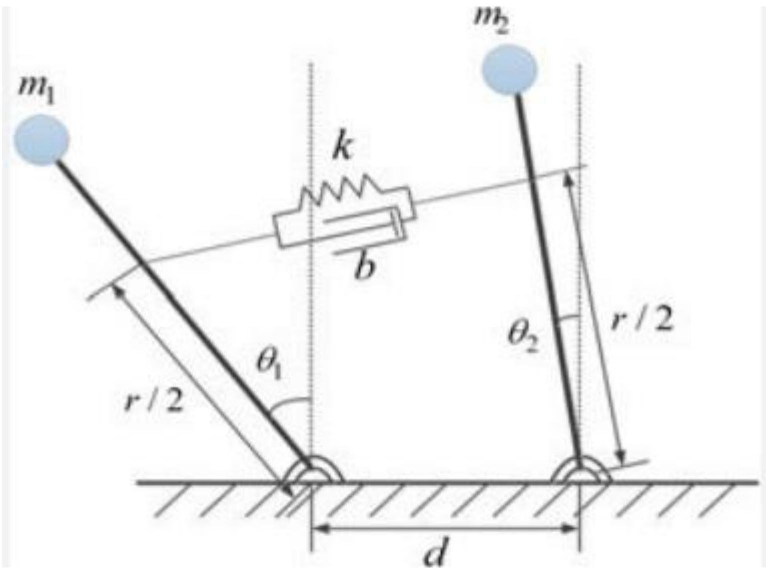
ΕΥΦΥΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Εργασία 2024-2025

Ανάλυση και προσομοίωση συτήματος δύο ανεστραμμένων εκκρεμών



Ονοματεπώνυμο:Αλέξανδρος Κριθαρούλας

ΑΕΜ:10545

Email: alexkrit@ece.auth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη.

- **ΜΕΡΟΣ Α**
  Στο πρώτο μέρος πρέπει να αναλύσουμε θεωρητικά το σύστημα βάσει των διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν και να σχεδιάσουμε ελεγκτή τέτοιον ώστε τα δύο εκκρεμή να ακολουθούν συγκεκριμένες τροχιές (θ_{d1},θ_{d2}). Παράλληλα, ο ελεγκτής που θα σχεδιάσουμε πρέπει να εξασφαλίζει ότι όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα.
- **ΜΕΡΟΣ Β**
  Θα πρέπει να προσομοιωθεί το σύστημα που προκύπτει με την χρήση του ελεγκτή που σχεδιάσαμε στο Μέρος Α και να παρουσιαστούν κάποια διαγράμματα.

ΜΕΡΟΣ Α

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Αρχικά θα δουλέψουμε για το εκκρεμες 1.

Μπορούμε να το κάνουμε αυτό γιατι τα θ_2 $\dot{\theta}_2$ είναι μετρήσιμα .

Επίσης την τριβή T_1 θα την θεωρήσουμε διαταραχή .

Η διαφορική εξίσωση της τριβής όπως μας παρουσιάζεται στην εκφώνηση έχει είσοδο αναφοράς την ταχύτητα.Ο άξονας τουηλεκτροκινητήρα ,στον οποίο εμφανίζεται η τριβή περιστρέφεται.Από τους νόμους της φυσικής είναι γωστό ότι η δύναμη της τριβής τίνει να αντιστέκεται στην κίνηση των σωμάτων.Έχει λοιπόν ένα ανώτατο όριο (έστω Τστ). Όσο η δύναμη διέγερσης του άξονα του κινητήρα είναι μικρότερη απο αυτό το όριο, η τριβή έχει ιδιο μέτρο με την δύναμη διέγερσης. Όταν όμως η δύναμη διέγερσης ξεπεράσει αυτό το όριο η τριβή αποκτά την μέγιστη τιμή της και ο άξονας περιστρέφεται. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι $T_1 \leq T_{\sigma T_1}$.Επίσης , απο τις εξισωσεις φαινεται ότι εφοσον η τριβή είναι άνω φραγμένη ,είναι και κάτω φραγμένη.Θέτω διαταραχή $\omega_1 = -T_1$.Εφόσον η T_1 έχει κάτω φράγμα ,η ω_1 έχει άνω φράγμα ω_0 .

