

Ordnungen und Verbände

Verbände

Verbände sind algebraische Strukturen, die viele mathematische Gebiete durchdringen. Wir bauen die Verbandstheorie mithilfe der Ordnungstheorie auf und behandeln als ein wichtiges Beispiel die so genannten Begriffsverbände, mit deren Hilfe sich Begriffswelten analysieren lassen.

19.1 Der Verbandsbegriff

Ein *Verband* ist ein Tripel (V, \sqcap, \sqcup) , bestehend aus einer nichtleeren Menge V und zwei Operationen $\sqcap : V \times V \rightarrow V$ (lies: et) und $\sqcup : V \times V \rightarrow V$ (lies: vel), für die folgende Rechenregeln gelten:

- Beide Operationen sind kommutativ, d. h., $u \sqcap v = v \sqcap u$ und $u \sqcup v = v \sqcup u$ für alle $u, v \in V$.
- Beide Operationen sind assoziativ, d. h., $(u \sqcap v) \sqcap w = u \sqcap (v \sqcap w)$ und $(u \sqcup v) \sqcup w = u \sqcup (v \sqcup w)$ für alle $u, v, w \in V$.
- Es gelten die *Verschmelzungsgesetze*, d. h., $u \sqcap (u \sqcup v) = u$ und $u \sqcup (u \sqcap v) = u$ für alle $u, v \in V$.

Ein Verband (V, \sqcap, \sqcup) wird auch kürzer V geschrieben, sofern klar ist, um welche Operationen es sich handelt. Ein Verband V heißt *endlich*, wenn die Menge V endlich ist.

Beispiele 19.1. • Die Menge aller Aussagen bildet zusammen mit Konjunktion und Disjunktion nach Satz 1.9 einen Verband, den so genannten *Aussagenverband*.

- Die Potenzmenge $P(A)$ einer Menge A bildet zusammen mit Durchschnitt und Vereinigung nach Satz 3.7 den *Potenzmengenverband* von A .
- Die Menge aller natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 bildet mit ggT und kgV nach Kap. 13 den so genannten *natürlichen Teilerverband*.
- Die Menge aller Unterräume eines Vektorraums V bildet mit Durchschnitt und Summe den so genannten *Unterraumverband* von V , wobei die Summe durch $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ gegeben ist.

- Seien $(V_1, \sqcap_1, \sqcup_1)$ und $(V_2, \sqcap_2, \sqcup_2)$ Verbände. Das direkte Produkt $V_1 \times V_2$ bildet einen Verband mit komponentenweisen Operationen

$$(x_1, x_2) \sqcap (y_1, y_2) = (x_1 \sqcap_1 y_1, x_2 \sqcap_2 y_2) \quad (19.1)$$

und

$$(x_1, x_2) \sqcup (y_1, y_2) = (x_1 \sqcup_1 y_1, x_2 \sqcup_2 y_2). \quad (19.2)$$

Dieser Verband heißt *Produktverband* von V_1 und V_2 .

Dualitätsprinzip

Sei V ein Verband und P eine Aussage in V . Die *duale Aussage* von P in V ist eine Aussage P^d , die aus P dadurch entsteht, indem in P die beiden Operationen überall gleichzeitig miteinander vertauscht werden. Beispielsweise sind die Aussagen $\forall v \in V [v \sqcap v = v]$ und $\forall v \in V [v \sqcup v = v]$ dual zueinander.

Satz 19.2. (Dualitätsprinzip) *Sei V ein Verband. Ist P eine wahre Aussage in V , dann ist auch P^d eine wahre Aussage in V .*

Im Beweis dieses Satzes wird der Beweisbegriff benutzt. Ein Beweis wird als eine Folge von wahren Aussagen angesehen, wobei jede Aussage entweder ein Axiom ist oder aus in der Folge vorangehenden Aussagen mittels Modus Ponens abgeleitet wird. Weil die dualisierten Aussagen der Verbandsaxiome wiederum Axiome sind, wird durch Dualisieren aller im Beweis vorkommenden Aussagen die duale Aussage bewiesen.

Der Verband (V, \sqcup, \sqcap) mit vertauschten Operationen heißt *dualer Verband* von (V, \sqcap, \sqcup) . Mit dem Dualitätsprinzip 19.2 folgt, dass in beiden Verbänden dieselben Aussagen gelten.

Satz 19.3. (Idempotenzgesetz) *Für alle Elemente v eines Verbandes V gilt $v \sqcap v = v$ und $v \sqcup v = v$.*

Beweis. Mit den Verschmelzungsgesetzen folgt $v \sqcap v = v \sqcap (v \sqcup (v \sqcap v)) = v$ und $v \sqcup v = v \sqcup (v \sqcap (v \sqcup v)) = v$. \square

Satz 19.4. *Für alle Elemente u und v eines Verbandes V gilt $u \sqcap v = u$ genau dann, wenn $u \sqcup v = v$.*

Beweis. Sei $u \sqcap v = u$. Mit dem Kommutativ- und Verschmelzungsgesetz folgt $u \sqcup v = (u \sqcap v) \sqcup v = v \sqcup (v \sqcap u) = v$. Umgekehrt sei $u \sqcup v = v$. Dann ergibt sich mit dem Verschmelzungsgesetz $u \sqcap v = u \sqcap (u \sqcup v) = u$. \square

19.2 Ordnungsstrukturen als Verbände

Sei (V, \sqsubseteq) eine halbgeordnete Menge und W eine Teilmenge von V . Ein Element $v \in V$ heißt *kleinstes Element* in W , wenn für alle $w \in W$ gilt $v \sqsubseteq w$. Entsprechend heißt $v \in V$ *größtes Element* in W , wenn für alle $w \in W$ gilt $w \sqsubseteq v$. Das kleinste bzw. größte Element in W ist nach Lemma 5.13 eindeutig bestimmt, sofern es existiert.

Ein Element $v \in V$ heißt *untere Schranke* von W , wenn für alle $w \in W$ gilt $v \sqsubseteq w$. Analog heißt ein Element $v \in V$ *obere Schranke* von W , wenn für alle $w \in W$ gilt $w \sqsubseteq v$. Hat die Menge der unteren bzw. oberen Schranken von W ein größtes bzw. kleinstes Element, so ist dieses nach Lemma 5.13 eindeutig bestimmt und wird *Infimum* bzw. *Supremum* von W genannt, abgekürzt $\inf(W)$ bzw. $\sup(W)$. Für das Infimum bzw. Supremum von $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ schreiben wir $\inf(w_1, \dots, w_n)$ bzw. $\sup(w_1, \dots, w_n)$.

Lemma 19.5. *Sei (V, \sqsubseteq) eine halbgeordnete Menge. Für beliebige Elemente $w_1, \dots, w_n \in V$ gilt*

$$\inf(w_1, \dots, w_n) \sqsubseteq w_i \quad \text{und} \quad w_i \sqsubseteq \sup(w_1, \dots, w_n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Beweis. Definitionsgemäß ist $w = \inf(w_1, \dots, w_n)$ eine untere Schranke von $\{w_1, \dots, w_n\}$, woraus $w \sqsubseteq w_i$, $1 \leq i \leq n$, folgt. Analog ergibt sich die zweite Aussage.

Beispiel 19.6. Wir betrachten die halbgeordnete Menge $V = \{a, \dots, f\}$ in Abb. 19.1. Die Teilmenge $W = \{c, e\}$ hat die unteren Schranken a, b und c und das Infimum c . Die Menge $W = \{a, b\}$ hat als obere Schranken c, d, e, f und als Supremum c , während die Menge der unteren Schranken leer ist.

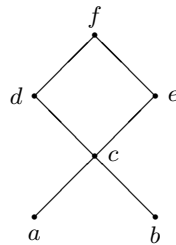


Abb. 19.1. Hasse-Diagramm einer halbgeordneten Menge.

Satz 19.7. *Sei V eine halbgeordnete Menge, in der je zwei Elemente ein Infimum und ein Supremum haben. Dann bildet V mit der Infimum- und Supremumbildung einen Verband.*

Beweis. Das Infimum von $u, v \in V$ existiert und ist eindeutig bestimmt. Also ist durch $(u, v) \mapsto \inf(u, v)$ eine Operation auf V definiert. Gleiches gilt für die Supremumbildung.

Die Infimumbildung ist kommutativ, denn es gilt $\inf(u, v) = \inf(\{u, v\}) = \inf(\{v, u\}) = \inf(v, u)$.

Die Infimumbildung ist assoziativ. Denn setzen wir $x = \inf(u, \inf(v, w))$, dann ergibt sich $x \sqsubseteq u$ und $x \sqsubseteq \inf(v, w)$. Wegen Lemma 19.5 gilt $\inf(v, w) \sqsubseteq v$ und $\inf(v, w) \sqsubseteq w$, woraus mithilfe Transitivität $x \sqsubseteq v$ und $x \sqsubseteq w$ folgt. Also ist x eine untere Schranke von $\{u, v\}$ und somit $x \sqsubseteq \inf(u, v)$. Wegen $x \sqsubseteq w$ ist x sogar eine untere Schranke von $\{\inf(u, v), w\}$, für die nach Voraussetzung das Infimum existiert, also $y = \inf(\inf(u, v), w)$. Somit erhellt sich $x \sqsubseteq y$. Analog wird $y \sqsubseteq x$ gezeigt. Mit der Antisymmetrie folgt $x = y$.

Wir beweisen $\inf(u, \sup(u, v)) = u$. Wegen Lemma 19.5 gilt $u \sqsubseteq \sup(u, v)$ für alle $v \in V$. Also ist u eine untere Schranke von $\{u, \sup(u, v)\}$. Sei w eine untere Schranke von $\{u, \sup(u, v)\}$. Dann folgt $w \sqsubseteq u$. Also ist u das Infimum von $\{u, \sup(u, v)\}$. Das zweite Verschmelzungsgesetz wird analog gezeigt. \square

Beispiel 19.8. Die halbgeordnete Menge V in Abb. 19.3 (Pentagon-Verband) bildet einen Verband mit den Verknüpfungstabellen

\inf	0	a	b	c	1	\sup	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0	0	0	a	b	c	1
a	0	a	0	0	a	a	a	a	1	1	1
b	0	0	b	b	b	b	b	1	b	c	1
c	0	0	b	c	c	c	c	1	c	c	1
1	0	a	b	c	1	1	1	1	1	1	1

Satz 19.9. *Jede Kette V bildet einen Verband.*

Beweis. Seien $u, v \in V$. Da u und v vergleichbar sind, kann o.B.d.A. $u \sqsubseteq v$ angenommen werden. Dann ist $\inf(u, v) = u$ und $\sup(u, v) = v$. Also haben je zwei Elemente in V ein Infimum und ein Supremum. Somit folgt aus Satz 19.7 die Behauptung. \square

19.3 Verbände als Ordnungsstrukturen

Sei V ein Verband. Die von V induzierte Relation \sqsubseteq auf V ist definiert durch

$$u \sqsubseteq v \quad :\Longleftrightarrow \quad u \sqcap v = u \quad \text{für alle } u, v \in V. \quad (19.3)$$

Lemma 19.10. *Die Relation \sqsubseteq ist eine Halbordnung auf V .*

Beweis. Für jedes $v \in V$ gilt nach dem Idempotenzgesetz $v \sqcap v = v$, also $v \sqsubseteq v$. Somit ist \sqsubseteq reflexiv.

