Семинар 13. Кривые.

Скубачевский Антон

29 декабря 2022 г.

Теория про вектор-функции кажется какой-то сложной с первого взгляда, но на самом деле она гораздо проще, чем кажется, если правильно ее структурировать. Первая часть - обобщить понятия обычный одномерных функций (предел, непрерывность, производная и их свойства) на случай вектор-функций.

1 Обобщение известных понятий на вектор-функции.

Определение. Вектор $\vec{r}_0$ - предел вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ ($\vec{r}_0 = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$. В кванторной записи:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon$$

Теорема (свойства, связанные с арифметическими операциями). Пусть существуют и конечны пределы $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$. Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$
2. $\exists \lim\limits_{t\to 0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \lim\limits_{t\to t_0} f(t)$
3. $\exists \lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t); \vec{r}_2(t)) = (\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t); \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t))$
4. $\exists \lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}_1(t); \vec{r}_2(t)] = [\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t); \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)]$

Для вектор-функций существует понятие одностороннего предела:

Определение. Вектор $\vec{r}_0$ - предел справа вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0 + 0$ ($\vec{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0+0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Также есть понятие непрерывности:

Определение. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

Теорема. Если $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $f(t)$ - непрерывны в точке t_0, то и $\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$, $f(t)\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))$, $[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)]$ - непрерывны в точке t_0.

Введем понятия производной и дифференцируемости:

Определение производной. $\vec{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_0(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$

Определение дифференцируемости. Функция $\vec{r}(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0, если ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{A}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)(\Delta t),$$

где $\Delta t \to 0$; $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ - постоянный 3-мерный вектор, $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to \vec{0}$ при $\Delta t \to 0$.

Дифференциал:

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)dt,$$

где $-\infty < dt < +\infty$.

Арифметические операции с производными. Пусть в t_0 $\exists$ и конечны производные функций $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, f(t). Тогда в t_0:

1. $\exists (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$
2. $\exists (f\vec{r}_1)' = f'\vec{r}_1 + f\vec{r}_1'$
3. $\exists (\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2')$
4. $\exists [\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2']$

Формула Тейлора. Пусть $\exists \vec{r}^{(n)}(t_0)$. Тогда $\exists U(t_0)$: при $t \in \mathring{U}(t_0)$:

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{(k)}}{k!}(t - t_0)^k + \vec{\varepsilon}(t - t_0)(t - t_0)^n,$$

где $\vec{\varepsilon}(t-t_0) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

А вот теорема Лагранжа уже не переносится на случай векторов, однако есть ее аналог:

Теорема(аналог теоремы Лагранжа). Пусть $\vec{r}(t)$ - непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда

$$\exists \xi \in (a,b) : |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leq |\vec{r}'(\xi)|(b-a)$$

Доказательство:

Введем следующий единичный вектор:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$$

Тогда очевидно, что

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(a), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e})$$

Мы получили выражение $f(b) - f(a)$, где $f(t) = (\vec{r}(t), \vec{e})$. Тогда по теореме Лагранжа для скалярной функции $f(t)$ $\exists \xi \in (a,b)$:

$$(\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}) = (\vec{r}'(\xi), \vec{e})(b-a) \leq |\vec{r}'(\xi)|(b-a)$$

Последнее неравенство справедливо, потому что проекция вектора $\vec{r}'(\xi)$ на единичный вектор $\vec{e}$ всегда не больше, чем модуль $|\vec{r}'(\xi)|$

2 Кривые. Их классификация и интересные точки.

Определение. Кривая - множество точек пространства с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in [a,b], \;\; \vec{r} - \text{непрерывная функция на } [a,b]\}$$

То есть не всякая вектор-функция является кривой.

Определение. Точкой кривой называют пару $(t, \vec{r}(t))$. $\vec{r}(t)$ - радиус-вектором точки.

Определение. Если $\exists t_1,\ t_2 \in [a,b] : t_1 \neq t_2$, и при этом $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, то точка $M = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ называется кратной точкой кривой. (это просто точка самопересечения)

Определение. Кривая называется замкнутой кривой или контуром, если $\vec{r}(b) = \vec{r}(a)$, то есть если совпадают начальная и конечная точки.

