Семинар 5. Определенный интеграл и мера Жордана.

Скубачевский Антон

18 марта 2021 г.

1 Мера Жордана.

Определение. Множество $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i (i = 1, ..., n)$, будем называть полуоткрытым прямоугольником или клеткой.

В случае n=1 оно представляет из себя полуинтервал, в случае n=2 - прямоугольник без левой и нижней сторон, а в случае n=3 - прямоугольный параллелепипед без трех граней.

Для каждого полуоткрытого прямоугольника определим его меру равенством

$$\mu P = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Видим, что мера в случае n=1 - длина отрезка, в случае n=2 - площадь прямоугольника, а в случае n=3 - площадь прямоугольного параллелепипеда.

Определение. Множество назовем элементарным или клеточным, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся клеток.

Мера клеточного множества - сумма мер его клеток.

Встает вопрос: а как измерить, например, круг? Ведь это не клеточное множество. Ответ следующий: будем сначала в круг вписывать клеточные множества, и найдем верхнюю грань меры этих множеств. Она должна по идее стремиться как раз к площади круга. Потом будем вокруг круга описывать клеточные множества и искать нижнюю грань их меры. Она тоже должна стремиться к площади круга. Далее скажем, что если эти верхняя и нижняя грани равны то множество измеримо по Жордану, и его мера совпадает с этой верхней/нижней гранью.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченное множество. Числа

$$\mu_* E = \underset{A \subset E}{sup} \mu A, \qquad \mu^* E = \underset{B \supset E}{inf} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем элементарным множествам A, B ($A \subset E$, $B \supset E$), называются соответственно нижней и верхней мерой Жордана множества E.

Определение. Мера Жордана. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если $\mu_* E = \mu^* E$, т.е. если его верхняя и нижняя меры совпадают. Общее значение этих мер называется мерой Жордана множества E и обозначается μE.

Теорема. Множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда мера его границы $= 0$.

Свойства меры Жордана:

- $0 \leq \mu A \leq \mu B$, если $A \subset B$.
- $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$ - полуаддитивность меры
- $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$, если $A \cap B = \varnothing$ - аддитивность меры
- $\mu(A \backslash B) = \mu A - \mu B$, если $B \subset A$
- Мера конечного числа точек $= 0$.

Пример. Измеримо ли множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ по Жордану? (мера конечного числа точек $= 0$, а про счетное - непонятно)

Нижняя мера этого множества $= 0$: мы никакое множество не можем вписать в точку, а мера пустого множества $= 0$.

Верхняя же мера $= 1$: наименьшее клеточное множество, в которое входят все рациональные точки отрезка $[0, 1]$ - сам отрезок $[0, 1]$ (предположив противное, например, что все рациональные точки отрезка можно покрыть конечным числом отрезков, объединение которых не даст весь отрезок $[0, 1]$, получаем, что в зазоре между концами 2 соседних отрезков найдется еще одна рациональная точка (между любыми двумя действительными числами всегда есть рациональное), значит, что-то не покрыли, противоречие).

Получаем, что верхняя мера не равна нижней мере. Значит, множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ не измеримо по Жордану.

Пример. Найти меру множества точек сходящейся последовательности.

Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем $\varepsilon-$ окрестность точки a. Вне ее конечное число точек (т.к. a - предел). Мера конечного числа точек $= 0$. Устремим $\varepsilon \to 0$. Тогда мера ε-окрестности точки a устремится к нулю, а значит, мера всех точек последовательности в этой окрестности тоже $= 0$. Мера же всех точек вне окрестности, как уже было сказано, тоже $= 0$. Значит, мера точек сходящейся последовательности $=$ 0+0=0.

Пример. Пусть даны множества A_i: $\mu(A_i) = 0 \forall i = 1, ..., \infty$. Известно также, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ - измеримо по Жордану. Доказать, что $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

Доказательство:

Предположим, $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \neq 0$. Тогда, т.к. множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ измеримо, $\mu_*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \neq 0$, то есть существует клеточное множество B_1 ненулевой меры, которое можно вписать в $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. У этого множества существует клеточное подмножество ненулевой меры B_2, не содержащее точек A_1, т.к. $\mu^*(A_1) = \mu(A_1) = 0$. У него в свою очередь существует подмножество B3, не содержащее точек A_2, ..., получили последовательность вложенных клеточных множеств. По теореме Кантора эта система вложенных множеств имеет общую точку (то есть точку, не принадлежащую $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$). Но при этом все эти множества, а значит, и каждая их точка, лежат в $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. То есть точка и лежит, и не лежит в $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Противоречие.

