Семинар 12. Равномерная непрерывность.

Скубачевский Антон

29 декабря 2022 г.

Определение. Функцию f называют равномерно непрерывной на множестве X, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Функция, равномерно непрерывная на множестве X, является непрерывной на этом множестве. Обратное неверно. Однако если множество X - отрезок, то верно, как следует из следующей теоремы:

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = sinx$ на равномерную непрерывность на множестве $\mathbb{R}$.

Покажем, что она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. При оценках ниже воспользуемся тем, что $cosx \leqslant 1$, а также $|sinx| \leqslant |x|$

$$|f(x') - f(x'')| = |sinx' - sinx''| = |2sin\frac{x' - x''}{2}cos\frac{x' + x''}{2}| \leqslant 2|sin\frac{x' - x''}{2}| \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''| \text{ должно быть } < \varepsilon$$

Это выполняется, к примеру, при $\delta = \varepsilon$. Нашли явно $\delta(\varepsilon)$, значит, доказали равномерную непрерывность. Запишем определение:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \varepsilon : \forall x', x'' \in \mathbb{R} : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Значит, $sinx$ равномерно непрерывен по определению на $\mathbb{R}$.

Пример 2. Доказать, что $\frac{1}{x}$ равномерно непрерывна на множестве $E = [a; +\infty)$, где a>0.

Доказательство:

Возьмем $x', x'' \in E$. Для них

$$|f(x') - f(x'')| = |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = \frac{|x' - x''|}{|x'x''|} \leqslant \frac{|x' - x''|}{a^2} < \varepsilon$$

Это выполняется при $\delta = a^2\varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = a^2\varepsilon : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Значит, $\frac{1}{x}$ равномерно непрерывна на множестве $E = [a; +\infty)$, ч.т.д.

Пример 3.Доказать, что $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $E = [0; +\infty)$.

Доказательство:

$$|f(x') - f(x'')| = |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}}$$

Мы не можем так легко это оценить, но если вместо E мы возьмем $E_1 = [1; +\infty)$, то сможем. На E_1:

$$|f(x') - f(x'')| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leqslant \frac{|x' - x''|}{2}$$

Это $< \varepsilon$ при $\delta = 2\varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = 2\varepsilon : \forall x', x'' \in E_1 : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Значит, $\sqrt{x}$ равномерно непрерывен на E_1.

Теперь рассмотрим $E_2 = [0, 2]$. $\sqrt{x}$, очевидно, непрерывен на этом множестве, а значит, равномерно непрерывен на нем по теореме Кантора.

Покажем, что из равномерной непрерывности на E_1 и E_2 следует равномерная непрерывность на E.

Запишем определение равномерной непрерывности на E_1 и E_2:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 : \forall x', x'' \in E_1 : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 : \forall x', x'' \in E_2 : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{2}$$

Тогда если подобрать $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, то функция будет равномерно непрерывна на E:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta = min\{\delta_1, \delta_2, 1\} : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{3}$$

Ч.т.д.

Поясним последнюю строчку, и почему из нее следует чтд. Мы взяли δ таким образом, чтобы расстояние между x' и x" было меньше чем δ_1 и δ_2, чтобы удовлетворять (1) и (2). Кроме того, δ должно быть меньше, чем 1, чтобы x' и x" не лежали в разных множествах. В самом деле, возьмите, к примеру, $\delta = 2$ расстояние между x' и x", и придумайте, как расположить эти точки на координатной прямой, чтобы они лежали в разных множествах. А если x' и x" лежат в одном множестве, и при этом расстояние между ними $< \delta$, то для любого ε и этого $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$ если x' и x" лежат в E_1, то удовлетворяется (1), т.е. $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Если же x' и x" лежат в E_2, то удовлетворяется (2), т.е. опять же $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Но это значит, что удовлетворяется (3), чтд.

Замечание. Нельзя было взять, например, $E_1 = [0, 1]$ и $E_2 = (1, +\infty)$, и сделать вывод, что из равномерной непрерывности на каждом из них следует равномерная непрерывность на их объединении. Чтобы показать это, достаточно взять функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Пример 4. Доказать, что $f(x) = \sqrt{x}cosx^2$ не равномерно непрерывна на $E = (0, +\infty)$.

Доказательство:

Отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0 : \exists x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta; |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

Для того, чтобы понять, как решать задачу, воспользуемся определением равномерной непрерывности "на пальцах":

Функция равномерно непрерывна, если для любых достаточно близких x' и x" расстояние $|f(x') - f(x'')|$ достаточно мало. То есть, грубо говоря:

$$|x' - x''| \to 0 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \to 0$$

Ну а НЕ равномерно непрерывна, если найдутся такие противные x' и x'', что при

$$|x' - x''| \to 0 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \nrightarrow 0$$

Давайте же найдем такие 2 противные точки. Ну а т.к. у нас в условии синус, то будем их вообще искать в виде последовательностей, из которых позже выберем конкретный член.

