Математический анализ. Семинар 7

Затехал Айвазов Денис
Семинар вёл Скубачевский Антон

31 октября 2017

1 Семинар 7.

1.1 Поверхностные интегралы I рода

Пусть G - измеримая область в $\mathbb{R}^2$. S - поверхность, заданная параметрически т.е. $x = x(u,v); y = y(u,v); z = z(u,v)$. x, y, z - дифференцируемые функции на G. И на S задана $f(x,y,z)$

Определение 1 (Поверхностный интеграл первого рода)**.**

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_G f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)|[\overline{r}_u \times \overline{r}_v]|dudv$$

где $\overline{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

1.1.1 №11.11

$\mathbb{J} = \iint\limits_S zdS -?$; (т.е.$f(x,y,z) = z$);

Поверхность S задана следующим образом:

$$S = \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v, \end{cases}$$

Где $u \in [0;1]$, $v \in [0;2\pi]$. То есть $G = [0;1] \times [0;2\pi]$

Решение:

$$\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$$

$$\overline{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0);\ \overline{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$

$$|[\overline{r}_u \times \overline{r}_v =]| = \left| det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & sinv & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} \right| = |(i(sinv) + j(-cosv) + k(ucos^2v + usin^2v)|$$
$$= \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1+u^2}$$

$$\mathbb{J} = \iint\limits_G v\sqrt{1+u^2}dudv = \int\limits_0^{2\pi} vdv \int\limits_0^1 \sqrt{1+u^2}du = \pi^2(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2})$$

1.1.2 Конус внутри цилиндра

Найти площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$

В данном случае конус - поверхность, по которой интегрируем, а цилиндр дает нам ограничения на область G.

Чтобы найти площадь поверхности, нужно взять поверхностный интеграл от f=1 по нашей поверхности.

$\bar{r} = (x, y, z);\ u = x;\ v = y$

$$\int_S dS = \iint_G |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dS$$

$$\bar{r}_x = (0, 1, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}});\ \ \bar{r}_y = (1, 0, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}});$$

$$|[\bar{r}_x \times \bar{r}_y]| = |det\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix}| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

$S = \int_S dS = \iint_G |\bar{r}_x \times \bar{r}_y| dS = \iint_G \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_G dxdy = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\pi \cdot 1^2}_{\text{круг R=1}};$

Пример $\iint\limits_S xdS$-?

$$S = \begin{cases} x^2+y^2 = 2x (\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1) \\ z \in [0, 1] \end{cases}$$

Замена:

$$\begin{cases} x = 1 + cos\varphi \\ y = sin\varphi \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 + cos\varphi \\ sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -sin\varphi \\ cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|[r'_\varphi \times r'_z]| = 1$$

Имеем:

$$\iint\limits_S xdS = \int\limits_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + cos\varphi) dz d\varphi = 2\pi$$

Пример 3. Вычислить массу поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 2x\}$ с поверхностной плотностью $\rho = \frac{z}{\sqrt{1+4z}}$.

Решение: Физическое приложение к поверхностным интегралам. Есть и другие, например, посчитать момент инерции. Какие еще есть приложения можно посмотреть в задачнике Кудрявцева перед параграфом с поверхностными интегралами. Масса – интеграл от плотности. Чтобы посчитать поверхностный интеграл первого рода, найдем производные от радиус-вектора: $\vec{r} = (x, y, x^2 + y^2)$; $\vec{r}'_x = (1, 0, 2x)$; $\vec{r}'_y = (0, 1, 2y)$.

$$[\vec{r}'_x; \vec{r}'_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \vec{i}(-2x) - \vec{j}(2y) + \vec{k} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|[\vec{r}'_x; \vec{r}'_y]| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \sqrt{1 + 4z}.$$

Теперь посчитаем искомую массу. В интеграле ниже за область G будем считать $G = \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Из ограничения $x^2 + y^2 \leq 2x$ при переходе в полярные координаты получаем $r \leq 2\cos\varphi$. Также из $r \leq 2\cos\varphi$ следует, что $\cos\varphi \geq 0$. Возьмем для удобства тогда $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Могли бы взять $\varphi \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, но это не так удобно.

$$M=\iint\limits_S \rho dS=\iint_G zdxdy=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^3dr=8\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi=3\pi/2.$$

1.2 Пов. инт. II рода

Ориентируем поверхность S, выбрав $\vec{\nu}=+\vec{n}$ или $-\vec{n}$. Таким образом, к примеру, если выбрано $\vec{n}u=+\vec{n}$ у сферы, то говорят, что сфера ориентирована полем внешних нормалей, или интеграл берется по внешней стороне сферы.

