Семинар 10. Степенные ряды.

Скубачевский Антон

4 мая 2022 г.

Определение. Степенной ряд - ряд вида $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Сделаем замену для простоты записи: $z = x - x_0$. Тогда ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)^n \tag{1}$$

Определение. Радиус сходимости ряда. $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}}$. Эта формула также называется формулой Коши-Адамара. $(-R; R)$ называется интервалом сходимости.

Палочка над пределом значит, что имеется в виду верхний предел (наибольший из частичных пределов).

Радиус сходимости также можно найти по формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$

Теорема. Пусть R - радиус сходимости ряда (1). Тогда при $|z| < R$ ряд сходится и даже абсолютно, а при $|z| > R$ ряд расходится и даже его $n-$й член $a_n z^n$ не стремится к нулю.

Эта теорема-по сути эквивалентное определение радиуса сходимости: это наибольшее z, при котором ряд сходится. Порой именно эту теорему считают за определение радиуса сходимости, а формулу Коши-Адамара уже потом выводят.

Если $|z| = R$, то ряд в этой точке может как сходиться, так и расходиться:

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ с радиусом сходимости $R = 1$ расходится в точке $z = 1$ и сходится в точке $z = -1$ (по признаку Лейбница).

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, сходится при $z = 1$ и при $z = -1$.

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, $R = 1$ расходится при $z = \pm 1$

Теорема Абеля. Пусть $|z_1| < |z_2|$. Тогда если ряд (1) сходится в точке z_2 (или если его $n-$й член в точке z_2 стремится к нулю), то он сходится абсолютно в точке z_1. Если же ряд расходится в точке z_1, то он расходится в точке z_2, и даже его $n-$й член в точке z_2 не стремится к нулю.

Эта теорема тоже нужная, позже увидим, где. Ее в физтеховских билетах, а также в книжках некоторых называют первой теоремой Абеля.

Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. (она же иногда называется второй теоремой Абеля). Пусть R – радиус сходимости степенного ряда; $0 < r < R$. Тогда на отрезке $\{z : |z| \leq r\}$ степенной ряд сходится равномерно.

У нас будут задания разложить в ряд Тейлора. Ряд Тейлора - очевидно, степенной ряд. Не путайте ряд Тейлора (это ряд, т.е. суммочка до бесконечности) и формулу Тейлора. Это довольно грубая ошибка. Кроме того, в ряд Тейлора мы раскладываем для любого икса в круге сходимости, а по формуле Тейлора - только в окрестности некоторой точки.

Вспомним пару табличных разложений:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$$

Радиусы сходимости sin, cos, sh, ch тоже $R = \infty$. В задачах мы считаем эти радиусы сходимости уже известными, вычислять их по формуле Коши-Адамара не нужно.

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad R = 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad R = 1, \quad C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

Пример 1. Разложить по степеням x и найти радиус сходимости ряда:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

$$\frac{x}{1-x-2x^2} = \frac{x}{(x+1)(1-2x)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-2x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3}C_{-1}^{n}(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}C_{-1}^{n}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(\frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{2^n}{3})$$

Здесь было учтено, что $C_{-1}^n = \frac{(-1)(-2)...(-n)}{n!} = (-1)^n$

Найдем радиус сходимости. Радиус сходимости ряда функции $\frac{1}{1-2x}$ найдем из соображений, что радиус сходимости ряда функции $(1+x)^\alpha$ равен 1. Отсюда получаем: $|-2x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = 1/2$. Радиус сходимости второго ряда $\frac{1}{1+x}$ $R_2 = 1$. Получаем, что оба ряда сходятся при $x < \frac{1}{2}$. Значит, их сумма сходится при $x < \frac{1}{2}$. При $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ один ряд сходится, а второй расходится, значит, их сумма расходится. При $x > 1$ оба расходятся, значит, мы не можем сделать выводов о сходимости их суммы. Но у нас есть теорема Абеля. По ней получаем, что при $x > 1$ сумма рядов расходится, т.к. она расходится при $x \in (\frac{1}{2}; 1)$. Получаем в итоге, что искомый радиус сходимости равен $\frac{1}{2}$. В подобных номерах достаточно выбрать минимальный из 2 радиусов и сразу записать в ответ, без объяснений. Радиусы сходимости рядов тоже можно находить без объяснений: это, как видите, довольно очевидная процедура.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(\frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{2^n}{3})$, $R = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Разложить по степеням $(x-5)$ функцию $f(x) = ln(x^2 - 5x+6)$