Определение. Контур называется простым, если из $a \le t_1 < t_2 \le b$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ следует, что $t_1 = a$, $t_2 = b$. То есть простой контур - без самопересечений.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\vec{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой.) Поэтому говорят, что на кривой задана ориентация, рассматриваемую кривую называют ориентированной кривой, точку $\vec{r}(a)$ - началом кривой, а $\vec{r}(b)$ - концом кривой.

Определение. Точка $\vec{r}(t_0)$ кривой называется особой, если $\vec{r}'(t_0) = 0$.

Определение. Кривая называется непрерывно дифференцируемой, если вектор функция, задающая ее, непрерывно дифференцируема на всем отрезке $[a, b]$.

Определение. Гладкая кривая - непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек.

3 Длина кривой.

Зададим на $t \in [a, b]$ кривую $\Gamma = \vec{r}(t)$. Разделим отрезок $[a, b]$ на 5 кусков, и соединим точки кривой, соответствующие концам этих кусков, отрезками. Получим ломаную. Если мы разобьем $[a, b]$ на 10 кусков, то тоже получим ломаную, но она будет состоять уже из 10 частей, и будет плотнее прилегать к кривой. При это ее длина станет больше, чем если бы было 5 частей, и она станет ближе к длине кривой. Значит, длина кривой - это просто предел (ну или верхняя грань) длин ломаных, когда измельчение отрезка $[a, b]$ очень мало. Говорят в таких случаях, что мелкость разбиения стремится к нулю. Здесь τ - назовем так очередное разбиение, его мелкость обозначается $|\tau|$, и она по определению равна длине наибольшего из отрезков разбиения.

Итак, возьмем ломаную Λ_τ. Ее длина - просто сумма длин отрезков ломаной: $S_{\Lambda_\tau} = \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$ (i_τ - число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$). Тогда по рассуждениям выше длина кривой, в которую вписана эта ломаная, равна:

$$S_\Gamma = \sup_\tau S_{\Lambda_\tau} = \lim_{|\tau| \to 0} S_{\Lambda_\tau}$$

Это и есть определение длины кривой.

Определение. Кривая называется спрямляемой, если ее длина конечна.

Теорема 1. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t), a \le t \le b\}$ - непрерывно дифференцируемая кривая. Тогда она спрямляема, и ее длина удовлетворяет условию:

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le S_\Gamma \le \max_{a \le t \le b} |\vec{r}'(t)|(b-a)$$

Доказательство:

Левое неравенство очевидно: длина кривой всегда $\ge$ расстояния между ее концами. Так что докажем только второе.

Функция $|\vec{r}'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a,b]$ достигает своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ - некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда оценим длину ломаной (в ходе оценки применим аналог теоремы Лагранжа к каждому из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$; $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$):

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{i_\tau} \max_{a \le t \le b} |\vec{r}'(t)|(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \max_{a \le t \le b} |\vec{r}'(t)| \sum_{i=1}^{i_\tau} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a \le t \le b} |\vec{r}'(t)|(b-a)$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t), a \le t \le b\}$ - непрерывно дифференцируемая кривая. Тогда переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от начала кривой, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t, причем

$$\frac{ds}{dt} = |\frac{d\vec{r}}{dt}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Доказательство:

Рассмотрим кусок дуги кривой между t_0 и $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$). Обозначим $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. По теореме 1 получим:

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| \le \Delta s \le \max_{t_0 \le t \le t_0 + \Delta t} |\vec{r}'(t)| \Delta t$$

Если разделить на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0+0$, то получим:

$$s'_+(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$$

Аналогично, рассматривая интервал $(t_0 - \Delta t; t_0)$, имеем:

$$s'_-(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$$

Отсюда получаем $s'(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$, ч.т.д.

Эта теорема очень важная, она пригодится в дальнейшем.

4 Кривизна, касательная, нормаль и их друзья.

Касательный вектор к кривой определяется следующим образом:

$$\vec{t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{|\Delta \vec{r}(t_0)|}$$

Не путайте касательный вектор $\vec{t}$ и параметр кривой t: над вектором касательной стоит векторочек.

