Семинар 6 часть 2. Знакопеременные несобственные интегралы.

Скубачевский Антон

4 апреля 2022 г.

1 Знакопеременные несобственные интегралы

Со знакопеременными интегралами возникают сложности, в том числе, споры по поводу того, как их решать. К примеру, в методичке Кожевникова изложены такие полезные и изящные приемы, как тригонометрический признак и следствие из признака Абеля, но, к сожалению, многие преподаватели не принимают решения с помощью этих приемов (и, возможно, правильно делают). Поэтому в наших семинарах постараемся обойтись без этих приемов =)

В отличие от знакопостоянных интегралов, к знакопеременным нельзя применять признаки сравнения, поэтому для исследования знакопеременных интегралов нам понадобятся дополнительные инструменты:

Критерий Коши (используется для доказательства расходимости): Пусть функция f интегрируема по Риману $\forall [a, b'] \subset [a, b)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon \in [a, b) : \forall b', b'' \in [b_\varepsilon, b) \Rightarrow |\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx| < \varepsilon$$

Признак Дирихле. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, если

1. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$, $g(x)$ - непрерывно дифференцируема на $[a;+\infty)$
2. $f(x)$ - имеет на $[a,+\infty)$ ограниченную первообразную
3. Функция $g(x)$ монотонно убывает к нулю на $[a;+\infty)$ (то есть имеет на бесконечности предел ноль, причем является монотонной, начиная с некоторого икса. Будем обозначать монотонное убывание к нулю $g(x) \downarrow 0$.)

Замечание. Проверить, что функция на полуинтервале $[a,+\infty)$ имеет ограниченную первообразную, можно следующим образом: показать, что

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x |\int\limits_a^x f(t)dt| < C$$

Интеграл с переменным верхним пределом, стоящий под модулем, является первообразной нашей функции, т.к. если взять от него производную по верхнему пределу, то есть по x, то мы получим $f(x)$.

К примеру, ежу понятно, что это условие будет выполняться для функций $sinx$, $cosx$, $sin2x$, $cos2x$, ...

При этом заметим, что для функции $f(x) = sin^2x$ данное условие не выполняется:

$$\int\limits_a^x sin^2tdt = \int\limits_a^x \frac{1-cos2t}{2}dt = \frac{x-a}{2} - \frac{1}{4}(sin2x - sin2a)$$

Получили неограниченную функцию (функция x неограничена), значит, sin^2x не имеет ограниченной первообразной.

Определение. Абсолютная сходимость Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то есть интеграл от модуля функции. Всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Определение. Условная сходимость Говорят, что интеграл сходится условно, если он сходится, но не абсолютно.

Три супер полезных неравенства

1. $|sinx| \leq |x|$

2. $|sinx| \geq sin^2x$, $|cosx| \geq cos^2x$

3. $|sinx| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ при $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, не путайте с неравенством (1)!

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha sinx dx$$

1). Исследуем на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим интеграл от модуля: $\int\limits_1^{+\infty} |x^\alpha sinx| dx$. Он знакопостоянный, значит, к нему можно применить признак сравнения. Воспользуемся тем, что $|sinx| \leq 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} |x^\alpha sinx| dx \leq \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha dx$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha dx$ сходится при $\alpha < -1$ как шаблонный. Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |x^\alpha sinx| dx$ сходится при $\alpha < -1$ по признаку сравнения. Значит, исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha sinx dx$ сходится абсолютно при $\alpha < -1$.

Заметим, что из наших рассуждений нельзя сделать вывод, что при $\alpha \geq -1$ исходный интеграл не сходится абсолютно. Доказывать это придется потом в отдельном пункте.

2). Исследуем на сходимость с помощью признака Дирихле. В интеграле $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha sinx dx$ обозначим $f(x) = sinx$; $g(x) = x^\alpha$. При $\alpha < 0$ интеграл удовлетворяет всем требованиям признака Дирихле: $sinx$ непрерывен и имеет ограниченную первообразную, а x^α при $\alpha < 0$ непрерывно дифференцируем (ведь $x \neq 0$) и, что главное, $\downarrow 0$. Это очевидно и можно не доказывать. Доказывать монотонное стремление к нулю придется для более сложных функций. Таким образом, наш интеграл сходится при $\alpha < 0$ по признаку Дирихле.

