Семинар 8. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Скубачевский Антон

3 мая 2023 г.

В первом семестре мы искали предел числовой последовательности. Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. А что, если элементы последовательности - не числа, а функции? Например, если последовательность $f_n(x) = \frac{x}{n}$? В принципе, при абсолютно любом фиксированном x предел этой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, т.к. фиксированный икс - значит, что x - константа. А что, если мы возьмем предел от супремума по всем элементам множества E? $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} \frac{x}{n}$ уже не равен нулю (если множество $E = (0, +\infty)$, например): мы можем взять очень большой икс, $x_n = n^2$, и тогда $\frac{x_n}{n}$ уже не будет сходиться. Таким образом, есть принципиальная разница, зафиксировали ли мы x у функциональной последовательности до нахождения предела. В связи с этим возникают 2 разных определения сходимости функциональной последовательности: поточечная и равномерная. Причем функциональная последовательность сходится уже, конечно же, не к числу, а к некоторой функции.

Определение. Поточечная сходимость функциональной последовательности. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется поточечно сходящейся на множестве E к функции $f(x)$, если:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists N(x, \varepsilon) : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что N зависит не только от ε, но и от точки x, то есть для каждой точки x_0 начиная с разных номеров $f_n(x_0)$ лежит в $\varepsilon-$ окрестности $f(x_0)$.

Определение. Равномерная сходимость функциональной последовательности. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся на множестве E к функции $f(x)$, если:

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Аналогичные формулировки:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = 0$$

$$\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon):\forall n\geq N\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon):\forall n\geq N,\forall x\in E|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Видим, что существенная разница определений поточечной и равномерной сходимости в том, что в поточечной N зависит от x, а в равномерной - нет. То есть в равномерной для всех точек должен быть один и тот же номер, начиная с которого член функциональной последовательности лежит в $\varepsilon-$ окрестности предельной функции, на то она и равномерная.

Будем обозначать, что функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве E следующим образом:

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

Из равномерной сходимости, очевидно, следует поточечная. Обратное неверно.

При исследовании функциональной последовательности на равномерную сходимость нам понадобится следующая теорема:

Достаточное условие равномерной сходимости. Если $\exists N:\forall n\geq N,\forall x\in E\ |f_n(x)-f(x)|\leq a_n\to 0$, то $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$.

Отсутствие равномерной сходимости мы будем доказывать по отрицанию определения (в нем x, зависящий от N, будем обозначать как x_N):

$$\exists\varepsilon>0:\forall N\in\mathbb{N}\exists n(N)\geq N, x_N\in E:|f_n(x_N)-f(x_N)|\geq\varepsilon.$$

Будем брать $n(N)=N$ чаще всего, чтобы не мучиться. Нужно будет только придумать x_N.

Пример 1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{x+\sqrt{n}}$$

1. Исследуем на поточечную сходимость на $E_1 \cup E_2$. Зафиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} ch\frac{x_0}{x_0+\sqrt{n}} = \operatorname{ch} 0 = 1,$$

т.к. x_0 - фиксированная константа.

Следовательно, $f_n(x)$ сходится поточечно к функции $f(x) = 1$ на множествах $E_1 \cup E_2$.

2. Теперь надо понять, на каком множестве нет равномерной сходимости. Как я уже говорил, при доказательстве отсутствия равномерной сходимости мы зачастую берем $n = N$. Значит, нам нужно, грубо говоря, подобрать $x_N : f_N(x_N) \nrightarrow f(x_N) = \operatorname{ch} 0$. Нам подойдет $x_N = N$. Она при всех N принадлежит E_2, значит, на E_2 будем доказывать, что не сходится равномерно. Только вот при $N = 1$ x_N не лежит в E_2. Так что давайте возьмем $x_N = 2N$.

Итак, исследуем последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве E_2. Запишем отрицание определения:

$$\exists\varepsilon = \text{пока не нашли} : \forall N \exists n(N) = N, \exists x_N = 2N : |f_n(x_N) - f(x_N)| = |\operatorname{ch}\frac{2N}{2N+\sqrt{N}} - 1| =$$

$$= [\text{т.к. } ch \geq 1] = \operatorname{ch}\frac{2N}{2N+\sqrt{N}} - 1 = ch(2/3) - 1 \neq 0.$$

Вот мы и нашли ε. Запишем итоговое утверждение в кванторах:

$$\exists\varepsilon = ch1 - 1 : \forall N \exists n(N) = N \geq N, \exists x_N = 2N \in E_2 : |f_n(x_N) - f(x_N)| \geq \varepsilon.$$

Значит, $f_n(x)$ не сходится равномерно на множестве E_2 по определению.

3. Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_1. Обычно если на одном множестве не сошлась, то на втором должна сойтись.

$$|f_n(x)-f(x)| = |\operatorname{ch}\frac{x}{x+\sqrt{n}}-1| = \operatorname{ch}\frac{x}{x+\sqrt{n}}-1 \le \operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{n}}-1 \to \operatorname{ch}0-1=0$$

В оценке использовалось то, что числитель дроби $\frac{x}{x+\sqrt{n}}$ на множестве $E_1 = (0,1)$ меньше единицы, а знаменатель больше, чем $\sqrt{n}$. В данном пункте примеров такого типа нужно обязательно сверху ограничить чем-то, не зависящем от x и стремящимся к нулю при $n \to \infty$. Если присутствует зависимость от x, то пункт не засчитывается. При оценках нужно использовать границы используемого множества E_i.

Итак, мы оценили сверху стремящейся к нулю числовой последовательностью. Значит, $f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f$ по достаточному условию равномерной сходимости.

Ответ: $f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f = 1$ (то есть сходится равномерно к функции $f(x) = 1$ на множестве E_1) и поточечно к функции $f = 1$ на множестве E_2. Написать: "на E_1 равномерно, на E_2 - неравномерно" в ответе неправильно: нужно уточнить, что на E_2 сходится поточечно. Писать, что на E_1 поточечно, не нужно, ведь из равномерной сходимости следует поточечная.

Пример 2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (0,\delta)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n\operatorname{arctg} x^n.$$

1. Исследуем на поточечную сходимость. Фиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg} x_0^n = 0.$$

Следовательно, $f_n(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$ к функции $f(x) = 0$.

2. А теперь давайте подумаем, в чем разница между E_1 и E_2. С первого взгляда кажется, что ни в чем. Однако, на E_1, похоже, нет равномерной сходимости, потому что можно подобрать последовательность, стремящуюся к 1, на которой все плохо. А вот на E_2 нельзя подобрать такую последовательность, потому что до единицы мы не доползем: она отрезана дельтой, и эта дельта нам даст оценку для равномерной сходимости. Исходя из этих соображений, в таких номерах, если есть дельта, то сходится равномерно. Чтобы понять окончательно, о чем я, досмотрите решение этой задачи. Исследуем на равномерную сходимость на E_1.

$$\exists \varepsilon = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} : \forall N \exists n(N) = N+1 \geq N, x_N = 1-\frac{1}{N+1} \in E_1 : |f_n(x_N) - f(x_N)| =$$

$$= (N+1) \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} \geq 2 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

тут мы в конце мы воспользовались монотонностью последовательности $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Она доказывается, например, в параграфе 2.5 Бесова, но считается, вроде бы, очевидной, с первого семестра. Конечно, до этой монотонности допрут не все, можно сказать, что оно стремится к e^{-1}, значит, начиная с некоторого номера $\geq \frac{e^{-1}}{2}$.

Пример 3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{nx}{n + x^n}$$

1. Исследуем на поточечную сходимость.

Зафиксируем $x_0 \in E_1$. При $0 < x < 1$; $x^n << n$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{n + x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{n} = x_0$$

Значит, $f_n(x)$ сходится поточечно на множестве E_1 к функции $f(x) = x$.

Зафиксируем $x_0 \in E_2$. При $x > 1$; $x^n >> n$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{n + x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{x_0^n} = 0$$

Значит, $f_n(x)$ сходится поточечно на множестве E_2 к функции $f(x) = 0$.

2. Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_2. В оценках ниже используем, что $(1 + 1/N)^N$ – возрастающая последовательность, меньшая, чем e.

$$\exists \varepsilon = \text{пока не нашли} : \forall N \exists n(N) = N, x_N = 1 + 1/N : |f_n(x_N) - f(x_N)| =$$

$$= |\frac{N(1+\frac{1}{N})}{N+(1+\frac{1}{N})^N} - 0| \geq \frac{N}{N+\left(1+\frac{1}{N}\right)^N} \geq \frac{N}{N+e} = \frac{1}{1+e/N} \geq \frac{1}{1+e}.$$

Запишем полученное отрицание определения:

$$\exists\varepsilon = \frac{1}{1+e} : \forall N \exists n(N) = N \geq N, x_N = 1+1/N \in E_2 : |f_n(x_N) - f(x_N)| \geq \varepsilon.$$

Значит, функциональная последовательность $f_n(x)$ не сходится равномерно на множестве E_2 по определению.

3. Исследуем на равномерную сходимость на множестве $E_1 = (0,1)$.

