Математический анализ. Семинар 2

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

12 сентября 2017

1 Семинар 2

Условный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \in R^n$ заданы функции $f, \phi_1, ...\phi_m \quad (1 \leq m \leq n)$; Уравнениями связи называются:

$$\{\phi_i = 0\}_{i=1}^m \tag{1}$$

$E = \{x, x \in G, \phi_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}$

Определение 1. *Точка $x_0 \in E$ называется точкой условного минимума функции f при связях (1), если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \to f(x_0) \leq f(x)$;*

Теорема 1 (Функция Лагранжа)**.** *x_0 - условная стационарная точка $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m$ такие, что x_0 стационарная точка для*

$$L = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi_j(x) \text{ называемой функцией Лагранжа}$$

где λ_j - множитель Лагранжа.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0) = 0 \\ \phi_j(x_0) = 0; \end{cases}$$

Из этой системы при решении задач находим точки-кандидаты на условный экстремум и λ, соответствующие им: $x_0; \lambda_1 \ldots \lambda_m$

Теорема 2 (Достаточное условие условного экстремума)**.** *Пусть $f, \phi_1, \ldots \phi_m$ дважды непрерывно-дифференцируемой фукнции в некоторой окрестности стационарной точки x_0 функции L. Тогда:*

1. *$d^2L(x_0) > 0$- строгий условный min*
   $d^2L(x_0) < 0$- строгий условный max

2. *$d^2L(x_0)$ - неопределенная кв форма - ничего не можем сказать. В этом случае надо прибегнуть к дифференцированию уравнений связи, выразить дифференциал одних независимых переменных через другие и подставить в d^2L. Полученная таким образом квадратичная форма называется $\widetilde{d^2L}(x_0)$*

3. $\widetilde{d^2L}(x_0) > 0$ - *строгий условный min*
   $\widetilde{d^2L}(x_0) < 0$- *строгий условный max*
   если же $\widetilde{d^2L}(x_0)$ - *неопределенная квадратичная форма, то экстремума нет.*

План исследования на условный экстремум:

1. Составить функцию Лагранжа
2. Найти стационарные точки функции Лагранжа
3. для каждой стационарной точки исследовать $d^2L(x_0)$.
   (a) Если d^2L положительно или отрицательно определенная квадратичная форма, то ответ.
   (b) Если же d^2L неопределенная квадратичная форма, то дифференцируем уравнения связи, в них выражаем dx, dy друг через друга и подставляем в d^2L. Это и будет называться $\widetilde{d^2L}$. Далее уже исследуем его.

1.1 §5#25.5

$u = x - 2y + 2z \to extr$
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (уравнение связи $\phi = 0$).

1. $L = \underbrace{x - 2y + 2z}_{u} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

2. $\begin{cases} \frac{dL}{dx} = 1 + 2\lambda x = 0; \\ \frac{dL}{dy} = -2 + 2\lambda y = 0; \\ \frac{dL}{dz} = 2 + 2\lambda z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{-1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 = 9$
   $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9$
   $\frac{9}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

   (a) $\begin{cases} x = \frac{-1}{2\lambda} = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \to$ Стационарная точка: (-1,2,-2); $\lambda = 1/2$

(b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Стационарная точка: (1,-2,2); $\lambda = -1/2$

(c) Рассмотрим стац. точку (-1,2,-2); $\lambda = \frac{1}{2}$
$L_{xx} = 2\lambda = 1;$
$L_{yy} = 2\lambda = 1;$
$L_{zz} = 2\lambda = 1;$
Смешанные производные $= 0$
$d^2L = dx^2 + dy^2 + dz^2$ - положит. опр. кв. ф. $\Rightarrow$ это точка строгого условного минимума

(d) Рассмотрим стац. точку (1,-2,2); $\lambda = -\frac{1}{2}$
$L_{xx} = 2\lambda = -1;$
$L_{yy} = 2\lambda = -1;$
$L_{zz} = 2\lambda = -1;$
Смешанные производные $= 0$
$d^2L = -dx^2 - dy^2 - dz^2$ - отриц. опр. кв. ф. $\Rightarrow$ это точка строгого условного максимума

Ответ: $U(-1, 2, -2) = -9$ - строгий условный Min,$U(1, -2, 2) = 9$ - строгий условный Max.

1.2 #2

u=xy+yz$\rightarrow$ $extr$ при $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$

1. $L = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$

2. Стационарные точки
$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} = y + 2x\lambda_1 = 0 \\ \frac{dL}{dy} = x + z + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{dL}{dz} = y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$
$x = y = z = 1; \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}; \lambda_2 = -1$ - стационарная точка

3. Найдем d^2L.
   $L_{xx} = 2\lambda_1 = -1;$
   $L_{yy} = 2\lambda_1 = -1;$
   $L_{zz} = 0;$
   $L_{xy} = 1$
   $L_{yz} = 1$
   $L_{xz} = 0$
   $d^2L = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$ - неопределённая кв форма

4. Исследуем $\widetilde{d^2L}$. Продифференцируем уравнение связи.
   $x^2 + y^2 = 2 \to 2xdx + 2ydy = 0$(в стац точке x=y=1)$\Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$
   $y + z = 0 \to dz = -dy$ $\widetilde{d^2L} = -dy^2 - dy^2 - 2dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2$ - отрицательно определённая кв форма.

