Восстановление математика

Акантьев

2023

1 Введение в математический анализ

1 *Предел числовой последовательности.*
def. (Эпсилон окрестность)

$$U_\varepsilon(\pm\infty) = (\pm\infty, \pm\frac{1}{\varepsilon})$$

def.

$$U_\varepsilon(\pm\infty) = (\pm\infty, \pm\frac{1}{\varepsilon})$$

def. (Предел числовой последовтельности)

$$a \in \bar{\mathbb{R}} = \lim_{n\to+\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

2 Кратные интегралы и теория поля

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

Th. (Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.)

Пусть:

1. $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$
2. $F(x,y) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \hookrightarrow F(x_0,y_0) = 0$
3. $F \in C(U_\varepsilon(x_0,y_0))$
4. $\forall (x,y) \in U_\varepsilon(x_0,y_0)\, \exists F'_y(x,y) \wedge F'_y(x,y)$ непрерывна в т. (x_0,y_0)
5. $F'_y(x,y) \neq 0$

Тогда

$\exists \gamma > 0\, \exists \delta > 0\, \exists \varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$- нерперывная в т. x_0, т. ч.:

$$\forall x^* \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow F(x^*,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x^*)$$

Доказательство

НУО $F'_y(x_0,y_0) > 0$. Тогда $\exists \varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ такое что

$$F'_y(x,y) > 0\; \forall (x,y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0,y_0) \qquad (1)$$

Зафиксируем $\delta \in (0, \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}})$.

$\Rightarrow \forall x \in U_\delta(x_0)\, \forall y \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow \|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} < \varepsilon_1,$

$\Rightarrow$ (согласно 1)$\forall x \in U_\delta(x_0)\, F(x,y) \nearrow$ по у на $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ (2)

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 - \delta) < 0 \wedge F(x_0, y_0 + \delta) > 0$$

$\Rightarrow \exists \gamma \in (0,\delta] : \forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow F(x, y_0 - \delta) < 0 \wedge F(x, y_0 + \delta) > 0$

Пусть $f(y) := F(x, y)$ - непрерывна на $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Тогда по теореме о промежуточном значении: $\forall x \in U_\gamma(x_0)\, \exists \varphi(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ такое что: $F(x, \varphi(x)) = 0$, То есть $\exists \varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$. Согласно **2** $\forall x \in U_\gamma(x_0) \exists! y = \varphi(x) \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow F(x, y) = 0$

Так как δ выбиралась произвольно, то по тем же рассуждениям $\Rightarrow$

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta] \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] : \forall x \in U_{\delta_1}(x_0) \hookrightarrow \varphi(x) \in U_{\gamma_1}(y_0)$$

Таким образом доказана непрерывность φ в точке x_0

2. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.

Определение. Пусть на $X \subset \mathbb{R}^n$ задана $f : X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой строго (слабого) локального минимума* (максимума) функции f на множестве X, если:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) < (\leq, >, \geq) f(x)$$

Определение. Пусть x_0 - точка локального экстремума f на X. x_0 называется *точкой безусловно локального экстремума*, если $x_0 \in \mathrm{int} X$, то x_0. Если $x_0 \in \partial X$, то это *точка условного локального экстремума* **Th. (Необходимое условие экстремума)** Пусть

1. $f : U_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ дифф в точке x_0
3. x_0 - точка безусловного локального экстремума $f(x)$

тогда $\mathrm{grad} f(x_0) = \bar{0}$

Доказательство

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\varphi(x^i) := f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \ldots x_0^n)$$

x_0 - точка лок. экстремума $f(x) \Rightarrow x_0^i$ - точка лок. экстремума $\varphi(x^i) \Rightarrow$ (по теореме Ферма) $\varphi'(x_0^i) = 0 \Rightarrow$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \varphi'(x_0^i) = 0 \Rightarrow \mathrm{grad} f(x_0) = 0$$

Определение. Если $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$, то x_0 называется *стационарной точкой.*