Математический анализ. Семинар 8

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

7 ноября 2017

1 Семинар 8.

1.1 Дивергенция, ротор и их друзья

Определение 1. *Говорят, что в области G задано скалярное поле f(векторное поле $\bar{a}$), если $\forall M \in G$ поставлено в соотв. число $f(M)$ (вектор $\bar{a}(M)$)*

1. *Градиент скалярного поля:* $\overline{\nabla} f = grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

2. *Производная по направлению:* $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(M)-f(M_0)}{t}$, $\overline{M_0 M} = t\bar{l}, \ \ t > 0$
   $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = (grad\ f, \bar{l})$

3. *Дивергенция* $div\ \bar{a} = (\overline{\nabla}, \bar{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

4. *Ротор:* $rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\overline{\nabla} \times \bar{a}]$

5. *(Векторный оператор) Набла:* $\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)$

6. *оператор Лапласа (Лапласиан):* $\Delta = (\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z}\right) = divgrad$

7. *Градиент* $\bar{a}$ *по* $\bar{b}$: $(\bar{b}\overline{\nabla})\bar{a} = b_x \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \bar{a}}{\partial z}$

   Правило Лейбница: (как $(fg)' = fg' + g'f$): $\overline{\nabla}(p, q) = \nabla(\mathbf{p}, q) + \nabla(p, \mathbf{q})$

1.1.1 №12.24

Посчитать производную по направлению $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ функции: $u = f(r);\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, т.е. r - модуль радиус-вектора $\bar{r}$.
$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = (grad\ f(r), \bar{n})$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}, \frac{\partial f}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}$;

Тогда по определению градиента $gradf(r) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$

В итоге получаем ответ: $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{f'(r)}{r}(\bar{r}, \bar{n})$

1.1.2 №12.41(5)

Посчитать: $div\ grad\ f(r)$. Здесь опять же $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Из предыдущего примера мы знаем, что $gradf(r) = (f'(r)\frac{\bar{r}}{r})$

По определению дивергенции $div\ grad\ f(r) = div(f'(r)\frac{\bar{r}}{r}) = \frac{\partial(grad_x\ f(r))}{\partial x} + \frac{\partial(grad_y\ f(r))}{\partial y} + \frac{\partial(grad_z\ f(r))}{\partial z}$. Под $grad_x$ имеется в виду х-я координата градиента. $grad_x f(r) = f'(r)\frac{x}{r}$, $grad_y f(r) = f'(r)\frac{y}{r}$, $grad_z f(r) = f'(r)\frac{z}{r}$

$$\frac{\partial(grad\ f(r))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)\frac{x}{r}) = \frac{f'(r)}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r} + x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) =$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\right) = \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^2}\left(f'' - \frac{f'}{r}\right)$$

$$\to div = 3\frac{f'(r)}{r} + (f'' - \frac{f'}{r})(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''$$

Правило Лейбница. $\nabla(pq) = \nabla(\mathbf{p}q) + \nabla(p\mathbf{q})$ (жирным выделено то, по чему мы берем оператор Набла). То есть если оператор набла действует на произведение функций, то его действие можно разделить на сумму действий на первую и на вторую.

Примеры использования правила Лейбница: (жирным выделено то, по чему мы берем оператор Набла)

1. $div(f\bar{a}) = (\nabla, f\bar{a}) = (\nabla, \mathbf{f}\bar{a}) + (\nabla, f\bar{\mathbf{a}}) = (\nabla\mathbf{f}, \bar{a}) + f\cdot(\nabla, \bar{\mathbf{a}}) = (gradf, \bar{a}) + fdiv(\bar{a})$;

2. $div[\bar{a}, \bar{b}] = (\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]) = (\nabla, \bar{a}, \bar{b}) = (\nabla, \bar{\mathbf{a}}, \bar{b}) + (\nabla, \bar{a}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{b}, [\nabla, \bar{\mathbf{a}}]) - (\bar{a}, [\nabla, \bar{\mathbf{b}}]) = (\bar{b}, rot\bar{a}) - (\bar{a}, rot\bar{b})$.

3. $rot[\bar{a}, \bar{b}] = [\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]] = [\nabla, [\bar{\mathbf{a}}, \bar{b}]] + [\nabla, [\bar{a}, \bar{\mathbf{b}}]] = ((\nabla\bar{b})\bar{\mathbf{a}} - \bar{b}(\nabla, \bar{\mathbf{a}})) + (\bar{a}(\nabla, \bar{\mathbf{b}}) - (\nabla, \bar{a})\bar{\mathbf{b}}) = ((\bar{b}\nabla)\bar{a} - \bar{b}div\bar{a}) + (\bar{a}div\bar{b} - (\bar{a}\nabla)\bar{b})$

1.2 16.3

Найти $a = div(f(\bar{r}) \cdot \bar{r})$.

