Семинар 6 часть 1. Несобственные интегралы. Знакопостоянные несобственные интегралы.

Скубачевский Антон

9 апреля 2023 г.

Определение. Несобственный интеграл. Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману $\forall [a, b'] \subset [a, b)$. $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом по полуинтервалу $[a, b)$ с особенностью на верхнем пределе. Аналогично дается определение несобственного интеграла с особенностью на нижнем пределе. Несобственный интеграл называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)dx$. Если несобственный интеграл не сходится, его называют расходящимся.

Особенность на каком-то из пределах интегрирования - значит бяка: например, ноль в знаменателе подынтегральной функции при иксе равном пределу интегрирования. Или если предел интегрирования равен бесконечности - на бесконечности всегда особенность, на то она и бесконечность.

В задачах на несобственные интегралы нам чаще всего не нужно будет их считать, нам нужно будет исследовать их на сходимость, то есть понять, а существует ли и конечен такой интеграл. Если доказать, что он существует и конечен, то можно вообще написать программу, которая численно считает его на компе (сумма маленьких прямоугольничков - площадь под графиком, из определения интеграла Римана, чем меньше мелкость разбиение, тем меньше численно посчитанный интеграл отличается от истинного значения интеграла).

Исследовать на сходимость несобственные интегралы мы будем, сводя их к более простым, так называемым шаблонным. Например, шаблон

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Давайте докажем, что этот шаблон верный. Перед нами интеграл с особенностью только на верхнем пределе. Будем исследовать этот интеграл по определению. При $\alpha = 1$ этот интеграл равен логарифму, а логарифм бесконечности равен бесконечности, значит, при $\alpha = 1$ интеграл расходится. При $\alpha \neq 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_1^{x} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha+1} |_1^{+\infty} = \begin{cases} -\frac{1}{-\alpha+1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

То есть интеграл равен конечному числу при $\alpha > 1$, иначе бесконечности. То есть сходится при $\alpha > 1$, иначе расходится. Ч.т.д.

Также аналогичные шаблоны (ну и этот тоже сюда напишем, чтобы все были в одном месте):

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha < -1$
3. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha < 1$
4. $\int\limits_0^{1} x^\alpha dx$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > -1$

У последних двух интегралов особенность на нижнем пределе.

Будем в начале рассматривать знакопостоянные интегралы, то есть те, у которых подынтегральная функция либо всегда > 0, либо всегда < 0.

Для исследования таких интегралов с помощью шаблонных нам понадобятся 2 признака сравнения:

Теорема(Первый признак сравнения). Пусть f, g интегрируемы $\forall [a, b'] \subset [a, b)$; $0 \leq f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда если $\int\limits_a^b g(x) dx$ сходится, то и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. А если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

Этот признак сравнения легко запомнить: если больший интеграл сходится, то и меньший сходится (если больший - конечное число, то и меньший конечное число); если меньший расходится, то и больший расходится (если меньший интеграл - не конечное число, то больший - тем более). И это работает ТОЛЬКО для знакопостоянных интегралов.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos^2x}{x^2}dx$.

Это интеграл с особенностью только на верхнем пределе.

$\frac{cos^2x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ сходится по шаблону (1). Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos^2x}{x^2}dx$ тоже сходится по признаку сравнения.

Теорема(Второй признак сравнения). Пусть f, g - интегрируемы $\forall [a, b'] \subset [a, b)$; $f > 0; g > 0$ на $[a, b)$; $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0; k \in \mathbb{R}$, т.е. $k-$ конечное число, не равное нулю. Тогда интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если особенность не на верхнем, а на нижнем пределе, то смотрим, соответственно, предел при $x \to a+0$.

Пример 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1-x}{x^3}dx$

Тут у интеграла особенность в нуле (на нижнем пределе интегрирования). Поэтому нас будет интересовать предел $\lim\limits_{x \to 0+0}$.

