Математический анализ. Семинар 6

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

24 октября 2017

1 Семинар 6. Криволинейные интегралы

1.1 Криволинейный интеграл I рода

Определение(Криволинейный интеграл I рода) Пусть задана кривая: $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$; $\vec{r}\in\mathbb{C}^1([a,b])$. Пусть на этой кривой определена скалярная функция трех переменных$f:\Gamma\subset\mathbb{R}^3\to R$. Тогда следующий интеграл называется криволинейным интегралом 1 рода от функции f по кривой Γ:

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)ds \equiv \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))|\overline{r}'(t)|dt =$$

$$= \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

Геометрический смысл $f=1 \Rightarrow \int\limits_\Gamma f(x,y)ds$ - длина кривой Γ

Частный случай двух переменных. $y=g(x)$.

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)ds \equiv \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}dt$$

1.2 Пример 1

$\int\limits_\Gamma xyds$, если $\Gamma: x(t)=\operatorname{sh}(t), y(t)=\operatorname{ch}(t), t\in[0;0.5\ln 2]$

$$\int\limits_\Gamma xyds = \int\limits_0^{0.5\ln 2} \operatorname{sh}t\operatorname{ch}t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t}dt =$$

$$= \int\limits_0^{0.5\ln 2} 0.5\operatorname{sh}2t\sqrt{\operatorname{ch}2t}dt = ...$$

Дальше можете досчитать сами=)

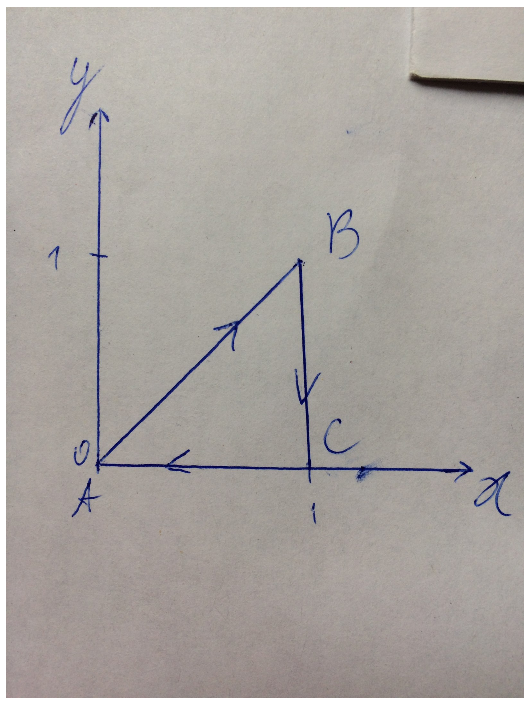

Рис. 1: К примеру 2

1.3 Пример 2

Найти интеграл по картинке $\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$. Разобьем на три куска. Параметризуем линию, по которой интегрируем, на каждом из кусков. AB: $x=t,\ y=t,\ t\in[0,1]$; BC: $x=1,\ y=1-t,\ t\in[0,1]$; CA: $x=1-t,\ y=0,\ t\in[0,1]$.

$$\int\limits_0^1(t+t)\sqrt{1+1}dt+\int\limits_0^1(1+1-t)\sqrt{0+1}dt+\int\limits_0^1(0+1-t)\sqrt{1+0}dt=\sqrt{2}+2$$

Обратите внимание на то, что на отрезке интегрирования $[a,b]$ всегда должно быть $b>a$, это поможет не запутаться при параметризации. А еще не запутаться поможет следующее важное свойство криволинейных интегралов I рода:

Важное свойство. Криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой. (То есть все равно, интегрируем мы по BA или по AB).

Чтобы удостовериться, что это действительно так, проинтегрируем по BA и получим такое же значение, что и по AB. Параметризуем BA: $x=1-t,\ y=1-t,\ t\in[0,1]$.

$$\int\limits_{BA}(x+y)ds=\int\limits_0^1(1-t+1-t)\sqrt{2}dt=\sqrt{2}$$

Интеграл получился равен интегралу по AB, все норм.

