Семинар 3. Пределы и непрерывность

Скубачевский Антон

15 февраля 2023 г.

1 Предел функции многих переменных

Определение 1. Пусть $x^{(0)}$ - предельная точка E. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначается $\underset{E \ni x \to x^{(0)}}{lim} f(x) = A$

Это определение почти идентично с привычным нам определением для случая одной переменной. Но все же есть отличия: наличие множества E и требование, чтобы точка $x^{(0)}$ была предельной.

Определение 1'(по Гейне). Пусть $x^{(0)}$ - предельная точка E. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E, если $\underset{m\to\infty}{lim} f(x^{(m)}) = A \ \forall \{x^{(m)}\} : x^{(m)} \in E \backslash \{x^{(0)}\}$, $x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$

Как всегда отсутствие предела лучше всего доказывать по Гейне: например, подобрать две последовательности Гейне $x^{(m_1)}$ и $x^{(m_2)}$, сходящиеся к $x^{(0)}$, такие, что $f(x^{(m_1)}) \to A$, $f(x^{(m_2)}) \to B$; $A \neq B$. Т.к. по определению все $f(x^{(m)})$ должны сходиться к одинаковому числу, то предела нет в этом случае по определению Гейне.

Чтоб всем ежам стало понятно, приведу пример из прошлого семестра, как четко доказывать, что предела нет. (случай 1мерный).

Пример 1. Доказать, что у функции $f(x) = sin(\frac{\pi}{x})$ не существует предела при $x \to 0$

Доказательство:

Возьмем 2 последовательности:

$$x_n = \frac{1}{n}$$
$$x'_n = \frac{2}{4n+1}$$

Это последовательности Гейне, т.к. их члены не равны 0 и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(x'_n) = 0$$

(где 0 - точка, в которой исследуем существование предела)

Тогда:

$$f(x_n) = sin(\pi n) = 0$$
$$f(x'_n) = 1$$

То есть

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$$

Следовательно, по определению Гейне предела в 0 нет.

В случае же, если мы имеем дело не с 1мером, а с 2мером, например, придется подбирать уже последовательности не точек на прямой, а точек на плоскости: $(x^{(m)}; y^{(m)})$.

Аналогично 1меру, для случая $\mathbb{R}^n$ также выполняется Критерий Коши.

Определение. В случае, если $E \supset \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)})$ при некотором $\delta > 0$ или $E = X$, где X - область определения $f(x)$, то вместо $\lim_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$ пишут просто $\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = A$, и называют его пределом функции при $x \to x^{(0)}$. В дальнейшем нас больше всего будет интересовать именно этот предел (то есть предел, в котором мы забиваем на множество E).

Кроме этого предела нас будет интересовать так называемый предел по направлению.

Определение. Предел по направлению - предел из определения 1, где в качестве множества E взят луч: $E = \{x : x = x^{(0)} + t\bar{e}\}$, где $t \geqslant 0$, а $\bar{e}$ - направляющий вектор луча.

Утверждение 1. Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, значения которых совпадают с этим пределом. В самом деле, в случае отсутствия пределу по направлению или неравенства пределов по разным направлениям, мы можем по Гейне моментально доказать, что предела нет: если по разным направлениям разные пределы, выбираем первую последовательность Гейне - последовательность точек первого направления, а вторую-второго.

Обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных:

Пример 2. Пример функции, у которой в точке $(0;0)$ не существует предела, однако существуют и равны пределы по всем направлениям.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2 \\ 0 & \text{при } y \neq x^2 \end{cases}$$

Давайте разберемся, что за зверь эта функция и почему этот пример нам подходит.

Для начала, заметим, что, в то время как график функции одной переменной 2мерный, график функции 2 переменных $f(x,y)$ - 3мерный. По оси z отмечены значения функции $f(x,y)$.