3). Докажем, что при $\alpha \geq 0$ интеграл расходится по Критерию Коши.

Для начала в этом пункте замечают, что функция, стоящая рядом с синусом, больше по модулю некоторой константы. В самом деле, при $\alpha \geq 0$ $x^\alpha \geq 1$.

Напишем отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon : \forall \delta \in [a, b) \exists b', b'' \in [\delta, b) : |\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx| \geq \varepsilon$$

Нам надо будет подобрать b' и b'', такие, что интеграл с такими пределами интегрирования от синуса будет равен какой-то константе, например, единице, и не будет стремиться к нулю. Первое, что приходит в голову: $b' = 2\pi n$; $b'' = 2\pi n + \pi/2$.

$$|\int\limits_{b'=2\pi n}^{b''=2\pi n+\pi/2} x^\alpha sinx dx| = [sinx \geq 0 \text{при } x \in [2\pi n; 2\pi n + \pi/2]] =$$

$$= \int\limits_{b'=2\pi n}^{b''=2\pi n+\pi/2} x^\alpha sinx dx \geq [x^\alpha \geq 1] \geq \int\limits_{b'=2\pi n}^{b''=2\pi n+\pi/2} sinx dx = 1$$

(Подразумевается, что, очевидно, $\forall \delta$ всегда найдется n, такое, что $2\pi n \geq \delta$ и $2\pi n + \pi/2 \geq \delta$).

Имеем:

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall \delta \in [a, b) = [1; +\infty) \exists b' = 2\pi n, b'' = 2\pi n + \pi/2 \in [\delta, b) : |\int\limits_{b'}^{b''} x^\alpha sinx dx| \geq \varepsilon$$

Значит, при $\alpha \geq 0$ интеграл расходится по критерию Коши.

4). Остался один нерешенный вопрос: сходится ли абсолютно интеграл на промежутке $\alpha \in [-1; 0)$. Докажем, что нет

$$\int\limits_1^{+\infty} |x^\alpha sinx| dx \geq [\text{неравенство (2)}] \geq \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha cos2xdx$$

Первый из суммы двух полученных интегралов расходится при исследуемых $\alpha \in [-1;0)$ по шаблону, а второй сходится по признаку Дирихле. Сумма сходящегося и расходящегося интегралов дает расходящийся интеграл. Значит, $\int\limits_1^{+\infty} |x^\alpha sinx|dx$ расходится при $\alpha \in [-1;0)$ по признаку сравнения. Значит, $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha sinxdx$ не сходится абсолютно при $\alpha \in [-1;0)$. Но из пункта (1) мы знает, что он сходится на этом полуинтервале. Значит, он сходится условно, т.к. сходится, но не абсолютно.

Ответ: сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $\alpha \in [-1,0)$, расходится при $\alpha \in [0,+\infty)$.

Это решение называется 4-ступенчатой схемой исследования несобственного интеграла, и по ней следует исследовать все несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{sin(x+x^2)}{x^\alpha} dx$$

Первым делом, надо бы как-то свести интеграл к виду $\int\limits_1^{+\infty} g(x)sinxdx$, или чему-то в этом роде с помощью замены ($g(x) \downarrow 0$ в пункте про сходимость по признаку Дирихле). Чтобы его свести, в подобных примерах делается замена. Конекретно здесь выделим полный квадрат, а потом сделаем замену.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{sin(x+x^2)}{x^\alpha} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{sin((x+1/2)^2 - 1/4)}{x^\alpha} dx = [t = (x+1/2)^2] =$$

$$= \int\limits_{9/4}^{+\infty} \frac{sin(t-1/4)}{(\sqrt{t}-1/2)^\alpha 2\sqrt{t}} dt$$

Далее в решении вынесем 1/2 за знак интеграла и забьем на нее, потому что на сходимость она никак не влияет.