1.4 Пример 3

$\int\limits_{\gamma}(x+y)ds$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2; a>0\\ x=y\\ x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0;\end{cases}$$

Параметризуем: $x=y=a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t;\ z=a\sin t;\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t)\sqrt{a^2\sin^2 t\frac{1}{2}+a^2\sin^2 t\frac{1}{2}+a^2\cos^2 t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}a^2\cos tdt=a^2\sqrt{2}$$

1.5 Пример 4

$$I = \int\limits_{\gamma} x^2 ds \ \ where \ \ \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2; \\ x+y+z=0; \end{cases}$$

В силу симметрии:

$$\frac{1}{3}\int\limits_{\gamma}(x^2+x^2+x^2)ds = \int\limits_{\gamma} x^2ds = \int\limits_{\gamma} y^2ds = \int\limits_{\gamma} z^2ds = \frac{1}{3}\int\limits_{\gamma}(x^2+y^2+z^2)ds =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\gamma} a^2dS = \frac{1}{3}a^2 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

1.6 Криволинейные интегралы II рода

Определение(Криволинейный интеграл II рода) Пусть задана кривая: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$; $\vec{r} \in \mathbb{C}^1([a,b])$. Пусть на этой кривой определено векторное поле, зависящее от трех переменных$\vec{f} : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to R^3$. Тогда следующий интеграл называется криволинейным интегралом 2 рода от вектор-функции $\vec{f}$ по кривой Γ:

$$\int\limits_{\Gamma}(\overline{f}, d\overline{r}) = \int\limits_{a}^{b}(\overline{f}, \overline{r}'(t))dt$$

Физический смысл - работа вектороного поля вдоль Γ (т.к. $\delta A = (\overline{F}, d\overline{r})$)
Пусть векторное поле задано покоординатно (например, по OX координата P, по OY Q, по OZ R): $\vec{f} = (P(x(t), y(t), z(t)); Q(x(t), y(t), z(t)); R(x(t), y(t), z(t)))$. Тогда криволинейный интеграл II рода можно расписать в следующем виде:

$$\int\limits_{\Gamma}(\overline{f}, d\overline{r}) = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{a}^{b}[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]dt \quad (1)$$

1.7 Пример 5

$$I = \int\limits_{\gamma} ((y + x^2)dx - xdy) =?; \qquad \gamma : \begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t; \end{cases} ;\ t \in [0, \pi]$$

Поймем для начала, чему равны P и Q. P стоит при dx, Q при dy. Тогда

$$I = \int\limits_0^{\pi} ((\sin t + 4\cos^2 t)(-2\sin t) + (-2\cos t)\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (-2\sin^2 t - 8\sin t\cos^2 t - 2\cos^2 t)dt =$$

$$= -2\pi - 8\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t d(-\cos t) = -2\pi + \frac{8}{3}\cos^3 t\,|_0^{\pi} = -2\pi - \frac{16}{3}$$

1.8 Пример 6

$$I = \int\limits_{\gamma} (xdx + zdy + xdz) \qquad \gamma : \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = bt; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t(-a\sin t) + bta\cos t + a\cos tb)dt = \int\limits_0^{2\pi} (-a^2\sin t\cos t + abt\cos t + ab\cos t)dt = 0$$

(т.к. $\int\limits_0^{2\pi} t\cos tdt = t\sin t|_0^{\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t = 0$ и $\int\limits_0^{2\pi} \cos tdt = 0$ и $\int\limits_0^{2\pi} \sin t\cos tdt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2tdt = 0$)

Ответ: 0.

