Лекция 9. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные однородные уравнения

<u>Опр.</u> Уравнение вида

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = 0, \; t \in \mathbb{R}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, называется линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами.

Левую часть запишем в виде $L[x(t)]$

Решение будем искать над полем компл. чисел $\mathbb{C}$.

Лемма 1. Пусть комплекснозначная ф-ция $x(t) = u(t) + iv(t)$ является решением (1). Тогда каждая ф-ция $u(t) = \mathrm{Re}[x(t)]$, $v(t) = \mathrm{Im}[x(t)]$ является действительным реш.

Д-во: $L[u+iv] = \underbrace{L[u]}_{\text{действ.}} + i\underbrace{L[v]}_{\text{действ.}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L[u] = 0 \\ L[v] = 0 \end{cases}$.

Лемма 2. Если н.у. для (1) являются действ. числами, то и реш. ЗК будет действительным. Для мнимой части $v(t_0) = v'(t_0) = \ldots = v^{(n-1)}(t_0) = 0$.

Из Th $\exists!$ РЗК $\Rightarrow v(t_0) \equiv 0$.

Опр. Показательной функцией e^z называется ф-ция, определенная для $\forall$ компл. числа $a+ib$ соотношением $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$

Св-ва:

1) $\forall z \in \mathbb{C}: \quad |e^{z}| \neq 0$

2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

3) $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

4) $\dfrac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$

Построим ФСР ур-ия (1). Будем искать реш.
$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$
$L[x(t)] = L[e^{\lambda t}] = Q(\lambda) e^{\lambda t}$, где $Q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$
$\Rightarrow x(t) = e^{\lambda t}$ – решение (1) $\Leftrightarrow$ λ – решение $Q(\lambda) = 0$

Уравнение $Q(\lambda) = 0$ наз. характеристическим.

$\exists$ ровно n корней с учётом кратности над полем $\mathbb{C}$.

<u>Лемма 3.</u> Если λ_0 — является корнем хар. ур. кратности k, то ф-ции $\varphi_1 = e^{\lambda_0 t}$, $\varphi_2 = t e^{\lambda_0 t}, \dots,$

$\varphi_k = t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$ будут решениями (1).

<u>Д-во:</u> $L[e^{\lambda t}] = Q(\lambda) e^{\lambda t}$

Продифференцируем ℓ раз по λ, $0 \le \ell \le k-1$

$$L[t^\ell e^{\lambda t}] = \sum_{i=0}^{\ell} C_\ell^i Q^{(i)}(\lambda) \underbrace{(e^{\lambda t})^{(\ell-i)}}_{t^{\ell-i} e^{\lambda t}}$$

λ_0 — кор. крат. k

$Q(\lambda_0) = 0$

$Q'(\lambda_0) = 0$

$Q^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, $Q^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$

$\Rightarrow L[t^l e^{\lambda t}] = 0 \quad \forall \underset{0\le}{l} \le k-1$ $\blacksquare$

Пусть хар. ур-ие имеет m $\underbrace{\text{корней}}^{\text{различ.}}$ $\lambda_1, .., \lambda_m$ кратности $k_1, .., k_m$; $k_1 + ... + k_m = n$. Тогда ф-ции $e^{\lambda_1 t}, .., t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}; ...; e^{\lambda_m t}, ..., t^{k_m - 1} e^{\lambda_m t}$ (2) — будут решениями (1).

Опр. Ф-ции вида $e^{\lambda_1 t} P_1(t) + ... + e^{\lambda_m t} P_m(t)$ назыв. квазимногочленом. Здесь λ_i - числа, $P_i(t)$ - многочл.

Лемма 4. Если $x(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_n(t)$ - мн-н степени n, то $\frac{d}{dt} x(t) = \tilde{P}_m(t) e^{\lambda t}$, где $\tilde{P}_m(t)$ - многочлен степени $m = \begin{cases} n, & \text{если } \lambda \ne 0 \\ n-1, & \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$

Д-во очевидно

Лемма 5. Пусть $\lambda_1, .., \lambda_m$ – различные корни хар. ур-ия, а $k_1, .., k_m$ – их кратности, $\sum\limits_{1}^{m} k_i = n$.
Тогда решения (2) явл. линейно независимыми.

Д-во: Обозначим функции в (2) за $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.
Пусть они лин. зависимы. Тогда $\exists\, C_i$, $i=\overline{1,n}$:
$\sum\limits_{1}^{n} C_i^2 \neq 0$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot C_i = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow P_1(t) e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_m(t) e^{\lambda_m (t)}$, где $P_i(t)$ – многочлен степени не выше $k_i - 1$, $i=\overline{1,m}$.

Пусть $P_1(t)$ – многочлен степени l, в котором коэфф. при t^l не равен нулю.
Умножим на $e^{-\lambda_m t}$:

$$e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}P_1(t)+\ldots+e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t}P_{m-1}(t)+P_m(t)\equiv 0$$
$\forall t\in\mathbb{R}$

$\lambda_i\neq\lambda_m$ $\forall i<m$.

Продифф. по t k_m раз. По лемме 4

$$e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}P_{1,1}(t)+\ldots+e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t}P_{m-1,1}(t)\equiv 0$$

Повторим процедуру $(m-1)$ раз:

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}P_{1,m-1}(t)\equiv 0 \Rightarrow \text{все коэффиц. } P_1=0$$

– противоречие.