Обозначим $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1/2)^\alpha}$

1). Исследуем интеграл на сходимость с помощью признака Дирихле. Здесь уже ежу непонятно, когда что стремится к нулю и когда что монотонно, поэтому придется прибегать к услугам предела и производной =(

Для начала поймем, при каких α $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1/2)^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t})^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}$$

Этот предел $= 0$ при $\alpha > -1$ (чтобы большое t в некоторой степени стремилось к нулю, надо, чтобы степень была < 0).

Теперь с помощью производной исследуем на монотонность:

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{t}-1/2)^\alpha t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha}{\sqrt{t}-1/2}\right) < 0$$

Величина $\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{t}-1/2)^\alpha t} > 0$, т.к. пределы интегрирования $t \in [9/4; +\infty)$. Сократим ее. Ну и знак минус уберем, поменяв знак неравенства. Ну и приведем к общему знаменателю правую скобку, заодно сократив на знаменатель. Получим:

$$\sqrt{t} - 1/2 + \alpha\sqrt{t} > 0$$

$$\alpha > \frac{-\sqrt{t}+1/2}{\sqrt{t}}$$

Нас интересует поведение интеграла около особенности, то есть на бесконечности, поэтому устремляем $t \to +\infty$. Это стандартный прием, решающий все проблемы в этом пункте. Тогда наше неравенство принимает вид:

$$\alpha > -1$$

(если кто считает это подгоном, вот более строго: неравенство получилось при достаточно больших t: $\alpha + 1 + o(1) > 0$. Для произвольного фиксированного $\alpha > -1$ данное неравенство верно в силу малости o() (найдется достаточно большое t, при котором оно верно))

Таким образом имеем, что при $\alpha > -1$ функция $g(t)$ монотонна и стремится к нулю на бесконечности, то есть $g(t) \downarrow 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, $g(t)$, очевидно, непрерывно дифференцируема. А функция $sin(t-1/4)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную. Значит, $\int\limits_{9/4}^{+\infty} g(t)sin(t-1/4)dt$ сходится при $\alpha > -1$ по признаку Дирихле.

В данном пункте в некоторых задачах бывает также полезно что-нибудь разложить по Тейлору и забить на остаточный член.

2). Исследуем на абсолютную сходимость (будем даже исследовать интеграл до замены).

$$\int\limits_{1}^{+\infty} |\frac{sin(x+x^2)}{x^\alpha}|dx \le \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Интеграл в правой части неравенства сходится при $\alpha > 1$ по шаблону. Значит, интеграл в левой части сходится при $\alpha > 1$ по признаку сравнения. Значит, исходный интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

3). Докажем, что наш интеграл расходится при $\alpha \le -1$ с помощью Критерия Коши.

Сначала в данном пункте надо заметить, что $g(t) \ge C > 0, C \in \mathbb{R}$. Для этого заметим, что при $\alpha = -1$ $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$, а при $\alpha < -1$ $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. Это значит, что, начиная с некоторого значения t, $g(t) \ge 1/2$ (функция в пределе стремится к 1 или бесконечности, значит, начиная с некоторого t_0, больше, чем, по крайней мере, 1/2.).

Теперь применим отрицание условия Коши:

$$|\int\limits_{b'=2\pi n+1/4}^{b''=2\pi n+\pi/2+1/4} g(t)sin(t-1/4)dt| =$$

$$= \int\limits_{b'=2\pi n+1/4}^{b''=2\pi n+\pi/2+1/4} g(t)sin(t-1/4)dt \ge [g(t) \ge 1/2] \ge \frac{1}{2} \int\limits_{b'=2\pi n+1/4}^{b''=2\pi n+\pi/2+1/4} sin(t-1/4)dt = 1/2.$$

В качестве n можно взять любое целое число, большее, чем δ, чтобы b' и b'' были $> \delta$. Также мы юзаем неравенство $g(t) \ge 1/2$, справедливое при $t \geq t_0$. Поэтому n должно быть также $\geq t_0$. Окончательно получаем $n = \langle \max\{\delta, t_0\} \rangle$.

