Лекция 3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ДУ.

$n \in \mathbb{N}$, Ω - область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ - непр.

Опр. X, Y - метрические пр-ва, $\beta \geq 0$ $\quad g : X \to Y$

Отображ. g называется липшицевым с константой Лип. β

если $\quad \rho_Y(g(x), g(y)) \leq \beta\, \rho_X(x, y) \quad - \; x, y \in X$

$$\left(\|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq \beta \|\vec{x} - \vec{y}\| \right)$$

Лемма 1. Для $\vec{\varphi}(t) \in C[a, b]$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \vec{\varphi}(\tau)\, d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau)\|\, d\tau \right|$$

$$\forall t, t_0 \in [a, b]$$

▷ Разобьем $[a, b]$ на k частей

$$t_i = t_0 + \frac{i}{k}(t - t_0) = t_0 + i\delta$$

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\varphi}(\tau)\,d\tau \right\| = \left\| \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \vec{\varphi}(t_i)\,\delta \right\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{1}^{k} \vec{\varphi}(t_i)\delta \right\| \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|\vec{\varphi}(t_i)\|\,|\delta| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau)\|\,d\tau \right|. \ \square$$

Рассмотрим открытый цилиндр

$$R = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < a,\ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b,\ \overline{R} \subset \Omega\}$$

$\overline{R}$ - компакт $\Rightarrow \exists \max\limits_{(t,\vec{x}) \in \overline{R}} \|\vec{f}(t, \vec{x})\| =: M.$

Введем $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $(M \ne 0$, если $\vec{f} \not\equiv \vec{0})$.

Рассмотрим $Q = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < h,\ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b\}$

$\overline{Q} \subseteq \overline{R} \subset \Omega$

Задача Коши. Пусть точка $(t_0, \vec{x_0}) \in \Omega$.

Требуется найти решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, определенное

на $I \subset \mathbb{R}$

$\vec{x}: I \to \mathbb{R}^n$

$$(1) \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{\varphi}(t_0) = \vec{x_0}. \end{cases}$$

такое, что

Основная теорема (Тh Пикара) (Th $\exists !$ лок)

Пусть функция $\vec{f}(t, \vec{x}) \in C(\Omega)$ и $\vec{f}(t, \vec{x}) \in Lip_{\vec{x}}(\Omega)$.

1) Для любой точки $(t_0, \vec{x_0}) \in \Omega$ $\exists$ решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (1), определенное на отрезке Пеано $\mathcal{T}_p(t_0, \vec{x_0}) = [t_0 - h; t_0 + h]$

2) Это решение единственно в следующем смысле: если два решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ совпадают хотя бы при одном значении t, то они совпадают при

всех t, при которых они одновременно определены.

Покажем, что найти решение (1) эквивалентно решению интегрального уравнения:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{x}(\tau))\, d\tau, \quad t, t_0 \in I \qquad (2)$$

(векторное интегральное уравнение

Решение векторного интегрального ур-ния — вектор-функция $\vec{\varphi}(t) : I \to R^n$:

1) $\vec{\varphi}(t) \in C(I)$

2) $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \Omega_t \quad \forall t \in I$

3) $\vec{\varphi}(t) = \vec{x_0} + \int_{t_0} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(t))\, d\tau, \quad t_0 \in I. \ \forall t \in I$

Лемма 1. (1) $\Leftrightarrow$ (2)

Д-во: $\triangledown \Rightarrow \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi})$

Интегрируем от t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\,dt = \vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\,d\tau$$

$\Leftarrow$ дифференцируем (справа стоит дифф. ф-ция $\Rightarrow$ слева тоже)

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$$ $\square$

Опр. Функции вида $\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0$

$\vdots$

$$\vec{\varphi}_n(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau))\,d\tau,$$

определенные на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ называются **последовательными приближениями** решения интегрального уравнения (2) на отрезке Пеано $[t_0-h;\ t_0+h]$.

Доказательство основной теоремы

• Существование 3 этапа

1. Д-ем, что $\{\vec{\varphi}_n\}$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определены, непрерывны на отрезке Пеано и $(t, \vec{\varphi}_n(t)) \in \overline{Q}$. Нужно док-ть:
$\|\vec{\varphi}_n - \vec{x}_0\| \le b$ и $|t-t_0| \le h$.

Возьмём $\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0$, $t \in T_p(t_0, \vec{x}_0)$, при этих t $(t, \vec{\varphi}_0(t)) \in \overline{Q}$.