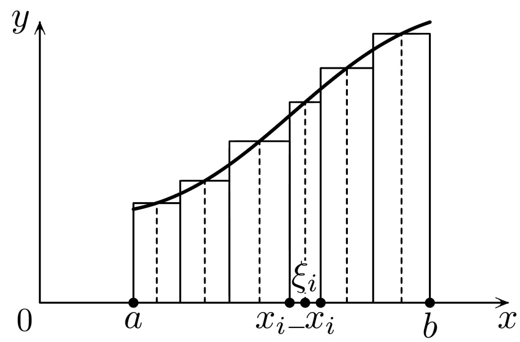

Рис. 1: Определение интеграла.

2 Определенный интеграл

Прежде, чем рассказать, что такое определенный интеграл, дадим определение разбиения отрезка и его мелкости:

Определение. Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$, такая, что $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i_\tau - 1} < x_{i_\tau} = b$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ называется отрезком разбиения τ, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Величина $|\tau| = \underset{1 \leq i \leq i_\tau}{sup} \Delta x_i$ называется мелкостью разбиения τ.

То есть мелкость разбиения - длина наибольшего из отрезков разбиения.

Теперь перейдем к определенному интегралу. Определенный интеграл - это площадь под графиком функции f(x). Как посчитать площадь под кривулей-непонятно. Но мы можем ее приблизить площадями прямоугольничков: зададим на отрезке $[a, b]$ некоторое разбиение (рис.1). И на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку ξ_i произвольным образом. И построим, как на рисунке, прямоугольнички на этих отрезках разбиения: одна сторона прямоугольника - соответствующий отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а вторая - перпендикуляр, опущенный из $f(\xi_i)$ на ось OX, где f(x) - функция, от которой мы считаем интеграл по отрезку $[a, b]$ (площадь под графиком которой мы ищем). Заметим, что при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, суммарная площадь прямоугольничков стремится к площади под графиком, то есть определенный интеграл - это предел суммы площадей прямоугольников при мелкости разбиения, стремящейся к нулю (площадь каждого прямоугольничка равна произведению его сторон: $(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) = \Delta x_i \cdot f(\xi_i))$. Запишем теперь это более формально.

Определение. Определенный интеграл Римана. Число I называется определенным интегралом Римана функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ (а функция f - интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta, \text{и для любого выбора } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \varepsilon$$

Кратко это можно записать:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i$$

В определении фраза "для любого выбора точек"очень важна, без нее определение уже не верно. Покажем, что не всякая ограниченная функция интегрируема как раз за счет того, что при разном выборе точек получаются разные значения интегральной суммы (а по определению для разного выбора точек интегральная сумма должна стремиться к одному и тому же, чтобы функция была интегрируемой по Риману).

Примером ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции является функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Пусть нам нужно проверить, интегрируема ли она на отрезке $[0, 1]$.

Сначала на каждом из отрезков разбиения будем выбирать в качестве ξ_i произвольные рациональные точки (сколь бы малой не была мелкость разбиения, мы все равно на каждом отрезке можем найти как рациональную, так и иррациональную точку). Тогда $D(\xi_i) = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau} 1 \cdot \Delta x_i = [\text{сумма отрезков разбиения это проста длина всего отрезка}] = 1$$

Теперь в качестве ξ_i будем брать на каждом отрезке иррациональные точки. Тогда $D(\xi_i) = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

Видим, что при разном выборе точек значение пределов интегральных сумм (предел константы это константа) отличаются. Значит, функция $D(x)$ ограничена, но не интегрируема по Риману.

Определение. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$. Ее колебанием на этом отрезке называется число

$$\omega(f,[a,b]) = \underset{x',x''\in[a,b]}{sup} |f(x') - f(x'')| = \underset{[a,b]}{sup} f - \underset{[a,b]}{inf} f$$

Для f, определенной на отрезке $[a,b]$, и разбиения $\tau = \{x_i\}_1^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f,[x_{i-1},x_i])$.

