Математический анализ. Семинар 1

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

10 сентября 2017

1 Семинар 1

Определение 1. *Точка x_0 - точка локального минимума(локального максимума) функции f, если $\exists U(x^{(0)})$, что $\forall x \in U(x^{(0)}) \to f(x^{(0)}) \leq (\geq) f(x)$*

Определение 2. *Точка x_0 - точка строгого локального минимума(строгого локального максимума) функции f, если $\exists U(x^{(0)})$, что $\forall x \in U(x^{(0)}) \to f(x^{(0)}) < (>) f(x)$*

Определение 3. *Точка x_0 - точка экстремума функции f, если это точка минимума или максимума.*

Теорема 1. *Если $x^{(0)}$ - точка экстремума функции f и $\exists \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$*

Определение 4. *x_0 - стационарная точка функции f, если функция f дифференцируема в этой точке и $df(x_0) = 0$*

Теорема 2. *Если x_0 - точка экстремума и функция f в ней дифференцируема, тогда x_0 - стационарная точка.*

Напомним немножко теории про квадратичные формы.

Рассмотрим квадратичную форму:

$$A(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j$$

Квадратичная форма положительно определена, если $\forall \overline{\xi} \neq \overline{0} \Rightarrow A(\xi) > 0$ (вектор $\overline{\xi}$ в качестве координат имеет $\xi_0, ..., \xi_n$)

Отрицательно определена, если <0

Неопределена, если найдутся хотя бы 2 точки, такие, что в одной квадратичная форма >0 (именно больше нуля, а не положительно определена, не путайте), а в другой <0:

$$\exists \xi^{(1)}, \xi^{(2)} : A(\xi^{(1)}) > 0; A(\xi^{(2)}) < 0$$

Бывают квадратичные формы, не являющиеся ни положительно определенными, ни отрицательно определенными, ни неопределенными. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Положительно полуопределенные и отрицательно полуопределенные квадратичные формы также не являются ни положительно определенными, ни отрицательно определенными, ни неопределенными.

Заметим, что второй дифференциал в некоторой точке – это квадратичная форма, где в качестве ξ стоит dx:

$$d^2f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Примечание. Здесь и далее $x^{(0)}$ для простоты записи будем записывать как x_0. При этом надо помнить, что под точкой x_0 может подразумеваться точка в 2-мерном, 3-мерном или n-мерном пространстве любой размерности, то есть точка, имеющая n координат.

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0. Пусть второй дифференциал d^2f функции f в точке x_0 – положительно(отрицательно) определённая квадратичная форма. Тогда x_0 - точка строгого локального минимума (строгого локального максимума) функции f. Если d^2f – неопределенная квадратичная форма, то данная стационарная точка не является точкой экстремума.*

Критерий Сильвестра: Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : \Delta_i > 0$, где Δ_i-главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} \end{vmatrix}$$

$$...$$

Замечание. Для отрицательной определенности необходимо и достаточно, чтобы первый главный диагональный минор был <0, а знаки последующих чередовались.

Рассмотрим случай двух переменных. Квадратичная форма для второго дифференциала будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{Vmatrix}$$

Теорема 4 (Достаточное условие экстремума, случай двух переменных)**.** *Пусть $f(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0. Тогда:*

1. *если в (x_0, y_0) $(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2) > 0$, тогда строгий экстремум*
   $f_{xx} > 0 \to min$
   $f_{xx} < 0 \to max$

2. *если $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) < 0$ - нет экстремума*

3. *если $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) = 0$, то экстремум может как быть, так и не быть. В качестве примера приведено две функции, удовлетворяющие данному условию, у одной из которых есть экстремум, а у другой нет:*
   $f(x, y) = x^4 + y^4$*: (0,0) - строгий min*
   $f(x, y) = x^4 - y^4$ *- нет экстремума*

Замечание. Подумайте, зачем нужна теорема 4, если есть теорема 3. Внимательно прочитайте и обдумайте определение неопределенной квадратичной формы. Оказывается, из теоремы 3 следует только 1й пункт теоремы 4. В конце этого семинара есть еще одно замечание, которое, возможно, прояснит картину.