Наша функция имеет вид стены высоты 1, которая при этом с точки зрения дятла, пролетающего над ней, имеет вид параболы (дятел с высоты птичьего полета видит только плоскость XY, высоту стены он не видит). При этом во всех остальных точках XY значения $f(x,y) = 0$, то есть во всех остальных точках равнина =).

Обьясним еще одним способом как выглядит график $f(x,y)$: везде 0, кроме точен параболы на плоскости XY. Параболу вырезаем из плоскости XY и поднимаем вверх на 1.

Теперь, когда вы представили, что эта функция за покемон, давайте поймем, что предела у нее при $(x,y) \to (0,0)$ нет. В самом деле, возьмем 2 последовательности Гейне: первая $(x^{(m_1)}, y^{(m_1)}) = (0, 1/m_1) \to (0;0)$ и вторая $(x^{(m_2)}, y^{(m_2)}) = (1/m_2, (1/m_2)^2) \to (0;0)$. Значение f(первой последовательности) $=0$: последовательность к началу координат подходит по земле, значения функции на земле 0. Значение f(второй последовательности) $=1$, т.к. в случае второй последовательности мы сидим на параболе, на которой $f(x,y) = 1$. Соответственно, $\underset{m_1\to\infty}{lim} f(x^{(m_1)}, y^{(m_1)}) = 0$; $\underset{m_2\to\infty}{lim} f(x^{(m_2)}, y^{(m_2)}) = 1$; $0 \neq 1$, значит, предела нет по определению Гейне.

Пределы же по каждому из направлений в точке $(0;0)$ существуют и равны 0, ведь окрестность точки(0;0) проколотая, а значит, значения $f(x,y)$ в некоторой ее окрестности $= 0$ по каждому из направлений $y = kx$.

Пример 3. Пример функции, у которой существуют пределы по всем направлениям, и их значения зависят от направления. Заодно научимся считать пределы по направлениям. То, что у функции не будет обычного предела, следует из того, что пределы по направлениям различны.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}; \quad (x,y) \to (0,0)$$

Направление (это же луч) можно параметризовать следующим простым образом: $y = kx$.

Тогда предел по направлению равен $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$. 0+ значит, что это односторонний предел. Если не написать 0+, то это будет предел уже по прямой, а не по лучу.

Видно, что предел зависит от k, т.е. от направления. При $k = +\infty$ предел придется посчитать отдельно (это случай предела по направлению оси OY):

$\lim\limits_{y\to 0+} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0+} \frac{0\cdot y}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0+} \frac{0}{y^2} = 0$, т.к. ноль умножить на абсолютно любое число, даже бесконечно малое, это ноль!!! (а не неопределенность, это важно!)

Чтобы вы не смущались, зададим направление как луч (параметр $t \geqslant 0$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ kx \end{pmatrix}$$

Утверждение 1 помогает решать сложные с первого взгляда примеры очень быстро:

Пример 4. Посчитать предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin\sqrt[3]{|x|^3+|y|^5}}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}$$

Заметим, что предел этой функции по направлению y = 0 равен 1, а по направлению x=0 равен 0 (убеждаемся в этом банальной подстановкой по очереди x=0 и y=0 в функцию). Значит, предела нет, т.к. пределы по направлениям различны.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$. Повторными пределами функции f в точке $(x_0; y_0)$ называются пределы

$$\lim_{x\to x_0} (\lim_{y\to y_0} f(x,y))$$

$$\lim_{y \to y_0}(\lim_{x \to x_0} f(x,y))$$

Повторные пределы - еще одна конструкция, никак не связанная с обычными пределами. Из существования одних не следует существование других. При этом повторные могут быть равны между собой и даже равны обычному, в общем, как повезет.

Повторные пределы считаются супер просто: сначала внутренний предел считается по одной переменной, считая вторую константой, а потом уже считается внешний предел по второй переменной.