Решение: $a = div(f(\bar{r}) \cdot \bar{r}) = (\nabla, f(\bar{r})\bar{r}) = (\nabla, \mathbf{f}\bar{r})) + (\nabla, f\bar{\mathbf{r}}) = (\nabla\mathbf{f}, \bar{r})) + f(\nabla, \bar{\mathbf{r}}) = (gradf, \bar{r}) + fdiv\bar{r} = (f'\frac{\bar{r}}{r}, \bar{r}) + 3f = f'r + 3f$.

Здесь было использовано также, что $div\bar{r} = 3$ (это легко считается по определению дивергенции).

1.3 19.3

Найти $rot((\bar{r}, \bar{a})\bar{b})$ - ? $\bar{a}, \bar{b} = const$

Решение: $[\nabla, (\bar{r}, \bar{a})\bar{b}] = [\nabla, (\bar{r}, \bar{a})\bar{b}] = [\nabla(\bar{\mathbf{r}}, \bar{a}), \bar{b}]$
$(\bar{r}, \bar{a}) = xa_x + ya_y + za_z$.

$$\nabla(\bar{r}, \bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xa_x + ya_y + za_z) \\ \frac{\partial}{\partial y}(xa_x + ya_y + za_z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(xa_x + ya_y + za_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \bar{a}$$

Отсюда получим ответ: $[a, b]$

Замечание. Нетрудно проверить, что:

- $divgrad(f) = \Delta f$
- $rotgrad(f) = 0$
- $divrot(\vec{a}) = 0$
- $rotrot(\vec{a}) = graddiv(\vec{a}) - \Delta\vec{a}$ ($graddiv(\vec{a})$ не принято упрощать)

Вышеуказанные равенства очень полезные и пригодятся, например, в физике (например, электромагнетизм, теория поля)

Вспомогательный факт: $\nabla(\bar{A}, \bar{B}) = [\bar{A}, rot\bar{B}] + [\bar{B}, rot\bar{A}] + (\bar{A}\nabla)\bar{B} + (\bar{B}\nabla)\bar{A}$. Его доказательство: $\nabla(\bar{A}, \bar{B}) = \nabla(\bar{\mathbf{A}}, \bar{B}) + \nabla(\bar{A}, \bar{\mathbf{B}})$
$\bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) = [\bar{a}, [\bar{c}, \bar{b}]] + (\bar{a}, \bar{c})\bar{b}$ где обозначим $\bar{a} = \bar{A}, \bar{b} = \bar{B}, c = \nabla$

$\nabla(\bar{A}, \bar{\mathbf{B}}) = [\bar{A}, [\nabla, \bar{B}]] + (\bar{A}, \nabla)\bar{B} = \bar{A}rot\bar{B} + (\bar{A}, \nabla)\bar{B}$. Про второе слагаемое доказываем аналогично. Ч.т.д.

1.4 Сложная задача

Функция $f : R \to R, \;\; \bar{g} : R \to R^3$ Найти $div\Big(\big(\bar{g}(f(|\bar{r}|)), \bar{r}\big) \cdot \bar{r}\Big) =$
Обозначим $h = (\bar{g}(f(|\bar{r}|)), \bar{r})$
$= div(h\bar{r}) = (\nabla, h\bar{r}) = (\nabla, h\bar{r}) + (\nabla, h\bar{r}) = (\nabla\mathbf{h}, \bar{r}) + h(\nabla, \bar{\mathbf{r}}) = (grad\ h, \bar{r}) + 3h$. где $grad\ h = \nabla\big(\bar{g}(f(\bar{r}), \bar{r})\big)$

Пользуясь вспомогательным фактом выше, считаем $\bar{A} = \bar{g}(\bar{f}(|\bar{r}|))$, $\bar{B} = \bar{r}$. Т.к. $rot\bar{r} = 0$ получим $[\bar{A}, rot\bar{B}] = 0$
$(\bar{A}\nabla)\bar{B} = (\bar{g}, \nabla)\bar{r} = \bar{g}$

Примечание. $\bar{g}$ и $\bar{g}(f(|\bar{r}|))$ - одно и то же, просто без аргумента писать быстрее. r, $|\bar{r}|$, $|r|$ - тоже одно и то же в нашей записи. Не путать с $\bar{r}$.

Рассмотрим $\bar{B} \times rot\bar{A}$ при $\bar{B} = \bar{r} \Rightarrow \bar{B} \times rot\bar{A} \perp \bar{r}$ тогда $(\bar{B} rot\bar{A}, \bar{r}) = 0$
Осталось последнее слагаемое
$(\bar{B}\nabla)\bar{A} = (\bar{r}, \nabla)\bar{g} = x\bar{g}_x + y\bar{g}_y + z\bar{g}_z = x\bar{g}_f f_r r_x + y\bar{g}_f f_r r_y + z\bar{g}_f f_r r_z = \bar{g}_f f_r (x^2 + y^2 + z^2)/|r| = \bar{g} f_r |\bar{r}|$
В итоге $(grad\ h, \bar{r}) + 3h = (\bar{g}, \bar{r}) + (\bar{g}_f f_r r, \bar{r}) + 3(\bar{g}, \bar{r}) = (\bar{g}_f f_r r, \bar{r}) + 4(\bar{g}, \bar{r})$