План исследования на экстремум:

1. Найти первые производные

2. Приравняв первые производные к нулю, найти стационарные точки функции Лагранжа

3. Найти вторые производные

4. Для каждой стационарной точки исследовать $d^2 L(x_0)$ и сделать вывод о наличии экстремума в исследуемой точке

1.1 §5#2(1)

$u = 3(x^2+y^2) - x^3 + 4y \to extr$ (это значит исследовать данную функцию на экстремум)

1. Найдем стационарные точки:

$$\frac{du}{dx} = 6x - 3x^2 = 0; \to x_1 = 0;\ x_2 = 2$$
$$\frac{du}{dy} = 6y + 4 = 0; \quad y = -\frac{2}{3}$$

   Две стационарные точки: $(0, -\frac{2}{3}); (2, -\frac{2}{3})$

2. Найдем второй дифференциал и исследуем его с помощью критерия Сильвестра в каждой из точек по отдельности (пункты а и б)
   $u''_{xx} = 6 - 6x;$
   $u''_{yy} = 6$
   $u''_{xy} = 0$
   $d^2f = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 = (6-6x)dx^2 + 6dy^2$

   (a) $(0; -\frac{2}{3})$
   В этой точке производные: $u_{xx} = 6;$
   $u_{yy} = 6$
   Тогда главные миноры матрицы квадратичной формы второго дифференциала будут равны: $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 36 > 0$ и $u_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow (0; -\frac{2}{3})$ - точка строгого минимума
   $u(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$

   (b) $(2; -\frac{2}{3}) : u_{xx} = -6;$
   $u_{yy} = 6$
   $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = -36 < 0 \Rightarrow$ нет экстремума в этой точке по теореме 4(пункт 2).

Ответ: min: $u(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$

1.2 Еще одна задача

$$u = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4y \to extr$$

1). Найдем стационарные точки:

$$u_x = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 = y$$

$$u_y = -6x + 2y + 4 = 0$$

$$-6x + 2x^2 + 4 = 0$$

Отсюда имеем две стационарные точки: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$.
2)

$$u_{xx} = 12x$$

$$u_{yy} = 2$$

$$u_{xy} = -6$$

Тогда

$$d^2u = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 + 2u_{xy}dxdy = 12xdx^2 + 2dy^2 - 12dxdy$$

а) В точке (2,4):

$$d^2u(2,4) = 24dx^2 - 12dxdy + 2dy^2$$

Этот дифференциал является положительно определенной квадратичной формой, т.к. матрица квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет главные диагональные миноры:
24>0
24*2 - (-6)*(-6) = 48-36 = 12 > 0
Значит, она в самом деле положительно определена по критерию Сильвестра.

Значит, т.к. она положительно определена, точка (2,4) является точкой строгого локального минимума. Значение функции в этой точке: $u(2,4) = 0$

б) В точке (1,1)

$$d^2u = 12dx^2 - 12dxdy + 2dy^2$$

Второй главный минор: $12 * 2 - 36 < 0$, значит, по теореме 4 (пункт 2) экстремума в этой точке нет.

Ответ: $u(2,4) = 0$ - строгий локальный минимум.

Замечание

В целом в пункте б можно грубо сказать, что квадратичная форма неопределена, значит, нет экстремума, то есть сослаться на теорему 3(более общую, для произвольного случая), а не 4. Но это будет не совсем точно: то, что она не определена, надо еще доказать (найти 2 таких точки, что в одной точке она строго больше нуля, а в другой меньше). Неопределенность квадратичной формы нельзя напрямую установить с помощью критерия Сильвестра. Например, мы установим, что она не положительно определена и не отрицательно определена с помощью критерия Сильвестра. Но никто не обещает при этом, что будут точки, в которых она больше нуля и в которых меньше нуля: она может быть полуопределена (т.е. ≥ 0, ≤ 0) или вообще быть тождественным нулем. А если второй дифференциал – тождественный нуль, то экстремум может как быть, так и не быть, что видно в пункте (3) теоремы 4.