Рассм. $\|\vec{\varphi}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \vec{x}_0)\,d\tau \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \vec{x}_0)\|\,d\tau \right| \le$
$\le M|t-t_0| \le Mh \le b$.

Пусть верно для $\vec{\varphi}_{n-1}$; докажем для $\vec{\varphi}_n$:
$\|\vec{\varphi}_n - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau))\,d\tau \right\| \le M|t-t_0| \le Mh \le b$.

Непрерывность $\vec{\varphi}_n$ следует из непрерывности $\vec{f}(t, \vec{x})$ в Ω.

2. Д-ем, что $\vec{\varphi}_n$ сходится равномерно на $J_p(t_0, \vec{x}_0)$.

Сходимость $\vec{\varphi}_n$ равносильна сходимости ряда

$$\vec{S} = \vec{\varphi}_0 + (\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0) + (\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1) + \dots$$

Частичные суммы ряда $\vec{S}_n = \vec{\varphi}_n(t)$.

Из равномерной сходимости ряда $\vec{S}$ следует равн. сходим. $\vec{\varphi}_n(t)$:

$$\|\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0)\, d\tau \right\| \leq$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0)\| d\tau \right| \underset{\text{МПИ}}{\leq} L \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi_1 - \varphi_0\| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} M \cdot (\tau - t_0) d\tau \right|$$

$$\leq M \cdot L \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

По индукции: $\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}_{n-1}\| \le L^{n-1} M \frac{(t-t_0)^n}{n!}$.

Ряд S мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \|\vec{\varphi}_0\| + ML\frac{h^2}{2} + \ldots + M\cdot L^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \ldots$$

По признаку Даламбера он сходится

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{ML^n h^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\; M\cdot L^{n-1}h^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{L\cdot h}{n+1} = 0 < 1.$$

По признаку Вейерштрасса ряд S сходится равном. на $J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Следовательно, $\vec{\varphi}_n(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \vec{\varphi}(t)$, где предельная функция $\vec{\varphi}(t)$ – непрерывна на $J_p(t_0, \vec{x}_0)$.

3. Покажем, что график предельной функции не выходит из $\overline{Q}$, и она удовлетворяет интегральному уравнению (2).

$$\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}_0\| \leq b$$ (показали на этапе 1)

Передем к пределу при $n \to \infty$ и получим:

$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_0\| \leq b$, $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Рассмотрим разность:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau))\, d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) \right\| d\tau \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\varphi}_n(\tau)\|\, d\tau \right| \leq L \cdot \sup_{|t-t_0| \leq h} \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\varphi}_n(\tau)\| \cdot |t - t_0| \leq$$

$$\leq L \cdot h \sup_{|t-t_0| \leq h} \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\varphi}_n(\tau)\| \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} 0$$

Перейдём к пределу по $n \to \infty$ в уравнении

$$\vec{\varphi}_n(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau))\, d\tau.$$

Получим $\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\,d\tau$, т.е. $\vec{\varphi}(t)$ является решением интегр. ур-ния (2). В точках t_0-h и t_0+h $\vec{\varphi}(t)$ имеет соответствующую одностороннюю производную, равную $\vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ в этих точках.

· Единственность. 2 этапа

1) Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ — два решения (1) при $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Д-ем, что $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ на нек. отрезке $[t_0-\beta; t_0+\beta]$. Рассмотрим цилиндр

$\overline{Q}_\beta = \{(t, \vec{x}) : |t-t_0| \le \beta,\ \|\vec{x}-\vec{x}_0\| \le b,\ \overline{Q}_\beta \subseteq \overline{Q}\}$

β выберем ниже.

$$\forall t: |t-t_0| \le \beta \quad \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\,d\tau - \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))\,d\tau \right\| \le$$

$$\le L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\psi}(\tau)\|\,d\tau \right| \le L \sup_{|t-t_0| \le \beta} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| \cdot \beta$$

$$\sup_{|t-t_0|\le\beta}\|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)\| \le L\beta \sup_{|t-t_0|\le\beta}\|\vec{\varphi}(t)-\vec{\psi}(t)\| \qquad (3)$$

Выберем β так, чтобы $L\beta < 1$

$$\beta < \min\left\{a;\ \frac{b}{M};\ \frac{1}{L}\right\}.$$

Тогда нер-во (3) будет выполняться только когда

$$\varphi(t)=\psi(t) \quad \forall t:\ |t-t_0|\le\beta.$$