Теорема(критерий интегрируемости). Для интегрируемости функции f на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\tau : |\tau| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$$

Наряду с определением определенного интеграла по Риману дается определение определенного интеграла по Дарбу.

Определение. Суммы Дарбу. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$-разбиение $[a,b]$. Пусть $M_i = \underset{x_{i-1}\le x\le x_i}{sup} f(x)$, $m_i = \underset{x_{i-1}\le x\le x_i}{inf} f(x)$. Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i\Delta x_i, \qquad \overline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i\Delta x_i$$

называют соответственно нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции f, соответствующими разбиению τ.

Определение. Интегрируемость по Дарбу. Функция f называется интегрируемой по Дарбу на отрезке $[a,b]$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall\tau : |\tau| < \delta \Rightarrow \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon$$

Заметим, что если внимательно присмотреться, то определение интегрируемости по Дарбу и критерий интегрируемости это одно и то же. Т.о., определения интеграла по Риману и Дарбу эквивалентны.

Теорема. Функция, интегрируемая на отрезке, ограничена на этом отрезке.(обратное неверно на примере функции Дирихле)

Теорема. Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Функция, непрерывная на интервале (a, b) и ограниченная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$.

Свойства интегрируемых функций

1. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset [a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*, b^*]$.

2. (Аддитивность). Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

3. (Линейность). Если f, g интегрируемы на $[a, b]$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

4. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то и их произведение интегрируемо на $[a, b]$.

5. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$$

6. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $|f|$ интегрируема на $[a,b]$, причем **МОДУЛЬ ИНТЕГРАЛА $\leq$ИНТЕГРАЛА МОДУЛЯ** (важное свойство)

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

7. Интеграл "не замечает"изменения функции в конечном числе точек: пусть f интегрируема на $[a,b]$, f^* отличается от f лишь в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f^*(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Для того, чтобы найти определенный интеграл, обычно считают неопределенный, а потом применяют формулу Ньютона-Лейбница:

Теорема(Формула Ньютона-Лейбница). Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и F - ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Также $F(b) - F(a)$ записывают как $F(x)|_a^b$. То есть $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$. Так короче и понятнее.

Если функция не непрерывна, к ней уже не применить формулу Ньютона Лейбница. Рассмотрим, например, функцию $1/x$ на отрезке $[-1,1]$. Она неограничена, следовательно, не интегрируема. То есть посчитать интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = ln|x||_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$ мы не можем, т.к. функция не непрерывна, и формула Ньютона-Лейбница не применима.

Следствие.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Пример. Посчитать $\int_1^2 x^2 dx$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Для того, чтобы доказать справедливость формулы Ньютона-Лейбница, используется такая конструкция, как интеграл с переменным верхним пределом: $\int_a^b f(t)dt$ - с не переменным верхним пределом, и он является некоторым числом (ведь площадь под графиком-число). А вот $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - это интеграл с переменным верхним пределом, и он является функцией. Как и всякую уважающую себя функцию, его можно исследовать на непрерывность, например. Или можно брать от него производную. Итак, напишем 2 свойства этого интеграла:

Свойство 1. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда F непрерывна на $[a, b]$.

Приведем доказательство (оно в одну строчку) чисто для того, чтобы стало понятнее, что этот интеграл с переменным верхним пределом за покемон и как с ним обращаться.

Доказательство:

Пусть $x_0, x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

Функция f ограничена на $[a, b]$, поскольку она интегрируема. Значит, $\exists M : \forall t \in [a, b] |f(t)| \leq M$. Следовательно,

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| \leq M|\Delta x| \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то есть приращение функции стремится к нулю при приращении аргумента стремящемся к нулю в точке x_0. Значит, F - непрерывна по определению в точке x_0, где x_0 - произвольная точка отрезка $[a, b]$, ч.т.д.

Свойство 2. Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ имеет производную в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

То есть, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $F'(x) = f(x)$ на этом отрезке.

