Математический анализ. Семинар 9

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

21 ноября 2017

1 Семинар 9.

1.1 Формула Остроградского- Гаусса

Это способ свести поверхностный интеграл 2 рода к кратному интегралу.

Теорема 1 (Формула Остроградского-Гаусса)**.** *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей δG, ориентированной внешними нормалями. В G задано векторное поле $\bar{a} \in C^1(\overline{G})$($\bar{a}$ непрерывно дифференцируемо на замыкании области G). Тогда:*

$$\iint\limits_{\delta G} (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iiint\limits_{G} div\ \bar{a}\ dxdydz$$

Если поверхность ориентирована не внешними нормалями, то перед интегралом нужно поставить '-'.

1.1.1 №11.47(2)

$\mathbb{J} = \iint\limits_{S} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy; \bar{a} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$
S - внутр. сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

$div\bar{a} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$
по формуле Остроградского-Гаусса. '-' т.к. S ориентирована не внешними нормалями (внутренняя сторона сферы по условию). Переходим к сферическим: $\mathbb{J} = -\iiint\limits_{G} 3(x^2 + y^2 + z^2) dG = -3 \int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\psi\psi \int\limits_{0}^{R} r^2 \cdot r^2 dR = -3 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 = -\frac{12\pi R^5}{5}$

Замечание. Часто студенты применяют формулу Остроградского-гаусса там, где не нужно. Приведем пример, где ее применять нельзя.

Пример.

$$\iint\limits_{S} yzdzdx$$

-?, где S - внешняя сторона части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $z \geq 0$; $a, b, c > 0$

Замена:

$$\begin{cases} x = acos\psi cos\varphi \\ y = bcos\psi sin\varphi \\ z = csin\psi \end{cases}$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]; \psi \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ (т.к. } z \geq 0)$$

Посмотрим на то, совпадает ли знак нормалей, получающихся при такой ориентации, со знаком нормалей, заданным в условии. Вектор нормали:

$$\vec{N} = \vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\psi = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{pmatrix}$$

Его проекция на ось OZ:

$$N_z = x'_\varphi y'_\psi - x'_\psi y'_\varphi = acos\psi sin\varphi bsin\psi sin\varphi + absin\psi cos\varphi cos\psi cos\varphi$$

Посчитаем при $\psi = \pi/4, \varphi = \pi/4$:

$$N_z = ab((\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^4) = \frac{ab}{2} > 0$$

По условию нормали внешние. Значит, проекция на OZ в верхней полуплоскости должна быть >0. И мы при нашей параметризации получили >0. Ура, совпало! Значит, когда будем считать интеграл, знак менять не надо будет. Таким образом, по формуле для подсчета поверхностного интеграла 2 рода через смешанное произведение имеем:

$$I = +\iint\limits_S \begin{vmatrix} 0 & bcsin\psi cos\psi sin\varphi & 0 \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{vmatrix} d\varphi d\psi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} bcsin\psi cos\psi sin\varphi acos\psi sin\varphi ccos\psi d\psi d\varphi =$$

$$= -abc^2 \int\limits_0^{\pi/2} cos^3\psi dcos\psi \int\limits_0^{2\pi} sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi abc^2}{4}$$

Как вы уже поняли, поверхностные интегралы 2го рода проще считать по формуле Остроградского-Гаусса. Давайте ее применим.

Способ 2. Неверный. Решим по формуле О.-Г.

$$div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z.$$

$$\iint\limits_S yzdzdx = \iiint\limits_G zdxdydz$$

Здесь G - то, что ограничивает наша полусфера, то есть верхний полушар =)

$$\begin{cases} x = arcos\varphi cos\psi \\ y = brsin\varphi cos\psi \\ z = crsin\psi \end{cases}$$

$r \in [0;1], \varphi \in [0;2\pi]; \psi \in [0;\pi/2]$ (т.к. $z \geq 0$, то есть полушар). Якобиан $J = abcr^2cos\psi$

$$\iiint\limits_G zdxdydz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} crsin\psi abcr^2cos\psi d\psi d\varphi dr =$$

$$= 2\pi abc^2 \int\limits_0^1 r^3dr \int\limits_0^{\pi/2} \frac{sin2\psi}{2}d\psi = 2\pi abc^2\frac{1}{4}\frac{1}{4}(-cos2\psi)|_0^{pi/2} = \frac{\pi abc^2}{4}$$

И предыдущим способом получили $\frac{\pi abc^2}{4}$. Но этот способ неверный, так делать нельзя. Дело в том, что мы проинтегрировали тут, воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса, по всей границе верхней полусферы, в том числе и по ее нижней крышке, а по ней интегрировать не надо. Ответ правда получился верный, потому что интеграл по нижней крышке равен 0, потому что под интегралом стоит yz, а $z = 0$ на нижней крышке. Запомните и никогда так не делайте, это распространенная ошибка. Формулу О-Г применяем, только если наша поверхность полностью ограничивает какую-то область, то есть если наша поверхность образно говоря замкнута.