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ решения (2) образуют ФСР над полем $\mathbb{C}$.

Общее решение имеет вид

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(t)=e^{\lambda_1 t}P_1(t)+\ldots+e^{\lambda_m t}P_m(t).$$

P_i – мн-н степени не выше k_i-1. $t\in\mathbb{R}$

При вещ. н. у. решение будет веществ.

Если $\exists$ компл. корень λ кратности k.

Компл. сопр. корням λ и $\bar{\lambda} = a \pm ib$ кратности k соответствуют $2k$ вещ. реш.

$$(3)\quad \begin{matrix} e^{at}\cos bt, & te^{at}\cos bt, & \ldots, & t^{k-1}e^{at}\cos bt; \\ e^{at}\sin bt, & te^{at}\sin bt, & \ldots, & t^{k-1}e^{at}\sin bt. \end{matrix}$$

Теорема 1. Если веществ. корням хар. ур-ия $Q(\lambda)$ соответствуют p решений вида

$e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, ..., а комплексно-сопр. $2q$ решений вида (3), то эти $p+2q$ решений образуют ФСР лин. одн. ур-ия (1).

Д-во: Д-ем, что если компл. решения $\varphi_i(t)$ лин. незав., то соотв. реш. (3) тоже лин. незав.

Т.к. коэфф. Д(1) веществ., то реш. отвечающие компл. сопр. λ явл. компл. сопр. φ_i и $\overline{\varphi_i}$.

$\varphi_1(t) = u_1(t) + i v_1(t)$; $\varphi_{q+1}(t) = \overline{\varphi_1(t)} = u_1(t) - i v_1(t)$

$\vdots$ $\vdots$

$\varphi_q(t) = u_q(t) + i v_q(t)$; $\varphi_{2q}(t) = \overline{\varphi_q}(t) = u_q(t) - i v_q(t)$.

Д-ем, что $\{u_i(t), v_i(t)\}$ лин. незав, $i = \overline{1,q}$

От противного, пусть $\exists \alpha_k, \beta_k$, $k = \overline{1,q}$:

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k u_k(t) + \beta_k v_k(t) \equiv 0, \quad \sum_1^q \alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$$

$$u_k(t) = \frac{\varphi_k + \overline{\varphi_k}}{2} \qquad v_k = \frac{\varphi_k - \overline{\varphi_k}}{2i}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}\varphi_k(t) + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2}\overline{\varphi_k}(t) = 0$$

Но функции φ_k и $\overline{\varphi_k}$, $k = \overline{1, q}$ лин. незав. — противор. $\blacksquare$

Линейное неоднородное уравнение с правой частью — квазимногочленом (ЛНУ)

$$(4)\quad x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = e^{\mu_1 t} P_1(t) + \ldots + e^{\mu_m t} P_m(t)$$

$t \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ — постоянные

Принцип суперпозиции.

Пусть нам известно какие-либо частное решения $\tilde{X}_1(t), \ldots, \tilde{X}_k(t)$ каждого из

ЛНУ $L[x(t)] = f_k(t)$. Тогда $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i(t)$ будет решением ЛНУ $L[x(t)] = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(t)$.

Далее рассмотрим $L[x(t)] = e^{\mu t} P(t)$ (5)

P — мн-н степени r. Ур-ие (5) эквивалентно

$$L[u(t)] = \mathrm{Re}[e^{\mu t} P]$$
$$L[v(t)] = \mathrm{Im}[e^{\mu t} P].$$

Теорема 2. Пусть μ — не является корнем характ. многочлена. Тогда ур-ие (5) имеет реш. вида $X(t) = e^{\mu t} G(t)$, где $G(t)$ — многочлен степени r.

Если μ — корень хар. мн-на кратности s, то уравнение (5) имеет частное решение вида $X(t) = t^s e^{\mu t} G(t)$, где $G(t)$ – мн-н степени r.

(этот случай называется резонансом).

Д-во: Найдем неизвестные коэфф. $G(t)$.

$$L[t^s e^{\mu t} G(t)] = e^{\mu t} P(t)$$

$$G(t) = b_0 t^r + G_1(t), \quad b_0 \neq 0, \quad \deg G_1 \leq r-1$$

$$P(t) = a_0 t^r + P_1(t), \quad a_0 \neq 0, \quad \deg P_1 \leq r-1$$

$$L[b_0 t^{r+s} e^{\mu t}] + L[t^s e^{\mu t} G_1] = e^{\mu t} a_0 t^r + e^{\mu t} P_1$$

$$Q(\mu) = Q'(\mu) = \ldots = Q^{(s-1)}(\mu) = 0, \quad Q^{(s)}(\mu) \neq 0$$

Из л. 3 и по ф-ле Лейбница: по условию.

$$L[t^{r+s} e^{\mu t}] = \sum_{i=0}^{r+s} C_{r+s}^{i} Q^{(i)}(\mu)\, t^{r+s-i} e^{\mu t} =$$

$$= C_{r+s}^{s} Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^{i} Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}$$

Отсюда получаем

$$b_0 \left(C_{r+s}^{s} Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \sum \ldots \right) + L\left[t^s e^{\mu t} G_1 \right] =$$

$$= a_0 t^r e^{\mu t} + e^{\mu t} P_1$$

$$b_0 = \frac{a_0}{C_{r+s}^{s} Q^{(s)}(\mu)}$$

Продолжая эту процедуру находим остальные коэффициент. ☒