Пример 5. $f(x,y) = \begin{cases} ysin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} ysin\frac{1}{x}) = [\text{во внутреннем пределе х считается константой}] = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} ysin\frac{1}{x}) = [\text{константу у вынесем за знак внутреннего предела}] = \lim_{y \to 0} y(\lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x})$$

Внутреннего предела не существует (доказывается аналогично примеру 1, по Гейне), а значит, не существует и всего повторного предела.

Таким образом, один повторный предел может существовать, а второй - нет.

При этом в данном примере обычный предел существует: покажем с помощью теоремы о милиционерах, что существует и равен 0 предел $|f(x,y)|$:

$$0 \leqslant \lim_{(x,y) \to (0,0)} |ysin\frac{1}{x}| \leqslant \lim_{(x,y) \to (0,0)} |y| = 0$$

Если предел $|f(x,y)|$ равен нулю, то предел $f(x,y)$ также существует и равен 0.

Пример 6. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; $(x,y) \to (0,0)$. Как мы уже заметили ранее, обычного предела у данной функции в нуле не существует. При этом оба повторных равны нулю.

Пример 7. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1+x^2-y^2}{x^2+y^2+1}$-?

Чтобы найти предел, можно попробовать угадать его значение, а потом доказать, что $|f(x,y) - A| \to 0$, то есть что предел в самом деле равен

A. Оба повторных предела легко считаются и равны 1. Отсюда можно сделать вывод, что с некоторой вероятностью этот предел равен 1. Чтобы доказать, что он в самом деле равен 1, докажем, что $|f(x, y) - 1| \to 0$ при $(x, y) \to 0$.

Для доказательства часто используется полярная замена координат: $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$, где $\rho \geqslant 0$ - расстояние от начала координат, а $\varphi \in [0, 2\pi)$ - угол радиус-вектора точки с осью OX. Чтобы доказать существование предела, воспользуемся следующим утверждением, которое будем использовать постоянно в дальнейшем:

Утв. Пусть функция $f(x, y)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0), и существует положительное число ρ_0, такое, что при всех φ и при всех $\rho \in (0; \rho_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - b| \leqslant F(\rho),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0+} F(\rho) = 0$. Тогда двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b$.

$$0 \leqslant |f(x, y) - 1| = |\frac{1 + \rho^2 cos2\varphi}{\rho^2 + 1} - 1| = |\frac{\rho^2 \cdot 2sin^2\varphi}{\rho^2 + 1}| \leqslant \frac{2\rho^2}{\rho^2 + 1} \to 0 \text{ при } \rho \to 0$$

Следовательно, предел в самом деле равен 1, ч.т.д. Здесь и далее под записью $\rho \to 0$ будем подразумевать $\rho \to 0+$.

Очень важное замечание. В примерах такого типа, чтобы доказать, что предел 0, нужно сверху ограничить функцией, зависящей от ρ, не зависящей от φ и стремящейся к нулю (как мы и сделали в этом примере). Если не получается изничтожить зависимость от угла с помощью оценок сверху, то пример считается решенным неверно, махание руками тут не поможет. Часто в случаях, когда никак не избавиться от зависимости от угла, стоит задуматься, а в самом ли деле предел существует и равен этому числу? Быть может, стоит решать по-другому? То есть подбирать разные пределы по направлениям или доказывать по Гейне, что предела нет?

Для тех, кто еще не поверил, что надо сверху ограничивать функцией, зависящей только от ρ и не зависящей от φ, приведем следующий пример:

Пример 8. Исследовать на существование предел:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Докажем, что его не существует:

На последовательности Гейне $(\frac{1}{n};0)$ функция и предел от нее равны 0.

На последовательности $(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2})$ функция и предел от нее равны $\frac{1}{2}$.

