
Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional

Um Breve Estudo de Estabilidade e Controlabilidade de Bicicletas

Aluno: Alexandre de Carvalho Dias

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos de Castro Santos

Sumário

1	Modelando a bicicleta	7
1.1	O Modelo Carvallo-Whipple	8
1.2	Parâmetros iniciais	8
1.3	Forma Linear	10
1.4	Linearização do Whipple Model	11
2	Estabilidade	15
2.1	Representação do espaço de estado e o calculo dos autovalores	15
2.2	Resultados	17
3	Controlabilidade	21
3.1	Construção do controlador	21
3.2	Caminho traçado	22
3.3	Resultados	23
4	Conclusões	27

Lista de Figuras

1	A Bicicleta e seus centros de massa	7
2	Variáveis do modelo linear	10
3	Estabilidade na Bicicleta Leve (50Kg)	18
4	Estabilidade na Bicicleta padrão (85kg)	18
5	Estabilidade na Bicicleta Pesada (180kg)	19
6	Controlador em espaço de estado	22
7	Controle da bicicleta com autovalores conservadores	24
8	Controle da bicicleta com a parte imaginária agressiva	24
9	Controle da bicicleta com 1 ^o par de autovalores agressivos	25
10	Controle da bicicleta com 2 ^o par de autovalores agressivos	25
11	Controle da bicicleta com autovalores positivos	26

Lista de Tabelas

1	Parâmetros Iniciais	9
2	Comparação de estabilidade	20

Resumo

Este é um trabalho de conclusão do curso de Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional e aborda a teoria de controladores por estado de espaço aplicada ao modelo Carvallo-Whipple, um modelo de equações diferenciais ordinárias lineares que simula a dinâmica do movimento de uma bicicleta.

Serão apresentados os resultados de dois estudos referentes à estabilidade em cenários de mudança de peso e velocidade e à controlabilidade em manobras com a bicicleta do modelo.

Introdução

O trabalho a seguir tem como objetivo mostrar um breve estudo sobre a estabilidade e controlabilidade de bicicletas baseado no modelo de equações lineares de Carvallo-Whipple, utilizando a técnica de modelagem em espaço de estados e para a validação dos conceitos foi utilizado o software Scilab.

A utilização da técnica de modelagem de espaço de estados foi escolhida, pois é uma técnica genérica que pode ser aplicada à diversas áreas de estudos e sua aplicação é praticamente a mesma para qualquer modelo de equações diferenciais.

O Scilab foi escolhido como principal software do estudo por ser uma linguagem de código aberto, com uma comunidade de desenvolvimento ativa, ao contrário do Matlab. Além disto, dentro do Scilab já existem diversas funções prontas que facilitaram na hora da validação numérica dos modelos.

Por fim, o assunto modelagem de bicicletas foi escolhido por ser um assunto muito interessante referente a um meio de transporte não poluente que também é utilizado como lazer e esporte. Outro motivo é que a parte matemática do modelo tem uma complexidade compatível com o resto do trabalho.

No primeiro capítulo do trabalho será apresentado o modelo da bicicleta, suas variáveis mais importantes e uma forma de linearizar o modelo de Carvallo-Whipple. No capítulo seguinte montaremos a representação do modelo em espaço de estados, trazendo junto um estudo sobre a estabilidade de bicicletas de diversos pesos em diversas velocidades. Já no terceiro capítulo será mostrado como construir um controlador para atuar na bicicleta e traçar um caminho pré-definido.

1 Modelando a bicicleta

Inicialmente definiremos uma bicicleta como um corpo composto por quatro partes que consistem em duas rodas, um quadro e uma parte composta por guidão e garfo dianteiro. As rodas, que são posicionadas uma em frente a outra e ligadas pelo garfo e quadro, são os pontos de contato da bicicleta com a estrada onde a bicicleta está transitando.

Além destas quatro partes, uma outra muito importante é o ciclista, que normalmente é a com maior massa de todo o sistema e que também pode ser modelado de diversas formas.

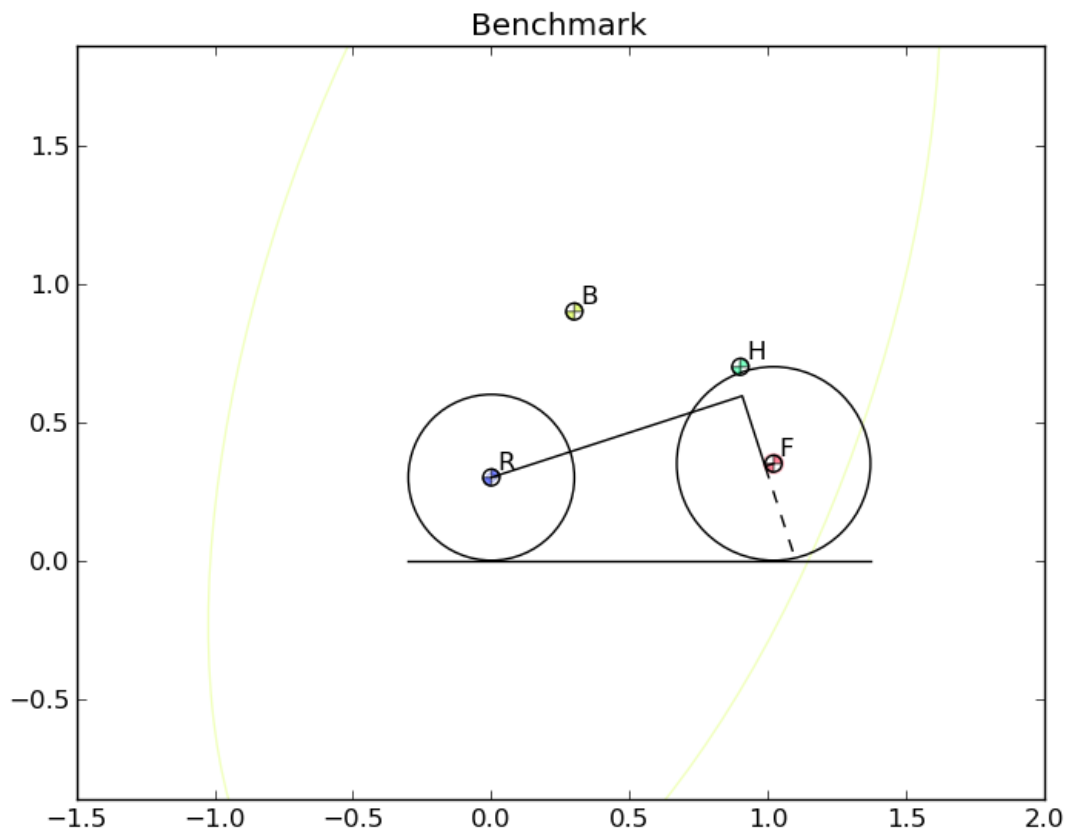


Figura 1: A Bicicleta e seus centros de massa

1.1 O Modelo Carvallo-Whipple

No estudo das bicicletas, um dos mais importantes modelos já apresentados é o Carvallo-Whipple. Todas as análises e modelos desenvolvidos neste trabalho se baseiam nele, sendo uma implementação direta ou uma extensão do modelo.

A forma não linear deste modelo é muito difícil de se manipular algebricamente e até hoje não foi publicado um artigo que o contenha em um formato simples o bastante para um ser humano ler e analisar as equações e, portanto, não nos aprofundaremos muito nesta forma durante o trabalho. Entretanto, caso queira conhecer melhor o modelo não linear, procure em [Moo12].

O modelo não linear pode ser linearizado de diversas formas e analisaremos com mais detalhes a forma apresentada em [MPRS07].

1.2 Parâmetros iniciais

O modelo da bicicleta é definido completamente por 25 parâmetros. Estes parâmetros foram definidos previamente a partir de medições físicas realizadas e apresentadas em [MPRS07] e são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 1: Parâmetros Iniciais

Parametro	Simbolo	Valor utilizado
Globais		
Distância entre eixos	w	1.02m
Pista	c	0.08m
Orientação do eixo de inclinação	λ	$\pi / 10$ rad
Gravidade	g	9.81 N/kg
Velocidade	v	5 m/s
Roda da Traseira (R)		
Raio	r_R	0.3m
Massa	m_R	2kg
Momento de inércia	$(I_{R_{xx}}, I_{R_{yy}})$	(0.0603, 0.12) kg m^2
Roda da Dianteira (F)		
Raio	r_F	0.35m
Massa	m_F	3kg
Momento de inércia	$(I_{F_{xx}}, I_{F_{yy}})$	(0.1405, 0.28) kg m^2
Quadro (B)		
Centro de massa	(x_B, z_B)	(0.3, -0.9)m
Massa	m_B	85kg
Momento de inércia	$\begin{bmatrix} I_{B_{xx}} & 0 & I_{B_{xz}} \\ 0 & I_{B_{yy}} & 0 \\ I_{B_{xz}} & 0 & I_{B_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ kg m^2
Guidão e Garfo (H)		
Centro de massa	(x_H, z_H)	(0.9, -0.7)m
Massa	m_H	4kg
Momento de inércia	$\begin{bmatrix} I_{H_{xx}} & 0 & I_{H_{xz}} \\ 0 & I_{H_{yy}} & 0 \\ I_{H_{xz}} & 0 & I_{H_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05892 & 0 & -0.00756 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.00756 & 0 & 0.00708 \end{bmatrix}$ kg m^2

1.3 Forma Linear

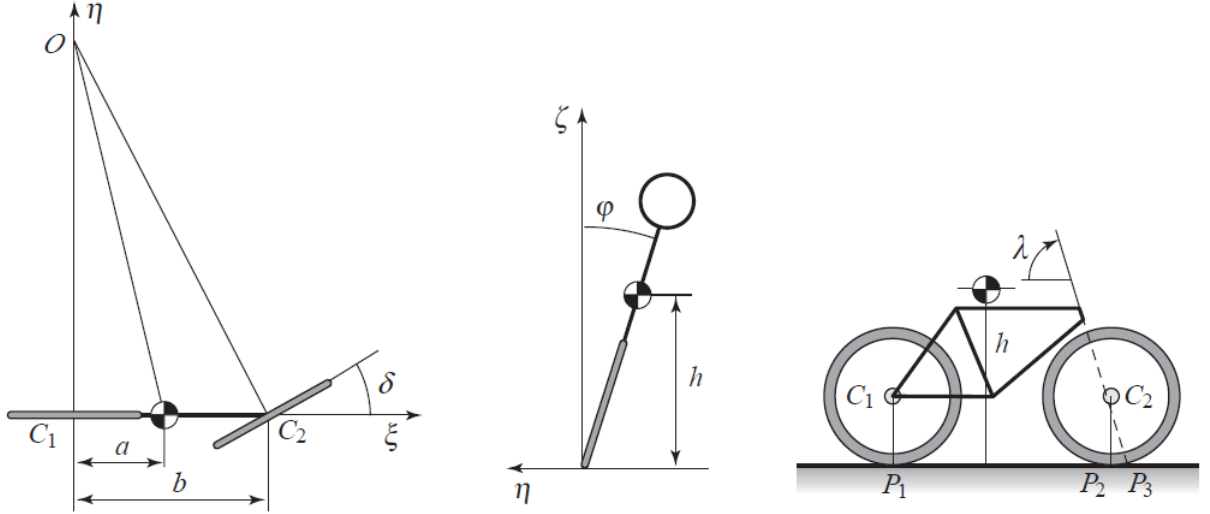


Figura 2: Variáveis do modelo linear

A forma linear do Whipple Model tem apenas duas variáveis livres, φ e δ . O φ é o ângulo de inclinação da bicicleta, formado ao “deitar” ou não a bicicleta para fazer uma curva, e o δ é o ângulo de controle, obtido na movimentação do guidão.

Desta forma, o modelo linear é dado por:

$$M\ddot{q} + vC_1\dot{q} + [gK_0 + v^2K_2]q = \mathbf{f} \quad (1)$$

Onde $q = \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix}$ e $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\delta \end{bmatrix}$, M é a matriz simétrica de massa que nos fornece a energia cinética da bicicleta, $C = vC_1$ é a matriz de amortecimento da velocidade v e $K = [gK_0 + v^2K_2]$ é a soma da matriz de aceleração da gravidade com a matriz dos efeitos giroscópicos e centrífugos da bicicleta.

Definimos M , C_1 , K_0 e K_2 a partir dos parâmetros apresentados em Parâmetros Iniciais, realizando uma série de linearizações descritas abaixo.

1.4 Linearização do Whipple Model

Para realizar a linearização do modelo a partir de Parâmetros Iniciais e chegar em (1) serão considerados os mesmos índices da tabela para as partes da bicicleta, isto é, R para a roda de trás, F para a roda da frente, H para o guidão e garfo e B para o quadro. Além destes índices, utilizaremos T para o total da bicicleta e A para a parte frontal da bicicleta, que é a junção do guidão e garfo com a roda dianteira.

Com estes índices definidos e lembrando que estamos trabalhando no \mathbb{R}^3 , podemos começar as equações. Primeiro as equações mais simples, que apenas calcula os totais da bicicleta:

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F$$

$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + w m_F}{m_T}$$

$$z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T}$$

$$I_{T_{xx}} = I_{R_{xx}} + I_{B_{xx}} + I_{F_{xx}} + I_{H_{xx}} + m_R r_R^2 + m_H r_H^2 + m_F r_F^2 + m_B r_B^2$$

$$I_{T_{xz}} = I_{B_{xz}} + I_{H_{xz}} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F$$

$$I_{T_{zz}} = I_{R_{zz}} + I_{B_{zz}} + I_{H_{zz}} + I_{F_{zz}} + m_B x_B^2 + m_H x_H^2 + m_F w^2, \text{ onde :}$$

$$I_{R_{zz}} = I_{R_{xx}}, \quad I_{F_{zz}} = I_{F_{xx}}$$

Os próximos valores definirão os valores do índice A, referente a parte frontal da bicicleta:

$$m_A = m_H + m_F$$

$$x_A = \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A}$$

$$z_A = \frac{x_H m_H - r_F m_F}{m_A}$$

$$I_{A_{xx}} = I_{H_{xx}} + I_{F_{xx}} + m_H(z_H - z_A)^2 + m_F(r_F + z_A)^2$$

$$I_{A_{xz}} = I_{H_{xz}} - m_H(x_H - x_A)(z_H - z_A) + m_F(w - x_A)(r_F + z_A)$$

$$I_{A_{zz}} = I_{H_{zz}} + I_{F_{zz}} + m_H(x_H - x_A)^2 + m_F(w - x_A)^2$$

Para as próximas equações, consideraremos $\lambda = (\sin \lambda, 0, \cos \lambda)^T$. O centro de massa da parte frontal da bicicleta é:

$$u_A = (x_A - w - c)\cos\lambda - z_A\sin\lambda$$

$$I_{A_{\lambda\lambda}} = m_A u_A^2 + I_{A_{xx}} \sin^2 \lambda + 2I_{A_{xz}} \sin \lambda \cos \lambda + I_{A_{zz}} \cos^2 \lambda$$

$$I_{A_{\lambda x}} = -m_A u_A z_A + I_{A_{xx}} \sin \lambda + I_{A_{xz}} \cos \lambda$$

$$I_{A_{\lambda z}} = m_A u_A x_A + I_{A_{xz}} \sin \lambda + I_{A_{zz}} \cos \lambda$$

A relação da trilha com a base da roda da frente é dada por:

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda$$

Os coeficientes giro estáticos das rodas em relação ao eixo y são dados por:

$$S_R = \frac{I_{Ryy}}{r_R}$$

$$S_F = \frac{I_{Fyy}}{r_F}$$

$$S_T = S_R + S_F$$

$$S_A = m_A u_A + \mu I_{T_{xz}}$$

Com estes termos definidos, podemos partir para a definição dos termos necessários à forma linear, M , C_1 , K_0 e K_2 .

$$\begin{aligned} M_{\varphi\varphi} &= I_{T_{xx}}, & M_{\varphi\delta} &= I_{A_{\lambda x}} + \mu I_{T_{xz}} \\ M_{\delta\varphi} &= M_{\varphi\delta}, & M_{\delta\delta} &= I_{A_{\lambda\lambda}} + 2\mu I_{A_{\lambda z}} + \mu^2 I_{T_{zz}} \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{\varphi\varphi} & M_{\varphi\delta} \\ M_{\delta\varphi} & M_{\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K_{0\varphi\varphi} &= m_T z_T, & K_{0\varphi\delta} &= -S_A \\ K_{0\delta\varphi} &= K_{0\varphi\delta}, & K_{0\delta\delta} &= -S_A \sin \lambda \end{aligned}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{0\varphi\varphi} & K_{0\varphi\delta} \\ K_{0\delta\varphi} & K_{0\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K_{2\varphi\varphi} &= 0, & K_{2\varphi\delta} &= \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda \\ K_{2\delta\varphi} &= 0, & K_{2\delta\delta} &= \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \end{aligned}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{2\varphi\varphi} & K_{2\varphi\delta} \\ K_{2\delta\varphi} & K_{2\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_{1\varphi\varphi} &= 0, & C_{1\varphi\delta} &= \mu S_T + S_F \cos\lambda + \frac{I_{T_{zz}}}{w} \cos\lambda - \mu m_T z_T \\ C_{1\delta\varphi} &= -(\mu S_T + S_F \cos\lambda), & C_{1\delta\delta} &= \frac{I_{A_{\lambda z}}}{w} \cos\lambda + \mu(S_A + \frac{I_{T_{zz}}}{w} \cos\lambda) \end{aligned}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1\varphi\varphi} & C_{1\varphi\delta} \\ C_{1\delta\varphi} & C_{1\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

2 Estabilidade

Agora que já temos o modelo linear bem definido, vamos verificar quando a bicicleta consegue se manter estável, mesmo sem interferência de nenhum controlador. Para isto, iremos analisar os autovalores do *ciclo aberto*.

$$M\ddot{q} + vC_1\dot{q} + [gK_0 + v^2K_2]q = 0 \quad (6)$$

A estabilidade é confirmada quando a parte real de todos os autovalores for negativa, caso contrário, a bicicleta é instável.

2.1 Representação do espaço de estado e o calculo dos autovalores

Para realizar o cálculo dos autovalores é necessário inicialmente escrever o modelo linear, que é de 2ª ordem, em uma representação do espaço de estado, que é de 1ª ordem. Para isso, iremos formular 4 matrizes A, B, C e D de modo que todos os estados da equação fiquem representados no sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x \in R^4, u \in R \\ y = Cx + Du & y \in R \end{cases} \quad (7)$$

Para esta operação ser realizada com mais facilidade, iremos considerar que:

$$CV = vM^{-1}C_1 \quad (8)$$

$$KV = M^{-1}(gK_0 + v^2K_2) \quad (9)$$

$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

E então, montaremos as matrizes do novo sistema da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ CV & KV \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Remontando o sistema (7) utilizando as equações de (11) à (14), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ CV_{1,1} & CV_{1,2} & KV_{1,1} & KV_{1,2} \\ CV_{2,1} & CV_{2,2} & KV_{2,1} & KV_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2,1}^{-1} \\ M_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Após este processo, calcular os autovalores do sistema se torna uma tarefa fácil, pois é necessário apenas resolver a seguinte equação:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (16)$$

Para resolver este determinante, foi utilizada a função *spec* do Scilab, que, dado uma matriz quadrada, retorna seus autovalores.

2.2 Resultados

Os testes realizados foram alterando a velocidade em 1m/s de 0m/s à 10m/s e foram utilizados 3 valores para a massa do quadro: 50kg, 85kg e 180kg.

Estes valores foram escolhidos para evidenciar os efeitos ocorridos na estabilidade após as mudanças de peso e velocidade. Abaixo temos os gráficos obtidos durante as simulações com a relação do valor dos 4 autovalores com a velocidade da bicicleta, além da faixa em que a bicicleta é estável. No final da sessão é apresentada uma tabela com o resumo dos resultados.

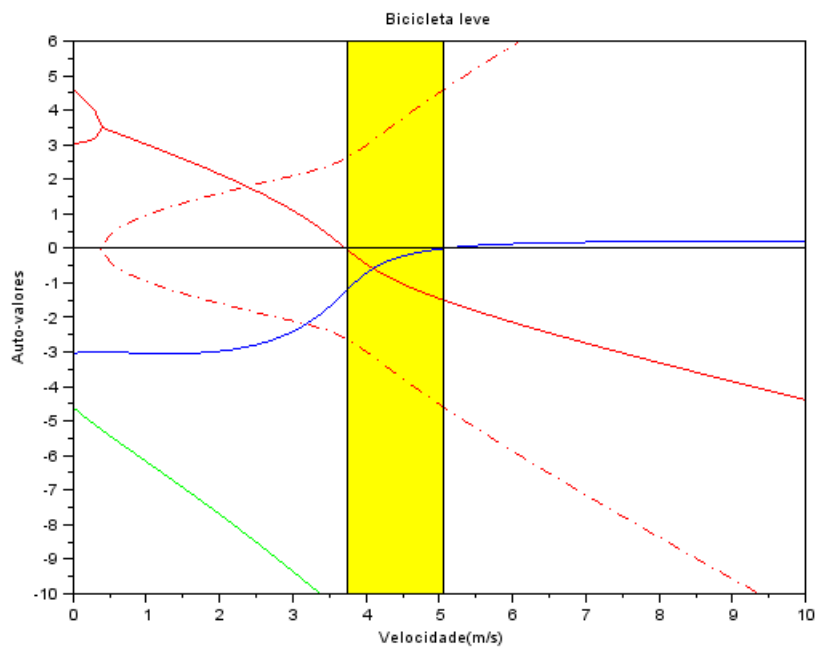


Figura 3: Estabilidade na Bicicleta Leve (50Kg)

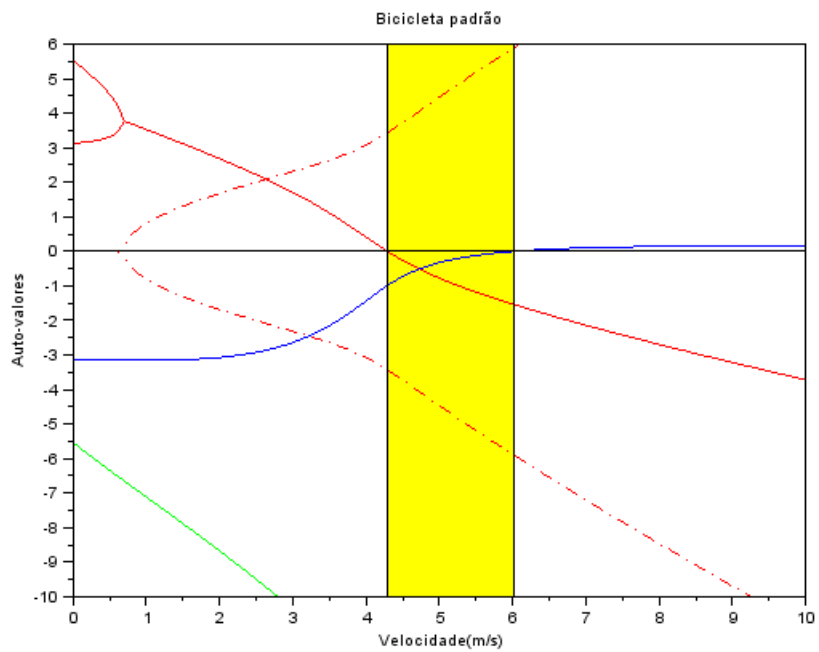


Figura 4: Estabilidade na Bicicleta padrão (85kg)

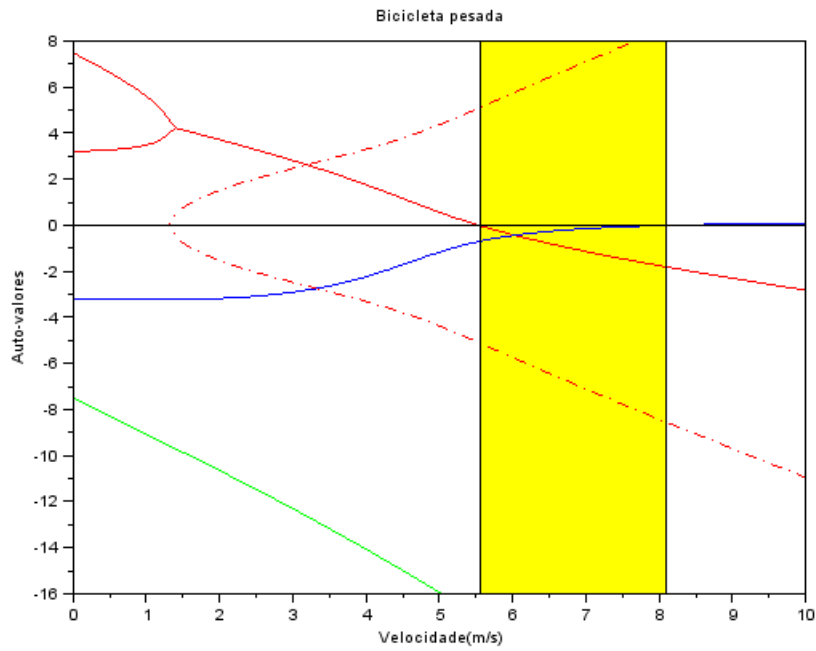


Figura 5: Estabilidade na Bicicleta Pesada (180kg)

É possível perceber que em todos os casos os autovalores se comportam de forma parecida. Sempre existe 1 autovalor de cor verde no gráfico que começa já negativo e continua diminuindo conforme a velocidade aumenta. Também podemos ver que o autovalor de cor azul é negativo em velocidades baixas, porém vai crescendo conforme a velocidade aumenta e é o responsável por tornar a bicicleta instável em velocidades altas. Por fim, o último par de autovalores de cor vermelha, após um curto aumento de velocidade, se torna igual na parte real e apresenta raízes imaginárias simétricas. Estes autovalores são os responsáveis pela instabilidade da bicicleta em velocidades baixas.

Em relação à mudança de massa da bicicleta, é possível verificar que quanto maior o peso, maior a velocidade que a bicicleta vai precisar adquirir para se tornar estável. Entretanto, a janela de estabilidade da bicicleta também cresce, deixando o ponto em que esta volta à instabilidade para uma velocidade mais distante do primeiro ponto.

Massa	Início da Estabilidade	Fim da Estabilidade	Período de Estabilidade
50kg	3.75 m/s	5.06 m/s	1.31 m/s
85kg	4.30 m/s	6.03 m/s	1.73 m/s
180kg	5.55 m/s	8.10 m/s	2.55 m/s

Tabela 2: Comparação de estabilidade

3 Controlabilidade

A intenção nesta sessão é construir um controlador para o modelo da bicicleta apresentado em estado de espaço como descrito no capítulo anterior. O objetivo é conseguir fazer a bicicleta percorrer um caminho pré-definido no início da simulação.

A primeira coisa a se fazer quando queremos construir um controlador é verificar se o modelo é controlável. Para isto, é necessário calcular a matriz de controlabilidade W_r dada por:

$$W_r = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (17)$$

A é $n \times n$, B é $n \times r$ e W_r é $n \times nr$, com A e B dados na equação (7).

O sistema é controlável se a matriz de controlabilidade aceitar uma inversa, o que pode ser verificado de diversas formas e utilizaremos a fórmula $\det(W_r) \neq 0$.

Após esta verificação, podemos avançar para a próxima etapa.

3.1 Construção do controlador

Partindo do modelo apresentado em (7), com a verificação da controlabilidade já confirmada, podemos partir para o cálculo dos ganhos. Para isto é necessário escolhermos novos autovalores para o sistema, desta vez para o *ciclo fechado*.

Como queremos manter ou forçar a estabilidade da bicicleta, os novos autovalores devem ter a parte real negativa. Assim teremos um vetor S da forma

$$S = \begin{bmatrix} s1 & s2 & s3 & s4 \end{bmatrix}$$

que terá estes novos autovalores. Com estes valores escolhidos, os ganhos do controlador serão calculados a partir da seguinte equação:

$$\det(SI - A - BK) = (s - s1)(s - s2)(s - s3)(s - s4) \quad (18)$$

Para resolver esta equação, utilizamos uma função 'ppol' do Scilab que recebe A,B e S e retorna o vetor K com os ganhos já calculados. Então temos o controlador da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Kx + K_r r\end{aligned}\tag{19}$$

Onde A,B e x são como descritos no modelo (7), K é a matriz com os ganhos, $K_r = \frac{-1}{C(A-BK)^{-1}B}$ e r é o input do controlador, que contém a relação da posição atual da bicicleta com a estrada pré-definida e receberá um tratamento especial explicado mais a frente.

Até este ponto, a parte teórica do controlador é genérica e pode ser usada em qualquer modelo matemático que adote uma representação de espaço de estado.

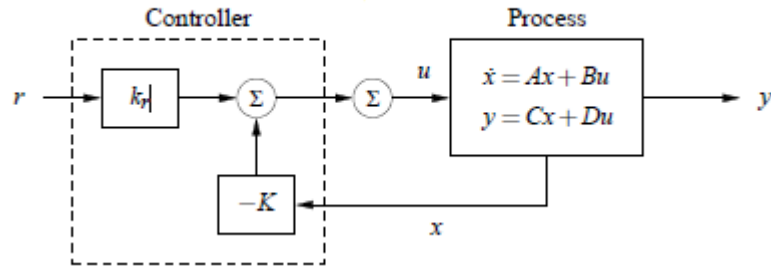


Figura 6: Controlador em espaço de estado

3.2 Caminho traçado

Até o momento, o controlador construído tem como variáveis livres apenas δ e φ , além de suas derivadas, e elas representam, como já dito antes, o ângulo impresso no guidão e a inclinação da bicicleta. Entretanto, apenas com estas variáveis não é possível calcular a posição da bicicleta no plano XY. Para isso, adicionaremos uma equação com a aceleração lateral da bicicleta e integrando duas vezes a aceleração obteremos o deslocamento da bicicleta no plano. A equação é dada por:

$$\ddot{y}_p = v\dot{\psi} = \frac{v^2}{w}\delta\cos(\lambda) + \frac{vc}{w}\dot{\delta}\cos(\lambda) \quad (20)$$

Com w , λ , c vindos da tabela 1 e utilizamos δ e sua variação pois este é o ângulo dominante em cenários em que a velocidade é maior que 1. Com a posição da bicicleta devidamente calculada, finalmente é possível atualizar o input do controlador e com isto concluí-lo.

$$r = \delta + T - y_p \quad (21)$$

Onde δ é o ângulo atual do guidão, T é o ponto no caminho traçado em que a bicicleta deve estar após um período de tempo pré-definido e y_p é a posição em que a bicicleta esta atualmente. Utilizamos o ângulo δ nesta equação, pois é sobre ele que iremos atuar com o controlador, deixando φ como uma consequência da ação do controlador.

Após tudo isto, o controlador está concluído e já podemos traçar a rota e colocar a bicicleta na estrada.

3.3 Resultados

Os resultados abaixo foram obtidos após a execução do controlador descrito acima apenas com a alteração dos autovalores que são necessários para o cálculo dos ganhos. Note que os autovalores foram trocados sempre como se fossem dois pares e a justificativa é que após a análise realizada no capítulo 2, sobre a estabilidade da bicicleta, existe um autovalor de multiplicidade dupla e para manter esta multiplicidade foi escolhido mudar em pares os autovalores do *ciclo fechado*. Os autovalores nas simulações estão no título dos gráficos.

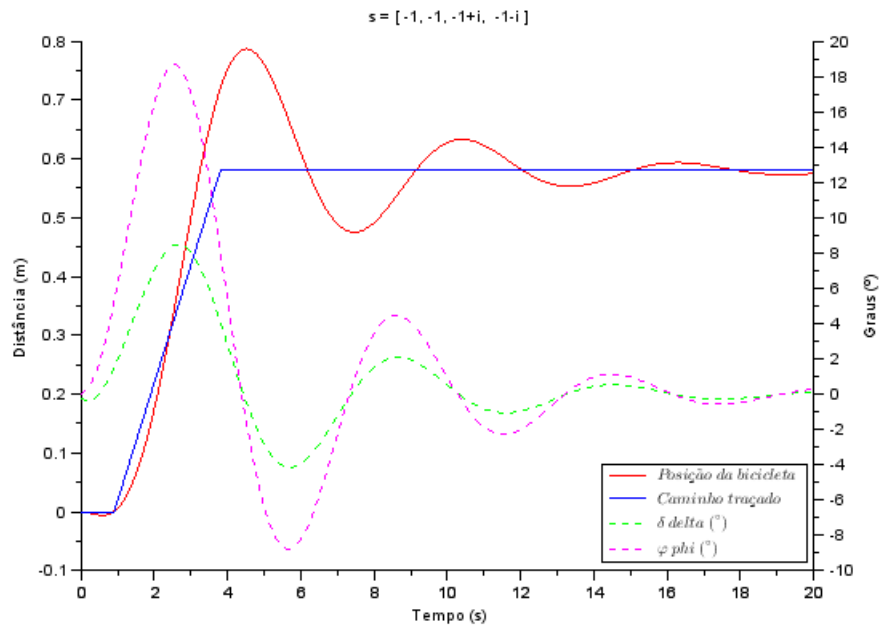


Figura 7: Controle da bicicleta com autovalores conservadores

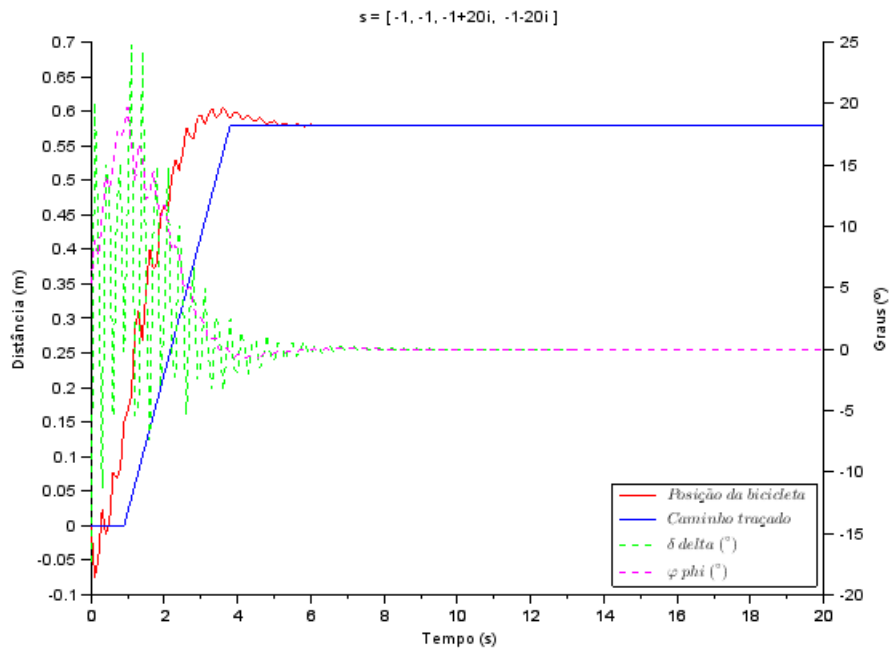


Figura 8: Controle da bicicleta com a parte imaginária agressiva

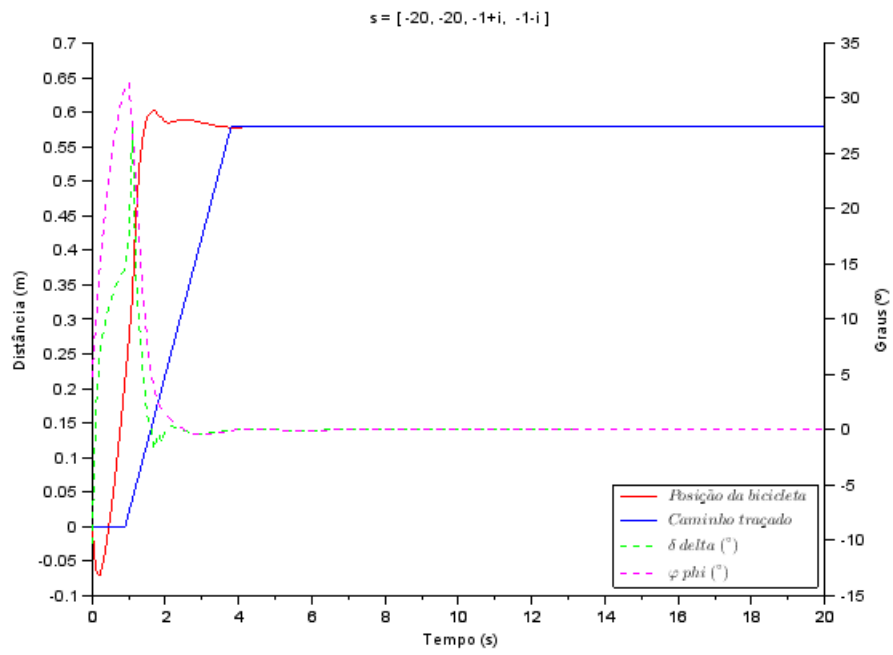


Figura 9: Controle da bicicleta com 1^o par de autovalores agressivos

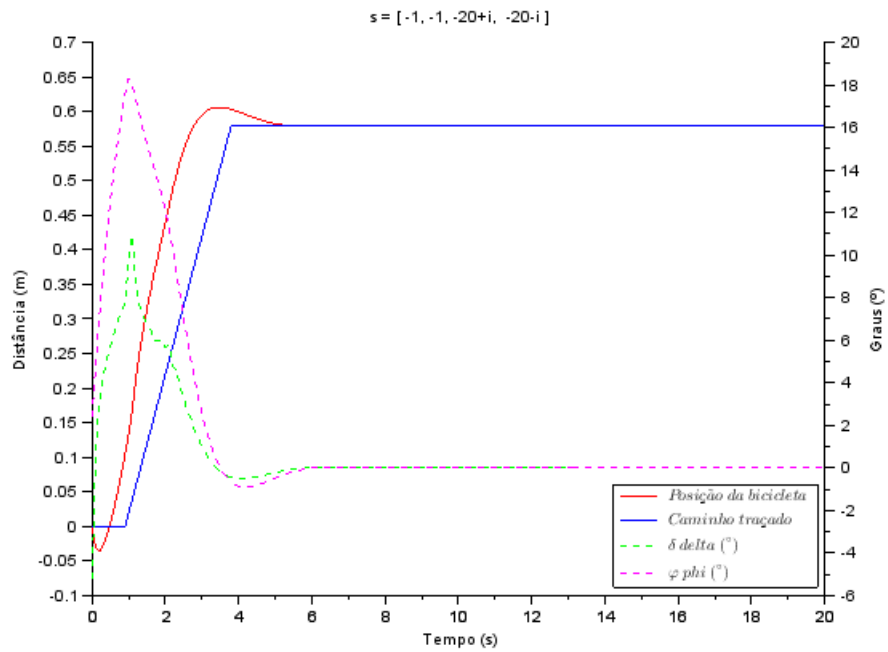


Figura 10: Controle da bicicleta com 2^o par de autovalores agressivos

Agora, apenas como imagem de estudo, um caso em que o 1º par de autovalores é positivo, tornando a bicicleta instável e com resultado completamente desprezível.

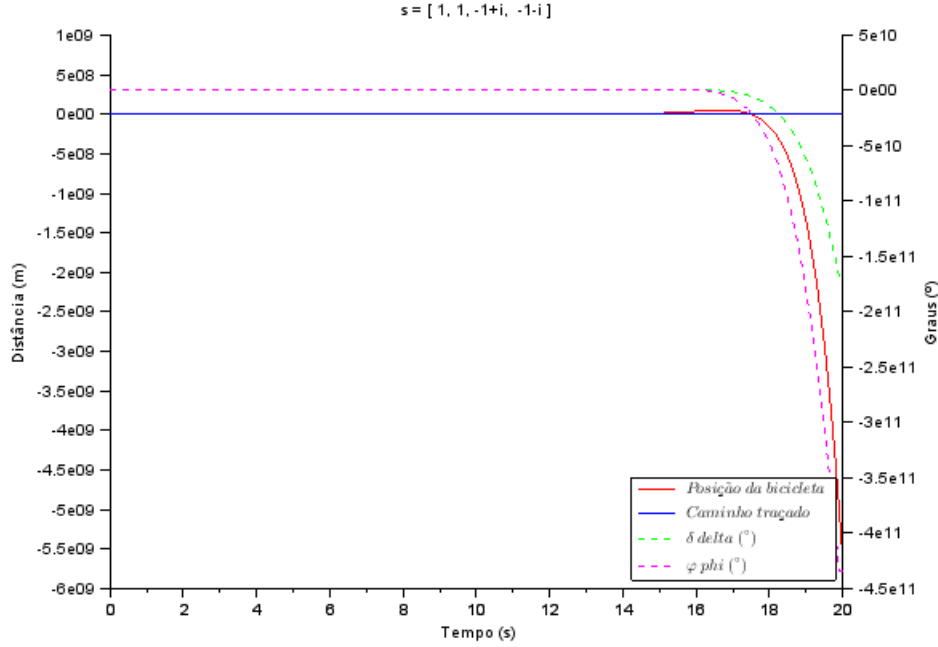


Figura 11: Controle da bicicleta com autovalores positivos

Após a apresentação dos resultados, é possível fazer uma rápida análise: com os autovalores conservadores, a bicicleta teve um overshoot muito maior do que quando um dos pares de autovalores são agressivos, porém o ângulo que a bicicleta se curva é menor, de aproximadamente 18° contra 20°, no melhor caso agressivo, e 30° no pior. Quando a parte imaginária é agressiva, a bicicleta oscila muito, deixando praticamente impossível de pilota-la, pois a variação do ângulo do guidão chega a 30° de um lado para o outro consecutivamente em um curto período de tempo.

Dado isto, teria que ser feito um estudo de mistura das variações dos autovalores para chegar a um equilíbrio, aumentando gradativamente cada par ao mesmo tempo, para tentar achar a melhor combinação para o seu objetivo.

4 Conclusões

Depois de todos os processos e todas as simulações, é necessário que seja feita uma síntese dos resultados obtidos neste trabalho.

Inicialmente foi feita uma descrição do modelo de Carvallo-Whipple, em que foi realizada uma linearização a partir dos parâmetros iniciais apresentados em Parâmetros Iniciais. Nesta sessão outras formas de linearização poderiam ter sido adotadas, além da possibilidade de se tentar simular a forma não linear diretamente, como adotado em [Moo12].

Após a linearização do modelo, foi realizado um estudo sobre a estabilidade da bicicleta, alterando a massa e a velocidade. Constatamos que a faixa de estabilidade desta é relativamente curta, que varia de 1 a 2 m/s. Para aumentar esta faixa é possível utilizar o efeito “*caster*”, do giroscópio ou como proposto em [KMP+11], em que os autores do trabalho, apenas alterando os parâmetros iniciais, conseguem manter a bicicleta assintoticamente estável para qualquer velocidade acima de 2.2m/s.

Por fim, foi construído um controlador para agir sobre a bicicleta, forçando-a a seguir um caminho pré-definido. O controlador foi construído em cima da teoria de representação de estados de espaço e desta forma se torna um controlador que pode ser reutilizado para outros modelos matemáticos.

Outros controladores poderiam ter sido feitos utilizando outras técnicas, como um controlador utilizando PID ou algoritmos genéticos.

Apêndice - Algoritmos Desenvolvidos

Durante o trabalho, alguns códigos foram desenvolvidos para gerar as imagens contidas. Todos os algoritmos estão disponíveis em minha conta do github (<https://github.com/alexkidd16/TCC-WhippleModel>) na pasta “Algoritmos”.

Para gerar a figura 3, 4 e 5 foram utilizados os scripts “*grafico_autovalores_leve.sce*”, “*grafico_autovalores.sce*” e “*grafico_autovalores_pesado.sce*”, respectivamente.

Já para gerar as imagens do capítulo 3, apenas o arquivo “*controlador_final.sci*” foi utilizado, e em cada simulação, os autovalores foram trocados na variável *s*, presente na linha 12.

Para a figura 7, foi utilizado “*s = [-1, -1, -1+(%i*1), -1+(-%i*1)]*”, na figura 8 “*s = [-1, -1, -1+(%i*20), -1+(-%i*20)]*”, na figura 9 “*s = [-20, -20, -1+(%i*1), -1+(-%i*1)]*”, na figura 10 “*s = [-1, -1, -20+(%i*1), -20+(-%i*1)]*” e na figura 11 “*s = [1, 1, -1+(%i*1), -1+(-%i*1)]*”.

Já a figura 1 foi gerada a partir da biblioteca BicycleParameters (<https://pypi.python.org/pypi/BicycleParameters>) feita em Python 2.7 e desenvolvida por J. K. Moore. Todas as outras figuras foram tiradas de [AM08].

Referências

- [AM08] K. J. Astrom and R. M. Murray. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers
- [BMCP07] Pradipta Basu-Mandal, Anindya Chatterjee, and Jim M. Papadopoulos. Hands-free circular motions of a benchmark bicycle. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 463(2084):1983–2003, August 2007.
- [FMPM06] Chad Findlay, Jason Keith Moore, and Claudia Perez-Maldonado. SISO control of a bicycle-rider system. MAE 272 Report 2, Winter 2006, 2006.
- [KMP+11] J. D. G. Kooijman, J. P. Meijard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina, and A. L. Schwab. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. 2011.
- [Lan11] P.D.L. de Lange. Rider Control Identification in Bicycling, A preliminary analysis, November 2011.
- [Moo12] Moore, J. K., Human Control of a Bicycle, UC Davis Doctoral Dissertation, 2012
- [MPRS07] J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina, and A. L. Schwab. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084):1955-1982, August 2007.
- [SK10a] A. L. Schwab and J. D. G. Kooijman. Controllability of a bicycle. In 5th Asian Conference on Multibody Dynamics 2010. Kyoto, Japan, August 2010.

- [SK10b] A. L. Schwab and J. D. G. Kooijman. Lateral dynamics of a bicycle with passive rider model. In The 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics. Lappeenranta, Finland, May 2010.
- [SM13] A. L. Schwab & J. P. Meijaard (2013) A review on bicycle dynamics and rider control, *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 51:7, 1059-1090, DOI: 10.1080/00423114.2013.793365
- [Wik14a] Wikipedia. State space representation— Wikipedia, the free encyclopedia. 2014. [Online; acessado 28-Janeiro-2014].
- [Wik14b] Wikipedia. Controllability— Wikipedia, the free encyclopedia. 2014. [Online; acessado 28-Janeiro-2014].
- [Whi99] F.J.W. Whipple, The stability of the motion of a bicycle, *Q. J. Pure Appl. Math.* 30 (1899), pp. 312–348.