Когда мы имеем дело с косинусом или синусом, первое, что приходит в голову, это

$$x'_n = 2\pi n$$

$$x''_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

Но у нас не $cosx$, а $cosx^2$, поэтому в голову приходят несколько измененные последовательности:

$$x'_n = \sqrt{2\pi n}$$

$$x''_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

Покажем, что $|x'_n - x''_n| \to 0$. Домножим ниже на сопряженные.

$$|x'_n - x''_n| = |\sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}| = |\frac{\pi/2}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}| \to 0 \qquad (4)$$

Покажем, что $|f(x'_n) - f(x''_n)| \nrightarrow 0$:

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |\sqrt[4]{2\pi n} \cdot 1 - 0| \to +\infty \qquad (5)$$

Значит, не равномерно непрерывна, вроде бы. Но теперь докажем это четко, в кванторах.

(4) значит, что последовательность $x_n = x'_n - x''_n \to 0$. Запишем определение предела:

$$\forall\delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x'_n - x''_n| < \delta$$

Из (5) следует, что $|f(x'_n) - f(x''_n)|$ начиная с некоторого номера будет $>$, чем, к примеру, 1. Запишем это в кванторах:

$$\exists\varepsilon = 1; \exists n_1 : \forall n \geqslant n_1 \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$$

Взяв $n_2 = max(n_0; n_1)$ и склеив (4) и (5), имеем:

$$\exists\varepsilon = 1 : \forall\delta > 0 \exists n_2 = max(n_0; n_1) : |x'_{n_2} - x''_{n_2}| < \delta; |f(x'_{n_2}) - f(x''_{n_2})| \geqslant \varepsilon$$

Но это и есть, в общем-то, отрицание определения равномерной непрерывности. Значит чтд.

Пример 5. Доказать, что $f(x) = x^2 sin(lnx)$ не равномерно непрерывна на $E = (0, +\infty)$.

Доказательство:

Ну тут сходу так не придумаешь две последовательности. Одна, видимо, чтобы $2\pi n$ было под синусом:

$$x'_n = e^{2\pi n}$$

А вот вторая-хз, но, возможно, что-то вида:

$$x''_n = e^{2\pi n + f(n)}$$

$f(n)$ будем искать из условия $|x'_n - x''_n| \to 0$

$|x'_n - x''_n| = e^{2\pi n}|1 - e^{f(n)}|$. Это должно стремиться к 0, а значит, $e^{f(n)}$ должно к 1, а значит, $f(n) \to 0$. Значит, мы можем разложить $e^{(f(n))} = 1 + f(n) + o(f^2(n))$. Есть такой символ $\sim$. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Из рассуждений выше $|x'_n - x''_n| \sim e^{2\pi n}|1 - 1 - f(n)| = e^{2\pi n}|f(n)|$. Это $\to 0$ при $f(n) = e^{-4\pi n}$, к примеру. Вот мы и подобрали $f(n)$. Тогда

$$x'' = e^{2\pi n + e^{-4\pi n}}$$

Запишем по определению $|x'_n - x''_n| \to 0$:

$$\forall\delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x'_n - x''_n| < \delta \tag{6}$$

Убедимся, что при таком выборе $|f(x''_n) - f(x'_n)| \nrightarrow 0$.

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = |(x''_n)^2 sin(2\pi n + e^{-4\pi n})| = e^{4\pi n + 2e^{-4\pi n}} sin e^{-4\pi n} \sim$$

$$\sim [sinx \sim x] \sim e^{4\pi n + 2e^{-4\pi n}} e^{-4\pi n} \sim 1$$

Из этого следует, что

$$\exists \varepsilon = 1/2; \exists n_1 : \forall n \geqslant n_1 \Rightarrow |f(x''_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall \delta > 0 \exists n_2 = max(n_0; n_1) : |x'_{n_2} - x''_{n_2}| < \delta; |f(x'_{n_2}) - f(x''_{n_2})| \geqslant \varepsilon$$

Значит, не равномерно непрерывна, чтд.

Далее рассмотрим несколько утверждений, с помощью которых очень легко доказывается равномерная непрерывность или ее отсутствие. Их можно использовать на экзамене.

Утверждение 1. Пусть $E = (a, b)$. Пусть f непрерывна на E. Тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \exists$ Конечные пределы $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to b-0} f(x) \end{cases}$

То есть это утверждение позволяет доказывать как равномерную непрерывность, так и ее отсутствие.

Пример 6. Исследовать $f(x) = xsin\frac{1}{x^2}$ на равномерную непрерывность на E = (0,1).

- Эта функция непрерывна на E как композиция элементарных функций
- $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$ как произведение бесконечно малой функции на ограниченную. (а значит, существует и конечен)
- $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = sin 1$, т.к. в 1 никаких особенностей у функции нет.