Seien $u, v, w \in V$ mit $u \sqsubseteq v$ und $v \sqsubseteq w$, mithin $u \sqcap v = u$ und $v \sqcap w = v$. Also folgt $u \sqcap w = (u \sqcap v) \sqcap w = u \sqcap (v \sqcap w) = u \sqcap v = u$ und somit $u \sqsubseteq w$. Folglich ist \sqsubseteq transitiv.

Seien $u, v \in V$ mit $u \sqsubseteq v$ und $v \sqsubseteq u$, also $u \sqcap v = u$ und $v \sqcap u = v$. Mit der Kommutativität folgt $u = v$. Deshalb ist \sqsubseteq antisymmetrisch. \square

Nach Satz 19.4 gilt für die induzierte Relation \sqsubseteq von V

$$u \sqsubseteq v \iff u \sqcup v = v. \quad (19.4)$$

Satz 19.11. (Monotoniegesetz) *Sei V ein Verband. Für alle Elemente $u, v, x, y \in V$ folgt aus $u \sqsubseteq v$ und $x \sqsubseteq y$ sofort $u \sqcap x \sqsubseteq v \sqcap y$ und $u \sqcup x \sqsubseteq v \sqcup y$.*

Beweis. Aus $u \sqsubseteq v$ und $x \sqsubseteq y$ folgt definitionsgemäß $(u \sqcap x) \sqcap (v \sqcap y) = (u \sqcap v) \sqcap (x \sqcap y) = u \sqcap x$, also $u \sqcap x \sqsubseteq v \sqcap y$. Die zweite Aussage wird mittels (19.4) auf analoge Weise gezeigt. \square

Satz 19.12. *Sei V ein Verband. Je zwei Elemente von V haben ein Infimum und ein Supremum bzgl. der induzierten Halbordnung von V und für alle Elemente $u, v \in V$ gilt $\inf(u, v) = u \sqcap v$ und $\sup(u, v) = u \sqcup v$.*

Beweis. Seien $u, v \in V$. Eine untere Schranke von $\{u, v\}$ ist $u \sqcap v$, denn es gilt $u \sqcap (u \sqcap v) = (u \sqcap u) \sqcap v = u \sqcap v$, d. h. $u \sqcap v \sqsubseteq u$. Analog wird $u \sqcap v \sqsubseteq v$ gezeigt.

Das Infimum von $\{u, v\}$ ist $u \sqcap v$. Denn sei $x \in V$ eine untere Schranke von $\{u, v\}$, also $x \sqsubseteq u$ und $x \sqsubseteq v$, d. h. $x \sqcap u = x = x \sqcap v$. Dann folgt $x \sqcap (u \sqcap v) = (x \sqcap u) \sqcap v = x \sqcap v = x$, also $x \sqsubseteq u \sqcap v$. Damit ist $\inf(u, v) = u \sqcap v$ bewiesen. Die zweite Aussage wird analog mithilfe der Beziehung (19.4) gezeigt. \square

Nach den Sätzen 19.7 und 19.12 sind die Verbände genau diejenigen halbgeordneten Mengen, in denen je zwei Elemente Infimum und Supremum haben.

Satz 19.13. *Für jede Teilmenge $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ eines Verbandes V gilt $\inf(W) = w_1 \sqcap \dots \sqcap w_n$ und $\sup(W) = w_1 \sqcup \dots \sqcup w_n$.*

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n .

Beispiele 19.14. Die induzierte Halbordnung eines Potenzmengenverbands ist die Inklusion, die induzierte Halbordnung des natürlichen Teilverbands ist die Teilbarkeitsrelation und die induzierte Halbordnung des Unterraumverbands eines Vektorraums ist die mengentheoretische Inklusion.

19.4 Unterverbände und Homomorphismen

Sei V ein Verband. Eine nichtleere Teilmenge U von V heißt *abgeschlossen* in V , wenn für alle $u, v \in U$ gilt $u \sqcap v \in U$ und $u \sqcup v \in U$.

Lemma 19.15. *Eine abgeschlossene Teilmenge U eines Verbandes V bildet einen Verband, genannt Unterverband von V .*

Beweis. Aufgrund der Abgeschlossenheit werden Operationen $U \times U \rightarrow U : (u, v) \mapsto u \sqcap v$ und $U \times U \rightarrow U : (u, v) \mapsto u \sqcup v$ auf U definiert. Die Verbandsgesetze gelten für U , weil sie für V erfüllt sind. \square

Beispiel 19.16. Sei V der Pentagon-Verband (Abb. 19.3). Die Menge $\{0, b, c, 1\}$ bildet einen Unterverband von V , während $\{a, b, 0\}$ wegen $\sup(a, b) = 1$ nicht abgeschlossen ist.

Satz 19.17. *Sei V ein Verband. Sind $u, v \in V$ mit $u \sqsubseteq v$, dann bildet die Menge $[u, v] = \{x \in V \mid u \sqsubseteq x \wedge x \sqsubseteq v\}$ einen Unterverband von V .*

Beweis. Die Menge $[u, v]$ enthält u und v und ist somit nichtleer. Seien $x, y \in [u, v]$. Mithilfe von Idempotenz und Monotonie folgt $u = u \sqcap u \sqsubseteq x \sqcap y$ und $x \sqcap y \sqsubseteq v \sqcap v = v$. Also ist $x \sqcap y \in [u, v]$. Analog wird $x \sqcup y \in [u, v]$ gezeigt. Somit ist $[u, v]$ abgeschlossen in V und folglich nach Lemma 19.15 ein Unterverband von V . \square

Beispiel 19.18. Die Menge aller positiven Teiler einer natürlichen Zahl n bildet einen Unterverband des natürlichen Teilverbands, den *Teilverband* von n . Die Teilverbände von $n = 30$ und $n = 12$ illustriert Abb. 19.2.

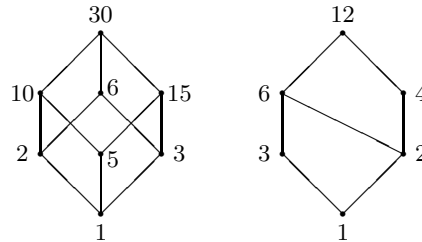


Abb. 19.2. Die Teilverbände von 30 und 12.

Seien (V, \sqcap, \sqcup) und (V', \sqcap', \sqcup') Verbände. Eine Abbildung $\phi : V \rightarrow V'$ heißt ein *Homomorphismus* von V nach V' , wenn für alle $u, v \in V$ gilt $\phi(u \sqcap v) = \phi(u) \sqcap' \phi(v)$ und $\phi(u \sqcup v) = \phi(u) \sqcup' \phi(v)$. Für Verbandshomomorphismen mit zusätzlichen Eigenschaften werden die schon für Ring-Homomorphismen eingeführten Bezeichnungen verwendet. Zwei Verbände heißen *isomorph*, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

Satz 19.19. Seien V und V' Verbände. Ein Epimorphismus $\phi : V \rightarrow V'$ bildet das kleinste bzw. größte Element in V auf das kleinste bzw. größte Element in V' ab.

Beweis. Für jedes $v \in V$ gilt $\phi(0) = \phi(0 \sqcap v) = \phi(0) \sqcap' \phi(v)$. Also ist $\phi(0) \sqsubseteq' \phi(v)$. Da aber die Abbildung ϕ surjektiv ist, folgt $\phi(0) \sqsubseteq' v'$ für jedes $v' \in V'$. Somit ist $\phi(0)$ das kleinste Element in V' . \square

Alle Verbände mit je fünf Elementen zeigt die Abb. 19.3. Gemeint ist damit ein Vertretersystem der Äquivalenzklassen bzgl. der durch die Isomorphie gegebenen Äquivalenz auf der Menge aller Verbände mit je fünf Elementen.

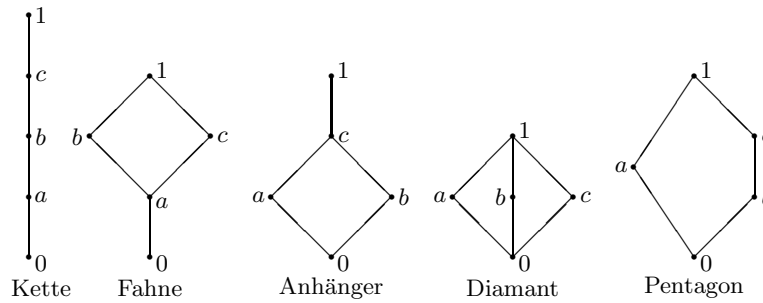


Abb. 19.3. Die Verbände mit je fünf Elementen.

Seien (V, \sqsubseteq) und (V', \sqsubseteq') halbgeordnete Mengen. Eine Abbildung $\phi : V \rightarrow V'$ heißt ein *Ordnungshomomorphismus* von V nach V' , wenn für alle $u, v \in V$ aus $u \sqsubseteq v$ stets $\phi(u) \sqsubseteq' \phi(v)$ folgt.

Satz 19.20. Seien V und V' Verbände. Jeder Verbandshomomorphismus $\phi : V \rightarrow V'$ ist ein Ordnungshomomorphismus der induzierten halbgeordneten Mengen.