Значит,

$$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall \delta \in [a,b) \exists b' = 2\pi n + 1/4, b'' = 2\pi n + \pi/2 + 1/4 \in [\delta, b) : |\int\limits_{b'}^{b''} g(t) sin(t-1/4) dt| \geq \varepsilon,$$

где $n = \langle \max\{\delta, t_0\} \rangle$.

Значит, при $\alpha \leq -1$ интеграл расходится по критерию Коши.

4). Докажем, что при $\alpha \in (-1, 1]$ интеграл не сходится абсолютно. Для этого нам понадобится полезное неравенство (2):

$$\int\limits_{9/4}^{+\infty} |g(t) sin(t-1/4)| dt \geq \int\limits_{9/4}^{+\infty} g(t) sin^2(t-1/4) dt = \frac{1}{2} \int\limits_{9/4}^{+\infty} g(t) dt - \frac{1}{2} \int\limits_{9/4}^{+\infty} g(t) cos2(t-1/4) dt$$

Первый интеграл расходится по шаблону при интересующих нас $\alpha \in (-1, 1]$, т.к. $g(x) \sim t^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}}$.

Второй же сходится при интересующих нас $\alpha \in (-1, 1]$ по признаку Дирихле аналогично пункту 1.

Значит, их сумма расходится (сумма сходящегося и расходящегося), значит, исходный интеграл не сходится абсолютно по признаку сравнения при $\alpha \in (-1, 1]$, то есть сходится условно.

Ответ: расходится при $\alpha \leq -1$, сходится условно при $\alpha \in (-1; 1]$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{cosx^2}{(\sqrt{x} + sine^{-x})^\alpha} dx$

Сделаем замену $x^2 = t$. Тогда

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{cosx^2}{(\sqrt{x} + sine^{-x})^\alpha} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{4}^{+\infty} \frac{cost}{\sqrt{t}(t^{1/4} + sine^{-\sqrt{t}})^\alpha} dt$$

Обозначим $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(t^{1/4} + sine^{-\sqrt{t}})^\alpha}$. Исследуем на монотонность.

$$g'(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}(t^{1/4} + sine^{-\sqrt{t}})^\alpha} - \frac{2\alpha(1/4t^{-3/4} + cose^{-\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}(-\frac{1}{2\sqrt{t}}))}{2\sqrt{t}(t^{1/4} + sine^{-\sqrt{t}})^{(\alpha+1)}} < 0$$

$$t^{1/4} + sine^{-\sqrt{t}} + 2\alpha(1/4t^{1/4} - cos(e^{-\sqrt{t}})e^{-\sqrt{t}}\frac{1}{2}\sqrt{t}) > 0$$

$$t^{1/4} + 2\alpha\frac{1}{4}t^{1/4} > 0$$

$$\alpha/2 > -1$$

$$\alpha > -2$$

Теперь найдем, когда $g(t) \to 0$

$$\lim_{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}t^{\alpha/4}} = \lim_{t\to+\infty} t^{-\alpha/4-1/2} = 0$$

При $-\frac{\alpha}{4} - 1/2 < 0$, т.е. $\alpha > -2$.

Таким образом, при $\alpha > -2$ выполняется признак Дирихле, и интеграл сходится.

Остальные 3 пункта задачи простые и аналогичные предыдущей, делать их не будем. Абсолютно сходится при $\alpha > 3/2$.

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $I = \int\limits_2^{+\infty} x^\alpha \cos(x \ln x)dx$.

