Лекция 4. Продолжим доказывать единственность:

$$(1) \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

1. Доказали, что если $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ — два решения задачи Коши (1) при $t \in J_\beta(t_0, \vec{x}_0)$, то $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $|t - t_0| < \beta$, $\beta < \min\{a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L}\}$.

2. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ — два решения (1), определенные на (α_1, α_2), $t_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Докажем, что $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ на (α_1, α_2). Пусть $\exists\, t^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$: $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$

Для определенности пусть $t^* > t_0$.

Обозначим за P — множество t : $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$, $t \in [t_0, t^*)$. Докажем, что P — замкнуто.

Рассмотрим посл-ть $\tau_m \to \tau$, $\{\tau_m\} \in P$.

Из непрерывности $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ следует, что

$$\vec{\varphi}(\tau) = \lim_{m\to\infty} \vec{\varphi}(\tau_m) = \lim_{m\to\infty} \vec{\psi}(\tau_m) = \vec{\psi}(\tau)$$

$\Rightarrow \tau \in P \Rightarrow P$ – замкнуто.

Пусть $T = \sup P$, $T < t^*$.

Рассмотрим точку $(T, \vec{\varphi}(T))$,

поставим в ней задачу Коши.

Тогда $\exists$ отрезок $[T-\beta, T+\beta]$, на котором $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$.

– противоречие, что T – точная верхняя грань P.

$\Rightarrow$ не $\exists t^* \in (\alpha_1, \alpha_2) : \vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$. $\square$

Область существования решения

Т. Пусть в области Ω выполняются условия основной теоремы, $\vec{\varphi}(t)$ — решение $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x})$, определенное на промежутке $[\alpha,\beta)$. Если $\exists \lim\limits_{t\to\beta-0} \vec{\varphi}(t) = \vec{B}$, $(\beta,\vec{B})\in\Omega$, то $\vec{\varphi}(t)$ может быть продолжено вправо.

Д-во:

Решим задачу Коши, приняв за нач. точку $(\beta,\vec{B})$.

По основной теореме существует решение $\vec{\varphi}_1(t)$, определенное на $[\alpha_1,\beta_1]$, $\beta\in[\alpha_1,\beta_1]$.

Введем функцию
$$\vec{\psi}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t), & t\in[\alpha,\beta) \\ \vec{\varphi}_1(t), & t\in[\beta,\beta_1]. \end{cases}$$

По определению $\vec{\psi}(t)$ — непрерывная.

Рассмотрим функцию $\vec{\chi}(t) = \vec{\varphi}(\alpha) + \int^{t} \vec{f}(\tau,\vec{\psi}(\tau))\,d\tau$.

Тогда при $t\in[\alpha,\beta)$: $\vec{\chi}(t) = \vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$.

При $t \in [\beta, \beta_1]$: $\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau + \int_{\beta}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi})d\tau$

$= \vec{B} + \int_{\beta}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi})\, d\tau = \vec{\varphi}_1(t) = \vec{\psi}(t)$. Получается $\vec{\psi}(t)$ – решение интегрального уравнения $\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau$

$\Rightarrow \vec{\psi}(t)$ – решение задачи Коши (*).

Сужение $\vec{\psi}(t)$ на $[\alpha, \beta)$ совпадает с $\vec{\varphi}(t)$ $\Rightarrow$ $\vec{\Psi}$ – продолжение $\vec{\varphi}$. ▨

$\Rightarrow$ непродолжаемое решение может быть определено только на интервале.

Th Пусть в области Ω выполняются условия основной Th, а $\overline{\Omega}_0$ – любой компакт $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Тогда для $\forall$ точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$ решение $\vec{\varphi}(t)$ с нач. данными в этой точке может быть продолжены в обе стороны до выхода на границу $\partial\Omega_0$.