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{e^x - 1 - x}{x^3} = [Teilor] = \lim_{x \to 0+0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x}{x^3} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{2x}$$

Эта последовательность выкладок, в силу второго признака сравнения, означает, что интегралы от функций под пределами сходятся или расходятся одновременно, то есть "эквивалентны в плане сходимости". Эквивалентность в плане сходимости записывается так: $\underset{\text{сх.}}{\sim}$. Также очевидно, что умножение подынтегральной функции на константу никак не влияет на сходимость: если интеграл был конечным числом до умножения на константу, то останется конечным числом после умножения на константу. Итак, мы можем записать:

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x-1-x}{x^3}dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}{x^3}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2x}dx \underset{\text{сх.}}{\sim}$$

$$\underset{\text{сх.}}{\sim} [\text{ т.к. константа не влияет на сходимость несобственного интеграла}] \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$ расходится по шаблону (4), следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1-x}{x^3}dx$ тоже расходится по второму признаку сравнения. Строчку про пределы, кстати, вообще писать не надо при решении таких задач. Значка $\underset{\text{сх.}}{\sim}$ вполне хватит.

Важное замечание. Похожий значок мы можем ставить также не между интегралами, а между функциями, т.е. мы можем написать $\frac{e^x-1-x}{x^3} \sim \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}{x^3}$ при $x \to 0$ (сх. мы над значком намеренно не написали). Но значить он будет совершенно другое:

Определение. Функции f и g называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to a$ (записывается $f \sim g$ при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (при $g(x) \neq 0$). Тут существенно, что мы рассматриваем именно в окрестности некоторой точки.

Итак, имеем 2 значка: $\sim$ - ставится между двумя функциями, значит, что они асимптотически равны в окрестности определенной точки. $\underset{\text{сх.}}{\sim}$ - ставится между двумя несобственными интегралами. Значит, что они сходятся или расходятся одновременно.

Переформулируем второй признак сравнения в терминах $\sim$:

Теорема(Второй признак сравнения'). Если $\forall x \in [a, b)$ выполнено $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_a^b g(x)dx$

Конец важного замечания

Пример 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2+x^3}{sinx}dx$

Помимо разложения по формуле Тейлора в таких задачах можно также забивать на что-то малое по сравнению с соседом. Например, при $x \to 0$ x^3 бесконечно мал по сравнению с x^2, поэтому на него мы можем забить. Особенность у этого интеграла на нижнем пределе, поэтому мы будем колдовать с функциями в окрестности нуля.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2+x^3}{sinx}dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{x^2}{sinx}dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x}dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 xdx$$

$\int\limits_0^1 xdx$ сходится как шаблонный, следовательно, $\int\limits_0^1 \frac{x^2+x^3}{sinx}dx$ сходится по второму признаку сравнения.

Приведем еще один шаблонный интеграл и исследуем его на сходимость, сведя к уже известным шаблонным:

Пример 4. (Важный шаблон) Исследовать на сходимость при всех значениях α, β интеграл $\int\limits_2^{+\infty} x^{\alpha}ln^{\beta}xdx$

Рассмотрим три разных случая относительно α.

а). $\alpha < -1$. Очевидно, что $x^{\alpha} = x^{\frac{\alpha+1}{2}}x^{\frac{\alpha-1}{2}}$. В выкладках ниже учтем, что $x^{\frac{\alpha+1}{2}}ln^{\beta}x \to 0$ при $x \to +\infty; \alpha < -1$. Это значит, в частности, что эта функция ограничена, начиная с некоторого x_0: $\exists C \in \mathbb{R} : x^{\frac{\alpha+1}{2}}ln^{\beta}x \leq C$. Имеем:

$$\int\limits_2^{+\infty} x^{\alpha}ln^{\beta}xdx = \int\limits_2^{x_0} x^{\alpha}ln^{\beta}xdx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\alpha}ln^{\beta}xdx$$

Представили наш интеграл в виде суммы двух. Первый из них - обычный интеграл Римана без особенностей, равный площади под графиком, некоторой конечной величине, то есть он сходится. Исследуем второй. Если он тоже сходится, то и исходный сходится как сумма двух сходящихся.