Beweis. Seien $u, v \in V$ mit $u \sqsubseteq v$, d. h., $u \sqcap v = u$. Ist ϕ ein Verbandshomomorphismus, dann folgt $\phi(u) = \phi(u \sqcap v) = \phi(u) \sqcap' \phi(v)$. Mithin ergibt sich $\phi(u) \sqsubseteq' \phi(v)$. \square

Eine bijektive Abbildung $\phi : V \rightarrow V'$ heißt ein *Ordnungsisomorphismus* von V nach V' , wenn für alle $u, v \in V$ gilt

$$u \sqsubseteq v \iff \phi(u) \sqsubseteq' \phi(v). \quad (19.5)$$

Ein bijektiver Ordnungshomomorphismus ist nicht notwendig ein Ordnungsisomorphismus. Beispielsweise ist die identische Abbildung $id : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein bijektiver Ordnungshomomorphismus von $(\mathbb{N}, |)$ auf (\mathbb{N}, \leq) , weil aus $m | n$ stets $m \leq n$ folgt. Sie ist jedoch kein Ordnungsisomorphismus, denn aus $2 \leq 3$ folgt nicht $2 | 3$.

19.5 Begriffsverbände

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich so genannte Begriffswelten verbandstheoretisch beschreiben lassen. Das Wort Begriff hat im Alltag und in der Wissenschaft unterschiedliche Bedeutungen. Im Alltag wird das Wort Begriff gebraucht, um eine gedankliche Einheit, eine Zusammenfassung der wesentlichen Merkmale von etwas, oder den Sinngehalt von etwas zu beschreiben. Ein Begriff hat einen Inhalt und einen Umfang. Der Inhalt eines Begriffs wird durch Merkmale und Beziehungen festgelegt, die unter den Begriff fallen. Der Umfang charakterisiert die Menge von Situationen oder Individuen, die unter den Begriff subsumierbar sind.

In der Wissenschaft hängt die Bedeutung des Wortes Begriff vom Wissenschaftszweig ab. In der Philosophie steht das Wort Begriff für den einfachsten Denkkakt, eine Vorstellung, die die Forderung nach durchgängiger Konstanz, vollkommener Bestimmtheit, allgemeiner Übereinstimmung und unzweideutiger sprachlicher Bezeichnung erfüllt. In den Natur- oder Ingenieurwissenschaften sind Begriffe definitorische Festlegungen der wesentlichen Merkmale und Beziehungen eines Sachverhalts und deren Zusammenfassung in einem sprachlichen Ausdruck. Sie dienen der Beschreibung und Erklärung eines Phänomenbereichs. In der Logik tritt der umfängliche Aspekt stark hervor. Es scheint so, als ob der Inhalt durch den Umfang festgelegt ist. Logische Schlussfolgerungen sind gültig allein aufgrund umfänglicher Beziehungen.

Die *formale Begriffsanalyse* ist ein Zweig der Diskreten Mathematik, der sich mit der Konstruktion und Analyse von Begriffen beschäftigt. Ein Begriff wird hierbei als ein Abstraktum verstanden, der unabhängig davon existiert, ob es in einer natürlichen Sprache ein Wort gibt, das genau dieses Abstraktum bezeichnet. Die formale Begriffsanalyse gründet sich auf so genannten Kontexten. Sei G eine Menge von Gegenständen und M eine Menge von Merkmalen. Eine Relation $R \subseteq G \times M$ heißt ein *Kontext* über G und M . Die Beziehung gRm soll besagen, dass der Gegenstand g das Merkmal m besitzt.

Beispiel 19.21. Die europäischen Staaten Bulgarien (BU), Norwegen (NO), Rumänien (RU), Schweiz (SZ) und Türkei (TU) sollen beurteilt werden nach ihrer Kompetenz hinsichtlich der Bereiche Informationstechnik (IT), Landwirtschaft (LW), Maschinenbau (MB), Medizinversorgung (MV), Sport (SP) und Wissenschaft (WS).

Einen Kontext R zur Gegenstandsmenge $G = \{BU, NO, RU, SZ, TU\}$ und Merkmalsmenge $M = \{IT, LW, MB, MV, SP, WS\}$, der "hohe Kompetenz" zum Ausdruck bringen soll, zeigt die folgende Inzidenzmatrix

	IT	LW	MB	MV	SP	WS
BU		X				X
NO	X		X	X	X	X
RU		X	X	X		
SZ	X	X	X	X	X	X
TU				X	X	

Sei R ein Kontext über G und M . Wir definieren Abbildungen $P(G) \rightarrow P(M) : X \mapsto X'$ und $P(M) \rightarrow P(G) : Y \mapsto Y'$ durch

$$X' = \{m \in M \mid \forall g \in X [gRm]\} \quad \text{und} \quad Y' = \{g \in G \mid \forall m \in Y [gRm]\}.$$

Satz 19.22. *Sei R ein Kontext über G und M . Für alle Teilmengen X_1, X_2 und X von G gilt*

- $X_1 \subseteq X_2 \implies X'_1 \subseteq X'_2$,
- $X \subseteq X''$,
- $X' = X'''$.

Es gelten analoge Aussagen für die Teilmengen von M .

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Definition. Sei $g \in X$. Es gilt gRm für alle $m \in X'$ und somit $g \in X''$. Damit ist die zweite Aussage bewiesen. Schließlich gilt $X \subseteq X''$ nach der zweiten Aussage, woraus vermöge der ersten Aussage $X' \supseteq X'''$ folgt. Nach der zweiten Aussage gilt ebenfalls $X' \subseteq (X')'' = X'''$. Also folgt $X' = X'''$. \square

Ein *Hüllenoperator* auf einer Menge A ist eine Abbildung $H : P(A) \rightarrow P(A)$, die den folgenden drei Gesetzmäßigkeiten für alle Teilmengen X_1, X_2 und X von A genügt:

- Monotonie: $X_1 \subseteq X_2 \implies H(X_1) \subseteq H(X_2)$,
- Extensionalität: $X \subseteq H(X)$,
- Idempotenz: $H(X) = H(H(X))$.

Die Menge $H(X)$ wird als *Hülle* von X in A oder als (von X erzeugte) *abgeschlossene Menge* in A bezeichnet. Nach Satz 19.22 sind die Abbildungen $P(G) \rightarrow P(G) : X \mapsto X''$ und $P(M) \rightarrow P(M) : Y \mapsto Y''$ Hüllenoperatoren auf G bzw. M .

Satz 19.23. *Sei H ein Hüllenoperator auf A . Die Menge $\{H(X) \mid X \subseteq A\}$ aller abgeschlossenen Teilmengen von A bildet einen Verband mit den Operationen*

$$H(X) \sqcap H(Y) = H(X) \cap H(Y) \quad \text{und} \quad H(X) \sqcup H(Y) = H(X \cup Y). \quad (19.6)$$

Beweis. Seien $X, Y \subseteq A$. Mittels Monotonie und Idempotenz gilt $H(H(X) \cap H(Y)) \subseteq H(H(X)) = H(X)$ und analog $H(H(X) \cap H(Y)) \subseteq H(Y)$. Also folgt $H(H(X) \cap H(Y)) \subseteq H(X) \cap H(Y)$. Mit Extensionalität ergibt sich $H(H(X) \cap H(Y)) = H(X) \cap H(Y)$. Somit ist $H(X) \cap H(Y)$ abgeschlossen in A . Sei U abgeschlossen in A mit $U \subseteq H(X)$ und $U \subseteq H(Y)$. Dann gilt $U \subseteq H(X) \cap H(Y)$. Also ist $H(X) \cap H(Y)$ das Infimum von $H(X)$ und $H(Y)$. Die zweite Aussage ergibt sich auf analoge Weise. \square

Beispiel 19.24. Sei V ein Vektorraum. Eine *Linearkombination* von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ ist ein Ausdruck $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ mit beliebigen Skalaren k_1, \dots, k_n . Ein Vektor heißt eine Linearkombination einer Teilmenge X von V , wenn er eine Linearkombination endlich vieler Vektoren aus X ist. Die Menge $\langle X \rangle$ aller Linearkombinationen von X wird *lineare Hülle* von X genannt. Diese Menge bildet einen Unterraum von V und jeder Unterraum von V wird auf eben diese Weise erhalten. Der Operator $\langle \cdot \rangle$ ist ein Hüllenoperator auf V . Also bilden die linearen Hüllen aller Teilmengen von V , das sind die Unterräume von V , nach 19.23 einen Verband, den *Unterraumverband* von V . Das Infimum und das Supremum von Unterräumen $U = \langle X \rangle$ und $W = \langle Y \rangle$ von V sind definiert durch $U \sqcap W = U \cap W$ und $U \sqcup W = \langle X \cup Y \rangle$. Dabei ist das Supremum $U \sqcup W$ gleich der Summe $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

Ein *Begriff* eines Kontexts R über G und M ist ein Paar (A, B) , für das $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ und $B' = A$ gilt. Dabei heißt A der *Umfang* und B der *Inhalt* von (A, B) .

Der Inhalt eines Begriffs (A, B) legt also den Umfang fest und umgekehrt, d. h., Umfang und Inhalt eines Begriffs bestimmen sich gegenseitig. Jeder Begriff hat die Form (A, A') mit $A = A''$. Nach Satz 19.22 ist (A'', A') ein Begriff für jedes $A \subseteq G$. Also ist die Menge aller Begriffe eines Kontexts R über G und M gegeben durch

$$\mathcal{B}(G, M, R) = \{(A'', A') \mid A \subseteq G\}. \quad (19.7)$$

In $\mathcal{B}(G, M, R)$ wird (A_1, B_1) als *Unterbegriff* von (A_2, B_2) bezeichnet, kurz $(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2)$, wenn $A_1 \subseteq A_2$. Nach Satz 19.22 ist dann automatisch $B_1 \supseteq B_2$. Entsprechend wird dann (A_2, B_2) als *Overbegriff* von (A_1, B_1) bezeichnet.