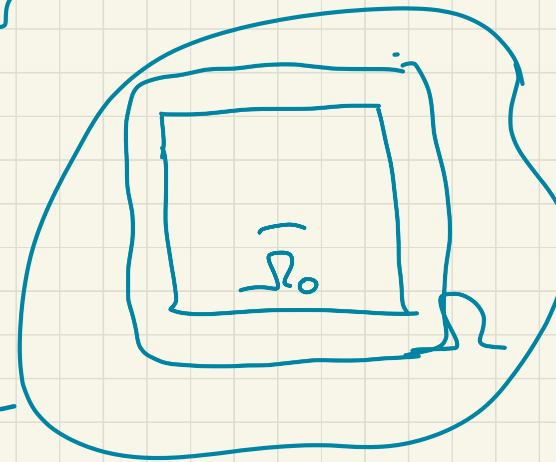
<u>Д-во:</u> Поскольку $\overline{\Omega_0}$ - замкнутое множество, то расстояние ρ от $\overline{\Omega_0}$ до $\partial\Omega$ положительно (или $+\infty$).
(Если $M \cap N = \varnothing$, то в анализе доказано, что $\rho > 0$)
Пусть D - множество всех точек $\Omega \setminus \overline{\Omega_0}$, расстояние каждой из которых до $\overline{\Omega_0} \le \frac{\rho}{2}$ (или 1, если $\rho = +\infty$).
Рассмотрим $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{D}$. $\overline{\Omega_1}$ - замкнутое и огран. мн-во и $\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Функция $\vec{f}(t, \bar{x})$ непрерывна в $\overline{\Omega_1}$ и $\Rightarrow$ ограничена в $\overline{\Omega_1}$: $\|\vec{f}(t, \bar{x})\| \le M$.
Если $(t_0, \bar{x}_0) \in \Omega_0$, а полож. числа a и b: $a^2 + b^2 \le \frac{\rho^2}{4}$, то рассмотрим

$\overline{R^*} = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \le a, \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \le b\} : \overline{R^*} \subset \Omega_1.$

Положив $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, получим

$\overline{Q^*} = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \le h, \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \le b\}$

$\overline{Q}^* \in \Omega_0$



(напр., $a = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$, $b = \frac{\rho M}{2\sqrt{M^2+1}}$, тогда $\forall (t_0, \vec{x}_0) : h = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$)

Из основной теоремы $\Rightarrow \exists$ решение на $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Возьмём точку $(t_0 + h, \vec{\varphi}(t_0 + h))$.

Если она $\in \Omega_0$, то продолжим решение вправо на h.

Продолжая так, на некотором шаге либо попадём на границу $\partial\Omega_0$, либо в область $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$ $(h \le \frac{\rho}{2})$.

Значит, интегральная кривая пересечет границу $\partial\Omega_0$.
При этом интегральная кривая остается в области Ω_1.

Т3. Пусть в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ вып. условия основной Т. Тогда $\forall$ точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (1) может быть продолжено единств. образом на максимальный интервал существования (T_1, T_2). При этом $\vec{\varphi}(t)$ стремится к границе области $\partial\Omega$ при $t \to T_1$ и $t \to T_2$ (покидает любую замкнутую область $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$).

Д-во: Рассм. мн-во всех реш. сист. ДУ с н.у. $(t_0, \vec{x}_0)$. Они отличаются областью определения.

Пусть P_r – мн-во правых концов промеж. опр.

$T_2 = \sup P_r$ (возможно $+\infty$)

$T_1 = \inf P_l$ (возм. $-\infty$)

Построим решение задачи Коши (1) на (T_1, T_2):

Возьмём $\forall t^* \in J$, пусть $t^* > t_0$.

Существует решение $\vec{\varphi}(t)$, определенное на (t_1, t_2), $t_0, t^* \in (t_1, t_2)$. Определим

$\vec{\varphi}(t^*) = \vec{\varphi}(t^*)$. В силу единственности, $\vec{\varphi}$ не зависит от выбора $\vec{\varphi}(t)$.

Таким образом определенная $\vec{\varphi}(t)$ для всех точек $t \in (T_1, T_2)$.

$\vec{\varphi}(t)$ – непродолжаемо, т.к. иначе получаем противоречие тому, что $T_1 = \inf P_l$ или $T_2 = \sup P_r$. $\boxtimes$

Частный случай, когда уравнение определено во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

<u>Сл-вие.</u> Пусть в $\mathbb{R}^2$ выполнены все условия основной теоремы. Тогда всякая интегральная кривая при возрастании t может быть либо неограниченно продолжена вправо до $t=+\infty$, либо имеет вертикальную асимптоту при конечном $t=\beta$.