Пример. Найти F'(x), где $F(x) = \int\limits_2^x \frac{e^t}{t^2+1}dt$. ($f(t) = \frac{e^t}{t^2+1}$)

Можно, конечно, взять определенный интеграл, и уже потом взять производную от полученной функции. Но это слишком долго. Сделаем проще, с помощью свойства 2:

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Пример. Найти F'(x), где $F(x) = \int\limits_2^{sinx} \frac{e^t}{t^2+1}dt$. ($f(t) = \frac{e^{sint}}{sin^2t+1}$)

На этот раз на верхнем пределе не просто x, а $sinx$. Значит, $F'(x)$ - это уже производная сложной функции:

$$(F(x))' = (F(x))'_{sinx} \cdot (sinx)' = f(sinx) \cdot cosx = \frac{e^{sinx}}{sin^2x+1} \cdot cosx$$

В случае, если оба предела переменные, например, $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1}dt$, можно представить интеграл в виде:

$$F(x) = \int\limits_{x^2}^{a} \frac{e^t}{t^2+1}dt + \int\limits_{a}^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1}dt = -\int\limits_{a}^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1}dt + \int\limits_{a}^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1}dt,$$

где a - некоторое число от x^2 до x^3.

Пример. Доказать: $|\int\limits_a^b \frac{sinx}{x}dx| \leq \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$

Доказательство:

Интегрируем по частям:

$$|\int\limits_a^b \frac{sinx}{x}dx| = |-\frac{cosx}{x}|_a^b - \int_a^b \frac{cosx}{x^2}dx| \leq |-\frac{cosx}{x}|_a^b| + |\int_a^b \frac{cosx}{x^2}dx| =$$

$$= |-\frac{cosb}{b} + \frac{cosa}{a}| + |\int_a^b \frac{cosx}{x^2}dx| \leq [cosx \leq 1] \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + |\int_a^b \frac{1}{x^2}dx| =$$

$$= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+|\frac{1}{x}|_a^b| = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| = [\text{раскроем модуль, т.к. } b > a] = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{2}{a}$$

Оказывается, интегрируемость по Риману и наличие у функции первообразной - не эквивалентные понятия. Покажем это:

Пример. Функция, имеющая первообразную, но не интегрируемая. Рассмотрим

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Найдем производную этой функции во всех точках кроме нуля, в лоб, а в нуле по определению. Получим:

$$f(x) := F'(x) = \begin{cases} 2xsin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ (т.к. $F'(x) = f(x)$), но не интегрируема (т.к. неограничена, а всякая интегрируемая функция ограничена).

Пример. Функция, интегрируемая, но не имеющая первообразной. Рассмотрим $f(x) = signx$. Эта функция интегрируема по Риману на отрезке $[-1, 1]$, т.к. имеет конечную площадь под графиком (или как ограниченная на отрезке функция с конечным числом точек разрыва на нем). Но у этой функции нет первообразной: при $x > 0$ ее первообразная $F(x) = x + C$, а при $x < 0 : F(x) = -x + C$. Первообразная, как всякая уважающая себя дифференцируемая функция, должна быть непрерывной, в том числе в точке $x = 0$. Попробуем сшить первообразные при $x > 0$ и $x < 0$ в нуле. Единственный вариант непрерывной функции: $F(x) = |x| + C$. Но эта функция не дифференцируема в нуле. Значит, у $f(x) = signx$ нет первообразной, ч.т.д.

Пример. Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и имеет первообразную F на отрезке $[a,b]$. Доказать, что верно равенство $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Доказательство:

Произвольным образом разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$.

По теореме Лагранжа о среднем (можем применить к F, т.к. первообразная по своему определению дифференцируема):

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n)\Delta x_n, \text{ где } \xi_n \in [x_{n-1}; x_n]$$

Тогда:

$$F(b)-F(a) = (F(x_n)-F(x_{n-1}))+F(x_{n-1})-...-F(x_1)+(F(x_1)-F(x_0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b f(x)dx, \text{ч.т.д.}$$

3 Геометрические приложения

Пусть дана функция $y(x)$, $x \in [a,b]$. Вращением этой функции вокруг OX получаем поверхность. Площадь поверхности:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b |y(x)|\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Есть также формулы для нахождения площади поверхности вращения вокруг OY, или поверхности вращения функции, заданной параметрически. Также есть формулы для нахождения объемов тел вращения, они все есть в задачнике Кудрявцева.