Значит, $f(x)$ равномерно непрерывна на E по утверждению 1.

В случае, если $b = +\infty$, то есть промежуток полубесконечный, это утверждение работает только в одну сторону и принимает вид:

Утверждение 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $E = [a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на E.

Сформулируем теперь пару утверждений, связывающих свойства производных функции с ее равномерной непрерывностью.

Утверждение 3. Пусть $f(x)$ дифференцируема на E, причем $f'(x)$ ограничена на E. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на E.

Доказывается это утверждение в одну строчку с помощью Теоремы Лагранжа о среднем.

Пример 7. Доказать, что $f(x) = \sqrt{x} ln(1+x^2)$ равномерно непрерывна на $E = (0, +\infty)$.

Доказательство:

$$f'(x) = \frac{2x^{3/2}}{1+x^2} + \frac{ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}$$

Докажем, что производная ограничена.

- f' непрерывна
- $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, то есть конечны. Значит можем продолжить по непрерывности на x = 0.

При выполнении этих условий f'(x) будет ограничена. (У нас была задача в 1 семестре в теме про непрерывность, где мы доказывали, что функция, непрерывная на $[a, +\infty)$ и имеющая на бесконечности конечный предел, ограничена. Мы это доказывали с помощью теоремы Вейерштрасса и определения предела). Значит, f(x) равномерно непрерывна на E по утверждению 3.

Утверждение 4. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $E = [a; +\infty)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \infty$. Тогда $f(x)$ не равномерно непрерывна на E.

Пример 8. Доказать, что $f(x) = x^2 arctgx$ не равномерно непрерывна на $E = (0, +\infty)$.

Доказательство:

$f'(x) = 2xarctgx + \frac{x^2}{x^2+1} \to +\infty \Rightarrow f(x)$ не равномерно непрерывна на E, ч.т.д.

TO SUM UP. Для доказательства наличия равномерной непрерывности используем:

- Определение
- Теорему Кантора
- Утверждения 1,2,3

Для доказательства отсутствия равномерной непрерывности используем:

- Определение
- Утверждения 1,4

Пример 9. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = (0; +\infty)$ функцию $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \cos x^3$.

Решение. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ равномерно непрерывна, т.к. она непрерывна и $\exists \lim\limits_{x \to +0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \in \mathbb{R}$ (Утв. 1 и 2).

Для функции $g(x) = \cos x^3$ можно подобрать последовательности $x'_n = \sqrt[3]{2\pi n}$, $x''_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$:

$$|x'_n - x''_n| \to 0 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x'_n - x''_n| < \delta,$$

$$|g(x'_n) - g(x''_n)| \to 1 \Rightarrow \exists \varepsilon = 0.5; \exists n_1 : \forall n \geqslant n_1 \Rightarrow |g(x'_n) - g(x''_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\exists \varepsilon = 0.5 : \forall \delta > 0 \exists n_2 = \max(n_0; n_1) : |x'_{n_2} - x''_{n_2}| < \delta; |g(x'_{n_2}) - g(x''_{n_2})| \geqslant \varepsilon,$$

следовательно, $g(x)$ – не равномерно непрерывна на E.

Ответ. Функция не равномерно непрерывна как сумма равномерно непрерывной и не равномерно непрерывной функций.

Пример 10. Исследовать $f(x) = x \ln x + \sin x$ на равномерную непрерывность на множестве $E = (0; +\infty)$.

Решение. Функция $g(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на E по определению (это мы уже в начале доказывали).

Рассмотрим функцию $h(x) = x \ln x$. $h'(x) = \ln x + 1 \to +\infty$ при $x \to +\infty \Rightarrow h(x)$ не равномерно непрерывна на E по Утв. 4.

Ответ. $f(x)$ не равномерно непрерывна как сумма равномерно непрерывной и не равномерно непрерывной функций.

Пример 11. Исследовать $f(x) = \ln(1 + 4\sqrt{x})$ на равномерную непрерывность на множестве $E = [0; +\infty)$.

Решение. Представим E в виде $E_1 \cup E_2$, где $E_1 = [0; 2]$, $E_2 = [1; +\infty)$.

1) На E_1 функция $f(x)$ – непрерывна, следовательно, по теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на E_1, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x', x'' \in E_1 : |x' - x''| < \delta_1 \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2) На E_2 ограничена производная функции $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4\sqrt{x})}$, следовательно, $f(x)$ равномерно непрерывна на E_2 по Утв. 3, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x', x'' \in E_2 : |x' - x''| < \delta_1 \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

3) Склеиваем E_1 и E_2:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\} > 0 : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

следовательно, $f(x)$ – равномерно непрерывна на E, ч.т.д.

Ответ. $f(x)$ – равномерно непрерывна.