Сделаем замену $t = x - 5$:

$$ln(x^2-5x+6) = ln((x-2)(x-3)) = ln(t+3)(t+2) = ln(t+3)+ln(t+2) = ln2(1+\frac{t}{2})+ln3(1+\frac{t}{3}) =$$

$$= ln6 + ln(1+\frac{t}{2}) + ln(1+\frac{t}{3}) = ln6 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n})/n$$

Радиусы сходимости находим из условий: $\frac{t}{2} < 1$, $\frac{t}{3} < 1$. Отсюда получаем $R_1 = 2$, $R_2 = 3$. Получаем радиус сходимости ряда функции $f(x)$ как минимальный из них: $R = 2$.

Ответ: $f(x) = ln6 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-5)^n(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n})/n$; R = 2.

Порой разложить влоб в ряд не получается. Но можно продифференцировать функцию, производную разложить в ряд, потом результат проинтегрировать и получить ответ. Для этого нам пригодятся теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов.

Теорема о почленном дифференцировании и интегровании. Пусть $R > 0$ - радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Тогда при $|x - x_0| < R$:

1. f имеет производные всех порядков, которые находятся почленным дифференцированием.
2. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$, так что по любому отрезку из интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать.
3. Степенные ряды, полученные почленным дифференцированием или интегрированием, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 3. Разложить по степеням x: $f(x) = \int\limits_{0}^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{2+t^2}}$. Заранее заметим, что $f(0) = 0$.

Мы имеем дело с интегралом с переменным верхним пределом. Напомню, что его можно по этому пределу спокойно дифференцировать: Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ имеет производную в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. Но на верхнем пределе не просто x, а $2x$. То есть когда будем брать производную, это будет производная сложной функции. То есть надо еще умножить на $(2x)' = 2$. Имеем:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{2+(2x)^2}} = 2^{2/3}(1+2x^2)^{-1/3} = 2^{2/3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/3}^{n} 2^n x^{2n}$$

Радиус сходимости данного ряда находится из: $2x^2 < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Проинтегрируем почленно от $x_0 = 0$ до x, чтобы получить исходную функцию и ее разложение:

$$\int\limits_0^x (f'(x)dx) = f(x) - f(0) = 2^{2/3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/3}^n 2^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем

Ответ: $f(x) = 2^{2/3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{-1/3}^n 2^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Пример 4. Разложить по степеням x: $f(x) = arctg\frac{x^2-4}{x^2+4}$, найти радиус сходимости ряда.

Найдем сразу $f(0) = -\frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{8x}{x^4+16} = \frac{x/2}{1+(x/2)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} \frac{x^{4n+1}}{2^{4n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{2^{4n+1}}$$

$R = 2$

Почленно проинтегрируем:

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+1}(4n+2)}$$

Ответ: $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+1}(4n+2)}$, $R = 2$.

Пример 5. Разложить по степеням x $f(x) = arccos\sqrt{\frac{1}{2}+9x^2}$, найти радиус сходимости ряда.

Найдем $f(0)$:

$$f(0) = arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}-9x^2}} \cdot \frac{18x}{2\sqrt{\frac{1}{2}+9x^2}} = -\frac{18x}{\sqrt{1-324x^4}} = -18x(1-18^2x^4)^{-1/2} =$$

$$= -18x \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^n (-1)^n 18^{2n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{-1/2}^n 18^{2n+1} x^{4n+1}$$

Найдем радиус сходимости получившегося ряда: $|(18x^2)^2| < 1 \Leftrightarrow 18x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Значит, $R = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. При почленном интегрировании ряда радиус сходимости не изменится. Почленно проинтегрировав ряд, получим:

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}C_{-1/2}^{n}18^{2n+1}\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}C_{-1/2}^{n}18^{2n+1}\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$$