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{n+x^n} - x| = [x \in (0,1)] = \frac{x^n}{n+x^n} \leq \frac{1}{n+0} = \frac{1}{n} \to 0$$

Итак, мы оценили сверху стремящейся к нулю числовой последовательностью. Значит, $f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f$ по достаточному условию равномерной сходимости.

Ответ: $f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f = x$ и поточечно к функции $f = 0$ на множестве E_2.

Я с вами полностью согласен, в этой задаче сходу не очевидно, какую последовательность лучше подобрать, чтобы не сходилось равномерно. Возможно, начинать решение можно с другого пункта, попробовать, где получится, доказать, что сходится равномерно.

Пример 4. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n\operatorname{arctg}(\frac{1}{nx})$$

1. Исследуем на поточечную сходимость на $E_1 \cup E_2$. Зафиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}(\frac{1}{nx_0}) = [Teilor] = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{nx_0} + o(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x_0} + o(1)) = \frac{1}{x_0}$$

Разложить по формуле Тейлора имеем право: при $x_0 = const$, $\frac{1}{nx_0} \to 0$. Также мы записали $o(\frac{1}{n})$ вместо $o(\frac{1}{nx_0})$, т.к., опять же, $x_0 = const$, а константа под о малым ни на что не влияет.

Таким образом, мы получили, что функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится к функции $f(x) = \frac{1}{x}$ поточечно на $E_1 \cup E_2$.

2. Для того, чтобы решить, на каком множестве нет равномерной сходимости, нужно опять же подобрать $x_N : f_n(x_N) \nrightarrow f(x_N)$. Возьмем, как обычно, $n = N$, тогда при $x_N = \frac{1}{N}$ будет $f_n(x_N) \nrightarrow f(x_N)$. Ну и, опять же, нужно, чтобы x_N принадлежало E_1 или E_2 при всех N, включая $N = 1$. Так что возьмем $x_N = \frac{1}{2N}$. Оно лежит в E_1, так что будем сейчас по определению доказывать, что не сходится равномерно на E_1.

Итак, исследуем на равномерную сходимость на множестве E_1.

$$\exists \varepsilon = \text{пока не нашли} : \forall N \exists n(N) = N, x_N = \frac{1}{2N} : |f_n(x_N) - f(x_N)| =$$

$$= |N \operatorname{arctg} 2 - N| = N|\operatorname{arctg} 2 - 1| \geq |\operatorname{arctg} 2 - 1| \nrightarrow 0.$$

Запишем теперь полностью отрицание определения равномерной сходимости, которое получили:

$$\exists \varepsilon = |\operatorname{arctg} 2 - 1| : \forall N \exists n(N) = N \geq N, x_N = \frac{1}{2N} \in E_1 : |f_n(x_N) - f(x_N)| \geq \varepsilon.$$

Значит, функциональная последовательность $f_n(x)$ не сходится равномерно на множестве E_1 по определению.

3. Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_2. В задачах такого типа зачастую нужно разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. В форме Пеано не прокатит: мы не можем дать точную оценку сверху о малого, это некий непонятный класс функций, а оценка сверху нужна точная. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},$$

где $\xi \in (x_0, x)$.

Разложим *arctgt* по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности нуля (т.к. $\frac{1}{nx} \to 0$ на множестве E_2):

$$\operatorname{arctg} t = t + \frac{\operatorname{arctg}''(\xi)}{2!} t^2$$

Поясню, что производная от арктангенса берется именно по t, а не по иксу, ведь мы по t раскладываем. Найдем вторую производную арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(\operatorname{arctg} t)'' = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$(\operatorname{arctg} t)''(\xi) = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}$$

$\xi \in (0,t)$, т.к. раскладываем в окрестности нуля. Кроме того, т.к. $x \in (1,+\infty)$ на E_2, то $t = \frac{1}{nx} \in (0,1)$. Значит, $\xi \in (0,1)$. Тогда:

$$|(\operatorname{arctg} x)''(\xi)| = |-\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}| \le \frac{2\cdot 1}{(1+0^2)^2} = 2$$

Тогда:

$$|f_n(x)-f(x)| = |n \operatorname{arctg}\frac{1}{nx} - \frac{1}{x}| = |n(\frac{1}{nx} + \frac{\operatorname{arctg}''(\xi)}{2!}(\frac{1}{nx})^2) - \frac{1}{x}| = |\frac{\operatorname{arctg}''(\xi)}{2!}|\frac{1}{nx^2} \le \frac{2}{2!}\frac{1}{nx^2} \le$$

$$\le [\text{ т.к. } x > 1 \text{ на } E_2] \le \frac{1}{n} \to 0$$

Итак, мы оценили сверху стремящейся к нулю числовой последовательностью. Значит, $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f$ по достаточному условию равномерной сходимости.