Его можно переписать в следующем виде:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}'(t_0)|}$$

Воспользовавшись результатом теоремы 2 ($|r'| = s'$), получаем альтернативную форму записи касательного вектора:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t_0)}{s'(t_0)} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{ds}(t_0)$$

Уравнение касательной записать очень просто (из аналита мы умеем строить уравнение прямой, проходящей через точку $\vec{r}(t_0)$ параллельно вектору $\vec{t}$).

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{t}\tau, \tau \in (-\infty, +\infty)$$

Возьмем теперь производную $\frac{d\vec{t}}{ds}$. Она равна: $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Введем вектор главной нормали и кривизну следующим образом:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{n},$$

где $|\vec{n}| = 1$, $\vec{n}$ - **вектор главной нормали**; k - **кривизна**. Из формулы выше ясно, что

$$k = |\frac{d\vec{t}}{ds}| = |\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}|$$

Покажем, что введенный таким образом вектор перпендикулярен касательному вектору:

Утв. $\vec{t} \perp \vec{n}$

Док-во: $\vec{t} = 1 \Rightarrow (\vec{t}; \vec{t}) = 1$. Возьмем производную от обеих частей, получим $2(\vec{t}; \vec{t'}) = 0$. чтд

Радиусом кривизны называют $R = \frac{1}{k}$

Вектор бинормали $\vec{\beta} = [\vec{t}, \vec{n}]$

Запишем формулу для кривизны в виде, в котором мы сможем ее легко посчитать:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{t'}}{s'} = \frac{(\vec{r'}/s')'}{s'} = \frac{s'\vec{r''} - s''\vec{r'}}{s'^3}$$

Далее заметим, что, т.к. $\frac{d\vec{t}}{ds}$ задает направление вектора нормали, который перпендикулярен $\vec{t}$, причем длина $|\vec{t}| = 1$, можно сделать следующий финт ушами с векторным произведением:

$$k = |\frac{d\vec{t}}{ds}| = |[\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t}]| = |[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d\vec{r}}{ds}]| = |\frac{s'\vec{r''} - s''\vec{r'}}{s'^3} \times \frac{\vec{r'}}{s'}|$$

Векторное произведение параллельных векторов ноль, а $s' = |\vec{r'}|$. Поэтому имеем:

$$|\frac{s'\vec{r''} - s''\vec{r'}}{s'^3} \times \frac{\vec{r'}}{s'}| = \frac{|[\vec{r''} \times \vec{r'}]|}{s'^3} = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3}$$

Итак, у нас есть **важная формула**, которую мы будем в дальнейшем юзать на письменном экзамене:

$$k = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3}.$$

Замечание. В ходе доказательства этой формулы (когда мы еще делали финт ушами), мы показали, что $[\vec{t};\vec{n}] \parallel [\vec{r}';\vec{r}'']$.

Отсюда и из соображений, что $\vec{\beta}$ единичный, получаем формулу для **Вектора бинормали:**

$$\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}';\vec{r}'']}{|[\vec{r}';\vec{r}'']|}.$$

Из определения вектора бинормали и того, что $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{\beta}$, получаем формулу вектора **главной нормали**:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}',[\vec{r}'',\vec{r}']]}{|[\vec{r}',[\vec{r}'',\vec{r}']]|}$$

Замечание. $\vec{n}$ не коллинеарен $\vec{r}''$.

Приведем еще пару формул и определений:

Центр кривизны для точки кривой $\vec{r}(t_0)$ - точка, находящаяся от $\vec{r}(t_0)$ на расстоянии $R = \frac{1}{k}$ в направлении вектора главной нормали.

$$\vec{\beta} = \frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}$$

Соприкасающаяся плоскость в точке $\vec{r}(t_0)$ - плоскость, проходящая через вектора касательной и нормали. Соответственно, она перпендикулярна вектору бинормали. Отсюда очевидно следует ее уравнение:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}_0', \vec{r}_0'') = 0$$

(штука выше - смешанное произведение векторов, если что)

Нормальная плоскость в точке $\vec{r}(t_0)$ - плоскость, проходящая через вектора нормали и бинормали. Ее уравнение:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}_0') = 0$$

Спрямляющая плоскость в точке $\vec{r}(t_0)$ - плоскость, проходящая через вектора касательной и бинормали. Ее уравнение:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, [[\vec{r}_0', \vec{r}_0''], \vec{r}_0']) = 0$$

Трехгранник Френе - тетраедр с вершиной на кривой и ребрами - векторами главной нормали, касательной и бинормали (все единичные).