Satz 19.25. Die Menge $\mathcal{B}(G, M, R)$ aller Begriffe eines Kontexts R über G und M bildet zusammen mit der Relation \sqsubseteq einen Verband. Für das Infimum und das Supremum von Begriffen (A_1'', A_1') und (A_2'', A_2') gilt

$$(A_1'', A_1') \sqcap (A_2'', A_2') = (A_1'' \cap A_2'', (A_1'' \cap A_2''))' \quad (19.8)$$

und

$$(A_1'', A_1') \sqcup (A_2'', A_2') = ((A_1 \cup A_2)'', (A_1 \cup A_2)'). \quad (19.9)$$

Beweis. Die Relation \sqsubseteq auf $\mathcal{B}(G, M, R)$ entspricht der Inklusion auf der Menge der abgeschlossenen Gegenstandsmengen $\mathcal{G} = \{A'' \mid A \subseteq G\}$. Also bildet $\mathcal{B}(G, M, R)$ zusammen mit \sqsubseteq eine halbgeordnete Menge. Seien (A_1'', A_1') und (A_2'', A_2') Begriffe in $\mathcal{B}(G, M, R)$. Das Infimum der zugehörigen abgeschlossenen Gegenstandsmengen A_1'' und A_2'' in \mathcal{G} ist nach Satz 19.23 durch $A_1'' \cap A_2''$ gegeben. Also ist das Infimum von (A_1'', A_1') und (A_2'', A_2') in $\mathcal{B}(G, M, R)$ definitionsgemäß gleich $(A_1'' \cap A_2'', (A_1'' \cap A_2''))'$. Für das Supremum wird analog verfahren. \square

Abschließend soll die Frage erörtert werden, wie der Begriffsverband eines Kontexts R über G und M berechnet werden kann. Für hinreichend kleine Kontexte ist es hilfreich, die folgenden Identitäten zu benutzen

$$X' = \bigcap_{g \in X} \{g\}', \quad X \subseteq G, \quad (19.10)$$

und

$$Y' = \bigcap_{m \in Y} \{m\}', \quad Y \subseteq M. \quad (19.11)$$

Die Inhalte $\{g\}'$ und Umfänge $\{m\}'$ können direkt aus der Kontexttabelle abgelesen werden. Die Menge aller Begriffe kann nun wie folgt berechnet werden:

- Fertige zwei Listen an, eine mit den Inhalten $\{g\}'$ für jedes $g \in G$ und eine mit den Umfängen $\{m\}'$ für jedes $m \in M$.
- Für jede Gegenstandsmenge $X \subseteq G$ berechne $X' = \bigcap_{g \in X} \{g\}'$ und erstelle eine Liste mit den Paaren (X, X') .
- Für jedes Paar (X, X') aus der Liste teste, ob X mit $X'' = \bigcap_{m \in X'} \{m\}'$ übereinstimmt, wobei im affirmativen Fall (X, X') ein Begriff ist.

Beispiel 19.26. Die Begriffe für den Kontext aus 19.21 sind

- 1 : $(\{BL, NO, PL, SZ, TU\}, \emptyset)$ 6 : $(\{BU, PL, SZ\}, \{LW\})$
 2 : $(\{BL, NO, SZ, TU\}, \{SP\})$ 7 : $(\{BU, SZ\}, \{LW, SP\})$
 3 : $(\{NO, PL, SZ, TU\}, \{MV\})$ 8 : $(\{PL, SZ\}, \{LW, MB, MV\})$
 4 : $(\{NO, SZ, TU\}, \{MV, SP\})$ 9 : $(\{NO, SZ\}, \{IT, MB, MV, SP, WS\})$
 5 : $(\{NO, PL, SZ\}, \{MB, MV\})$ 10 : $(\{SZ\}, \{IT, LW, MB, MV, SP, WS\})$

Ein Hasse-Diagramm des zugehörigen Begriffsverbands zeigt die Abb. 19.4. Je

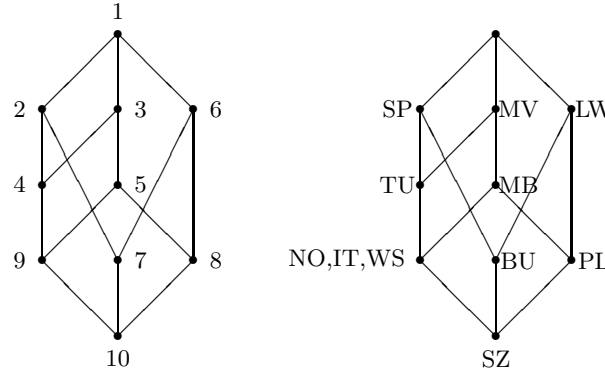


Abb. 19.4. Zwei Darstellungen eines Begriffsverbands.

tiefer ein Begriff im Hasse-Diagramm liegt, desto größer ist sein Inhalt, d. h., desto höher die durch ihn beschriebene Kompetenz. Beispielsweise könnte der Begriff mit dem Umfang $\{BU, PL, SZ\}$ und dem Inhalt $\{LW\}$ "Europäische Staaten mit hoher landwirtschaftlicher Kompetenz" bezeichnen, während der Begriff mit dem Umfang $\{NO, PL, SZ\}$ und dem Inhalt $\{MB, MV\}$ "Europäische Staaten mit hoher Kompetenz in Maschinenbau und Medizintechnik" titulierte. Der Begriffsverband ist in Abb. 19.4 noch auf eine zweite Art dargestellt. Dabei wird der Umfang bzw. Inhalt eines Begriffs anhand der angegebenen Beschriftungen seiner Unterbegriffe bzw. Oberbegriffe erhalten.

Selbsttestaufgaben

19.1. Dualisiere die Verbandsaussage $\forall x, y, z \in V[(x \sqcup y) \sqcap z = (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z)]$.

19.2. Beweise das Dualitätsprinzip 19.2.

19.3. Betrachte die vermöge Teilbarkeit halbgeordnete Menge $M = \{3, 6, 9, 12, 18\}$. Für welche Teilmengen von M ist $\{6, 12, 18\}$ die Menge der oberen Schranken? Für welche Teilmengen von M ist $\{3, 6\}$ die Menge der unteren Schranken?

19.4. Betrachte die halbgeordnete Menge in Abb. 19.5. Gib für die Teilmengen $\{4, 5, 7\}$, $\{2, 3, 6\}$ und $\{1, 2, 4, 7\}$ die Menge der unteren und oberen Schranken sowie jeweils Infimum und Supremum, falls existent, an.

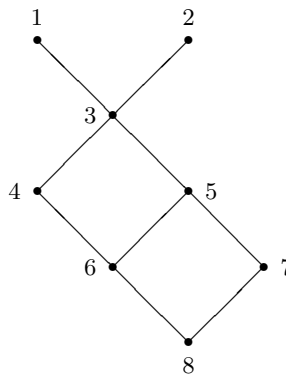


Abb. 19.5. Hasse-Diagramm.

19.5. Die Mengen $W_1 = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ und $W_2 = \{1, 3, 4, 9\}$ sind halbgeordnet bzgl. der Teilbarkeitsrelation. Welche dieser halbgeordneten Mengen bilden Verbände?

19.6. Bildet die halbgeordnete Menge in Abb. 19.6 einen Verband?

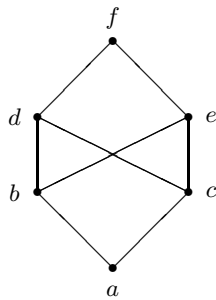


Abb. 19.6. Hasse-Diagramm.

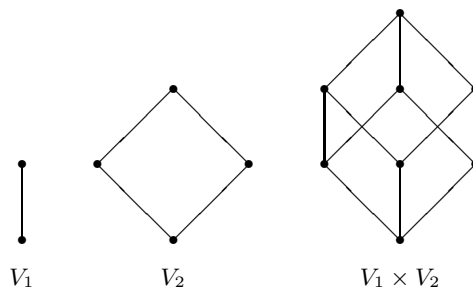


Abb. 19.7. Produktverband.

19.7. Stelle die Verknüpfungstafeln für den Produktverband in Abb. 19.7 auf.

19.8. Sei V eine halbgeordnete Menge V und W eine Teilmenge von V mit kleinstem Element k und größtem Element g . Zeige, dass $k = \inf(W)$ und $g = \sup(W)$.

19.9. Ermittle alle Unterverbände des Verbandes "Fahne", die mehr als zwei Elementen enthalten.

19.10. Betrachte die bzgl. Teilbarkeit halbgeordnete Menge $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ und die total geordnete Menge $B = \{a, b, c, d, e\}$. Bestimme alle Ordnungshomomorphismen von A nach B .

19.11. Betrachte die Verbände in Abb. 19.8. Zeige, dass V_1 und V_2 isomorph sind. Beweise ferner, dass es keinen Verbandsepimorphismus von V_1 auf V_3 gibt.

19.12. Sei (A, \leq) eine halbgeordnete Menge. Für jede Teilmenge X von A bezeichne

$$(X) = \{y \in A \mid \exists x \in X [y \leq x]\}$$

den von X erzeugten Anfang von A . Zeige, dass (\cdot) ein Hüllenoperator ist.

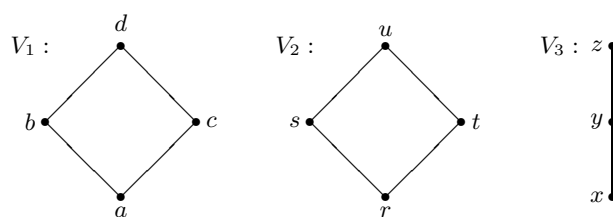


Abb. 19.8. Drei Verbände.

19.13. Sei R ein Kontext über G und M . Zeige, dass für alle $X \subseteq G$ und $Y \subseteq M$ gilt

$$X' = \bigcap_{g \in X} \{g\}' \quad \text{und} \quad Y' = \bigcap_{m \in Y} \{m\}'.$$

Seien X_1 und X_2 Teilmengen von G . Beweise oder widerlege

$$(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cap X_2', \quad (X_1 \cap X_2)' = X_1' \cup X_2'.$$

19.14. Gegeben sei folgender Kontext

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
G1				X			
G2			X				
G3			X		X		
G4							X
G5	X	X				X	
G6	X	X					
G7	X	X	X				

Bestimme alle Begriffe und zeichne das zugehörige Hasse-Diagramm.

Boolesche Verbände

Die booleschen Verbände zählen zu den wichtigsten Verbänden. Wir behandeln endliche boolesche Verbände und beschäftigen uns eingehender mit einer Klasse boolescher Verbände, den so genannten Schaltalgebren, mit denen sich kombinatorische Schaltkreise aufbauen lassen.

20.1 Distributive und komplementäre Verbände

Distributive Verbände

Ein Verband V heißt *distributiv*, wenn für alle Elemente $u, v, w \in V$ gilt

$$u \sqcap (v \sqcup w) = (u \sqcap v) \sqcup (u \sqcap w) \quad (20.1)$$

und

$$u \sqcup (v \sqcap w) = (u \sqcup v) \sqcap (u \sqcup w). \quad (20.2)$$

Satz 20.1. (Kürzungsregel) *Sei V ein distributiver Verband. Für alle Elemente $u, v, w \in V$ folgt aus $u \sqcap v = u \sqcap w$ und $u \sqcup v = u \sqcup w$ sofort $v = w$.*

Beweis. Für alle $u, v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} v &= v \sqcap (v \sqcup u), && \text{Verschmelzung,} \\ &= v \sqcap (w \sqcup u), && \text{nach Voraussetzung, Kommutativität,} \\ &= (v \sqcap w) \sqcup (v \sqcap u), && \text{Distributivität,} \\ &= (w \sqcap v) \sqcup (w \sqcap u), && \text{nach Voraussetzung, Kommutativität,} \\ &= w \sqcap (v \sqcup u), && \text{Distributivität,} \\ &= w \sqcap (w \sqcup u), && \text{nach Voraussetzung, Kommutativität,} \\ &= w, && \text{Verschmelzung.} \end{aligned}$$

□

Null- und Einselement

Das kleinste bzw. größte Element eines Verbands V wird, sofern existent, *Null* bzw. *Eins* von V genannt und mit 0 bzw. 1 bezeichnet. Beide Elemente sind nach Lemma 5.13 eindeutig bestimmt.