Часто криволинейные интегралы проще решать, сводя к кратным. Делается это с помощью следующей теоремы:

1.9 Формула Грина

Теорема 1. *Область G - ограничена, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G состоит из конечного числа кусочно гладких кривых $\Gamma = \partial G; P, Q \in \mathbb{C}^1(G) \cap \mathbb{C}(\bar{G})$, направление обхода области положительное (то есть когда по границе движемся в этом направлении обхода, область остается слева.) Тогда:*

$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} (Q_x - P_y)dxdy \tag{2}$$

1.10 Пример 7

$I = \int\limits_{\gamma^+} (xydx + (x+3)dy)$,

γ - граница области $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1; x < 0; y > 0\}$

$Q_x = 1;\ P_y = x$. По формуле Грина: $I = \iint_G (1-x)dxdy = \Bigg/ \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \Bigg/ =$

$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} (1 - rcos\varphi) rdr = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^1 rdr - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

1.10.1 Пример 8

$\mathbb{J} = \int\limits_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, где Γ простой(без самопересечения) замкнутый контур, не проходящий через начало координат.

1. Если Γ не охватывает начало координат т.е. $(0,0)$ не лежит внутри контура Γ
$$P = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \ Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$
В этом случае можем воспользоваться формулой Грина: $\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} (Q_x - P_y)dxdy$
$$\mathbb{J} = \iint \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dxdy = 0$$

2. Контур Γ охватывает начало координат. Явно формула Грина не работает, т.к. знаменатель - 0, то есть в нуле нарушится непрерывность функции, и условия теоремы не будут выполнены. Обведем

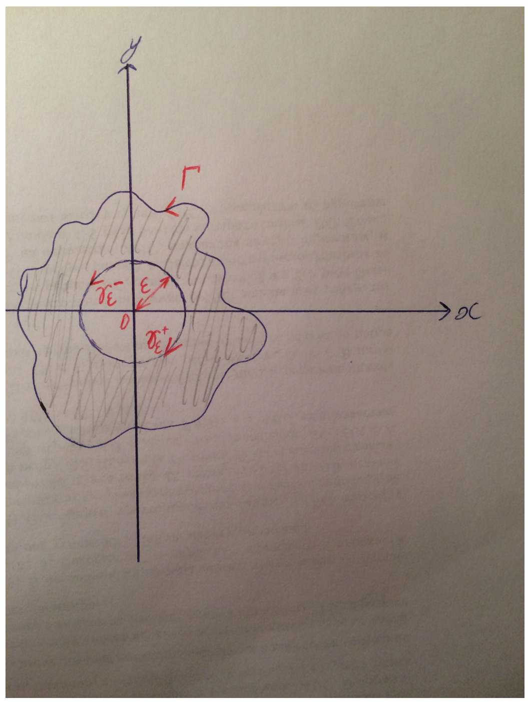

Рис. 2: К примеру 8

$(0,0)$ ε-кругом в положительном направлении обхода (область остается слева; область заштрихована, она между ε-кругом и границей исходной области), см. рис.2. Для второй области, $\varepsilon-$круга, эта ориентация отрицательна. В отличие от криволинейных интегралов 1го рода, для криволинейных интегралов 2го рода смена ориентации кривой на противоположную влечет за собой смену знака с плюса на минус перед интегралом.

$$\underbrace{\int\limits_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}}_{\text{надо посчитать}}+\int\limits_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int\limits_{\Gamma\cup\gamma_\varepsilon^+}=0$$

Интеграл выше равен 0 в силу пункта 1. Он подходит под пункт 1, т.к. (0,0) не лежит в заштрихованном контуре.

Отсюда следует, что $\int_\Gamma=-\int_{\gamma_\varepsilon^+}$

Интеграл по границе второй области равен:

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\Bigg/\quad\begin{matrix}x=\varepsilon\cos\varphi\\ y=\varepsilon\sin\varphi\\ \varepsilon=const\end{matrix}\quad\Bigg/=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}{\varepsilon^2}=2\pi$$

γ^- означает, что эта ориентация для нашей первой области отрицательна. Мы выбрали такую ориентацию, потому что при полярной замене координат угол φ гуляет по тригонометрическому кругу против часовой стрелки. Значит, $\int_{\gamma_\varepsilon^+}=-\int_{\gamma^-}\Rightarrow\int_\Gamma=-\int_{\gamma_\varepsilon^+}=\int_{\gamma^-}=2\pi$

1.10.2 Пример 9

Найти площадь S области, ограниченной кривой $x^3+y^3=3axy$ (Декартов лист, рис.3).