Определение 2. *Потоком векторого поля A через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл I рода:* $\iint_S(\bar{a},\bar{\nu})dS$, *он же поверхностный интеграл II рода.*

Вектор нормали: $\bar{N}=\bar{r}_u\times\bar{r}_v$; единичный вектор нормали: $\bar{n}=\frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$
Поверхностный интеграл второго рода можно также записать в виде:

$$\int\limits_S(\bar{a},\bar{n})dS=\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy;\ \bar{a}=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$$

Поверхностный интеграл II рода можно считать, как мы считали поверхностные интегралы I рода, т.к. он является частным случаем поверхностного интеграла I рода, не запутавшись в знаке перед интегралом, связанным с ориентацией поверхности. Но лучше считать по-другому:

$$\int\limits_S(\bar{a},\bar{n})dS=\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_G\begin{vmatrix}P&Q&R\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}dudv;\ \bar{a}=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\iint_S(\bar{a},\bar{n})dS=\iint_S\left(\bar{a},\frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}\right)dS=\iint_S(\bar{a},\bar{r}_u\times\bar{r}_v)\frac{1}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}dS=$$
$$=\iint_G(\bar{a},\bar{r}_u\times\bar{r}_v)\frac{1}{|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|}|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|dudv=\iint_G(\bar{a},\bar{r}_u\times\bar{r}_v)dudv$$

□

Важное замечание. Если поверхность ориентирована отрицательно, перед интегралом по G нужно поставить знак '-'. То есть в каждой задаче нужно наличие знака проверять отдельно, это является половиной решения задачи.

1.2.1 №11.31(1)

$\mathbb{J} = \iint_S (x^5 + z)dydz$; Где S - внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$. Внутренняя значит вектор нормали должен смотреть внутрь. Сразу делаем вывод, что если вектор нормали в нижнем куске полусферы должен смотреть внутрь сферы, то его проекция на OZ будет всегда для этого куска полусферы ≥ 0.

$\bar{a} = \begin{pmatrix} x^5 + z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Параметризуем поверхность: $\begin{matrix} x = R\cos\phi\cos\psi; \\ y = R\sin\phi\cos\psi; \\ z = R\sin\psi \end{matrix}$

Здесь $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$(т.к. нижний кусок сферы). Чтобы учесть ориентацию, посчитаем вектор нормали

$\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_\psi & y_\psi & z_\psi \end{vmatrix}$ Проекция вектора нормали на ос OZ:

$$\begin{aligned} n_z = x_\phi y_\psi - x_\psi y_\phi = -R\sin\phi\cos\psi(-R\sin\phi\cos\psi) - \\ -(-R\cos\phi\sin\psi)(R\cos\phi\cos\psi) = \\ = R^2\cos\psi\sin\psi < 0 \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что $\psi \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$.

$\Rightarrow \bar{n}$ смотрит наружу на этой стороне полусферы, а по условию должен внутрь, значит перед интегралом нужно поставить знак '-'.

$$\iint_S Pdydz = -\iint_G \begin{vmatrix} (R\cos\phi\cos\psi)^5 + R\sin\psi & 0 & 0 \\ -R\sin\phi\cos\psi & R\cos\phi\cos\psi & 0 \\ -R\cos\phi\sin\psi & -R\sin\phi\sin\psi & R\cos\psi \end{vmatrix} d\phi d\psi =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \Big((R\cos\phi\cos\psi)^5 + R\sin\psi\Big)R^2\cos\phi\cos^2\psi d\phi d\phi = -\frac{2R^7\pi}{7}$$

Пример 5. Поверхность $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\sqrt{x^2 + y^2} \geq -1\}$ ориентирована полем нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси OZ. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = \left(\frac{x}{1+z^2}, \frac{y}{1+z^2}, \frac{-z}{1+z^2}\right)$ через поверхность S.

Решение: Еще одно "физическое приложение". Поток поля через поверхность – по сути и есть определение поверхностного интеграла второго рода. Так что для решения данной задачи можем посчитать поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \frac{x}{1+z^2}dydz + \frac{y}{1+z^2}dxdz + \frac{-z}{1+z^2}dxdy$ через ту формулу со смешанным произведением. Но давайте решим эту задачу другим способом, по определению, то есть найдем интеграл $\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})dS$, то есть поверхностный интеграл первого рода. Для этого нужно найти вектор единичной нормали $\vec{n}$. Найдем для начала вектор не единичной нормали (сделав замену координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = -\rho$; расстояние до начала координат я обозвал ρ вместо r, чтобы не путать с радиус-вектором $\vec{r}$). $\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho)$, $\vec{r}'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, -1)$, $\vec{r}'_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$. Вектор нормали:

$$\vec{N} = [\vec{r}'_\rho, \vec{r}'_\varphi] = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho).$$

Тогда вектор единичной нормали:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, 1).$$

Обратите внимание на то, что координата этого вектора по оси OZ положительна, и в условии сказано, что поверхность ориентирована полем нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси OZ, что и означает положительную проекцию. Значит, перед интегралом ставим знак плюс. $|[\vec{r}'_\rho, \vec{r}'_\varphi]| = \rho\sqrt{2}$. Вычислим интеграл:

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi + \rho}{1+\rho^2}d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{2\rho^2}{1+\rho^2}d\rho =$$

$$= 4\pi\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho = 4\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi(4-\pi).$$