Пример 1. Дана кривая:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

Найти:

1. Кривизну в точках $(0,0,0)$ и $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6})$
2. Нормальную прямую в точке $(0,0,0)$
3. Нормальную плоскость в точке $(0,0,0)$

Параметризуем кривую по-человечески:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \\ z = \frac{t^3}{6} \end{cases}$$

Значит,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \\ t^3/6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$[\vec{r}'', \vec{r}'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & t \\ 1 & t & t^2/2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-t^2/2) + \vec{j}(t) - \vec{k} = \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|[\vec{r}'', \vec{r}']| = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}}$$

$$k = \frac{|[\vec{r}'', \vec{r}']|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{1}{1 + t^2 + t^4/4}$$

Точке $(0, 0, 0)$ соответствует значение $t = 0$.

$$k(0) = 1$$

Точке $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6})$ соответствует $t = 1$.

$$k(1) = \frac{4}{9}$$

Чтобы найти нормальную кривую, найдем вектор нормали (не обязательно нормировать на модуль). Поскольку, если не нормировать, вектор не будет единичным, мы обозначим его не $\vec{n}$, а $\vec{N}$.

$$\vec{N} = [\vec{r}', [\vec{r}'', \vec{r}']] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & t & t^2/2 \\ -t^2/2 & t & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -t - t^3/2 \\ -t^4/4 + 1 \\ t + t^3/2 \end{pmatrix} = [\text{в точке (t=0)}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, уравнение нормальной прямой в точке $\vec{r}(t_0) = (0, 0, 0)$ будет:

$$\vec{r} = \vec{r}(0) + \vec{N}\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tau \in (-\infty, +\infty)$

Построим уравнение нормальной плоскости. Для этого заметим, что касательный вектор $\vec{t}$ является вектором нормали к этой плоскости, т.к. он ей перпендикулярен. Мы знаем, что $\vec{t}$ параллелен $\vec{r}' = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t = 0$.

Уравнение плоскости, как известно из аналита, имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

В нашем случае (исходя из вектора нормали к плоскости) уравнение плоскости имеет вид:

$$x + D = 0$$

Подставив сюда интересующую нас точку $(0,0,0)$, получаем $D = 0$. Отсюда уравнение нормальной плоскости в точке (0,0,0):

$$x = 0$$

Я приводил готовые уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей, но, как видите, иногда проще пользоваться не ими, а знаниями из аналита и немного мозгой.

Пример 2. Найти в точке $(1,1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$:

$$x^4 + y^4 - 2xy = 0 \tag{1}$$

В данном случае $y(x)$ - функция икса, но явной зависимости нет. То есть у нас вообще говоря есть кривая:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

И мы дальше должны искать кривизну по алгоритму, беря производные от радиус-вектора (в качестве t выступает x), но беда в том, как найти $y'(x)$, если $y(x)$ не задан явно формулой.

Делается это на самом деле просто: нужно просто взять производную от обеих частей уравнения (1):

$$4x^3 + 4y^3y' - 2y - 2xy' = 0 \tag{2}$$

Подставляя сюда точку $(1,1)$, получаем:

$$y'(1,1) = -1$$

Чтобы найти $y''(x)$, возьмем производную от обеих частей уравнения (2):

$$12x^2 + 12y^2y'^2 + 4y^3y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$$

Подставляя сюда значения $(x, y) = (1,1)$ и $y' = -1$, имеем:

$$y'' = -14$$

Итак,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r''} = \begin{pmatrix} 0 \\ y''(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|r'| = \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{2}$$

$$[\vec{r'}, \vec{r''}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -14\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$|[\vec{r'}, \vec{r''}]| = 14$$

Получаем,

$$k = \frac{|[\vec{r'}, \vec{r''}]|}{|\vec{r'}|^3} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

Не облажайтесь, когда вас просят найти радиус кривизны, а не кривизну, читайте внимательно условие =)