Beispiele 20.2. Der natürliche Teilerverband hat als Null das Element 1 und als Eins das Element 0. Der Teilerverband von $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt als Null die Zahl 1 und als Eins die Zahl n .

Aus der Definition der induzierten Halbordnung (19.3) sowie (19.4) erhalten wir das folgende

Lemma 20.3. *Sei V ein Verband mit Null und Eins. Für alle Elemente $v \in V$ gilt $v \sqcap 0 = 0$, $v \sqcup 0 = v$, $v \sqcap 1 = v$ und $v \sqcup 1 = 1$.*

Satz 20.4. *Jeder endliche Verband besitzt eine Null und eine Eins.*

Beweis. Sei V ein endlicher Verband. Nach Satz 19.13 existiert $\inf(V)$. Für jedes Element $v \in V$ gilt definitionsgemäß $\inf(V) \sqsubseteq v$. Also ist $\inf(V)$ das kleinste Element in V . Analog wird gezeigt, dass $\sup(V)$ die Eins in V ist. \square

Komplementäre Verbände

Ein Verband V mit Null und Eins heißt *komplementär*, wenn zu jedem $v \in V$ ein $w \in V$ existiert mit $v \sqcap w = 0$ und $v \sqcup w = 1$. Ein solches Element w wird dann ein *Komplement* von v genannt. Ist das Komplement von v eindeutig bestimmt, so wird es mit \bar{v} bezeichnet. Die Null und Eins in einem Verband sind nach Lemma 20.3 komplementär, sofern sie existieren

$$\bar{1} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{0} = 1. \quad (20.3)$$

Satz 20.5. *In einem distributiven Verband hat jedes Element höchstens ein Komplement.*

Beweis. Sei V ein distributiver Verband und $v \in V$. Sind $u, w \in V$ Komplemente von v , dann gilt $v \sqcap u = 0 = v \sqcap w$ und $v \sqcup u = 1 = v \sqcup w$. Da V nach Voraussetzung distributiv ist, folgt mit der Kürzungsregel $u = w$. \square

Beispiele 20.6. • Der Pentagon-Verband V ist komplementär, weil jedes Element in V wenigstens ein Komplement besitzt:

$$\begin{array}{c|cccc} v & 0 & a & b & c & 1 \\ \hline \text{Komplemente von } v & 1 & b & c & a & 0 \end{array}$$

Dieser Verband ist nach Satz 20.5 nicht distributiv.

- Der Diamant-Verband V ist ebenfalls komplementär, denn jedes Element in V hat mindestens ein Komplement:

v	0	a	b	c	1
Komplemente von v	1	b, c	a, c	a, b	0

Dieser Verband ist nach Satz 20.5 ebenfalls nicht distributiv.

- Die Kette $\{0, a, b, c, 1\}$ in Abb. 19.3 bildet einen nichtkomplementären Verband. Denn die zwischen Null und Eins liegenden Elemente a , b und c haben kein Komplement.

Der Pentagon- und der Diamant-Verband sind Prototypen nichtdistributiver Verbände, denn es gilt der folgende

Satz 20.7. (Gabor Szász, 1963) *Ein Verband V ist distributiv genau dann, wenn V keinen zum Pentagon- oder Diamant-Verband isomorphen Unterverband enthält.*

Mit diesem Satz und Satz 19.9 erhalten wir ein wichtiges

Korollar 20.8. *Jede Kette bildet einen distributiven Verband.*

Beispiele 20.9. • Der Potenzmengenverband einer Menge A ist nach Satz 3.7 distributiv und komplementär. Die Null ist die leere Menge und die Eins ist die Menge A . Das Komplement von $B \in P(A)$ ist $\overline{B} = A \setminus B$.

- Der natürliche Teilververband ist nach Selbsttestaufgabe 13.6 distributiv mit 1 als Null und 0 als Eins. Der Verband ist nicht komplementär. Denn seien m und n natürliche Zahlen mit $[m, n] = 0$. Dann folgt $m = 0$ oder $n = 0$. O.B.d.A. sei $n = 0$. Dann ist $(m, 0) = m$. Somit haben nur ± 1 Komplemente.
- Der Teilververband von 30 ist distributiv, weil er ein Unterverband des natürlichen Teilverbands ist. Er ist sogar komplementär, denn das Komplement eines Teilers d von 30 ist durch $30/d$ gegeben. Demgegenüber ist der Teilververband von 12 nicht komplementär, weil die Zahl 6 kein Komplement besitzt.
- Der Unterraumverband des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{R}^2 ist komplementär mit dem Nullraum $\{0\}$ als Null und \mathbb{R}^2 als Eins. Zu jedem 1-dimensionalen Unterraum U in \mathbb{R}^2 gibt es einen Vektor $u \in U$ mit $U = \mathbb{R}u = \{ru \mid r \in \mathbb{R}\}$. Wir ergänzen u zu einer Basis $\{u, v\}$ von \mathbb{R}^2 . Für den Unterraum $W = \mathbb{R}v$ gilt $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = \mathbb{R}^2$. Also ist W komplementär zu U . Das Komplement ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, weil der Vektor u auf unendlich viele Arten zu einer Basis von \mathbb{R}^2 ergänzt werden kann. Also ist der Unterraumverband von \mathbb{R}^2 nicht distributiv.

20.2 Boolesche Algebren

Eine *boolesche Algebra* ist ein distributiver und komplementärer Verband. Mit Satz 20.5 erhalten wir den folgenden

Satz 20.10. *In einer booleschen Algebra hat jedes Element genau ein Komplement.*

Aus 20.9 resultieren eine Reihe von Beispielen.

Satz 20.11. *Jeder Potenzmengenverband ist eine boolesche Algebra.*

Satz 20.12. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Teilverband von n ist eine boolesche Algebra genau dann, wenn n ein Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen ist.*

Beweis. Sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von n . Der Teilverband von n ist distributiv, weil er Unterverband des natürlichen Teilverbands ist und letzterer distributiv ist. Wir betrachten zwei Fälle. Ist $e_1 = \dots = e_r = 1$, dann hat jeder Teiler $m \geq 1$ von n als Komplement den ganzzahligen Bruch n/m . Sei $e_j > 1$ für ein $1 \leq j \leq r$. Dann ist $m = p_1 \cdots p_r$ ein echter Teiler von n und für jeden Teiler $l > 1$ von n gilt $(m, l) > 1$. Also hat m kein Komplement. \square

Satz 20.13. (De Morgansche Gesetze) *Für alle Elemente a und b einer booleschen Algebra B gilt $\overline{a \sqcap b} = \overline{a} \sqcup \overline{b}$ und $\overline{a \sqcup b} = \overline{a} \sqcap \overline{b}$.*

Beweis. Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} (a \sqcap b) \sqcap (\overline{a} \sqcup \overline{b}) &= ((a \sqcap b) \sqcap \overline{a}) \sqcup ((a \sqcap b) \sqcap \overline{b}) \\ &= ((a \sqcap \overline{a}) \sqcap b) \sqcup (a \sqcap (b \sqcap \overline{b})) \\ &= (0 \sqcap b) \sqcup (a \sqcap 0) = 0 \sqcup 0 = 0 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (a \sqcap b) \sqcup (\overline{a} \sqcup \overline{b}) &= (a \sqcup (\overline{a} \sqcup \overline{b})) \sqcap (b \sqcup (\overline{a} \sqcup \overline{b})) \\ &= ((a \sqcup \overline{a}) \sqcup \overline{b}) \sqcap (\overline{a} \sqcup (b \sqcup \overline{b})) \\ &= (1 \sqcup \overline{b}) \sqcap (\overline{a} \sqcup 1) = 1 \sqcap 1 = 1. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{a \sqcap b}$ ein Komplement von $a \sqcap b$. Da aber das Komplement in B nach Satz 20.10 eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. Die zweite Aussage wird analog bewiesen. \square

Satz 20.14. (Involutionengesetz) *Für alle Elemente a einer booleschen Algebra B gilt $\overline{\overline{a}} = a$.*

Beweis. Aus $a \sqcap \overline{a} = 0$ und $a \sqcup \overline{a} = 1$ folgt, dass a ein Komplement von \overline{a} ist. Weil das Komplement von \overline{a} in B nach Satz 20.10 eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. \square

Sei B eine boolesche Algebra und P eine Aussage in B . Die *duale Aussage* von P in B ist eine Aussage P^d , die aus P entsteht, indem in P die Operationen \sqcap und \sqcup , die Halbordnungen \sqsubseteq und \sqsupseteq sowie die Elemente 0 und 1 überall gleichzeitig miteinander vertauscht werden.

Satz 20.15. (Dualitätsprinzip) *Sei B eine boolesche Algebra. Ist P eine wahre Aussage in B , dann ist auch P^d eine wahre Aussage in B .*

Die Beweisidee haben wir bereits in Satz 19.2 skizziert.

20.3 Normalformen

Sei B eine boolesche Algebra. Ein Element $a \neq 0$ in B heißt ein *Atom* von B , wenn zwischen 0 und a kein weiteres Element von B liegt, d. h. für alle $b \in B$ folgt aus $0 \sqsubseteq b \sqsubseteq a$ sofort $b = 0$ oder $b = a$.

Beispiele 20.16. Die Atome des Potenzmengenverbands $P(A)$, $A \neq \emptyset$, sind die einelementigen Teilmengen von A . Die Atome des Teilverbands von $n \in \mathbb{N}$ sind die Primfaktoren von n .