Ответ: $u(1,1,1) = 2$, строгий условный максимум.

Замечание: Есть еще 3 стационарных точки. Исследуйте в них функцию на условный экстремум самостоятельно. Подсказка: $\lambda_1 = 0.5$ в одной из них.

1.3 Исследовать на условный экстремум:

$$u = 4x + 2y - 6z \to extr$$

При связях:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -4$$

0)
$$L = 4x + 2y - 6z - \lambda(x^2 + y^2 - z^2 + 4)$$

1)
$$L_x = 4 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\lambda}$$

$$L_y = 2 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda}$$

$$L_z = -6 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{\lambda}$$

Подставив это дело в уравнение связи, имеем:

$$\lambda = \pm 1$$

Имеем тогда 2 стационарных точки: (2, 1, 3) - при $\lambda = 1$ и (-2, -1, -3) - при $\lambda = -1$

2).

$$L_{xx} = -2\lambda$$

$$L_{yy} = -2\lambda$$

$$L_{zz} = 2\lambda$$

Все смешанные производные 0.

$$d^2L = -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2$$

При $\lambda = \pm 1$ d^2L неопределенная квадратичная форма.

3) Поэтому будем дифференцировать уравнения связи:

В точке (2, 1, 3):

$$2xdx + 2ydy - 2zdz = 0$$

$$4dx + 2dy - 6dz = 0$$

$$dy = 3dz - 2dx$$

В точке (-2, -1, -3) получается то же самое:

$$dy = 3dz - 2dx$$

4) Подставим продифференцированные уравнения связи в d^2L. Получим:

а) В точке (2, 1, 3) - при $\lambda = 1$:

$$\widetilde{d^2L} = -2dx^2 - 2(3dz - 2dx)^2 + 2dz^2 = -10dx^2 + 24dxdz - 16dz^2$$

Это отрицательно определенная квадратичная форма. Значит, $u(2, 1, 3) = -8$ - условный максимум.

а) В точке (-2, -1, -3) - при $\lambda = -1$:

$$\widetilde{d^2L} = 10dx^2 - 24dxdz + 16dz^2$$

Это положительно определенная квадратичная форма. Значит, $u(-2,-1,-3) = 8$ - условный минимум.

Ответ: $u(2,1,3) = -8$ - условный максимум, $u(-2,-1,-3) = 8$ - условный минимум.

1.4 Исследование на глобальный экстремум

$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Найти глобальный минимум и максимум при условии $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$
Глобальный минимум и максимум, как и в случае функции одной переменной, может быть как внутри области, так и на границе. Поэтому сначала исследуем задачу на безусловный экстремум, таким образом найдя точки экстремума внутри области. (Если при исследовании на безусловный экстремум мы получим стационарную точку, лежащую вне области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$, можем на нее спокойно забить.)

Итак, исследуем на безусловный(обычный) экстремум:

$$u_x = 2x = 0$$

$$u_y = 4y = 0$$

$$u_z = 6z = 0$$

Имеем единственную стационарную точку (0,0,0). Она лежит в нашей области. Очевидно, что это по определению точка локального минимума (дав приращение ε по любой из координат к нулю, получим, например, $u(\varepsilon, -\varepsilon, 0) > u(0,0,0) = 0$).

Она будет первым кандидатом на глобальный минимум.

Кстати, если бы в этой стационарной точке не было бы локального минимума, то она бы нас не интересовала, разумеется.

Теперь будем искать точки на границе, в которых функция может принять наибольшее и наименьшее значения:

Лагранжиан: $L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 100)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda x = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6z + 2\lambda z = 0 \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 100 \tag{5}$$

Выражаем x, y и z через λ и подставляем
$x(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0; or \lambda = -1$
$y(2+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow y = 0; or \lambda = -2$
$z(3+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow z = 0; or \lambda = -3$
Если $x = 0, y = 0 \Rightarrow z = \pm 10$ Имеем стационарные точки $M_{1,2} = (0, 0, \pm 10)$, $M_{3,4} = (0, \pm 10, 0)$ и $M_{5,6} = (\pm 10, 0, 0)$

В них: $u(M_{1,2}) = 100$; $u(M_{3,4}) = 200$; $u(M_{5,6}) = 300$. Сравнивая эти значения и значение функции в стационарной точке внутри области, получаем ответ.

Ответ: глобальный min $u(0, 0, 0) = 0$. Глобальный max $u(0, 0, \pm 10) = 300$