Площадь области, ограниченной кривой: $S=\frac{1}{2}\int_\gamma xdy-ydx$ (это действительно площадь, т.к. если использовать формулу Грина: $P=-y, Q=x$; $\int_\gamma xdy-ydx=\iint_G(Q_x-P_y)dxdy=2\iint_G dxdy=2S$) Параметризуем нашу кривую:

$$x=\frac{3at}{1+t^3};\ y=\frac{3at^2}{1+t^3};\ t\in[-\infty,-1)\cup(-1,+\infty]$$

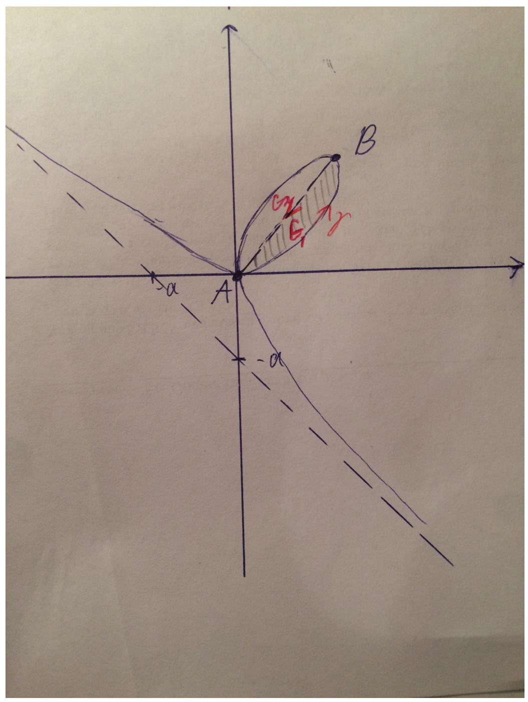

Рис. 3: Декартов лист

$$S=\iint\limits_{G_1}dxdy+\iint\limits_{G_2}dxdy=[\text{в силу симметрии}]=2\iint\limits_{G_1}dxdy=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}(\int\limits_{\gamma}(xdy-ydx)+\int\limits_{BA}(xdy-ydx))=$$

$$=[\text{в лоб подставляем x(t) и y(t)}]=$$

$$=\int\limits_0^1(\frac{3at}{1+t^3}\frac{6at(1+t^3)-3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}-\frac{3at^2}{1+t^3}\frac{3a(1+t^3)-3at(3t^2)}{(1+t^3)^2})dt+\int\limits_0^1(tdt-tdt)=$$

$$=-3a^2\int\limits_0^1 d\left(\frac{1}{1+t^3}\right)=\frac{3a^2}{2}$$

1.10.3 Пример 10

Случай потенциального векторного поля. Если в односвязной области $G\subset\mathbb{R}^2$ выполнено: $Q_x=P_y$, то $\exists u:\ u_x=P; u_y=Q$; тогда

$$\Gamma\subset G\Rightarrow\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=u(B)-u(A),\ \text{где A и B - нач. и конечные точки}$$

Посчитать $\mathbb{J}=\int\limits_{\Gamma}2xydx+x^2dy$. A(0, 0), B(-2, -1) - начальная и конечная точки.

Удостоверимся, что поле потенциальное: $P_y=2x;\ \ Q_x=2x;\Rightarrow P_y=Q_x\Rightarrow$ поле потенциальное $\Rightarrow\exists u:u_x=P,\ u_y=Q$.

Найдем u:

$$\begin{cases} u_x=2xy\Rightarrow u=x^2y+\varphi(y)\\ u_y=x^2\end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+\varphi'(y)=x^2;\Rightarrow\varphi(y)=C, C\in\mathbb{R}.\Rightarrow u=x^2y+C$

$$\mathbb{J}=u(B)-u(A)=-4+C-0-C=-4$$