1.3 №18(2)

Исследовать на экстремум неявную функцию:
$2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$

1.

$$\frac{\partial}{\partial x} : 4x + 2uu_x + 8yu_x - u_x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 4y + 2uu_y + 8u + 8yu_y - u_y = 0 \tag{2}$$

Т.к. производные u по x и y=0 в стационарной точке, имеем:

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 4y + 8u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2u \end{cases}$$

$$x=0; \quad y=-2u; \tag{3}$$

Получим: $(3) \to (1): \quad 8u^2+u^2-16u^2-u+8=0$
$7u^2+u-8=0$
$u_1=1;\ y_1=-2$ и $u_2=-\frac{8}{7};\ \ y_2=\frac{16}{7}$

2. Исследуем d^2u

$$\frac{\partial}{\partial x}\ (1): 4+2u_x^2+2uu_{xx}+8yu_{xx}-u_{xx}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ (1): 2u_yu_x+2uu_{xy}+8u_x+8yu_{xy}-u_{xy}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ (2): 4+2u_y^2+2uu_{yy}+8u_y+8u_y+8yu_{yy}-u_{yy}=0 \tag{6}$$

3. (a) (4): $4+0+2u_{xx}-16u_{xx}-u_{xx}=0 \Rightarrow u_{xx}=\frac{4}{15}>0$
(5): $2u_{xy}-16u_{xy}-u_{xy}=0 \Rightarrow\ u_{xy}=0$
(6): $4+2u_yy-16u_{yy}-u_{yy}=0 \Rightarrow u_{yy}=\frac{4}{15}>0$
$\Rightarrow d^2u-$ полож. опред. кв. ф. $\Rightarrow$ u(0,-2)=1 - строгий локальный min

(b) $u(0,\frac{16}{7})=-\frac{8}{7}$
$u_{xy}=0;$
$u_{xx}=-\frac{4}{15}<0;$
$u_{yy}<0;$ т.е. d^2u - отрицательно опред. кв. форма и $u(0,\frac{16}{7})=-\frac{8}{7}$ - строгий локальный max

§5 №9. Исследовать на экстремум функцию $u = x^4 + y^4 - 2x^2$.
Решение:

Начнем решать, как обычно. Но в какой-то момент все пойдет не по плану.

1). Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = 4x^3 - 4x = 0 \\ u'_y = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Получаем 3 стационарных точки: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(-1;0)$.

2). Исследуем d^2u в этим точках.

$$u''_{xx} = 12x^2 - 4,$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = 0,$$

$$u''_{yy} = 12y^2.$$

Поскольку во всех трех стационарных точках $y = 0$, подставим вместо y ноль сразу. Тогда d^2u в стационарных точках имеет вид:

$$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 0dxdy + 0dy^2.$$

Это полуопределенная квадратичная форма (в зависимости от конкретной точки либо положительно полуопределенная, либо отрицательно полуопределенная). Значит, достаточное условие тут не применить, кошмар!!! Что же делать? Ну остается только по определению...

Давайте по определению докажем, что $(0,0)$ – не экстремум. $u(0,0) = 0$. Значит, чтобы доказать, что $(0,0)$ – не экстремум, достаточно взять 2 точки в сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$, такие, что в одной из них функция u будет больше нуля, а в другой – меньше. Давайте возьмем точки $(\varepsilon;0)$ и $(0;\varepsilon)$:

$$u(0,\varepsilon) = \varepsilon^4 > 0 = u(0;0),$$

$$u(\varepsilon,0) = \varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 < 0 = u(0;0) \text{ при } |\varepsilon| < \sqrt{2}.$$

Значит, (0;0) – не точка экстремума по определению, ч.т.д.

Аналогично, нужно показать, что остальные 2 точки – точки минимума: возьмите для каждой из точек $(\pm 1; 0)$ функцию в некоторой ее окрестности: $u(\pm 1+\varepsilon_1; 0+\varepsilon_2)$ и покажите, что $u(\pm 1+\varepsilon_1; 0+\varepsilon_2) > u(\pm 1; 0)$. Важно взять ε_1 и ε_2, а не одно эпсилон по каждой из осей, иначе мы исследуем не во всей окрестности, а только по одному из направлений. Короче, доделайте сами, задачка из дз.