1.2 Формула Стокса

Сведение криволин. интеграла II рода к пов. интегралу II рода

Теорема 2 (Формула Стокса). *γ - плоский замкнутый кусочно гладкий контур. S - кусочно гладкая поверхность, натянутая на γ. $\bar{a}$ - непрерывно дифференцируема в окрестности S. Ориентации γ и S согласованы по правилу буравчика(вкручивать-по часовой стрелке. Вкручиваем буравчик по направлению ориентации γ. Если направление нормалей к поверхности совпадает с направлением буравчика, то все согласовано). Тогда справедлива формула Стокса:*

$$\oint\limits_{\gamma}(\bar{a}, d\bar{r}) = \iint\limits_{S}(rot\bar{a}, \bar{n})dS$$

1.2.1 №11.63

Найти $\oint_L ydx + zdy + xdz -?$. Где $L : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ориент. положит. относительно $\bar{k}=(0,0,1)$. (имеется в виду, что ориентация поверхности и ее края уже согласованы)
Заметим, что L это пересечение сферы и плоскости т.е. окружность.

Проверим, в нужную ли сторону смотрят нормали к поверхности: $\bar{N}=(1,1,1)$; $\bar{n}=\frac{\bar{N}}{\bar{N}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; Ориентация нормальная т.к. $(\bar{n},\bar{k})>0$, значит, знака менять не нужно.

Векторное поле, как видим из условия, равно: $\vec{a}=(y;z;x)$

$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = [\bar{\nabla}\times\bar{a}] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\oint_\gamma(\bar{n}, d\bar{r}) = \iint\limits_S(rot\bar{a},\bar{n})dS = -\sqrt{3}\iint_S dS = -\sqrt{3}\pi R^2$

1.2.2 №11.65(2)

$\oint\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$-?

Где L - эллипс:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \end{cases}$$

Причем также известно, что a>0, c>0, а также, что эллипс ориентирован отрицательно относительно $\bar{i} = (1, 0, 0)$

Решение:

Вектор нормали к нашему эллипсу: $\bar{N} = (\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{c})$;
Модуль вектора нормали: $|\bar{N}| = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$
Тогда единичный вектор нормали $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = (\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}})$
$(\bar{n}, \bar{i}) = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} > 0$, то есть проекция вектора нормали на единичный вектор, сонаправленный с осью OX, >0, а должна быть по условию меньше нуля, поэтому нужен знак -. Чтобы потом не путаться, сразу изменим знак $\bar{n}$: $\bar{n} = (-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}})$.

$\bar{a} = (y - x, z - x, x - y)$

$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (-2, -2, -2)$

По формуле Стокса:

$$\mathbb{J} = \iint\limits_S (rot\bar{a}, \bar{n}) dS = \iint\limits_S \frac{2(a+c)}{\sqrt{a^2+c^2}} dS = \frac{2(a+c)}{\sqrt{a^2+c^2}} S_{\text{эллипса}} = \frac{2(a+c)}{\sqrt{a^2+c^2}} \pi a \sqrt{a^2+c^2} = 2\pi a(a+c)$$

(В том, что большая полуось равна $\sqrt{a^2+c^2}$ можете убедиться сами)

2 Потенциальные и соленоидальные поля.

Потенциальное поле Векторное поле $\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$, заданное на области $G \subset R^3$, называется потенциальным в области G, если существует непрерывно дифференцируемая функция U: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$; $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Ну то есть $\vec{a} = gradU$ Эту функцию U называют потенциалом поля $\vec{a}$

Теорема. Пусть векторное поле $\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ непрерывно в области G. Тогда:

$\vec{a}-$ потенциально $\Leftrightarrow \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$(равна нулю циркуляция по любому замкнутому кусочно гладкому контуру) $\Leftrightarrow \int\limits_{AB} (\vec{a}, d\vec{r})$ не зависит от траектории, а только от начальной и конечной точек A и B (AB - просто некоторая кривая, соединяющая точки A и B)

Теорема. Пусть векторное поле $\vec{a}$ - непрерывно дифференцируемо в области G. Тогда:

1. $\vec{a}$ - потенциально $\Rightarrow rot\vec{a} = \vec{0}$
2. Если область G поверхностно односвязна и $rot\vec{a} = \vec{0}$, то поле в ней потенциально

Пара слов про односвязность

- Область G поверхностно односвязна в 2d, если она без дыр. То есть если некоторый контур ∂D лежит в G, то и то, что он ограничивает, D лежит в G
- Поверхностно односвязная область в 3d: если на любой контур из нее можно натянуть поверхность, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса.
- Объемная односвязность (бывает только в 3d): если 3d область G без дыр, т.е. если некоторая поверхность ∂D лежит в G, то и то, что она ограничивает, D лежит в G

Соленоидальное поле. Поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, если $div\vec{a} = 0$.

Теорема. Поле $\vec{a}$ соленоидально в области $G \Leftrightarrow$ равен нулю поток в направлении внешней нормали через границу произвольной области $D \subset G$, такой, что D удовлетворяет условиям теоремы Остроградского-Гаусса.

Замечание. То, какие поверхности, контура и области удовлетворяют теоремам Стокса и Остроградского-Гаусса советую внимательно в лекциях посмотреть (в Бесове, например). В этих конспектах я целиком не все сформулировал, там длинные формулировки и рассуждения про всякие там гладкие куски поверхности и тд.

Пример. Пусть непрерывно дифференцируемое поле $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям $div\vec{F} = 0$ и $rot\vec{F} = \vec{0}$. Доказать, что поле $\vec{F}$ - потенциально и что его потенциал U - решение уравнения Лапласа $\Delta U = 0$.

$\mathbb{R}^3$ - поверхностно односвязна; $rot\vec{F} = \vec{0}$, значит, по одной из теорем выше поле $\vec{F}$ - потенциально. Значит, по определению, $\exists U : \ \vec{F} = gradU$. Известно из условия, что $div\vec{F} = 0$. Значит, $divgradU = 0$. Но $divgrad = \Delta$. Ч.т.д.