Математический анализ. Семинар 4

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

3 марта 2022 г.

1 Семинар 4

1.1 Кратные интегралы

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Определение 1. *Пусть на измеримом по Жордану множестве* $X \subset R^n$ *определена функция f;* $\tau = \tau(x) = \{X_i, i = \overline{1,N}\}$ *- разбиение X.* $\theta_\tau = \xi^{(i)}, i = \overline{1,N}$ *- произвольный набор точек, причем* $\xi^{(i)} \in X_i$ $i = \overline{1,N}$ *Тогда* $\sigma_\tau(f, \theta_\tau) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)\mu(X_i)$ *-называется интегральной суммой Римана f по X*

Определение 2. *I называется интегралом Римана от f по x, если*

$$\forall\varepsilon \;\; \exists\delta \;\; : \forall\tau(x) : \;\; |\tau| < \delta, \;\; \forall\theta_\tau \;\; \Rightarrow \;\; |I - \sigma_\tau(f, \theta_\tau)| < \epsilon$$

Определение 3 (Элементарная область относительно оси)**.** *Множество* $X : \{(x, y), \quad a \le x \le b, \quad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ *- элементарно относительно* OY

Если f - интегрируема на множестве X, элементарном относительно OY, то

$$\iint_X f(x, y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy$$

Если f - интегрируема на множестве X, элементарном относительно OX (определение множества, элементарного относительно оси X, дается аналогично), то

$$\iint_X f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

1.2 №1

Представить кратный интеграл в виде повторных 2 способами.

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy,$$

где G - область, ограниченная $y = 2x^2$ и $x + y = 1$ (Рис.1).

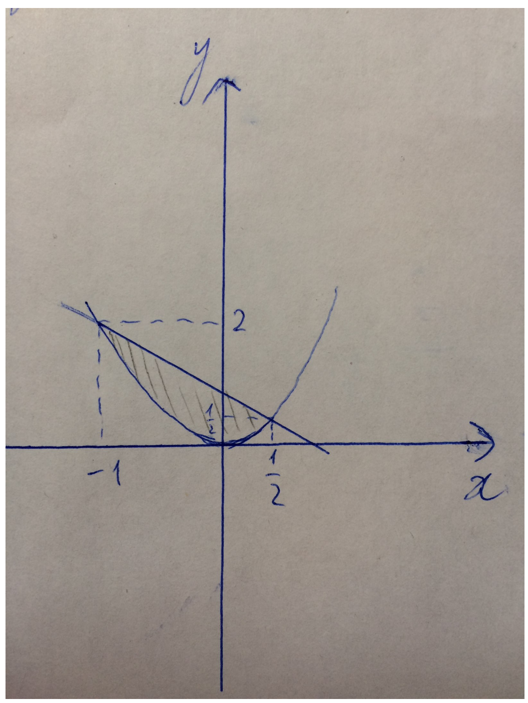

Рис. 1: Задача №1

f - любая функция. Нам нужен был бы ее конкретный вид, если бы было задание посчитать интеграл. Сведём кратный интеграл к повторному двумя способами:

Заметим, что относительно OY эта область элементарная. Найдём точки пересечения кривых, ограничивающих область: $(0,5; 0,5)$ и$(-1; 2)$

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0,5} dx \int_{2x^2}^{1-x} f(x,y)dy$$

Вторым способом. Возьмём две области, элементарные относительно OX (y от 0 до 0.5 в первой области и от 0.5 до 2 во второй).

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_0^{0,5} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx + \int_{0,5}^{2} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Пример решен. Теперь в качестве его продолжения посмотрим, как считать повторный интеграл с известной функцией и пределами интегрирования. В качестве функции возьмем $f(x,y) = xy^2$.

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0,5} dx \int_{2x^2}^{1-x} xy^2 dy = \int_{-1}^{0,5} xdx \int_{2x^2}^{1-x} y^2 dy = \int_{-1}^{0,5} x \left(\frac{1}{3}(y)^3\right)\Bigg|_{2x^2}^{1-x} dx = \int_{-1}^{0,5} \frac{1}{3}x\left((1-x)^3 - 8x^6\right)dx \quad (1)$$

Ну а такой определенный интеграл мы уже научились считать на 1 курсе, досчитайте сами при желании.

1.3 №2

Посчитаем повторный интеграл

$$\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Заметим, что внутренний интеграл - неберущийся. Но если мы поменяем порядок интегрирования, все возьмется. Для этого изобразим для начала область, по которой интегрируем (Рис.2).

Поменяем порядок интегрирования:

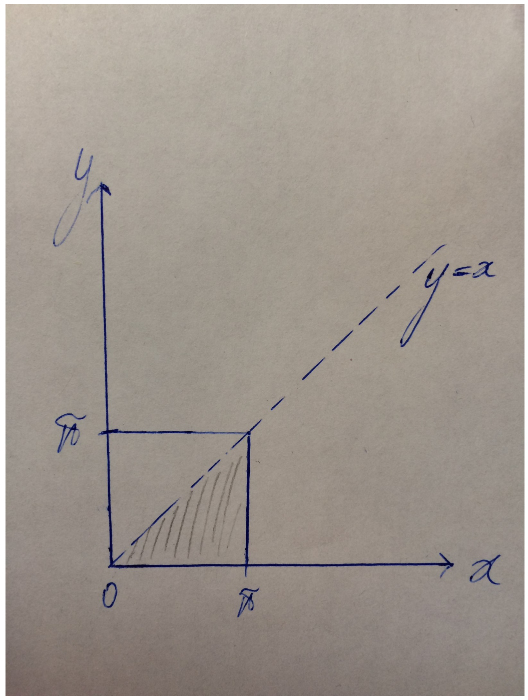

Рис. 2: Задача №2

$$\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy =$$
$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} x dx =$$
$$= \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 1 + 1 = 2 \quad (2)$$

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$, где G ограничена прямыми $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$ (рис. 3).