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\alpha}ln^{\beta}xdx = \int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}}(x^{\frac{\alpha+1}{2}}ln^{\beta}x)dx \leq C\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx$$

$\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}}dx$ шаблонный. Он сходится $\Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{2} < -1 \Rightarrow \alpha < -1$. Значит, интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^\alpha ln^\beta x dx$ сходится при $\alpha < -1$ $\forall\beta$ по признаку сравнения. Значит и исходный сходится при $\alpha < -1$ $\forall\beta$ как сумма двух сходящихся.

б). $\alpha = -1$.

$$\int\limits_{2}^{+\infty} x^{-1} ln^\beta x dx = [lnx = t] = \int\limits_{ln2}^{+\infty} t^\beta dt$$

Получили шаблонный интеграл, сходящийся $\Leftrightarrow \beta < -1$.

Значит, при $\alpha = -1$ наш интеграл сходится при $\beta < -1$.

в). $\alpha > -1$.

Очевидно, что $x^\alpha = x^{\frac{\alpha+1}{2}} x^{\frac{\alpha-1}{2}}$. В выкладках ниже учтем, что $x^{\frac{\alpha+1}{2}} ln^\beta x \to +\infty$ при $x \to +\infty; \alpha > -1$. Это значит, в частности, что эта функция начиная с некоторого x_0, больше некоторой константы: $\exists C \in \mathbb{R}$: $x^{\frac{\alpha+1}{2}} ln^\beta x \geq C$. Имеем:

$$\int\limits_{2}^{+\infty} x^\alpha ln^\beta x dx = \int\limits_{2}^{x_0} x^\alpha ln^\beta x dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} x^\alpha ln^\beta x dx$$

Представили наш интеграл в виде суммы двух. Первый из них - обычный интеграл Римана без особенностей, равный площади под графиком, некоторой конечной величине, то есть он сходится. Исследуем второй. Если он расходится, то и исходный расходится как сумма сходящегося и расходящегося (константа + бесконечность = бесконечность).

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^\alpha ln^\beta x dx = \int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}} (x^{\frac{\alpha+1}{2}} ln^\beta x) dx \geq C \int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}} dx$$

Интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}} dx$ расходится как шаблонный при $\alpha > -1$. Значит, $\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^\alpha ln^\beta x dx$ расходится по признаку сравнения. Значит, исходный расходится как сумма сходящегося и расходящегося, причем при любом значении β.

Ответ: при $\alpha < -1$ сходится $\forall\beta$. при $\alpha = -1$ сходится $\Leftrightarrow \beta < -1$. при $\alpha > -1$ расходится $\forall\beta$.

Запомните этот интеграл также как шаблонный.

Замечание. До сих пор мы работали с интегралами с одной особенностью. А что, если особенность и на верхнем, и на нижнем пределах??? Ну тогда определение сходимости интеграла с 2 особенностями $\int\limits_a^b f(x)dx$ следующее: возьмем точку $c \in (a, b)$, в которой нет особенности. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ сходятся ОБА интеграла $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$. Если хотя бы один из них расходится, или даже оба расходятся, значит, $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Замечание. ТУТ ВСЕ, ВКЛЮЧАЯ МЕНЯ, ПО НАЧАЛУ ЧАСТО ПУТАЮТСЯ! Мы в замечании выше поняли, как у несобственного интеграла обстоят дела с "аля аддитивностью". А теперь пусть у нас опять несобственный интеграл с особенностью ТОЛЬКО на верхнем пределе $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся, то он сходится. Если один из $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится, а второй сходится, то $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$ расходится. А вот если $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходятся оба, то $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$ может как сходиться, так и расходиться!!! Для примера достаточно взять $f = g = 1/x$. Тогда каждый из интегралов $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ расходится, и $\int\limits_1^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ расходится при этом. А теперь давайте возьмем $f = 1/x$, $g = -1/x$. Тогда $f + g = 0$, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$ расходятся, а $\int\limits_1^{+\infty} (f(x)+g(x))dx = \int\limits_1^{+\infty} (0)dx$ сходится.

