(x_n) > n$). □

1.5.2 Достижение точных верхней и нижней граней

Теорема 1.21. *(Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях)*
Если f непрерывна на $[a;b]$, то она достигает своих точных верхней и нижней граней. То есть

$$\exists x', x'' \in [a;b] \;\Big|\; f(x') = \inf_{x\in[a;b]} f(x),\; f(x'') = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$$

Доказательство. По определению минимума

$$m := \inf_{x\in[a;b]} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\; \exists x \in [a;b] \;\Big|\; m \leqslant f(x) < m + \varepsilon$$

Построим подпоследовательность через выбор ε:

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon := 1 & m \leqslant f(x_1) < m + 1 \\
\varepsilon := 1/2 & m \leqslant f(x_2) < m + 1/2 \\
\ldots & \ldots \\
\varepsilon := 1/n & m \leqslant f(x_n) < m + 1/n \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Получили ограниченную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \;\Big|\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x' \in [a;b]$$

Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ верно

$$m \leqslant f(x_n) < m + 1/n$$

то в силу непрерывности f, можно совершить предельный переход:

$$m \leqslant f(x') \leqslant m \Leftrightarrow f(x') = m$$

□

1.5.3 Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 1.22. *(Больцано-Коши о промежуточных значениях)*
Если f непрерывна на $[a;b]$, то $\forall c = f(x_1) < d = f(x_2)$, где $\{x_1, x_2\} \subset [a;b]$ $\forall u \in (c;d)$ $\exists \gamma \in [a;b] \;\big|\; f(\gamma) = u$

Замечание автора. В классической версии данной теоремы утверждается, что $\exists \gamma$ не просто в $[a;b]$, а в $[\min(x_1,x_2); \max(x_1,x_2)]$. Из доказательства лектора это следует.

Доказательство. Рассмотрим $c < u = 0 < d$. Положим $\{a_1, b_1\} := \{x_1, x_2\}$. Не умаляя общности будем считать $a_1 < b_1$. В силу условия имеем

$$f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$$

Посмотрим на $f(\frac{a_1+b_1}{2})$. Если оно равно 0, то мы нашли подходящее нам $\gamma := \frac{a_1+b_1}{2}$. Иначе рассмотрим одну из половин $[a_2; b_2]$ изначального отрезка такую, что на её концах функция тоже принимает разные значения (то есть $\{\frac{a_1+b_1}{2}\} \subset \{a_2, b_2\}$)

$$f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$$

Продолжим рассуждения рекурсивно. Если мы так и не дошли до конкретного γ, то мы получили систему вложенных отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Несложно заметить, что

$$[a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$$
$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

То есть полученная система - стягивающаяся. А по принципу Кантора вложенных отрезков это нам даёт

$$\exists\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$$

Равенство имеет место, потому что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$ по построению.
В силу непрерывности функции и принципа Кантора

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n \Rightarrow f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Так как по построению $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, то предельный переход даёт неравенство

$$f^2(\gamma) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = 0$$

При любом другом u мы можем рассмотреть вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - u$, для которой верно доказанное утверждение, а значит получим и нужное:

$$F(\gamma) = 0 = f(\gamma) - u \Rightarrow f(\gamma) = u$$

□

1.5.4 Теорема об обратной функции.

Теорема 1.23. *(Теорема об обратной функции) Если f непрерывна и строго монотонна на промежутке I, то на промежутке $f(I)$ определена обратная функция f^{-1}, строго монотонная в том же смысле, что и f, и непрерывная на $f(I)$.*

Доказательство. Будем рассматривать такую f, что $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Положим

$$y_1 := f(x_1)$$
$$y_2 := f(x_2)$$

То есть

$$f^{-1}(y_1) := x_1$$
$$f^{-1}(y_2) := x_2$$

$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, то есть f^{-1} монотонно возрастает.

По лемме **??** $f(I)$ - промежуток. А значит, f^{-1} определена на промежутке и при этом строго монотонна. Следовательно, по той же лемме, f^{-1} - непрерывна на $f(I)$. □

1.6 Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции...

1.6.1 Непрерывность элементарных функций

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ при $\forall a \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\cdot\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-a|$$

Для доказательства предела достаточно взять $\delta := \varepsilon/2$. Следовательно, $\sin x$ - непрерывная на всей области определения.

Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ при $\forall a \in \mathbb{R}$

$$|\cos x - \cos a| = \left|-2\cdot\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|$$

Снова достаточно взять $\delta := \varepsilon/2$ и доказательство получено.

1.6.2 Определение показательной функции

Считая, что все рациональные степени уже определены, дадим определение a^x в общем случае

Определение 1.25. a^x при $\forall x \geqslant 0$ определяется как

1. $a > 1$

   Введём понятие $(x)_n$:

   $$(x)_n := \frac{\lfloor 10^n \cdot x\rfloor}{10^n}$$

   То есть $(x)_n$ - это число x, у которого оставили ровно n знаков после запятой, а остальное удалили. Понятно, что это - рациональное число, и степень $a^{(x)_n}$ определена.