Значит, предела нет, чтд. (но мы в этом семестре, как продвинутые юзеры, можем сказать проще: предел по направлению не равен пределу по параболе, значит, обычного предела в точке нет. Без всяких Гейне. (ведь из существования обычного предела следует существование пределов по всем направлениям, да и по всем кривым))

Однако многие решали бы пример так: сделали замену на полярные координаты. Тогда:

$$f(x,y) = \frac{\rho^2 cos^2\varphi \rho sin\varphi}{\rho^4 cos^4\varphi + \rho^2 sin^2\varphi} = \frac{\rho cos^2\varphi sin\varphi}{\rho^2 cos^4\varphi + sin^2\varphi}$$

Потом, не ограничив сверху чем-то, не зависящим от φ (потому что в этой задаче это банально невозможно), многие студенты бы заявили: ну числитель очевидно стремится к нулю при $\rho \to 0$, а знаменатель константа, значит, вся дробь стремится к нулю чтд. Но из-за того, что мы не избавились от φ, это всего лишь значит, что по всем направлениям предел $= 0$. Отсюда еще не следует существование предела. Собака здесь, например, зарыта, что предел по параболе мы не учли, что равен чему-то другому.

Пример 9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sinxy}{x}$-?

Данный пример показывает, что делать в случае, если предел не в начале координат смотрится, а также что можно считать пределы не только с помощью перехода к полярным координатам (хотя преимущественно с помощью него =)).

Чтобы понять, что мы хотим доказывать, чему примерно равен предел, опять же воспользуемся помощью повторного предела:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 2} f(x,y)) = \lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x} = 2$$

Попробуем доказать, что и обычный предел равен 2.

Сделаем замену, т.к. не начало координат: $y = z+2$. Также в выкладках применим неравенство $|sinx| \leqslant |x|$. Тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} |\frac{sinxy}{x} - 2| = \lim_{(x,z)\to(0,0)} |\frac{sin(x(z+2))}{x} - 2|.$$

$$|\frac{sin(x(z+2))}{x}-2| = |\frac{sin(xz)cos(2x)+sin(2x)cos(xz)-2x}{x}| \leqslant$$

$$\leqslant |\frac{sin(xz)cos(2x)}{x}| + |\frac{sin(2x)cos(xz)-2x}{x}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|xz||cos(2x)|}{|x|}| + |\frac{sin(2x)cos(xz)-2x+sin(2x)-sin(2x)}{x}| \leqslant$$

$$\leqslant |z| + 2|\frac{sin(2x)cos(xz)-sin(2x)}{2x}| + 2|\frac{sin(2x)-2x}{2x}|$$

Первое слагаемое очевидно $\to 0$, третье слагаемое $\to 0$, в чем можно убедиться, например, с помощью формулы Тейлора для функции одной переменной. Второе слагаемое:

$$\lim_{(x,z)\to(0,0)} |\frac{sin(2x)cos(xz)-sin(2x)}{2x}| = \lim_{(x,z)\to(0,0)} |\frac{sin(2x)}{2x} \cdot (cos(xz)-1)| = \lim_{(x,z)\to(0,0)} |cos(xz)-1| = 0$$

Таким образом, 2- в самом деле предел $f(x,y)$, ч.т.д.

2 Непрерывность.

Определение непрерывности дается аналогично случаю одной переменной, только с оговоркой, что непрерывность, как и предел, смотрится, вообще говоря, по множеству E.

Определение. Функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \cap E \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$

Точка $x^{(0)}$ в данной случае не обязательно предельная.

Определение'. Пусть $x^{(0)}$ - предельная точка множества E. Функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E, если $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

Это определение более понятно: функция непрерывна в точке, если она имеет предел в этой точке, и он равен значению функции в этой точке. Однако, определение' не охватывает случай, когда $x^{(0)}$ - изолированная точка. Но в изолированных точках все просто: путем внимательного всматривания в не штрихованное определение можно понять, что функция в любой изолированной точке считается непрерывной автоматически.

Вспомним для начала, как исследовать на непрерывность в одномере:

Пример 10. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

исследовать на непрерывность.

Решение:

Во-первых, очевидно, что при всех альфа при всех $x \neq 0$ наша функция непрерывна как композиция непрерывных функций.

Значит нам нужно исследовать поведение функции только в точке 0.