Пример 5. Найти все $\alpha \geq 0$, при которых интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}dx$ сходится.

Этот интеграл имеет две особенности: в нуле и в $+\infty$. Мы не умеем пользоваться признаком сравнения в случае наличия двух особенностей. Поэтому разобьем его на два, каждый из которых имеет только одну особенность, и исследуем по-отдельности.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}dx =: I_1 + I_2$$

1). Рассмотрим I_1.

Если интеграл жирный и сложный, я советую числитель и знаменатель сначала по-отдельности причесать с помощью значков $\sim$, а уже потом подставлять в интеграл. Мб даже по кускам разбивать числитель и знаменатель.

При $x \to 0$:

- $(1+x^3+x^\alpha)^{1/2} - 1 \sim 1 + \frac{x^3+x^\alpha}{2} - 1 = \frac{x^3+x^\alpha}{2}$
- $\frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3} \sim \frac{1}{2}\frac{x^3+x^\alpha}{x^3} \sim \frac{1}{2}(1+x^{\alpha-3})$

Имеем (на 1/2 забьем: константа не влияет на сходиомсть):

$$I_1 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 (1+x^{\alpha-3})dx = \int_0^1 1dx + \int_0^1 x^{\alpha-3}dx = 1 + \int_0^1 x^{\alpha-3}dx \underset{\text{сх.}}{\sim} \int_0^1 x^{\alpha-3}dx$$

$\int_0^1 x^{\alpha-3}dx$ - шаблонный. Он сходится $\Leftrightarrow \alpha - 3 > -1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. Значит, I_1 сходится $\Leftrightarrow \alpha > 2$ по признаку сравнения.

2). Рассмотрим I_2:

При $x \to +\infty$:

- $1 + x^3 + x^\alpha \sim x^3 + x^\alpha$, т.к. 1 - константа, малая по сравнению со стоящими рядом стремящимися к бесконечности функциями.
- $x^3 + x^\alpha \sim x^\beta$, где $\beta = max(3, \alpha)$ - т.к. x в меньшей степени бесконечно мал по сравнению с иксом в большей степени.
- Значит, $\sqrt{1+x^3+x^\alpha} - 1 \sim x^{\beta/2} - 1 \sim x^{\beta/2}$

Имеем:

$$I_2 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{\beta/2}}{x^3}dx = \int\limits_1^{+\infty} x^{\beta/2-3}dx$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{\beta/2-3}dx$ сходится как шаблонный $\Leftrightarrow \beta/2 - 3 < -1 \Leftrightarrow \beta < 4$. Значит, т.к. $\beta = max(3, \alpha)$, получаем $\alpha < 4$. Значит, I_2 сходится $\Leftrightarrow \alpha < 4$ по признаку сравнения.

3). При $\alpha \in (2, 4)$ наш интеграл $I = I_1 + I_2$ сходится, т.к. сходятся одновременно I_1 и I_2.

Ответ: I сходится $\Leftrightarrow \alpha \in (2, 4)$

Еще один шаблон $\int\limits_1^{+\infty} e^{\alpha x} x^\beta dx$ сходится при $\alpha < 0 \forall \beta$; сходится при $\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta < -1$; расходится при $\alpha > 0$. Что логично: как только степень экспоненты хоть немного отрицательно, весь интеграл с поросячьим визгом убывает к нулю (e^{-x} супер быстро стремится к 0, быстрее степенной функции), вне зависимости от степенной функции, на которую домножена. Если $\alpha = 0$, то экспонента пропадает, и все зависит от степенной функции, а если $\alpha > 0$, то экспонента очень сильно возрастает, и интеграл никак не может сойтись.