Lemma 20.17. *Sei B eine boolesche Algebra. Für alle Atome $a, a' \in B$ gilt*

$$a \sqcap a' = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \neq a', \\ a & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.4)$$

Beweis. Seien $a, a' \in B$ Atome. Es gilt definitionsgemäß $0 \sqsubseteq a \sqcap a' \sqsubseteq a$ und somit nach Voraussetzung entweder $a \sqcap a' = 0$ oder $a \sqcap a' = a$. Aus $a \sqcap a' = a$ folgt per definitionem $a' \sqsubseteq a$ und somit nach Annahme $a = a'$. Aus $a \sqcap a' = 0$ ergibt sich mit dem Idempotenzgesetz $a \neq a'$. \square

Sei $b \in B$. Die *atomare Menge* von b in B ist die Menge aller Atome von B , die vor b liegen

$$A(b) = \{a \mid a \sqsubseteq b, a \text{ ist Atom von } B\}. \quad (20.5)$$

Beispiel 20.18. Für den Teilverband von 30 gilt

b	1	2	3	5	6	10	15	30
$A(b)$	\emptyset	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{3, 5\}$	$\{2, 3, 5\}$

Ein Element $c \neq 1$ in B heißt ein *Koatom* von B , wenn zwischen c und 1 kein weiteres Element von B liegt, d. h. für alle $b \in B$ impliziert $c \sqsubseteq b \sqsubseteq 1$ direkt $b = c$ oder $b = 1$. Atome und Koatome gehen vermöge des Dualitätsprinzips ineinander über.

Beispiele 20.19. Die Koatome des Potenzmengenverbands einer n -elementigen Menge A sind die $(n - 1)$ -elementigen Teilmengen von A . Die Koatome des Teilverbands von $n \in \mathbb{N}$ sind die Koprimfaktoren n/p , wobei p ein Primteiler von n ist.

Sei $b \in B$. Die *koatomare Menge* von b in B ist die Menge aller Koatome von B , die oberhalb von b liegen

$$C(b) = \{c \mid b \sqsubseteq c, c \text{ ist Koatom von } B\}. \quad (20.6)$$

Beispiel 20.20. Für den Teilverband von 30 gilt

b	1	2	3	5	6	10	15	30
$C(b)$	{6, 10, 15}	{6, 10}	{6, 15}	{10, 15}	{6}	{10}	{15}	\emptyset

Satz 20.21. (Disjunktive Normalform) *Sei B eine endliche boolesche Algebra. Jedes Element $b \in B$ ist darstellbar als Supremum der atomaren Menge von b*

$$b = \bigsqcup_{a \in A(b)} a. \quad (20.7)$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Elemente in $A(b)$.

Beweis. Für die Null ist die Aussage klar, weil das Supremum über die leere Menge gleich Null ist.

Sei $b \in B$ mit $b \neq 0$. Wir zeigen zuerst die Existenz der Darstellung. Da B endlich ist, gibt es nur endlich viele Elemente, die vor b liegen. Unter diesen Elementen befindet sich mindestens ein Atom. Also ist $A(b)$ nicht leer. Wir setzen

$$c = \bigsqcup_{a \in A(b)} a. \quad (20.8)$$

Für jedes $a \in A(b)$ gilt $a \sqsubseteq b$. Vermöge Monotonie und Idempotenz folgt $c \sqsubseteq b$, also $b \sqcup c = c$. Mit Distributivität ergibt sich

$$(b \sqcap \bar{c}) \sqcup c = (b \sqcup c) \sqcap (c \sqcup \bar{c}) = b \sqcap 1 = b. \quad (20.9)$$

Angenommen, es wäre $c \neq b$. Dann ist $b \sqcap \bar{c}$ von Null verschieden. Folglich gibt es ein Atom $a \in B$ mit $a \sqsubseteq b \sqcap \bar{c}$, also $a \sqsubseteq b$ und $a \sqsubseteq \bar{c}$. Das Atom a liegt in $A(b)$ und mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz erhellt sich

$$a \sqcup c = a \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{a' \in A(b) \\ a' \neq a}} a' \right) = c. \quad (20.10)$$

Somit ist $a \sqsubseteq c$ und deshalb widersprüchlicherweise $a \sqsubseteq c \sqcap \bar{c} = 0$.

Wir beweisen noch die Eindeutigkeit der Darstellung. Sei $b \in B$ als Supremum einer Menge A von Atomen von B darstellbar, also

$$b = \bigsqcup_{a \in A} a. \quad (20.11)$$

Für jedes $a \in A$ gilt $a \sqsubseteq b$ und somit vermöge Distributivität

$$a = a \sqcap b = a \sqcap \left(\bigsqcup_{a' \in A(b)} a' \right) = \bigsqcup_{a' \in A(b)} (a \sqcap a'). \quad (20.12)$$

Diese Identität hat nach Lemma 20.17 nur Bestand, wenn a in $A(b)$ liegt. Folglich ist A eine Teilmenge von $A(b)$. Da die Rollen von $A(b)$ und A vertauschbar sind, folgt $A(b) = A$. \square

Durch Dualisierung von Satz 20.21 ergibt sich der folgende

Satz 20.22. (Konjunktive Normalform) *Sei B eine endliche boolesche Algebra. Jedes Element $b \in B$ ist darstellbar als Infimum der koatomaren Menge $C(b)$. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Elemente in $C(b)$.*

Satz 20.23. (Darstellungssatz) *Jede endliche boolesche Algebra ist isomorph zu einem Potenzmengenverband.*

Beweis. Sei B eine endliche boolesche Algebra und A die Menge aller Atome von B . Wir zeigen, dass die Abbildung $\phi : B \rightarrow P(A) : b \mapsto A(b)$ ein Isomorphismus ist. Die Abbildung ϕ ist surjektiv, weil für jede Menge von Atomen $A' \subseteq A$ das Supremum $\bigsqcup_{a \in A'} a \in B$ nach Satz 19.13 existiert. Die Abbildung ϕ ist injektiv, weil jedes $b \in B$ nach Satz 20.21 das Supremum von $A(b)$ ist und dabei $A(b)$ eindeutig bestimmt ist. Seien $b, c \in B$. Für beliebiges $a \in B$ gilt $a \sqsubseteq b \sqcap c$ genau dann, wenn $a \sqsubseteq b \wedge a \sqsubseteq c$. Ferner gilt $a \sqsubseteq b \sqcup c$ genau dann, wenn $a \sqsubseteq b \vee a \sqsubseteq c$. Daraus folgt $A(b \sqcap c) = A(b) \cap A(c)$ und $A(b \sqcup c) = A(b) \cup A(c)$. Dies hat als Konsequenz $\phi(b \sqcap c) = A(b \sqcap c) = A(b) \cap A(c) = \phi(b) \cap \phi(c)$ und $\phi(b \sqcup c) = A(b \sqcup c) = A(b) \cup A(c) = \phi(b) \cup \phi(c)$. \square

Mit dem Satz 20.11 erhellt sich ein wichtiges

Korollar 20.24. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte boolesche Algebra mit 2^n Elementen.*

20.4 Schaltalgebren

Ein Computer besteht aus elektronischen Schaltkreisen. Ein Schaltkreis ist aus verdrahteten, bistabilen Elementen aufgebaut, die die Werte 0 (niedrige Spannung) und 1 (hohe Spannung) annehmen. Wir unterscheiden zwischen kombinatorischen und sequentiellen Schaltkreisen. Bei kombinatorischen Schaltkreisen hängt die Ausgabe nur von der Eingabe ab, während bei sequentiellen Schaltkreisen die Ausgabe auch durch innere Zustände (Registerinhalte) bestimmt wird. Rechenwerke sind kombinatorische Schaltkreise, während Steuerwerke durch sequentielle Schaltkreise realisiert werden.

Schaltfunktionen

Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Eine n -stellige *Schaltfunktion* ist eine Abbildung $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$. Eine solche Abbildung beschreibt einen kombinatorischen Schaltkreis mit n Eingängen und einem Ausgang (Abb. 20.1). Wir untersuchen im Folgenden die Menge aller n -stelligen Schaltfunktionen $\mathbb{F}_n = \{f \mid f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}\}$. Die

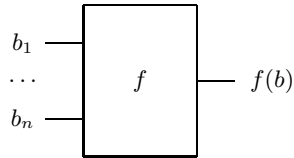


Abb. 20.1. Eine n -stellige Schaltfunktion f .

nullstelligen Schaltfunktionen sind die Konstantenfunktionen, die Nullfunktion $0 : b \mapsto 0$ und die Einsfunktion $1 : b \mapsto 1$. Die einstelligen Schaltfunktionen sind die identische Abbildung $id : b \mapsto b$, die Negation $\neg : b \mapsto \neg b$ und die beiden Konstantenabbildungen $0 : b \mapsto 0$ und $1 : b \mapsto 1$, also

b	$id(b)$	$\neg b$	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Zu den wichtigsten zweistelligen Schaltfunktionen zählen Konjunktion und Disjunktion

b_1	b_2	$b_1 \wedge b_2$	$b_1 \vee b_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Die kombinatorischen Schaltkreise der Schaltfunktionen Konjunktion, Disjunktion und Negation werden als *Gatter* bezeichnet. Die hierfür üblichen Schaltsymbole der zugehörigen Schaltkreise zeigt die Abb. 20.2.

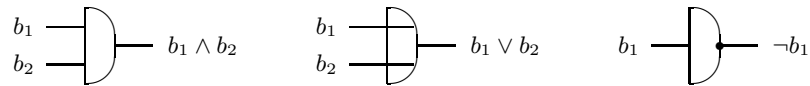


Abb. 20.2. UND-Gatter, ODER-Gatter und NICHT-Gatter (Inverter).

Verknüpfung von Schaltfunktionen

Seien f_1, \dots, f_m Schaltfunktionen gleicher Stelligkeit n . Wir stellen uns vor, dass die zugehörigen kombinatorischen Schaltkreise zu einem neuen Schaltkreis so zusammengefasst werden, dass sie allesamt von der gleichen Eingabe gespeist und ihre Ausgaben durch einen weiteren Schaltkreis verknüpft werden (Abb. 20.3). Wird dieser weitere Schaltkreis durch eine m -stellige Schaltfunktion f spezifiziert, so erhalten wir eine n -stellige Schaltfunktion $g = f(f_1, \dots, f_m)$, definiert durch

$$g(b) = f(f_1(b), \dots, f_m(b)), \quad b \in \mathbb{B}^n. \quad (20.13)$$

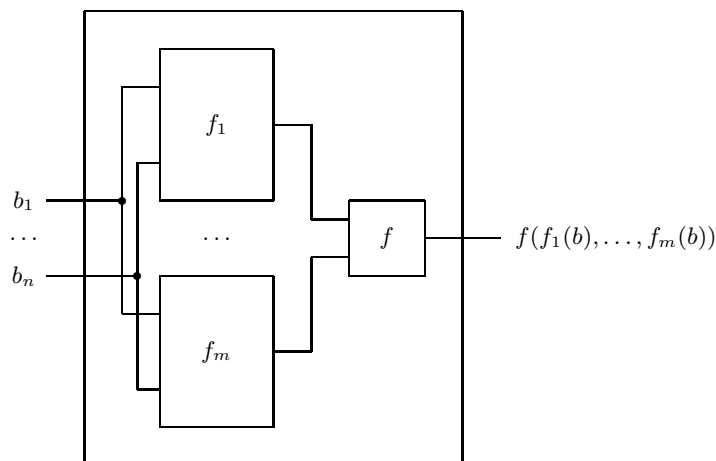


Abb. 20.3. Eine Schaltung für die n -stellige Schaltfunktion $g = f(f_1, \dots, f_m)$.

