Лекция 10. Уравнение Эйлера — уравнение вида

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

a_i — постоянные

$x = e^t$ — замена при $x>0$

$x = -e^t$ при $x<0$.

сводит к линейному ур-ю с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим случай $x>0$:

Д-ем по индукции: $\dfrac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} L[y]$, где $L[y] = \sum\limits_{i=1}^{k} b_{k,i}\, y^{(i)}(t)$

$L[y]$ — сумма производных с постоянными коэфф.

$b_{k,i}$ — const

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = e^{-t} \cdot y'_t$$

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left(e^{-kt} L[y]\right) = e^{-t} \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} L[y]\right) =$$

$$= -k e^{-(k+1)t} L[y] + e^{-(k+1)t} \frac{dL}{dt}[y] = e^{-(k+1)t} L_1[y],$$

где $L_1[y]$ – сумма производных $y_t^{(k+1)}, \dots, y_t'$ с постоянными коэффициентами.

Хар. ур: $a_0\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

(получается из исходного подстановкой $y=e^{\lambda t}=$
$=x^{\lambda}$).

Системы линейных однородных уравнений с постоянными вещ. коэфф.

Однородная: (1) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, A – матрица с пост. $\underbrace{\text{элем.}}_{}$ вещест.

Построим ФСР (1) (ОЛСУ), она будет выражена в элем. ф-циях

Будем искать решения (1) в виде

$$(2)\quad \vec{x} = \vec{h}\cdot e^{\lambda t}, \quad \vec{h} \neq \vec{0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$\vec{h}$ – const вектор

Подставляем (2) в (1):

$$e^{\lambda t}(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{0}. \quad e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall t \Rightarrow$$

$\vec{x}$ вида (2) явл. реш. (1) $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda E)\vec{h} = \vec{0}$ $\Rightarrow$

$\vec{h}$ – собств. вектор, λ – с.з. матрицы A.

Необх. усл. $\det(A-\lambda E)=0$ — наз. характ. ур-ем.

Мн-н степени n, имеет n корней над $\mathbb{C}$.

<u>Опр.</u> Набор векторов $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}$ наз. жордановой цепочкой, если

$$A_\lambda \vec{e_1} = \vec{0}, \quad A_\lambda = A - \lambda E$$

$$A_\lambda \vec{e_2} = \vec{e_1} \qquad \vec{e_1} - \text{с.в.}$$

$$\vdots \qquad \vec{e_i},\ i=\overrightarrow{2,k} - \text{присоед.}$$

$$A_\lambda \vec{e_k} = \vec{e}_{k-1}$$

Теорема Жордана (б/д-ва)

Для любой квадратной матрицы A в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис, состоящий из жордановых цепочек, которые отвечают всем собственным значениям A.

Всё пр-во $\mathbb{R}^n$ разбивается на прямую сумму инвар. подпр-в $R_1, .., R_k$ (корневое).

Они состоят из таких $\vec{x}$, что $A_{\lambda_i}^{r_i}\vec{x} = \vec{0}$

r_i - кратность λ_i и разм-ть R_i

$$\mathbb{R}^n = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_k \qquad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_k \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \lambda_1 & & \lambda_k \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ r_1 & + \ldots + & r_k = n \end{array}$$

Базисом в R_i образуют жордановы цепочки.

Пусть с.з. λ соответ. цепочка $e_1, .., e_k$

Рассм. вектор-функцию

$$\vec{w}_m(t) = \vec{e_1} \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\vec{e_2} + \ldots + \vec{e_m}, \quad m = \overline{1,k}$$

Лемма 1. Функции $\vec{x}_m(t)=\vec{w}_m(t)e^{\lambda t}$, $m=\overline{1,k}$ являются решениями (1). При этом $\vec{x}_m(0)=\vec{e}_m$, $m=\overline{1,k}$

<u>Д-во:</u> 1) $\frac{d\vec{w}_i}{dt}=\vec{w}_{i-1}$, т.к.

$$\frac{d\vec{w}_i}{dt}=\vec{e}_1\cdot\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots+\vec{e}_{i-1}=\vec{w}_{i-1}$$

2) $A\vec{w}_i=\lambda\vec{w}_i+\vec{w}_{i-1}$, т.к.

$$A\vec{w}_i=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\vec{e}_1+\ldots+A\vec{e}_i=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\vec{e}_1+$$

$$+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}(\lambda\vec{e}_2+\vec{e}_1)+\ldots\lambda\vec{e}_i+\vec{e}_{i-1}=\lambda\vec{w}_i+\vec{w}_{i-1}.$$

3) Подставим $\vec{x}_m(t)$ в (1):

$$\frac{d\vec{x}_m}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{w}_m e^{\lambda t})=\lambda e^{\lambda t}\vec{w}_m+e^{\lambda t}\frac{d\vec{w}_m}{dt}=$$

$$= e^{\lambda t}\left(\lambda \vec{\omega}_m + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}_m}{dt}}_{=\,\vec{\omega}_{m-1}}\right) = e^{\lambda t} A \vec{\omega}_m(t) = A\vec{x}_m .$$