Ответ: $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f = \frac{1}{x}$ (то есть сходится равномерно к функции $f(x) = 1/x$ на множестве E_2) и поточечно к функции $f = 1/x$ на множестве E_1.

Не во всех примерах функциональная последовательность сходится к одной и той же функции поточечно на E_1 и E_2. Изредка к разным. Покажем это на примере:

Пример 5. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n}{x}\operatorname{sh}\frac{x}{n} - \operatorname{ch} x$$

1. Исследуем на поточечную сходимость на $E_1 \cup E_2$. Зафиксируем $x_0 \in E_1 \cup E_2$.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{x_0}\operatorname{sh}\frac{x_0}{n} - \operatorname{ch}x_0) = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{x_0}(\frac{x_0}{n} + o(\frac{1}{n})) - \operatorname{ch}x_0) = 1 - \operatorname{ch}x_0$$

Значит, $f_n(x)$ сходится поточечно на $E_1 \cup E_2$ к предельной функции $f(x) = 1 - \operatorname{ch}x$.

2. Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_2. Видим, что при $x_N = 2N \in E_2$ все плохо:

$$\exists\varepsilon =? : \forall N \exists n(N) = N, x_N = 2N : |f_n(x_N) - f(x_N)| = |\frac{1}{2}\operatorname{sh}2 - \operatorname{ch}2N - 1 + \operatorname{ch}2N| = |\frac{1}{2}sh2 - 1| \nrightarrow 0.$$

Имеем:

$$\exists\varepsilon = |\frac{1}{2}sh2 - 1| : \forall N \exists n(N) = N \geq N, x_N = 2N \in E_2 : |f_n(x_N) - f(x_N)| \geq \varepsilon.$$

Значит, функциональная последовательность $f_n(x)$ не сходится равномерно на множестве E_2 по определению.

3. Исследуем на равномерную сходимость на множестве E_1.

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{n}{x}sh\frac{x}{n} - chx + chx - 1| = |\frac{n}{x}sh\frac{x}{n} - 1|$$

Далее будем раскладывать sh по формуле Тейлора. Имеем право, потому что $t = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ на E_1. Итак, разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$sht = t + \frac{sh''(\xi)}{2}t^2; \xi \in (0, t)$$

$$sh''t = sht$$

$$sh''\xi = sh\xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \leq \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \leq \frac{e^1}{2} < 2$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |\frac{n}{x}sh\frac{x}{n} - 1| = |\frac{n}{x}(\frac{x}{n} + \frac{sh\xi}{2}(\frac{x}{n})^2) - 1| = |\frac{x}{n}\frac{sh\xi}{2}| \leq \frac{x}{n}\frac{2}{2} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

Следовательно, $f_n(x)$ сходится равномерно на E_1.

Ответ: равномерно на E_1, поточечно на E_2.

Пример 6. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n^2 \left(n \operatorname{sh} \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right)$$

Решение:

1. Ежу понятно, что поточечный предел равен $f(x) = \frac{1}{6x^3}$ (по Тейлору до куба шинус разложили).

2.

$$\exists \varepsilon = |\frac{1}{2} sh2 - 1| : \forall N \exists n(N) = N \geq N, x_N = \frac{1}{N} \in E_1 : |f_n(x_N) - f(x_N)| =$$

$$= |N^2(N \operatorname{sh} 1 - N)| \geq |\operatorname{sh} 1 - 1|,$$

следовательно, не сходится равномерно на E_1.

3. Исследуем на равномерную сходимость на E_2. Видим из формулы для $|f_n(x) - f(x)|$, что должно сократиться аж 2 члена (с минусиками стоят), значит, чтобы в разложении шинуса 2 члена сократились, надо разложить до куба, а остаточный член будет для четвертой степени тогда. Остаточный член тогда будет $\frac{\operatorname{sh}^{(4)} \xi}{4!} t^4$, где $t = \frac{1}{nx} < 1$ на E_2; $0 < \xi < t < 1$. Заметим, что четвертая производная шинуса это $\operatorname{sh}^{(4)} \xi = \operatorname{sh} \xi$.

$$|f_n(x) - f(x)| = |n^2 \left(n(\frac{1}{nx} + \frac{1}{6n^3x^3} + \frac{\operatorname{sh}^{(4)} \xi}{4!} t^4) - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{6x^3}| \leq \frac{n^3 \operatorname{sh} 1}{24x^4n^4} \leq \frac{\operatorname{sh} 1}{24n} \to 0,$$

следовательно, сходится равномерно на E_2.