Решать данный пример целиком не будем, просто заметим, чем он примечателен. Беда в этом примере в том, что $\cos(x \ln x)$ сложно доказать, что имеет ограниченную первообразную: замена переменных тут не поможет, т.к. обратную замену не понятно, как делать. Метод решения данной задачи (в пунктах про доказать сходимость по Дирихле и расходимость по Коши) следующий:

Возьмчцм производную от того, что под косинусом: $(x \ln x)' = 1 + \ln x$. Домножим на нее числитель и знаменатель:

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{x^\alpha(1 + \ln x)\cos(x \ln x)}{1 + \ln x}.$$

Теперь обозначим $f(x) = (1 + \ln x)\cos(x \ln x)$, $g(x) = \frac{x^\alpha}{1+\ln x}$. Теперь видим, что $f(x)$ имеет ограниченную первообразную, а $g(x)$ можно доказать, что $\downarrow 0$ при нужных альфа. Основная проблема данной задачи решена, дальше дело техники.

Рассмотрим теперь примеры на исследование несобственного интеграла с помощью разложения по формуле Тейлора до O() большого. По определению $f(x) = O(g(x))$, если $\exists C > 0 \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C|g(x)|$. Если разложение e^x до $o()$ малого имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

То до O() большого:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Сами видите, в чем разница. До O() раскладывать можно, если это кого-то смущает, это вполне математически строго, ведь O() – по сути остаточный член в форме Лагранжа.

Ничего криминального в разложении по формуле Тейлора чего-то под знакопеременным несобственным интегралом нет: мы ведь просто раскладываем, не пользуясь признаком сравнения (если разве что не на абсолютную сходимость исследуем).

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x} - sinx} dx = \int_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}} (1 - \frac{sinx}{\sqrt{x}})^{-1} dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}} (1 + \frac{sinx}{\sqrt{x}} + O(\frac{sin^2 x}{x})) dx = \int_1^{+\infty} (\frac{sinx}{\sqrt{x}} + \frac{sin^2 x}{x} + O(\frac{sin^3 x}{x^{3/2}})) dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O(\frac{sin^3 x}{x^{3/2}}) dx$$

Первый интеграл сходится по признаку Дирихле. Второй расходится ($sin^2 x$ имеет неограниченную первообразную, значит, признак Дирихле не работает). Доказывается это аналогично предыдущим примерам: пользуемся формулой понижения степени для синуса, разбиваем интеграл на 2, один из которых сходится по Дирихле, а другой расходится по шаблону, значит, их сумма расходится:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{sin^2x}{x}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-cos2x}{2x}dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos2x}{2x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$$

Докажем, что интеграл от $O()$большого сходится абсолютно, воспользовавшись определением O():

$$\exists C > 0 : |O(\frac{sin^3x}{x^{3/2}})| \leq C|\frac{sin^3x}{x^{3/2}}|$$

$$\int\limits_1^{+\infty} |O(\frac{sin^3x}{x^{3/2}})|dx \leq C\int\limits_1^{+\infty} |\frac{sin^3x}{x^{3/2}}|dx \leq C\int\limits_1^{+\infty} x^{-3/2}dx$$

Интеграл справа сходится по шаблону, значит, интеграл от O() большого сходится абсолютно по признаку сравнения.

Т.о., исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}-sinx}dx$ представили в виде суммы двух сходящихся и расходящегося, значит, он расходится. (Если б была сумма двух расходящихся и чего-то еще, то мы не могли бы сказать, что интеграл расходится: сумма 2 расходящихся не факт что расходится).

Замечание. Строго говоря, до данного решения можно докопаться по оформлению: ведь разложение по Тейлору справедливо лишь когда аргумент стремится к нулю, а у нас иксы покрывают огромный промежуток. Но это не проблема: вместо равно между интегралами можно просто поставить эквивалентность по сходимости (ведь сходимость зависит только от поведения функции в окрестности особенности, где мы функцию и раскладываем).

Замечание. Данный пример дает нам полезный контрпример к признаку Дирихле: этот интеграл расходится, при том, что $f(x) = sinx$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную, а $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-sinx}$ непрерывно дифференцируема и стремится к нулю, НО не монотонно. То есть в признаке Дирихле условие монотонности важно.

Утверждение ниже помогает исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл, функцию под которым мы разложили до $O()$.