Исследуем на непрерывность в нуле. То есть по определению непрерывности нужно найти альфа, при которых

$$\underset{x \to 0}{lim} f(x) = f(0) = 0$$

.

Очевидно, что при $\alpha > 0$ этот предел равен нулю, т.к. $0 \leqslant \underset{x \to 0}{lim} |f(x)| \leqslant \underset{x \to 0}{lim} |x|^{\alpha} = 0$ при $\alpha > 0$, следовательно, по теореме о двух милиционерах, предел есть и равен нулю.

Теперь осталось доказать отсутствие непрерывности при $\alpha \leqslant 0$, то есть что $\neq \underset{x \to 0}{lim} f(x)$ (ну или что этот предел не равен f(0)). Мы докажем, что его не существует, пользуясь определением предела по Гейне. Нужно доказать, что $\exists x'_n, x''_n$:

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x''_n).$$

Возьмем $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, обе$\to 0$ при $n \to \infty$.

$$sin(x'_n) = 0$$

$$sin(x''_n) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x''_n) = \begin{cases} 1, \alpha = 0 \\ \infty, \alpha < 0 \end{cases}$$

Следовательно, предела нет в нуле по определению Гейне.

Итак, функция непрерывна в нуле при $\alpha > 0$, а в остальных точках при всех α

Пример 11. Исследовать на непрерывность в точке (0,0) функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2y+y^2x}{x^2-xy+y^2} & else \end{cases}$$

Чтобы доказать, что функция непрерывна в нуле, нужно доказать, что в нуле у нее есть предел, и он равен нулю. Будем доказывать существование предела, как и ранее в этом семинаре, с помощью полярной замены координат.

$$|f(x,y)| = |\frac{\rho^3(cos^2\varphi sin\varphi + sin^2\varphi cos\varphi)}{\rho^2(1-cos\varphi sin\varphi)}| = |\rho|\frac{1}{|1-cos\varphi sin\varphi|}(|cos^2\varphi sin\varphi|+|sin^2\varphi cos\varphi|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\rho}{1/2} = 4\rho \to 0(if\ \rho \to 0)$$

Следовательно, функция непрерывна в нуле, ч.т.д.

В переходе, где избавились от φ, в числителе использовали, что $|sinx|$ и $|cosx| \leqslant 1$, а в знаменателе что $\frac{1}{2}sin2\varphi \leqslant 1/2 \Rightarrow |1-sin\varphi cos\varphi| \geqslant 1/2 \Rightarrow \frac{1}{|1-sin\varphi cos\varphi|} \leqslant \frac{1}{2}$

Пример 12. Исследовать функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)/(x^2+y^2) & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1). На непрерывность в точке (0,0) по x.

В данном случае имеется в виду непрерывность по направлению. Отсюда делаем вывод, что функция непрерывна по x в (0,0), если

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \neq f(0,0) = 0$$

Значит, функция не непрерывна по x в точке (0,0).

2) На непрерывность в точке (0,0) по y.

По y непрерывность в (0,0) значит

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = f(0,0)$$

Этот предел равен $-1 \neq 0$, значит, по y тоже нет непрерывности.

3) По кривой $y = \alpha\sqrt{x}$ ($\alpha \neq 0$) в точке (0,0). На этот раз в качестве множества E выступает кривуля $y = \alpha\sqrt{x}$. Непрерывность по этой кривой в нуле значит:

$$\lim_{x\to 0} f(x, \alpha\sqrt{x}) = f(0,0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, \alpha\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 + \alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \alpha}{x + \alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1 \neq 0$$

Значит, f не непрерывна по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$ в точке (0,0).

4) Непрерывна ли? В данном случае нужно считать и сравнивать с нулем не предел по направлению/кривой, а обычный предел. Но если пределы по направлению различны (пункты 1 и 2), то предела не существует, можно даже не считать. Следовательно, данная функция не непрерывна в (0,0).