Решение: Данная область является элементарной относительно оси OY. А пределы интегрирования за нас уже расставлены по сути в условии. Внешний интеграл будет по x, от 2 до 3, а внутренний по y, от $2x$ до $3x$.

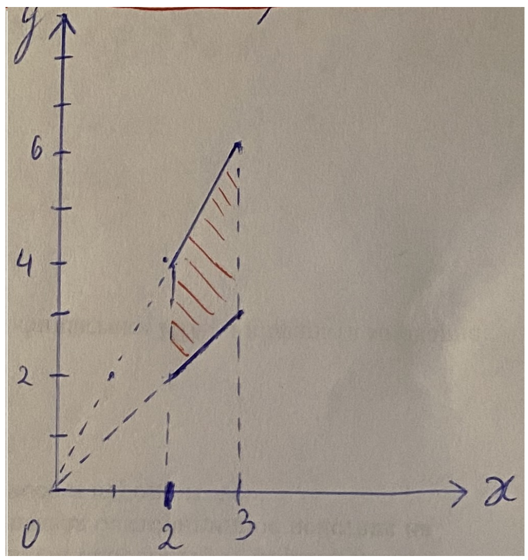

Рис. 3: Кратный интеграл

$$\iint\limits_G (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy = \int\limits_2^3 xdx \int\limits_x^{2x} dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} dy =$$

$$= \int\limits_2^3 xdx + \int\limits_2^3 3x^2dx = \int\limits_2^3 4x^2dx = 4(3^3-2^3)/3 = 28.$$

1.4 Тройные интегралы

Определение. Множество $G = \{x = (x_1, ..., x_n) = (x', x_n) : x' \in X', \quad \varphi(x') \leq x_n \leq \psi(x')\}$, где $X' \subset \mathbb{R}^{n-1}$-измеримое замкнутое множество, а функции φ, ψ - непрерывны на X', называется элементарным относительно оси OX_n множеством.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на элементарном относительно оси OX_n множестве G. Тогда

$$\int\limits_G f(x)dx = \int\limits_{X'} \int\limits_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_n)dx_n dx'$$

Т.е. в 3-мере, если область G элементарна относительно OZ:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{X'} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

В качестве X' выступает проекция области G на плоскость XY. Это проиллюстрировано на рис. 4. Область G заключена между поверхностями, заданными функциями двух переменных $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.

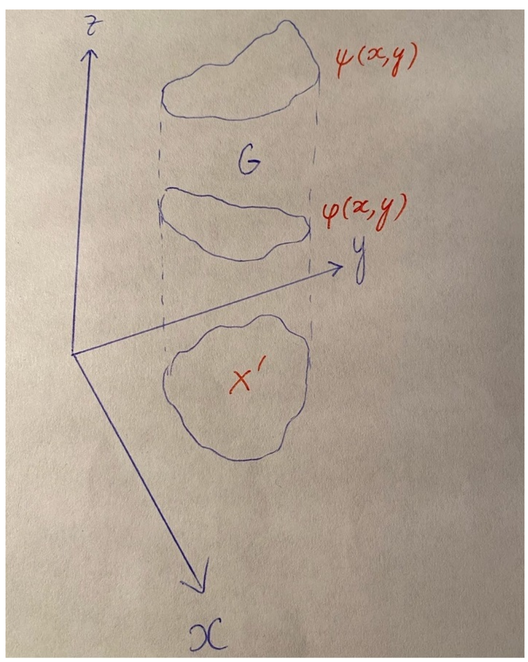

Рис. 4: Переход от кратного интеграла к повторному в 3-мерном случае.

1.5 §8 №139(1)

$\iiint\limits_G y dx dy dz$ где G - область, ограниченная плоскостями: $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ 2x + y + z = 4$ (рис. 5).

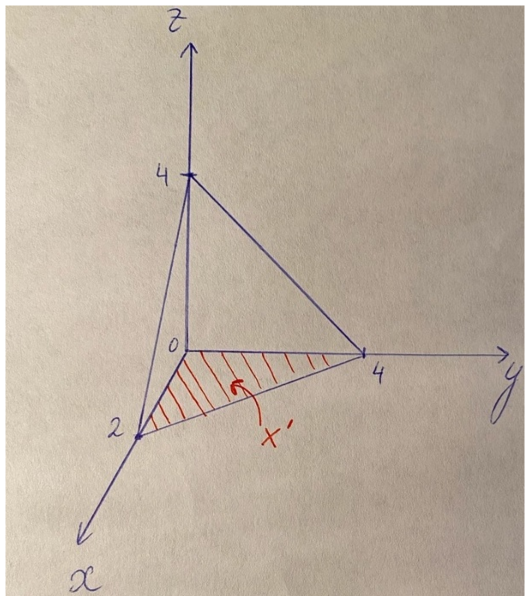

Рис. 5: Трехмерный интеграл

$$\iiint\limits_G ydxdydz = \iint\limits_{X'} dxdy \int_0^{4-2x-y} ydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-2x-y} ydz =$$

$$\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (4y - 2xy - y^2)dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} 4ydy - \int_0^2 2xdx \int_0^{4-2x} ydy - \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} y^2 dy =$$

$$= \int_0^2 2(4-2x)^2 dx - \int_0^2 x(4-2x)^2 dx - \frac{1}{3}\int_0^2 (4-2x)^3 dx =$$

$$= \int_0^2 (32-32x+8x^2)dx - \int_0^2 (16x-16x^2+4x^3)dx - \frac{1}{3}\int_0^2 (64-96x+48x^2-8x^3)dx =$$

$$= \cdots = \frac{16}{3}$$