Разберем задачку с письменного на нахождение площади поверхности вращения.

Пример

Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой $y = sinx$, $x \in [0, \pi]$.

По формуле выше, т.к. $(sinx)' = cosx$:

$$S = 2\pi \int\limits_0^\pi sinx\sqrt{1+cos^2x}dx = -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1+cos^2x}d(cosx) = -2\pi \int\limits_0^\pi \sqrt{1+cos^2x}dcosx =$$

$$= [cosx = t; t = 1 \text{ при } x = 0; t = -1 \text{ при } x = \pi] = -2\pi \int\limits_1^{-1} \sqrt{1+t^2}dt$$

Далее сделаем замену $t = shu$. Тогда $dt = chudu$. Найдем, чему станут равны пределы интегрирования. Хочется сказать $u = arcsht$, но $arcsh$ писать не по фэн шую. Найдем же, чему равно u при $t = 1$:

$$1 = shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \Rightarrow e^u - 2 - e^{-u} = 0 \Rightarrow e^{2u} - 2e^u - 1 = 0$$

Получили квадратное уравнение. Его корень (второй не подойдет, т.к. e^u не может быть <0) $e^u = 1+\sqrt{2}$. $u = ln(1+\sqrt{2})$. Аналогично, при $t = -1$ $u = ln(-1+\sqrt{2})$. Легко показать, что это равно $-ln(1+\sqrt{2})$.

Тогда имеем:

$$S = -2\pi \int\limits_{ln(1+\sqrt{2})}^{-ln(1+\sqrt{2})} chuchudu = [ch^2u = \frac{1+ch2u}{2}] = -2\pi \int\limits_{ln(1+\sqrt{2})}^{-ln(1+\sqrt{2})} \frac{1+ch2u}{2}du =$$

$$= [\text{поменяв местами пределы интегрирования, минус выносится за знак интеграла: }] =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-ln(1+\sqrt{2})}^{ln(1+\sqrt{2})} \frac{1+ch2u}{2}du = 2\pi(\frac{u}{2}+\frac{1}{4}sh2u)|_{-ln(1+\sqrt{2})}^{ln(1+\sqrt{2})} = (\pi u + \pi shuchu)|_{-ln(1+\sqrt{2})}^{ln(1+\sqrt{2})}$$

$$ch(ln(1+\sqrt{2})) = \frac{e^{ln(1+\sqrt{2})} + e^{-ln(1+\sqrt{2})}}{2} = \sqrt{2} = ch(-ln(1+\sqrt{2}))$$

$$sh(ln(1+\sqrt{2})) = 1; \;\; sh(-ln(1+\sqrt{2})) = -1$$

Имеем:

$$S = (\pi u + \pi shuchu)|_{-ln(1+\sqrt{2})}^{ln(1+\sqrt{2})} = 2\pi ln(1+\sqrt{2}) + 2\pi\sqrt{2}$$

Пример

Длина кривой $y(x)$, заданной на отрезке $x \in [a,b]$, ищется по формуле:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

Найти длину кривой:

$$y = lncosx, \quad x \in [0; \frac{\pi}{6}]$$

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{1+\frac{sin^2x}{cos^2x}}dx = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{1}{cosx}dx$$

В школе мы проходили формулы "универсальной тригонометрической подстановки": выражения $sinx$ и $cosx$ через $tg\frac{x}{2}$. Сделав замену $t = tg\frac{x}{2}$, имеем:

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}; \quad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Найдем, как изменятся пределы интегрирования при такой замене. При $x = 0$ $t = tg\frac{0}{2} = 0$. При $x = \pi/6$ $sin\frac{\pi}{6} = 1/2 = \frac{2t}{1+t^2}$. Из этого уравнения находим $t = 2-\sqrt{3}$. Второй корень $2+\sqrt{3}$ не подходит: $|tg\pi/12| = |\frac{sin\pi/12}{cos\pi/12}| \leq 1$, т.к. $sin\pi/12 < 1/2$; $cos\pi/12 > 1/2$.

Тогда:

$$L = \int\limits_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int\limits_0^{2-\sqrt{3}} \frac{2}{1-t^2}dt = ln\frac{1+t}{1-t}|_0^{2-\sqrt{3}} = \frac{ln3}{2}$$