Утверждение 47. Пусть $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, $J = \int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$. Тогда если $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится абсолютно, то I и J либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Пример 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{cosx}{\sqrt{x} - sinx} dx$$

Этот интеграл уже будет сходиться. Разница с предыдущим номером в том, что не будет интеграла от противного $sin^2 x$. Вместо него будет $sin 2x/2$.

Этот интеграл сходится, но не абсолютно. Доказать, что не сходится абсолютно, можно с помощью Утв. 47, ну или с помощью полезного неравенства (2), если не пользоваться разложением до O().

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 sin(\frac{cosx^3}{x+1}) dx$$

Заметим, что ноль не является особенностью. Также обозначим $t = x^3$, тогда $dx = \frac{dt}{3t^{2/3}}$ Имеем:

$$I = \frac{1}{3} \int_{0}^{+\infty} sin(\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1}) dt$$

1). Исследуем на сходимость.

$$sin(\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1}) = \frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1} - (\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1})^3 + O((\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1})^5)$$

Интеграл от первой функции сходится по Дирихле, от второй также (т.к. $cos^3 t = \frac{cos3t + 3cost}{4}$). От третьей сходится абсолютно (аналогично примеру 3.) Значит, исходный интеграл сходится как сумма трех сходящихся.

2). Исследуем на абсолютную сходимость. Заметим, что $\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1} \to 0$ при $t \to +\infty$. Значит, начиная с некоторого t_0, $\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1} \leq \frac{\pi}{2}$. Т.о., можем применить неравенство (3). Также используем тот факт, что нам все равно, какой нижний предел интегрирования у этого несобственного интеграла, т.к. особенность только на бесконечности:

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{t_0} f(t)dt + \int_{t_0}^{+\infty} f(t)dt,$$

где $\int_0^{t_0} f(t)dt$ - конечен, т.е. сходится, т.к. это обычный определенный интеграл Римана без особенностей. То есть на сходимость он не влияет.

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} |sin(\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1})|dt \sim \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} |sin(\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1})|dt \geq \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}|\frac{cost}{\sqrt[3]{t}+1}| \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{cos^2 t}{\sqrt[3]{t}+1} = \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1+cos2t}{2(\sqrt[3]{t}+1)} = \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{2(\sqrt[3]{t}+1)} + \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{cos2t}{2(\sqrt[3]{t}+1)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{2(\sqrt[3]{t})} + \frac{1}{3}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{cos2t}{2(\sqrt[3]{t})}$$

Первый расходится по шаблону, второй сходится по признаку Дирихле, значит их сумма расходится, значит, исходный не сходится абсолютно по признаку сравнения.

Значит, исходный интеграл сходится, но не абсолютно. Значит, он сходится условно.

2 Лайфхаки

2.1 Признак Абеля и следствие из признака Абеля.

Признак Абеля очень похож на признак Дирихле, им можно вместо Дирихле пользоваться.

Признак Абеля. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, если

1. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$, $g(x)$ - непрерывно дифференцируема на $[a;+\infty)$

2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится

3. Функция $g(x)$ ограничена и монотонна на $[a;+\infty)$ (иначе говоря, монотонно стремится к некоторому конечному пределе на бесконечности, $g(x)\downarrow const$)

Как видим, признаки Дирихле и Абеля очень похожи. Кстати, условие непрерывной дифференцируемости функции $g(x)$ в обоих необязательно: оно нужно просто для более простого доказательства.

Признак Абеля нам, в общем-то, не нужен. Нам важно именно следствие из признака Абеля, которое мы назовем лайфхаком №1.

Следствие из признака Абеля. Пусть функция $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a,+\infty)$, а $f(x)/g(x)\downarrow const\neq 0$. Тогда интегралы $I=\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\hat{I}=\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Оно просто доказывается:

Рассматривается интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)/f(x)dx$. Он сходится, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится (по признаку Абеля). Аналогично рассматривается интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)f(x)/g(x)dx$. Он сходится, если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ - сходится (по признаку Абеля). Получаем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Аналогично с абсолютной сходимостью.