Если $t=0$ $\quad \vec{x}_m(0) = \vec{\omega}_m(0)\, e^{\lambda\cdot 0} = \vec{\omega}_m(0) = \vec{e}_m .$ ■

Рассмотрим все такие функции (со всех цепочек)

Цепочкам $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{k_1},\dots,\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_{k_\ell}$ отвечают ф-ции

$\lambda_1 \; \dots \; \lambda_\ell$

$k_1+\dots+k_\ell = n$ $\quad k \le \ell \le n$

k_1: $\vec{e}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_{k_1}\right)e^{\lambda_1 t}$

$\vdots$

k_ℓ: $\vec{f}_1 e^{\lambda_\ell t}, \dots, \left(\frac{t^{k_\ell-1}}{(k_\ell-1)!}\vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_{k_\ell}\right)e^{\lambda_\ell t}$

$\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ — базисные векторы,

$\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ — ф-ции: $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \left[\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\vec{h}_1 + \dots + \vec{h}_{k_1}\right]e^{\lambda_1 t},$

$\dots, \vec{f}_1 e^{\lambda_k t}, \dots, \left[\frac{t^{k_\ell-1}}{(k_\ell-1)!}\vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_{k_\ell}\right]e^{\lambda_\ell t}.$

Докажем, что все эти решения лин. незав.

$W(t) = W[\vec{\varphi}_1, .., \vec{\varphi}_n]$. При $t=0$ $W(0) = W[\vec{h}_1, .., \vec{h}_n] \neq 0$, тогда они лин. незав. $\forall t$.

Лемма 2. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ – с.з. $\underbrace{\text{матрицы}}_{\text{вещ.}}$ A, а $\vec{h}$ – с.в. для λ, то $\vec{\bar{h}}$ – с.в. для $\bar{\lambda}$. Для вещ λ $\vec{h}$ можно взять вещ.

<u>Д-во:</u>

$$A\vec{h} = \lambda\vec{h}$$

$$\overline{A\vec{h}} = A\overline{\vec{h}} = \bar{\lambda}\overline{\vec{h}}.$$

Для вещ. λ

$$(A - \lambda E)\vec{h} = \vec{0}$$

$\det A_\lambda = 0 \Rightarrow \vec{h}$ можно взять вещ

Веществ. векторы $\mathrm{Im}\,\vec{h}$ и $\mathrm{Re}\,\vec{h}$ лин. незав.

Теорема 1. Пусть $\vec{h}_1, .., \vec{h}_n$ – базис, сост. из жордановых цепочек, а $\vec{\varphi}_1(t), .., \vec{\varphi}_n(t)$ – соотв. им решения ОЛСУ (1). Тогда для $\forall$ её решения $\exists$ константы C_i:

$\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi_1}(t) + \ldots + C_n\vec{\varphi_n}(t)$.

Д-во следует из Теоремы 3 (лекции 8).

Построим ФСР, состоящую из веществ. решений.
Пусть базис $\vec{h_1}, \ldots, \vec{h_n}$ сост. из $2q$ компл-сопр. век. и $n-2q$ действ. Тогда вещ. векторы $Re\,\vec{h_1}, Im\,\vec{h_1}, \ldots, Re\,\vec{h_q}, Im\,\vec{h_q}, \vec{h}_{2q+1}, \ldots, \vec{h_n}$ лин. незав.
(Аналогично д-ву теоремы 1 лекции 9).

Получим Теорему 2:

Если среди решений $\vec{\varphi_1}(t), \ldots, \vec{\varphi_n}(t)$ имеется $2q$ компл.-сопр. и p действ. решений, $p+2q=n$, то $Re\,\vec{\varphi_1}, Im\,\vec{\varphi_1}, \ldots, \vec{\varphi}_{2q+1}, \ldots, \vec{\varphi_n}$ обр. веществ. ФСР системы (1).

Д-во: $\det(\mathrm{Re}\,\vec{\varphi}_1, \dots \vec{\varphi}_n)\Big|_{t=0} = |\mathrm{Re}\,\vec{h}_1, \mathrm{Im}\,\vec{h}_1, \dots \vec{h}_n| \neq 0$, т.к.

последние лин. незав. $\Rightarrow$ функции φ_i незав. ■

Жорданова клетка порядка m с собств. зн. λ — это матрица вида

$$J_m = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{m}$$

В Жордановом базисе матрица A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_l} \end{pmatrix}$$ k_l - кратности с.з.

Из теоремы Жордана следует, что $\exists$ невыр. матрица T: $J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_l} \end{pmatrix}$.

Линейные неоднор. сист. с пр. ч. квазимн.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^{\mu t}\vec{P}_m(t) \qquad (3)$$

мн-н степени m (компл)

$\vec{p}_0 + \vec{p}_1 t + \ldots + \vec{p}_m t^m$

const вектора

<u>Th (без д-ва)</u> Система (3) имеет частное решение вида $\vec{x}(t) = \vec{G}_{m+s}(t)e^{\mu t}$, где $\vec{G}_{m+s}$ – век.-мн-н степени $m+s$, а $s = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \lambda \\ r, & \text{если } \mu = \lambda \end{cases}$

r – max длина ж.ц.