   Заметим, что $\{(x)_n\}$ - неубывающая последовательность. Стало быть, и $\{a^{(x)_n}\}$ - тоже неубывающая. При этом

   $$\forall n \in \mathbb{N}\ (x)_n \leqslant \lceil x\rceil \Rightarrow a^{(x)_n} \leqslant a^{\lceil x\rceil}$$

То есть, $\{a^{(x)_n}\}$ к тому же и ограниченная сверху. По теореме Вейерштрасса, она имеет предел. Её предел и называют a^x:

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{(x)_n}$$

2. $a = 1 \Rightarrow a^1 = a$

3. $0 < a < 1$

   Определяется через предел как и в случае 1., только теорема Вейерштрасса будет для невозрастающей последовательности.

Для $x < 0$ определим a^x как

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

Покажем, что если $x_1 < x_2$, то и $a^{x_1} < a^{x_2}$:
Начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, будет в точности выполнено неравенство $\forall n > N$

$$(x_1)_n \leqslant x_1 < (x_2)_n \leqslant x_2$$

А значит найдутся 2 рациональных числа $r_1 < r_2$ такие, что

$$(x_1)_n \leqslant x_1 < r_1 < r_2 < (x_2)_n$$

Предельный переход даёт неравенство

$$a^{x_1} \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^{x_2}$$

Которое и даёт $a^{x_1} < a^{x_2}$

Лемма 1.1. *(Корректность определения показательной функции)* $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\forall \{r_n\} \subset \mathbb{Q},\ \lim_{n\to\infty} r_n = x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$

Доказательство. Доказательство проводится для $a > 1$. Для другого случая аналогично.
Заметим, что обе последовательности $a^{-\frac{1}{n}} - 1$ и $a^{\frac{1}{n}} - 1$ стремятся к нулю. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \bigm| \max(|a^{-\frac{1}{K}} - 1|, a^{\frac{1}{K}} - 1) < \varepsilon$$

Докажем, что $\{a^{r_n}\}$ - фундаментальная последовательность.

$$a^{r_{n+p}} - a^{r_n} = a^{r_n} \cdot (a^{r_{n+p} - r_n} - 1)$$

Так как $\{r_n\}$ сходится, то $\exists M \bigm| \forall n \in \mathbb{N}\ r_n \leqslant M$. Отсюда

$$a^{r_n} \leqslant a^M$$

Сама $\{r_n\}$ фундаментальна. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \bigm| \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ |r_{n+p} - r_n| < \varepsilon \Rightarrow\ \varepsilon := \frac{1}{K},\ -\frac{1}{K} < r_{n+p} - r_n < \frac{1}{K}$$

Следовательно

$$a^{-\frac{1}{K}} - 1 < a^{r_{n+p} - r_n} - 1 < a^{\frac{1}{K}} - 1$$

Ну а отсюда уже (перевыбрали окрестность из первого утверждения доказательства)

$$|a^{r_{n+p}-r_n} - 1| < \max(|a^{-\frac{1}{K}} - 1|, |a^{\frac{1}{K}} - 1|) < \frac{\varepsilon}{a^M}$$

В итоге имеем

$$|a^{r_n} \cdot (a^{r_{n+p}-r_n} - 1)| < a^{r_n} \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} < \varepsilon$$

Покажем, что у $\{a^{(x)_n}\}$ и $\{a^{r_n}\}$ одинаковые пределы. Для этого рассмотрим последовательность:

$$z_n = \begin{cases} r_k, \ n = 2k-1 \\ (x)_k, \ n = 2k \end{cases}$$

По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_1 \in \mathbb{N} \ \Big| \ \forall k > K_1 \ \ (|r_k - x| < \varepsilon \Leftrightarrow |z_{2k-1} - x| < \varepsilon)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_2 \in \mathbb{N} \ \Big| \ \forall k > K_2 \ \ (|(x)_k - x| < \varepsilon \Leftrightarrow |z_{2k} - x| < \varepsilon)$$

Следовательно

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N := 2 \cdot \max(K_1, K_2) \ \Big| \ \forall n > N \ |z_n - x| < \varepsilon$$

То есть $\{z_n\}$ - сходящаяся последовательность рациональных чисел. А из доказанного это значит, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{z_n}$. Но если $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a^{(x)_n}$, то последовательность $\{a^{z_n}\}$ расходится. Отсюда заключаем, что

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ (\forall \{r_n\} \subset \mathbb{Q}, \ \lim_{n\to\infty} r_n = x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$$

□

1.6.3 Свойства показательной функции

1. $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Доказательство. Докажем свойство суммы:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (x_1)_n = x_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (x_2)_n = x_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ((x_1)_n + (x_2)_n) = x_1 + x_2$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} a^{(x_1)_n} = a^{x_1}$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{(x_2)_n} = a^{x_2}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a^{(x_1)_n + (x_2)_n} = a^{x_1+x_2}$$

Второе свойство доказывается аналогично.