Von besonderem Interesse sind zusammengesetzte Schaltfunktionen, die mithilfe von Konjunktion, Disjunktion und Negation gebildet werden (siehe Abb. 20.4)

$$\begin{aligned}(f_1 \wedge f_2)(b) &= f_1(b) \wedge f_2(b), \\ (f_1 \vee f_2)(b) &= f_1(b) \vee f_2(b), \\ (\neg f_1)(b) &= \neg f_1(b), \quad b \in \mathbb{B}^n.\end{aligned}$$

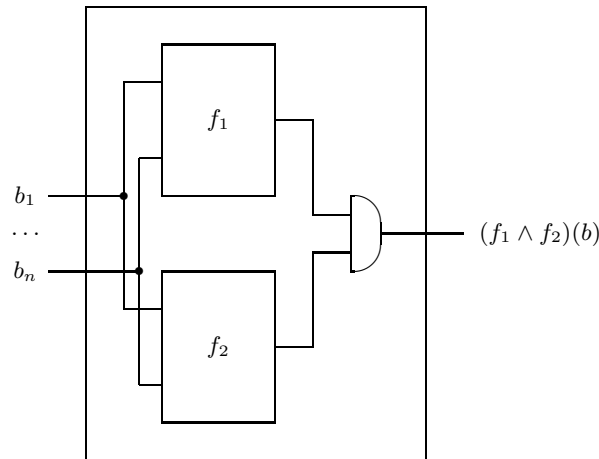


Abb. 20.4. Eine Schaltung für die n -stellige Schaltfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Beispiel 20.25. Einige Verknüpfungen der NAND-Funktion $\overline{\wedge}$ und der NOR-Funktion $\overline{\vee}$ zeigt die folgende Wertetabelle

b_1	b_2	$\overline{\wedge}(b)$	$\overline{\vee}(b)$	$(\neg \overline{\wedge})(b)$	$(\overline{\wedge} \wedge \overline{\vee})(b)$	$(\overline{\wedge} \vee \overline{\vee})(b)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0

Satz 20.26. *Sei n eine natürliche Zahl. Die Menge aller n -stelligen Schaltfunktionen bildet zusammen mit Konjunktion und Disjunktion eine boolesche Algebra.*

Beweis. Die Verbandseigenschaften werden auf die entsprechenden Eigenschaften des Aussagenverbands $(\mathbb{B}, \wedge, \vee)$ zurückgeführt. Beispielsweise ist die

Konjunktion in \mathbb{F}_n kommutativ, denn für alle $f, g \in \mathbb{F}_n$ und $b \in \mathbb{B}^n$ gilt $(f \wedge g)(b) = f(b) \wedge g(b) = g(b) \wedge f(b) = (g \wedge f)(b)$. Die Null in \mathbb{F}_n ist die Nullfunktion $b \mapsto 0$, die Eins die Einsfunktion $b \mapsto 1$ und das Komplement von $f \in \mathbb{F}_n$ ist $\neg f$. \square

Die boolesche Algebra \mathbb{F}_n der n -stelligen Schaltfunktionen wird *Schaltalgebra* genannt. Im Folgenden schreiben wir für die Operationen von \mathbb{F}_n

$$fg = f \wedge g, \quad f + g = f \vee g \quad \text{und} \quad \overline{f} = \neg f. \quad (20.14)$$

In einem klammerfreien Ausdruck, in dem Schaltfunktionen durch Addition, Multiplikation und Negation verknüpft sind, soll die Negation die höchste, die Multiplikation die zweithöchste und die Addition die niedrigste Priorität besitzen. Dadurch lassen sich Klammern sparen, wie etwa in $(\overline{f+g}) + (fg) = \overline{f+g} + fg$.

Die induzierte Halbordnung

Der *Träger* einer n -stelligen Schaltfunktion f ist die Menge aller Wertekombinationen $T(f)$, bei denen f den Wert 1 annimmt, also

$$T(f) = \{b \in \mathbb{B}^n \mid f(b) = 1\}. \quad (20.15)$$

Lemma 20.27. *Sei \sqsubseteq die induzierte Halbordnung von \mathbb{F}_n . Für alle $f, g \in \mathbb{F}_n$ gilt $f \sqsubseteq g$ genau dann, wenn $T(f) \subseteq T(g)$.*

Beweis. Seien $f, g \in \mathbb{F}_n$. Nach Definition der induzierten Halbordnung ist $f \sqsubseteq g$ gleichbedeutend mit $fg = f$, d. h., $f(b) \wedge g(b) = f(b)$ für alle $b \in \mathbb{B}^n$. Diese Aussage gilt genau dann, wenn für alle $b \in \mathbb{B}^n$ aus $f(b) = 1$ stets $g(b) = 1$ folgt, was gleichbedeutend ist mit $T(f) \subseteq T(g)$. \square

Satz 20.28. *Die Abbildung $\mathbb{F}_n \rightarrow P(\mathbb{B}^n) : f \mapsto T(f)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Jede n -stellige Schaltfunktion ist eindeutig bestimmt durch ihren Träger. Also ist die Abbildung injektiv. Es ist klar, dass jede Teilmenge von \mathbb{B}^n Träger einer n -stelligen Schaltfunktion ist. Somit ist die Abbildung auch surjektiv. Seien $f, g \in \mathbb{F}_n$. Aus den Definitionen ergibt sich $T(fg) = T(f) \cap T(g)$ und $T(f+g) = T(f) \cup T(g)$. \square

Normalformen

Nach Satz 20.28 korrespondieren die Atome von \mathbb{F}_n zu den Atomen von $P(\mathbb{B}^n)$. Letztere sind aber die einelementigen Teilmengen von \mathbb{B}^n . Deshalb definieren wir zu jedem Element $a \in \mathbb{B}^n$ die n -stellige Schaltfunktion

$$m_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.16)$$

Nach Satz 20.28 korrespondieren die Atome von \mathbb{F}_n zu den Atomen von $P(\mathbb{B}_n)$, mithin zu den 1-elementigen Teilmengen von \mathbb{B}_n . Für den Träger von m_a gilt aber $T(m_a) = \{a\}$. Damit haben wir die folgende Aussage bewiesen.

Lemma 20.29. *Die Schaltfunktionen m_a , $a \in \mathbb{B}^n$, sind die Atome von \mathbb{F}_n .*

Für jedes Element $a \in B^n$ definieren wir die n -stellige Schaltfunktion

$$M_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \neq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.17)$$

Wegen Satz 20.28 korrespondieren die Coatome von \mathbb{F}_n zu den Coatomen von $P(\mathbb{B}_n)$, also zu den $(n-1)$ -elementigen Teilmengen von \mathbb{B}_n . Für den Träger von M_a gilt aber $T(M_a) = \mathbb{B}^n \setminus \{a\}$. Damit haben wir folgende Aussage gezeigt.

Lemma 20.30. *Die Schaltfunktionen M_a , $a \in \mathbb{B}^n$, sind die Coatome von \mathbb{F}_n .*

Mithilfe beider Lemmata können wir in der Schaltalgebra die Normalformensätze neu formulieren.

Satz 20.31. (Disjunktive Normalform) *Jede n -stellige Schaltfunktion f ist darstellbar in disjunktiver Normalform*

$$f = \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n \\ f(a)=1}} m_a. \quad (20.18)$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Atome.

Satz 20.32. (Konjunktive Normalform) *Jede n -stellige Schaltfunktion f ist darstellbar in konjunktiver Normalform*

$$f = \prod_{\substack{a \in \mathbb{B}^n \\ f(a)=0}} M_a. \quad (20.19)$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Coatome.

Beispiel 20.33. Die Schaltfunktion f für die Lampensteuerung in 1.11 hat die disjunktive Normalform $f = m_{10} + m_{01}$ und die konjunktive Normalform $f = M_{00}M_{11}$.

20.5 Kombinatorische Schaltkreise

Wir zeigen, dass sich kombinatorische Schaltkreise vollständig aus UND- und ODER-Gattern sowie Invertern aufbauen lassen.

Min- und Maxterme

Die i -te Projektion von \mathbb{F}_n ist die n -stellige Schaltfunktion

$$x_i : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B} : b \mapsto b_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (20.20)$$

Wir setzen

$$x_i^1 = x_i \quad \text{und} \quad x_i^0 = \bar{x}_i \quad (20.21)$$

und ordnen jeder Wertekombination $a \in \mathbb{B}^n$ zwei Schaltfunktionen zu

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \quad \text{und} \quad x_1^{\bar{a}_1} + \cdots + x_n^{\bar{a}_n}. \quad (20.22)$$

Erstere nimmt nur bei der Wertekombination a den Wert 1 an, während letztere nur bei der Wertekombination a den Wert 0 annimmt. Also folgt definitionsgemäß

$$m_a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \quad \text{und} \quad M_a = x_1^{\bar{a}_1} + \cdots + x_n^{\bar{a}_n}. \quad (20.23)$$

Die Atome m_a werden *Minterme* und die Koatome M_a *Maxterme* von \mathbb{F}_n genannt.

Beispiel 20.34. In der Schaltalgebra \mathbb{F}_3 lauten die Minterme

$$\begin{aligned} m_0 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad m_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad m_6 = x_1 x_2 \bar{x}_3, \\ m_1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3, \quad m_4 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad m_7 = x_1 x_2 x_3, \\ m_2 &= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3, \quad m_5 = x_1 \bar{x}_2 x_3, \end{aligned}$$

und die Maxterme

$$\begin{aligned} M_0 &= x_1 + x_2 + x_3, \quad M_3 = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \quad M_6 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3, \\ M_1 &= x_1 + x_2 + \bar{x}_3, \quad M_4 = \bar{x}_1 + x_2 + x_3, \quad M_7 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \\ M_2 &= x_1 + \bar{x}_2 + x_3, \quad M_5 = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3, \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Index $a = (a_2, a_1, a_0)$ jeweils durch sein Dezimaläquivalent $a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0$ ersetzt.