Тригонометрический признак. Интеграл $I=\int\limits_a^{+\infty} g(x)sinxdx$:

1. Если при $x\to+\infty$ $g(x)\geq C>0$, то I-расходится.
2. Если $g(x)\downarrow 0$, то I - сходится
3. Если $g(x)\downarrow 0$, то I сходится абсолютно $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится абсолютно

Пункт 2 тригонометрического признака бесполезен, потому что является следствием признака Дирихле. Пункт 1 нужен, чтобы по критерию

Коши не расписывать лишнюю строчку (хотя заметьте, и там, и там используется, что $g(x) \geq C > 0$, то есть по сути способы решения через критерий Коши и триг признак-одно и то же). Пункт 3 нужен, чтобы вместо 2 отдельных пунктов (доказать, что сходится абсолютно при одних альфа, и доказать что не сходится абсолютно при других) можно было сделать один более простой пункт. И чтобы не применять те неравенства типа $|sinx| \leq |x|$ или $|sinx| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ при $x \in [0; \pi/2]$. Но многие преподаватели не признают этот признак, поэтому я бы не советовал его юзать, только если без него не получается.

Пример использования следствия из признака Абеля.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{sinx^2}{(x + arctgx)^{\alpha}} dx$$

$$f(x) = \frac{sinx^2}{(x + arctgx)^{\alpha}}$$

Очень хочется выкинуть арктангенс нафиг. Он вроде бы мал на бесконечности. И при исследовании интеграла доставит кучу проблем. А под интегралом тогда останется очень простая для исследования функция $g(x) = \frac{sinx^2}{x^{\alpha}}$. Но этого делать просто так нельзя. А с помощью следствия из признака Абеля можно. Но нужно аккуратно обосновать, что это следствие можно применить, то есть что $f/g \downarrow const \neq 0$. Сделаем это:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{x}{x + arctgx})^{\alpha}$$

При $x \to +\infty$ $f/g \to 1$, это очевидно. Осталось доказать монотонность. Придется брать производную.Степень даже уберем когда будем брать производную: она на монотонность не влияет. Можно f/g исследовать на монотонность, можно g/f, тоже, очевидно без разницы.

$$(\frac{x + arctgx}{x})' = \frac{(1 + \frac{1}{x^2+1})x - x - arctgx}{x^2} = \frac{\frac{x}{x^2+1} - arctgx}{x^2} < 0, \text{ начиная с некоторого } x_0$$

Это справедливо, т.к. $arctgx \to \pi/2$, $\frac{x}{x^2+1} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Значит, все необходимые условия для выполнения признака Абеля выполнены. Значит, можем исследовать более простой интеграл, ответ для него будет аналогичен.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{sinx^2}{x^\alpha} dx$$

Далее делаем замену $x^2 = t$, получаем:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{sint}{t^{\alpha/2+1/2}} dt$$

По признаку Дирихле этот интеграл сходится при $\alpha/2 + 1/2 > 0$, т.е. $\alpha > -1$.

При $\alpha \leq -1$ интеграл расходится (доказывается либо по Критерию Коши, либо по триг признаку пункту 1, т.к. $\frac{1}{t^{\alpha/2+1/2}}$ будет при таких альфа больше некоторой константы).

Исследуем для разнообразия на абсолютную сходимость с помощью пункта 3 тригонометрического признака. Это позволит нам не доказывать отсутствие абс сходимости в отдельном пункте.

При $\alpha > -1$ будем исследовать на абс сходимость, потому что иначе интеграл расходится. При таких α $\frac{1}{t^{\alpha/2+1/2}} \downarrow 0$. Поэтому пункт 3 тригонометрического признака можем использовать. Получаем:

$\frac{1}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{sint}{t^{\alpha/2+1/2}} dt$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha/2+1/2}} dt$ сходится абсолютно. Он сходится как шаблонный $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Получаем Ответ: при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $\alpha \leq -1$ расходится, во всех остальных случаях сходится условно.