Пример 6. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра α: $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln^\alpha(1+shx)}{chx-cosx}dx$

У нас опять же 2 особенности: в нуле (т.к. при $x = 0$ знаменатель $= 0$) и в бесконечности (на то она и бесконечность, в ней всегда особенность). По классике разобьем наш интеграл на 2, в каждом из которых по одной особенности:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln^\alpha(1+shx)}{chx-cosx}dx = \int\limits_0^{1} \frac{ln^\alpha(1+shx)}{chx-cosx}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{ln^\alpha(1+shx)}{chx-cosx}dx =: I_1 + I_2$$

1). Исследуем I_1:

при $x \to 0$:

- $shx \sim x$
- $ln^\alpha(1+shx) \sim ln^\alpha(1+x) \sim x^\alpha$
- $chx \sim 1 + \frac{x^2}{2}$
- $cosx \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

- Значит, $chx - cosx \sim x^2$

Имеем:

$$I_1 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2}dx = \int_0^1 x^{\alpha-2}dx$$

$\int_0^1 x^{\alpha-2}dx$ - шаблонный. Сходится при $\alpha - 2 > -1 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Значит, I_1 сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$ по признаку сравнения.

2). Исследуем I_2.

при $x \to +\infty$:

- $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$
- $ln^\alpha(1 + shx) \sim ln^\alpha(1 + \frac{e^x}{2}) \sim ln^\alpha(\frac{e^x}{2}) = ln^\alpha e^x - ln^\alpha 2 = x^\alpha - ln^\alpha 2$
- $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$
- Значит, т.к. косинус ограничен, $chx - cosx \sim \frac{e^x}{2}$

Имеем:

$$I_2 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha - ln^\alpha 2}{e^x}dx$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha - ln^\alpha 2}{e^x}dx$ сходится $\forall\alpha$, т.к. e^x в знаменателе. Значит, I_2 сходится $\forall\alpha$ по признаку сравнения.

3). $I = I_1 + I_2$, где I_2 сходится $\forall\alpha$, а I_1 сходится при $\alpha > 1$. Значит, I сходится при $\alpha > 1$.

Ответ: I сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Пример 7. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра α: $I = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{1 - thx}{arctg(e^x - 1)})^\alpha dx$.

Особенности на 2 пределах интегрирования, значит, опять же представим в виде суммы двух интегралов.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{1 - thx}{arctg(e^x - 1)})^\alpha dx = \int\limits_0^1 (\frac{1 - thx}{arctg(e^x - 1)})^\alpha dx + \int\limits_1^{+\infty} (\frac{1 - thx}{arctg(e^x - 1)})^\alpha dx =: I_1 + I_2$$

1). Исследуем на сходимость I_1.

При $x \to 0$:

- $1 - thx \sim 1 - x \sim 1$
- $arctg(e^x - 1) \sim arctg(1 + x - 1) \sim arctgx \sim x$

Значит,

$$I_1 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 (\frac{1}{x})^\alpha dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ - шаблонный. Он сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$. Следовательно, I_1 сходится $\Leftrightarrow \alpha < 1$ по признаку сравнения.

2). Исследуем на сходимость I_2.

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

Тогда при $x \to +\infty$:

- $1 - thx = \frac{2}{e^{2x}+1} \sim \frac{2}{e^{2x}}$
- $e^x - 1 \sim e^x$
- $arctg(e^x - 1) \sim arctg(e^x) \sim \pi/2$, т.к. $\lim\limits_{x \to \infty} arctgx = \pi/2$

Таким образом,

$$I_2 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{2}{e^{2\alpha x}} dx$$

Интеграл в правой части сходится при e в положительной степени в знаменателе, т.е. при $\alpha > 0$. Значит, I_2 - сходится $\Leftrightarrow \alpha > 0$ по признаку сравнения.