Boolesche Ausdrücke

Schaltfunktionen sind häufig in Form von booleschen Ausdrücken gegeben. Das sind arithmetische Ausdrücke in den Projektionen x_i , wie etwa

$$f = \overline{x_1(\bar{x}_2 x_3)} \overline{((\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3))}. \quad (20.24)$$

Die Projektionen und ihre Komplemente werden auch *Literale* genannt. Ein boolescher Ausdruck f kann wie folgt in disjunktive Normalform umgeformt werden:

1. Vereinfache sukzessive jede einzelne Klammer des Ausdrucks f durch die Gesetze von De Morgan und das Involutionsgesetz solange, bis jede Klammer nur noch aus Summen von Produkten von Literalen besteht.
2. Forme den Ausdruck in eine Summe von Produkten von Literalen anhand des Distributivgesetzes um.
3. Vereinfache die Produkte anhand der Kommutativ- und Idempotenzgesetze und entferne Produkte, die gleich Null sind.
4. Ein Produkt, das weder die Projektion x_i noch ihr Komplement enthält, wird mit dem Ausdruck $x_i + \bar{x}_i$ multipliziert.
5. Die letzte Anweisung wird solange wiederholt, bis jedes Produkt ein Minterm ist. Mehrfach auftretende Minterme werden bis auf einen eliminiert.

Beispiel 20.35. Der boolesche Ausdruck f in (20.24) wird nach obigem Rezept wie folgt umgeformt:

1. $f = (\bar{x}_1 + \overline{x_2 x_3})(\overline{x_1 + x_3}) + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + x_2 x_3)(x_1 \bar{x}_3 + x_2 x_3)$.
2. $f = \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_1 \bar{x}_3 + x_2 x_3 x_2 x_3$.
3. $f = 0 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + 0 + x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_2 x_3$.
4. $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + (x_1 + \bar{x}_1) x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3$.

Kombinatorische Schaltungsbündel

Kombinatorische Schaltkreise haben oft mehrere Ein- und Ausgänge. Solche Schaltungen werden durch Schaltungsbündel beschrieben. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein n -stelliges, m -wertiges *kombinatorisches Schaltungsbündel* ist eine Abbildung $F : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$. Ein kombinatorisches Schaltungsbündel F beschreibt m kombinatorische Schaltkreise mit jeweils n Eingängen und einem Ausgang, wobei die Eingänge der n Schaltkreise von derselben Quelle gespeist werden (Abb. 20.5). Also ist ein n -stelliges, m -wertiges Schaltungsbündel ein m -Tupel $F = (f_1, \dots, f_m)$ von n -stelligen Schaltfunktionen f_1, \dots, f_m , wobei für alle Wertekombinationen $b \in \mathbb{B}^n$ gilt

$$F(b) = (f_1(b), \dots, f_m(b)). \quad (20.25)$$

Halbaddierer

Ein *Halbaddierer* ist eine kombinatorische Schaltung zur Addition zweier Bits und wird durch ein zweistelliges, zweiwertiges Schaltungsbündel $H = (s_H, u_H)$ beschrieben, wobei die Schaltfunktion s_H die Summe und die Schaltfunktion u_H den Übertrag berechnet. Die Wertetabelle eines Halbaddierers lautet

b_1	b_2	$s_H(b)$	$u_H(b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

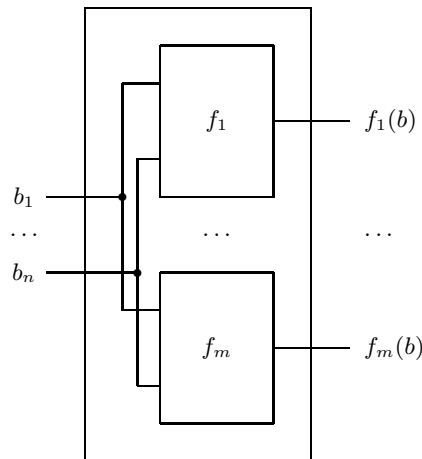


Abb. 20.5. Schaltung eines Schaltungsbündels $F = (f_1, \dots, f_m)$.

Die disjunktive Normalform des Halbaddierers lautet also

$$s_H = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \quad \text{und} \quad u_H = x_1 x_2. \quad (20.26)$$

Den Schaltkreis der Schaltfunktion s_H zeigt die Abb. 1.2, der Schaltkreis der Schaltfunktion u_H ist ein simples UND-Gatter. Für das Schaltungsbündel des Halbaddierers verwenden wir im Folgenden das in Abb. 20.6 dargestellte Schaltsymbol.

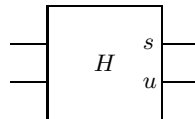


Abb. 20.6. Schaltsymbol für einen Halbaddierer.

Volladdierer

Ein *Volladdierer* ist eine kombinatorische Schaltung zur Addition dreier Bits und wird durch ein dreistelliges, zweiwertiges Schaltungsbündel $V = (s_V, u_V)$

dargestellt. Die Schaltfunktion s_V berechnet die Summe und die Schaltfunktion u_V den Übertrag. Die Wertetabelle des Volladdierers lautet

b_1	b_2	b_3	$s_V(b)$	$u_V(b)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Für die Summe gilt

$$\begin{aligned}
 s_V &= x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \\
 &= x_1(x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3) + \bar{x}_1(x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3) \\
 &= x_1s_H(x_2, x_3) + \bar{x}_1s_H(x_2, x_3) \\
 &= s_H(x_1, s_H(x_2, x_3))
 \end{aligned} \tag{20.27}$$

und für den Übertrag ergibt sich

$$\begin{aligned}
 u_V &= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 \\
 &= (x_1 + \bar{x}_1)x_2x_3 + x_1(x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3) \\
 &= x_2x_3 + x_1s_H(x_2, x_3) \\
 &= u_H(x_2, x_3) + u_H(x_1, s_H(x_2, x_3)).
 \end{aligned} \tag{20.28}$$

Also kann ein Volladdierer durch zwei Halbaddierer und ein ODER-Gatter realisiert werden (Abb. 20.7).

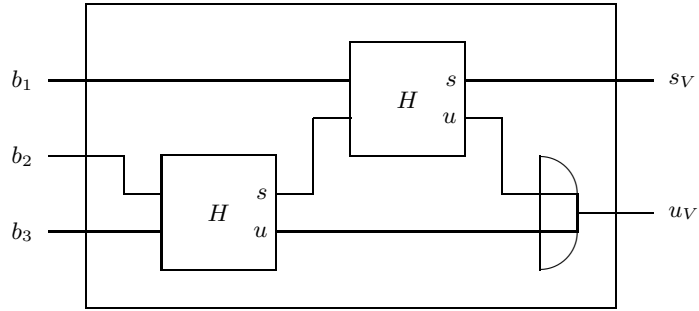


Abb. 20.7. Ein Volladdierer.

Addierwerke

Ein *Addierwerk* ist eine kombinatorische Schaltung zur Addition zweier n -stelliger Binärzahlen. Diese Schaltung stellt ein $2n$ -stelliges, $(n + 1)$ -wertiges Schaltungsbündel dar und kann durch n in Serie geschaltete Volladdierer realisiert werden. Dabei kann der Volladdierer für die niedrigstwertige Stelle durch einen Halbaddierer ersetzt werden, weil für die niedrigstwertige Stelle kein Übertrag zu berücksichtigen ist. Ein Addierwerk für dreistellige Binärzahlen zeigt die Abb. 20.8.

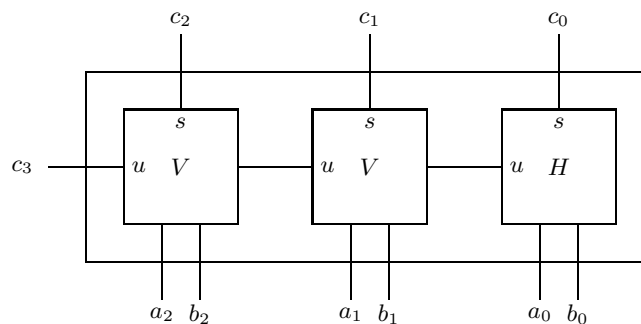


Abb. 20.8. Ein Addierwerk für dreistellige Binärzahlen.

Selbsttestaufgaben

20.1. Zeige, dass der Unterraumverband eines \mathbb{R} -Vektorraums V der Dimension $n \geq 2$ komplementär, aber nicht distributiv ist.

20.2. Ist der Verband “Fahne” komplementär, ist er distributiv?

20.3. Ist der Verband “Anhänger” komplementär, ist er distributiv?

20.4. Gib die Komplemente der Elemente des Teilverbands von 12 an. Ist dieser Verband komplementär, ist er distributiv?

20.5. Sei B eine boolesche Algebra und $a \in B$. Dualisiere die Gleichung $(a \sqcap 1) \sqcap (0 \sqcap \bar{a}) = 0$.

20.6. Beweise das Dualitätsprinzip 20.15.

20.7. Seien V und V' distributive Verbände. Zeige, dass $V \times V'$ ein distributiver Verband ist.

20.8. Seien V und V' komplementäre Verbände. Zeige, dass $V \times V'$ ein komplementärer Verband ist.

20.9. Bestimme alle Atome und Koatome des Teilerverbands von 1155.

20.10. Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ die boolesche Algebra mit zwei Elementen. Zeige, dass \mathbb{B}^n eine boolesche Algebra mit 2^n Elementen bildet.

20.11. Zeige, dass die booleschen Algebren $P(\underline{n})$ und \mathbb{B}^n isomorph sind.

20.12. Zeige, dass die Ideale im Ring der ganzen Zahlen einen Verband bilden, der distributiv, aber nicht komplementär ist.

20.13. Zeige, dass der Idealverband von \mathbb{Z} isomorph ist zum dualen Verband des natürlichen Teilerverbands.

20.14. Zeige, dass sich jede Schaltfunktion durch UND-Gatter und Inverter aufbauen lässt.

20.15. Zeige, dass für jede n -stellige Schaltfunktion f gilt

$$f(b) = b_n f(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) + \bar{b}_n f(b_1, \dots, b_{n-1}, 0), \quad b \in \mathbb{B}^n.$$