Третье свойство уже сложнее. Пусть $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} \{r_n'\} - &\text{ возрастает к } x \\ \{r_n''\} - &\text{ убывает к } x \\ \{p_n'\} - &\text{ возрастает к } y \\ \{p_n''\} - &\text{ убывает к } y \end{aligned}$$

Отсюда цепочка неравенств:

$$a^{r_n' \cdot p_n'} = (a^{r_n'})^{p_n'} \leqslant (a^x)^{p_n'} \leqslant (a^x)^y \leqslant (a^x)^{p_n''} \leqslant (a^{r_n''})^{p_n''} = a^{r_n'' \cdot p_n''}$$

Пределы обоих концов стремятся к $a^{x \cdot y}$, откуда уже по теореме о трёх последовательностях имеем нужное нам равенство. □

Теорема 1.24. *a^x - непрерывная функция на $\mathbb{R}$ $\forall a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$*

Доказательство. $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x - x_0} - 1)$

Это значит, что достаточно установить факт

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

Рассмотрим $|x| < \frac{1}{K}$ для произвольного K. Тогда

$$a^{-\frac{1}{K}} - 1 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{K}} - 1 \Rightarrow |a^x - 1| < \max(|a^{-\frac{1}{K}} - 1|, |a^{\frac{1}{K}} - 1|)$$

При этом

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \Big| \ \max(|a^{\frac{1}{K}} - 1|, |a^{-\frac{1}{K}} - 1|) < \varepsilon$$

Отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{1}{K} \ \Big| \ \forall x, \ |x| < \delta \ \ |a^x - 1| < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать. □

1.6.4 Замечательные пределы, следствия из них

Теорема 1.25. *(Первый замечательный предел) Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ существует и равен 1.*

Доказательство. Рассмотрим $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Тогда, по лемме **??** получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

В предельном переходе

$$1 \leqslant \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} \leqslant 1$$

Следовательно $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

Теорема 1.26. *(Второй замечательный предел)*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Доказательство. Положим $0 < x < 1$.

$$n_x := \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$n_x \leqslant \frac{1}{x} < n_x + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_x + 1} < x \leqslant \frac{1}{n_x}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1}$$

Положим $x_1 < x_2$. Следовательно

$$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow n_{x_2} \leqslant n_{x_1} \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1) \geqslant 1 \text{ (в силу последовательности числа Эйлера)}$$

По теореме Вейерштрасса предел $f(x)$ существует.

Сделаем замечательное наблюдение:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(1/n) = e$$

Напишем цепочку неравенств:

$$(1 + x)^{1/x} \geqslant (1 + x)^{n_x} > \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x}$$

$$(1 + x)^{1/x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{1/x} < \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1}$$

Крайняя левая и крайняя правая оценки стремятся к e. А значит

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = e$$

Осталось доказать левый предел. Сделаем замену $x = -y$:

$$\lim_{x \to 0-} (1 + x)^{1/x} = \lim_{y \to 0+} (1 - y)^{-1/y} =$$

$$\lim_{y \to 0+} \frac{1}{(1 - y)^{1/y}} = \lim_{y \to 0+} \left(\frac{1}{1 - y}\right)^{1/y} =$$

$$\lim_{y \to 0+} \left(1 + \frac{y}{1 - y}\right)^{1/y} = \lim_{t \to 0+} (1 + t)^{\frac{1-t}{t}} =$$

$$\lim_{t \to 0+} (1 + t)^{1/t} \cdot \frac{1}{1 + t} = e \cdot 1 = e$$

По теореме о связи предела с односторонними пределами, в итоге получаем

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

□

2 Аналитическая Геометрия

3 Многомерный анализ, интегралы и ряды

4 Линейная алгебра

5 Кратные интегралы и теория поля

5.1 Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

6 Дифференциальные уравнения

6.1 Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными..

6.1.1 Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах.

6.1.2 Интегрирующий множитель.

6.1.3 Уравнение Бернулли или Риккати.

6.1.4 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

6.1.5 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

6.2 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы...

6.2.1 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

6.2.2 Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка

6.2.3 Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом.

6.2.4 Уравнение Эйлера.

6.3 Формула общего решения линейной однородной системы уравнений ...

6.3.1 Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы.

6.3.2 Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы.

6.3.3 Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами.

6.4 Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения ...

6.4.1 Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений.