

---

---

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional

# **Um Breve Estudo de Estabilidade e Controlabilidade de Bicicletas**

**Aluno: Alexandre de Carvalho Dias**

**Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos de Castro Santos**

---

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Modelando a bicicleta</b>	<b>7</b>
1.1	O Modelo Carvallo-Whipple . . . . .	8
1.2	Parâmetros iniciais . . . . .	8
1.3	Forma Linear . . . . .	10
1.4	Linearização do Whipple Model . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Estabilidade</b>	<b>15</b>
2.1	Representação do espaço de estado e o calculo dos auto-valores . . . .	15
2.2	Resultados . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Controlabilidade</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>21</b>

## Lista de Figuras

1	A Bicicleta e seus centros de massa . . . . .	7
2	Variáveis do modelo linear . . . . .	10
3	Estabilidade na Bicicleta Leve (50Kg) . . . . .	17
4	Estabilidade na Bicicleta padrão (85kg) . . . . .	18
5	Estabilidade na Bicicleta Pesada (180kg) . . . . .	18

## Lista de Tabelas

1	Variaveis iniciais da bicicleta . . . . .	9
2	Comparação de estabilidade . . . . .	19

## Resumo

Este é um trabalho de conclusão do curso de Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional e aborda a teoria de controladores por estado de espaço aplicada ao modelo Carvallo-Whipple, um modelo de equações diferenciais ordinárias lineares que simula a dinâmica do movimento de uma bicicleta.

Serão apresentados os resultados de dois estudos referentes à estabilidade em cenários de mudança de peso e velocidade e à controlabilidade em manobras com a bicicleta do modelo.

# Introdução

O trabalho a seguir tem como objetivo mostrar um breve estudo sobre a estabilidade e controlabilidade de bicicletas baseado no modelo de equações lineares de Carvallo-Whipple, utilizando a técnica de modelagem em espaço de estados e para a validação dos conceitos foi utilizado o software Scilab.

A utilização da técnica de modelagem de espaço de estados foi escolhida pois é uma técnica genérica que pode ser aplicada a diversas áreas de estudos e sua aplicação é praticamente a mesma para qualquer modelo de equações diferenciais.

O Scilab foi escolhido como principal software do estudo por ser uma linguagem de código aberto, com uma comunidade de desenvolvimento ativa, ao contrario do Matlab. Além disto, dentro do Scilab já existem diversas funções prontas que facilitaram na hora da validação numérica dos modelos.

Por fim, o assunto modelagem de bicicletas foi escolhido por ser um assunto muito interessante referente a um meio de transporte não-poluinte que também é utilizado como lazer e esporte. Outro motivo é que a parte matemática do modelo tem uma complexidade compatível com o resto do trabalho.

No primeiro capítulo do trabalho será apresentado o modelo da bicicleta, suas variáveis mais importantes e uma forma de linearizar o modelo de Carvallo-Whipple. No capítulo seguinte montaremos a representação do modelo em espaço de estados, trazendo junto um estudo sobre a estabilidade de bicicletas de diversos pesos em diversas velocidades. Já no terceiro capítulo será mostrado como construir um controlador para atuar na bicicleta e realizar algumas manobras.

# 1 Modelando a bicicleta

Inicialmente definiremos uma bicicleta como um corpo composto por quatro partes que consistem em duas rodas, um quadro e uma parte composta por guidão e garfo dianteiro. As rodas, que são posicionadas uma em frente a outra e ligadas pelo garfo e quadro, são os pontos de contato da bicicleta com a estrada onde a bicicleta esta transitando.

Alem destas quatro partes da bicicleta, uma outra muito importante é o ciclista, que normalmente é a com maior massa de todo o sistema e que também pode ser modelado de diversas formas.

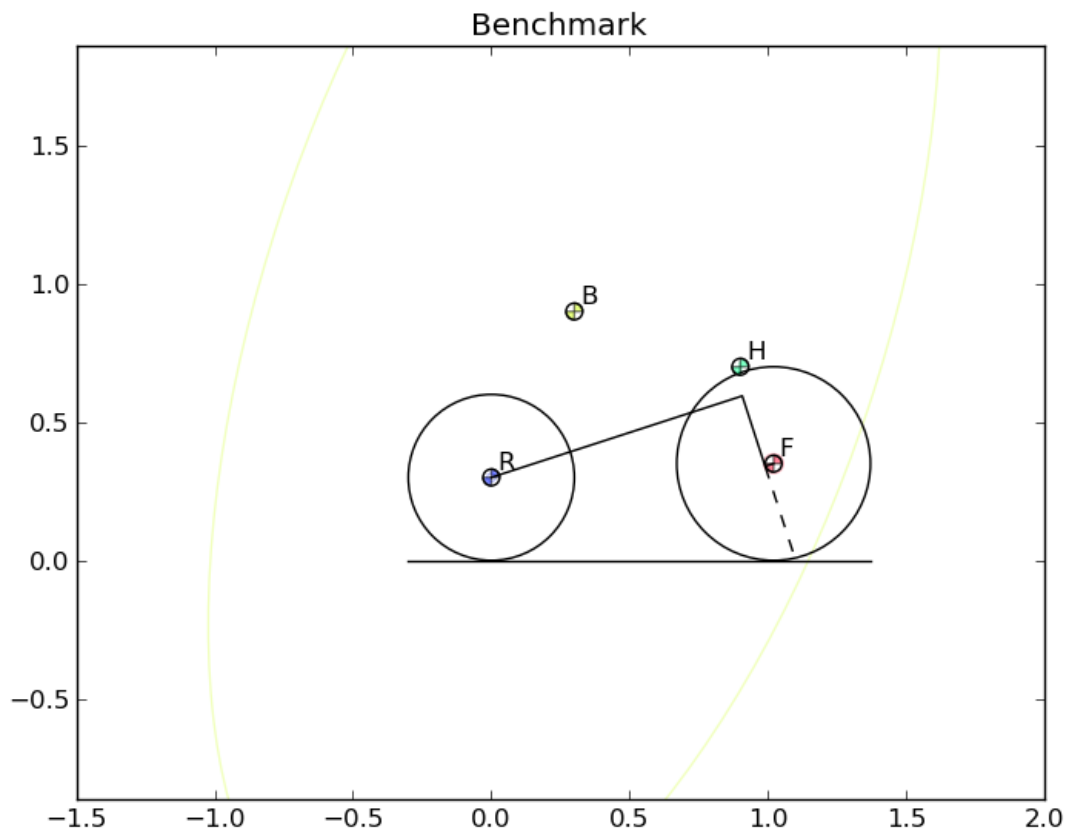


Figura 1: A Bicicleta e seus centros de massa

## 1.1 O Modelo Carvallo-Whipple

No estudo das bicicletas, um dos mais importantes modelos já apresentados é o Carvallo-Whipple. Todas as análises e modelos desenvolvidos neste trabalho se baseiam nele, sendo uma implementação direta ou uma extensão do modelo.

A forma não-linear deste modelo é muito difícil de se manipular algebricamente e até hoje não foi publicado um artigo que o contenha em um formato simples o bastante para um ser humano ler e analisar as equações e, portanto, não nos aprofundaremos muito nesta forma durante o trabalho. Entretanto, caso queira conhecer melhor o modelo não-linear, procure em [Moo12].

Entretanto o modelo não-linear pode ser linearizado de diversas formas e analisaremos com mais detalhes a forma apresentada em [MPRS07].

## 1.2 Parâmetros iniciais

O modelo da bicicleta é definido completamente por 25 parâmetros. Estes parâmetros foram definidos previamente a partir de medições físicas realizadas e apresentadas em [MPRS07] e são apresentados na tabela abaixo.



Tabela 1: Variaveis iniciais da bicicleta

Parametro	Simbolo	Valor utilizado
<b>Globais</b>		
Distância entre eixos	$w$	1.02m
Pista	$c$	0.08m
Orientação do eixo de inclinação	$\lambda$	$\pi / 10$ rad
Gravidade	$g$	9.81 N/kg
Velocidade	$v$	5 m/s
<b>Roda da Traseira (R)</b>		
Raio	$r_R$	0.3m
Massa	$m_R$	2kg
Momento de inércia	$(I_{R_{xx}}, I_{R_{yy}})$	(0.0603, 0.12) kg $m^2$
<b>Roda da Dianteira (F)</b>		
Raio	$r_F$	0.35m
Massa	$m_F$	3kg
Momento de inércia	$(I_{F_{xx}}, I_{F_{yy}})$	(0.1405, 0.28) kg $m^2$
<b>Quadro (B)</b>		
Centro de massa	$(x_B, z_B)$	(0.3, -0.9)m
Massa	$m_B$	85kg
Momento de inércia	$\begin{bmatrix} I_{B_{xx}} & 0 & I_{B_{xz}} \\ 0 & I_{B_{yy}} & 0 \\ I_{B_{xz}} & 0 & I_{B_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ kg $m^2$
<b>Guidão e Garfo (H)</b>		
Centro de massa	$(x_H, z_H)$	(0.9, -0.7)m
Massa	$m_H$	4kg
Momento de inércia	$\begin{bmatrix} I_{H_{xx}} & 0 & I_{H_{xz}} \\ 0 & I_{H_{yy}} & 0 \\ I_{H_{xz}} & 0 & I_{H_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05892 & 0 & -0.00756 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.00756 & 0 & 0.00708 \end{bmatrix}$ kg $m^2$

### 1.3 Forma Linear

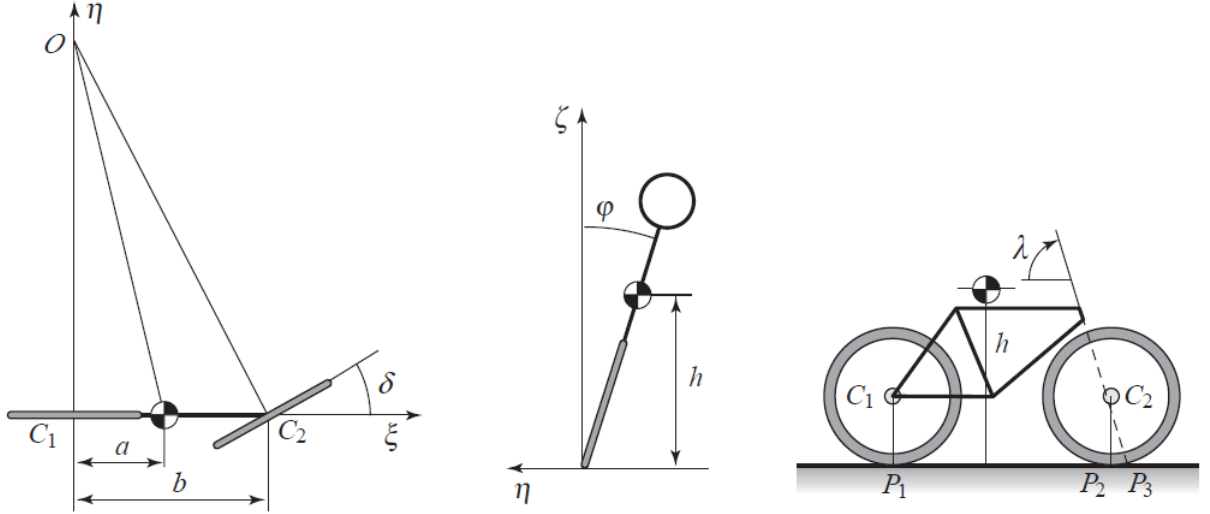


Figura 2: Variáveis do modelo linear

A forma linear do Whipple Model tem apenas duas variáveis livres,  $\varphi$  e  $\delta$ . O  $\varphi$  é o ângulo de inclinação da bicicleta, formado ao “deitar” ou não a bicicleta para fazer uma curva, e o  $\delta$  é o ângulo de controle, obtido na movimentação do guidão.

Desta forma, o modelo linear é dado por:

$$M\ddot{q} + vC_1\dot{q} + [gK_0 + v^2K_2]q = \mathbf{f} \quad (1)$$

Onde  $q = \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\delta \end{bmatrix}$ ,  $M$  é a matriz simétrica de massa que nos fornece a energia cinética da bicicleta,  $C = vC_1$  é a matriz de amortecimento da velocidade  $v$  e  $K = [gK_0 + v^2K_2]$  é a soma da matriz de aceleração da gravidade com a matriz dos efeitos giroscópicos e centrífugos da bicicleta.

Definimos  $M$ ,  $C_1$ ,  $K_0$  e  $K_2$  partir dos parâmetros apresentados em Variáveis iniciais da bicicleta, realizando uma série de linearizações descritas abaixo.

## 1.4 Linearização do Whipple Model

Para realizar a linearização do modelo a partir da 1 (tabela 1) e chegar em (1) serão consideramos os mesmos índices da tabela para as partes da bicicleta, isto é, R para a roda de trás, F para a roda da frente, H para o guidão e garfo e B para o quadro. Além destes índices, utilizaremos T para o total da bicicleta e A para a parte frontal da bicicleta, que é a junção do guidão e garfo com a roda dianteira.

Com estes índices definidos e lembrando que estamos trabalhando no  $\mathbb{R}^3$ , podemos começar as equações. Primeiro as equações mais simples, que apenas calcula os totais da bicicleta:

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F$$

$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + w m_F}{m_T}$$

$$z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T}$$

$$I_{T_{xx}} = I_{R_{xx}} + I_{B_{xx}} + I_{F_{xx}} + I_{H_{xx}} + m_R r_R^2 + m_H r_H^2 + m_F r_F^2 + m_B r_B^2$$

$$I_{T_{xz}} = I_{B_{xz}} + I_{H_{xz}} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F$$

$$I_{T_{zz}} = I_{R_{zz}} + I_{B_{zz}} + I_{H_{zz}} + I_{F_{zz}} + m_B x_B^2 + m_H x_H^2 + m_F w^2, \text{ onde :}$$

$$I_{R_{zz}} = I_{R_{xx}}, \quad I_{F_{zz}} = I_{F_{xx}}$$

Os próximos valores definirão os valores do índice A, referente a parte frontal da bicicleta:

$$m_A = m_H + m_F$$

$$x_A = \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A}$$

$$z_A = \frac{x_H m_H - r_F m_F}{m_A}$$

$$I_{A_{xx}} = I_{H_{xx}} + I_{F_{xx}} + m_H(z_H - z_A)^2 + m_F(r_F + z_A)^2$$

$$I_{A_{xz}} = I_{H_{xz}} - m_H(x_H - x_A)(z_H - z_A) + m_F(w - x_A)(r_F + z_A)$$

$$I_{A_{zz}} = I_{H_{zz}} + I_{F_{zz}} + m_H(x_H - x_A)^2 + m_F(w - x_A)^2$$

Para as próximas equações, consideraremos  $\lambda = (\sin \lambda, 0, \cos \lambda)^T$ . O centro de massa da parte frontal da bicicleta é:

$$u_A = (x_A - w - c)\cos\lambda - z_A\sin\lambda$$

$$I_{A_{\lambda\lambda}} = m_A u_A^2 + I_{A_{xx}} \sin^2 \lambda + 2I_{A_{xz}} \sin \lambda \cos \lambda + I_{A_{zz}} \cos^2 \lambda$$

$$I_{A_{\lambda x}} = -m_A u_A z_A + I_{A_{xx}} \sin \lambda + I_{A_{xz}} \cos \lambda$$

$$I_{A_{\lambda z}} = m_A u_A x_A + I_{A_{xz}} \sin \lambda + I_{A_{zz}} \cos \lambda$$

A relação da trilha com a base da roda da frente é dada por:

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda$$

Os coeficientes giro-estáticos das rodas em relação ao eixo y são dados por:

$$S_R = \frac{I_{R_{yy}}}{r_R}$$

$$S_F = \frac{I_{F_{yy}}}{r_F}$$

$$S_T = S_R + S_F$$

$$S_A = m_A u_A + \mu I_{T_{xz}}$$

Com estes termos definidos, podemos partir para a definição dos termos necessários à forma linear,  $M$ ,  $C_1$ ,  $K_0$  e  $K_2$ .

$$\begin{aligned} M_{\varphi\varphi} &= I_{T_{xx}}, & M_{\varphi\delta} &= I_{A_{\lambda x}} + \mu I_{T_{xz}} \\ M_{\delta\varphi} &= M_{\varphi\delta}, & M_{\delta\delta} &= I_{A_{\lambda\lambda}} + 2\mu I_{A_{\lambda z}} + \mu^2 I_{T_{zz}} \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{\varphi\varphi} & M_{\varphi\delta} \\ M_{\delta\varphi} & M_{\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K_{0\varphi\varphi} &= m_T z_T, & K_{0\varphi\delta} &= -S_A \\ K_{0\delta\varphi} &= K_{0\varphi\delta}, & K_{0\delta\delta} &= -S_A \sin \lambda \end{aligned}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{0\varphi\varphi} & K_{0\varphi\delta} \\ K_{0\delta\varphi} & K_{0\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K_{2\varphi\varphi} &= 0, & K_{2\varphi\delta} &= \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda \\ K_{2\delta\varphi} &= 0, & K_{2\delta\delta} &= \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \end{aligned}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{2\varphi\varphi} & K_{2\varphi\delta} \\ K_{2\delta\varphi} & K_{2\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_{1\varphi\varphi} &= 0, & C_{1\varphi\delta} &= \mu S_T + S_F \cos\lambda + \frac{I_{T_{zz}}}{w} \cos\lambda - \mu m_T z_T \\ C_{1\delta\varphi} &= -(\mu S_T + S_F \cos\lambda), & C_{1\delta\delta} &= \frac{I_{A_{\lambda z}}}{w} \cos\lambda + \mu(S_A + \frac{I_{T_{zz}}}{w} \cos\lambda) \end{aligned}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1\varphi\varphi} & C_{1\varphi\delta} \\ C_{1\delta\varphi} & C_{1\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2 Estabilidade

Agora que já temos o modelo linear bem definido, vamos verificar quando a bicicleta consegue se manter estável, mesmo sem interferência de nenhum controlador. Para isto, iremos analisar os auto-valores do *ciclo aberto*.

$$M\ddot{q} + vC_1\dot{q} + [gK_0 + v^2K_2]q = 0 \quad (6)$$

A estabilidade é confirmada quando a parte real de todos os auto-valores for negativa. Caso contrario, a bicicleta é instável.

### 2.1 Representação do espaço de estado e o calculo dos auto-valores

Para realizar o calculo dos auto-valores é necessário inicialmente escrever o modelo linear, que é de 2<sup>o</sup> ordem, em uma representação do espaço de estado, que é de 1<sup>o</sup> ordem. Para isso, iremos formular 4 matrizes A, B, C e D de modo que todos os estados da equação fiquem representados no sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x \in R^4, u \in R \\ y = Cx + Du & y \in R \end{cases} \quad (7)$$

Para esta operação ser realizada com mais facilidade, iremos considerar que:

$$CV = vM^{-1}C_1 \quad (8)$$

$$KV = M^{-1}(gK_0 + v^2K_2) \quad (9)$$

$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

E então, montaremos as matrizes do novo sistema da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ CV & KV \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Remontando o sistema (7) utilizando as equações de (11) à (14), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ CV_{1,1} & CV_{1,2} & KV_{1,1} & KV_{1,2} \\ CV_{2,1} & CV_{2,2} & KV_{2,1} & KV_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2,1}^{-1} \\ M_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} + 0 \end{array} \right. \quad (15)$$



Após este processo, calcular os auto-valores do sistema se torna uma tarefa fácil, pois é necessário apenas resolver a seguinte equação:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (16)$$

## 2.2 Resultados

Os testes realizados foram alterando a velocidade em  $1\text{m/s}$  de  $0\text{m/s}$  à  $10\text{m/s}$  e foram utilizados 3 valores para a massa do quadro: 50kg, 85kg e 180kg.

Estes valores foram escolhidos para evidenciar os efeitos ocorridos na estabilidade após as mudanças de peso e velocidade. Abaixo temos os gráficos obtidos durante as simulações com a relação do valor dos 4 auto-valores com a velocidade da bicicleta, além da faixa em que a bicicleta é estável. No final da sessão é apresentada uma tabela com o resumo dos resultados.

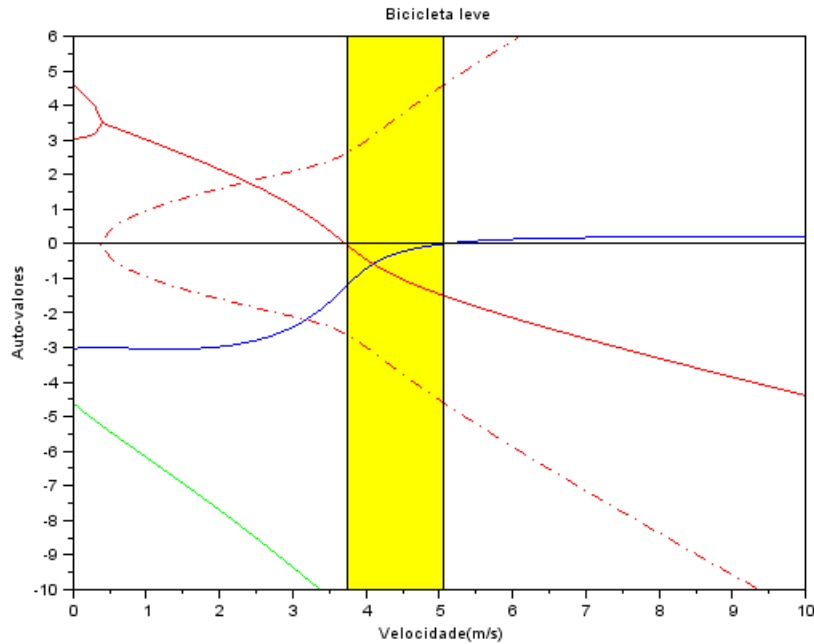


Figura 3: Estabilidade na Bicicleta Leve (50Kg)

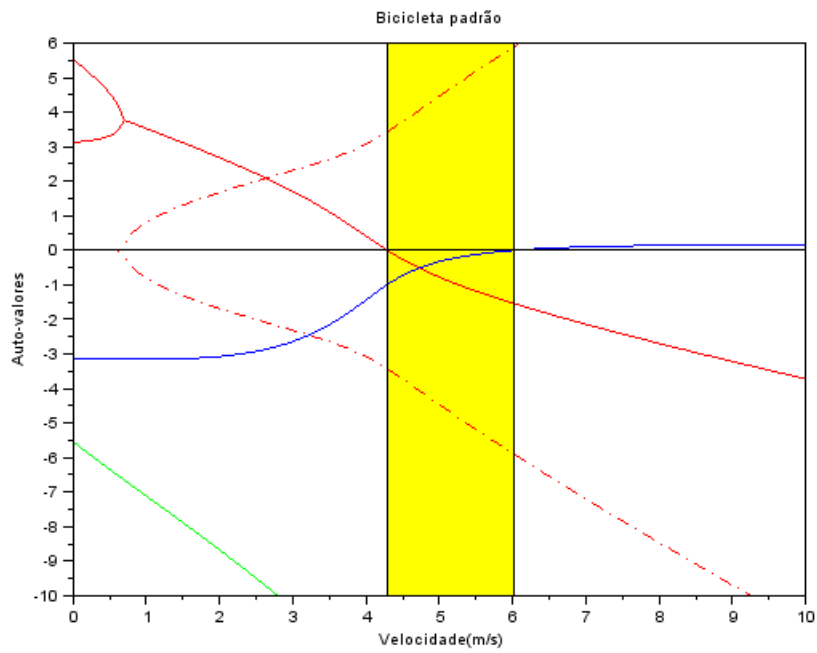


Figura 4: Estabilidade na Bicicleta padrão (85kg)

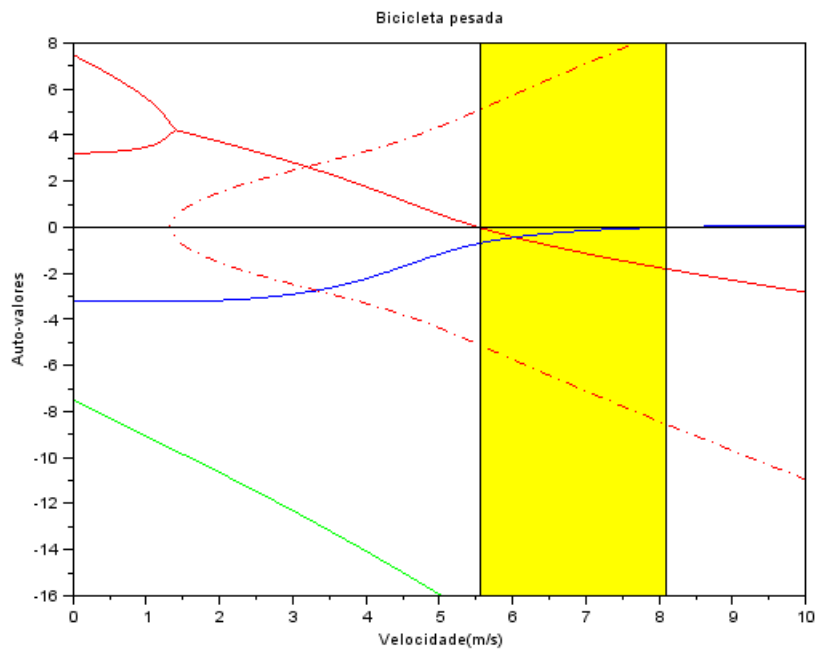


Figura 5: Estabilidade na Bicicleta Pesada (180kg)

É possível perceber que em todos os casos os auto-valores se comportam de forma

parecida. Sempre existe 1 auto-valor de cor verde no gráfico que começa já negativo e continua diminuindo conforme a velocidade aumenta. Também é possível ver que o auto-valor de cor azul é negativo em velocidades baixas, porém vai crescendo conforme a velocidade aumenta e é o responsável por tornar a bicicleta instável em velocidades altas. Já o ultimo par de auto-valores de cor vermelha, após um curto aumento de velocidade se tornam iguais na parte real e apresentam raízes imaginarias simétricas. Estes auto-valores são os responsáveis pela instabilidade da bicicleta em velocidades baixas.

Massa	Início da Estabilidade	Fim da Estabilidade
50kg	3.75 m/s	5.06 m/s
85kg	4.30 m/s	6.03 m/s
180kg	5.55 m/s	8.10 m/s

Tabela 2: Comparação de estabilidade

### **3 Controlabilidade**

## 4 Conclusões

## Referências

- [Whi99] F.J.W. Whipple, The stability of the motion of a bicycle, Q. J. Pure Appl. Math. 30 (1899), pp. 312–348.
- [Moo12] Moore, J. K., Human Control of a Bicycle, UC Davis Doctoral Dissertation, 2012
- [SM13] A. L. Schwab & J. P. Meijaard (2013) A review on bicycle dynamics and rider control, Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 51:7, 1059-1090, DOI: 10.1080/00423114.2013.793365
- [AM08] K. J. Astrom and R. M. Murray. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers
- [MPRS07] J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina, and A. L. Schwab. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084):1955-1982, August 2007.
- [BMCP07] Pradipta Basu-Mandal, Anindya Chatterjee, and Jim M. Papadopoulos. Hands-free circular motions of a benchmark bicycle. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084):1983–2003, August 2007.