3). При $\alpha \in (0, 1)$ оба интеграла I_1 и I_2 сходятся, следовательно, I сходится. Ответ: $\alpha \in (0, 1)$

Пример 8. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра α: $I = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{ln(1+\frac{x}{x+1})}{\sqrt[5]{5+x^5}-x})^\alpha dx$

На первый взгляд кажется, что в нуле особенности не будет: знаменатель при $x = 0$ не ноль. Однако при $x = 0$ $ln(1 + \frac{x}{x+1}) = 0$. А при отрицательных альфа этот логарифм очутится в знаменателе. И будет бяка. Так что, как и в предыдущем примере, особенности на верхнем и нижнем пределах.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{ln(1+\frac{x}{x+1})}{\sqrt[5]{5+x^5}-x})^\alpha dx = \int\limits_0^{1} (\frac{ln(1+\frac{x}{x+1})}{\sqrt[5]{5+x^5}-x})^\alpha dx + \int\limits_1^{+\infty} (\frac{ln(1+\frac{x}{x+1})}{\sqrt[5]{5+x^5}-x})^\alpha dx = I_1 + I_2$$

1). Исследуем на сходимость I_1.

При $x \to 0$:

- $ln(1 + \frac{x}{x+1}) \sim ln(1 + x) \sim x$
- $\sqrt[5]{5+x^5} - x \sim \sqrt[5]{5}$

Имеем:

$$I_1 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 x^\alpha dx$$

Этот интеграл сходится $\Leftrightarrow \alpha > -1$(шаблон), следовательно, I_1 также сходится $\Leftrightarrow \alpha > -1$ по признаку сравнения.

2). Исследуем на сходимость I_2.

При $x \to +\infty$:

- $ln(1 + \frac{x}{x+1}) \sim ln2$
- $\sqrt[5]{5+x^5} - x = x(1 + \frac{5}{x^5})^{1/5} - x \sim x(1 + \frac{1}{5}\frac{5}{x^5}) - x \sim \frac{1}{x^4}$

Имеем (на $ln2$ в числителе забили, т.к. умножение на константу не влияет на сходимость):

$$I_2 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} x^{4\alpha} dx$$

Интеграл справа сходится при $\alpha < -\frac{1}{4}$. Значит, I_2 также сходится $\Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{4}$ по признаку сравнения.

3). При $\alpha \in (-1, -\frac{1}{4})$ оба интеграла сходятся, а в остальных случаях один сходится, а второй - расходится. Значит, Ответ: I сходится $\Leftrightarrow \alpha \in (-1, -\frac{1}{4})$.

Пример 9. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра α: $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx$

Особенности в нуле и в бесконечности.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{arctgx}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx =: I_1 + I_2$$

1). Исследуем на сходимость I_1.

При $x \to 0$:

- $arctgx \sim x$
- $1 + x^2 \sim 1$
- $(e^x - 1)^\alpha \sim (1 + x - 1)^\alpha = x^\alpha$

Имеем:

$$I_1 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{x}{x^\alpha} dx = \int\limits_0^1 x^{-\alpha+1} dx$$

Этот интеграл сходится $\Leftrightarrow -\alpha + 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha < 2$(шаблон), следовательно, I_1 также сходится $\Leftrightarrow \alpha < 2$ по признаку сравнения.

2). Исследуем на сходимость I_2.

При $x \to +\infty$:

- $arctgx \sim \pi/2$
- $(1+x^2) \sim x^2$
- $(e^x-1)^\alpha \sim e^{\alpha x}$

Имеем:

$$I_2 \underset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 e^{\alpha x}} dx$$

Интеграл справа сходится при $\alpha > 0$, т.к. экспонента в знаменателе. Но также он сходится и при $\alpha = 0$, т.к. тогда экспонента уйдет, но останется x^2 в знаменателе, и такой интеграл сойдется. То есть забивать на x^2 в знаменателе никак нельзя, он влияет на ответ! При $\alpha < 0$ интеграл расходится. Значит, I_2 сходится $\Leftrightarrow \alpha \geq 0$ по признаку сравнения.

3). При $\alpha \in [0,2)$ оба интеграла сходятся, а в остальных случаях один сходится, а второй - расходится. Значит, Ответ: I сходится $\Leftrightarrow \alpha \in [0,2)$.

Замечание. Если особенность помимо нуля не в бесконечности, а, например, в 1, то есть если мы имеем $\int\limits_0^1$, то для исследования в точке 1 поможет замена $t = 1 - x$. Так особенность в интеграле после замены параметра уже будет в нуле, а это мы умеем исследовать.