Ορίζουμε τις εξής δύο μεταβλητές κατάστασης:

$$\begin{cases} y_1 = \theta_1 \\ y_2 = \dot{\theta}_1 \end{cases}$$

Επίσης: $\ddot{\theta}_1 = J_1^{-1}(f(y) + \omega_1 + u_1)$

Αν $f(y) = a_1 f_1(y_1) + a_2 f_2(y_1) + a_3 f_3(y_1, y_2)$

Όπου $\alpha_1 = m*g*r$, $a_2 = -0.5*r*k$, $a_3 = -0.5*r*b$

Και $f_1(y_1)=\sin(y_1)$, $f_2(y_1)=(x-l)\cos(y_1 - \theta)$, $f_3(y_1,y_2)= \dot{x}\cos(y_1 - \theta)$.

Όπου τα x και θ είναι συναρτήσεις του y_1 και το $\dot{x}$ του y_1 και του y_2 .

Άρα μπορώ να γράψω :

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = J_1^{-1}(f(y) + \omega_1 + u_1) \end{cases}$$

Άρα $\dot{y} = Ay + B\Lambda(f(y) - T_1 + u_1)$

Όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Lambda = \frac{1}{J_1}$

Επίσης μπορώ να γράψω

$$f(y) = \Theta^T \phi(y) , \Theta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \phi(y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1) \\ f_2(y_1) \\ f_3(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$(A, B\Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1^{-1} \end{bmatrix}$$ άρα ελέγξιμο.

Μοντέλο αναφοράς

Το εκκρεμές 1 πρέπει να ακολουθεί την τροχιά

$$\theta_{1d} = \pi * \sin(2\pi t)/6$$

Ορίζω $\dot{y}_m = A_m y_m + B_m r$

Όπου $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ K_3 \end{bmatrix}$ και r είσοδος αναφοράς

Πρέπει ο A_m να έχει αρνητικές ιδιοτιμές και το μοντέλο αναφοράς να είναι ευσταθές και για r=0.Για αυτό θα επιλέξουμε $K_1 = -4$, $K_2 = -2$ και $K_3 = 1$.

$$\ddot{\theta}_{d1} = K_1\theta_{d1} + K_2\dot{\theta}_{d1} + K_3 r$$

Αν υποθέσουμε ότι $r = A_1\, sin(2t) + A_2\, cos(2t)$

Και με δεδομένο ότι :

$$\dot{\theta}_{d1} = \pi^2 * \frac{cos(2\pi t)}{3}$$

$$\ddot{\theta}_{d1} = -2\pi^3 * \frac{\sin(2\pi t)}{3}$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο Μοντέλο αναφοράς προκύπτει οτι :

$A_1 = \frac{(1-\pi^2)2\pi}{3}$ $A_2 = \frac{2\pi^2}{3}$

Σχεδίαση ελεγκτή

$\dot{y} = Ay + B\Lambda(f(y) + \omega_1 + u_1) \pm (A_m y + B_m r)$ =>

$\dot{y} = A_m y + B_m r + (A - A_m)y - B_m r + B\Lambda(f(y) + \omega_1 + u_1)$ =>

Αν ορίσω $(A - A_m) = B\Lambda K^*$ και $(B_m) = B\Lambda L^*$

$\dot{y} = A_m y + B_m r + B\Lambda(\Theta^T \phi(y) + \omega_1 + u_1 + K^* y - L^* r)$

Επιλέγουμε $u_1 = -Ky - \hat{\Theta}^T \varphi(y) + Lr$,όπου K, $\hat{\Theta}^T$,L εκτιμήσεις των K^*, Θ^T, L^* αντίστοιχα.

Ορίζω $\widetilde{K} = K - K^*, \widetilde{\Theta^T} = \hat{\Theta}^T - \Theta^T, \tilde{L} = L - L^*$

Άρα

$$\dot{y} = A_m y + B_m r + B\Lambda\left(-\widetilde{\Theta^T}\phi(y) + \omega_1 - \widetilde{K}y + \widetilde{L}r\right)$$

Ορίζω σφάλμα

e= $y - y_m$ =>

$$\dot{e} = A_m e + B\Lambda\left(-\widetilde{\Theta^T}\phi(y) + \omega_1 - \widetilde{K}y + \widetilde{L}r\right)$$

Ο A_m είναι ευσταθής οπότε υπάρχει πίνακας P ,P=P^T>0 τέτοιος ώστε : ${A_m}^T P + PA_m = -Q$, Q=Q^T>0

Ορισμός του πινακα P

Ορίζω $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ οπότε η εξίσωση Lyapunov γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$p_{11} = \frac{3}{2},\ p_{12} = \frac{1}{8}\ ,\quad p_{22} = \frac{5}{16}$

Ανάλυση Lyapunov

Παίρνω Υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{\widetilde{K}\Lambda\widetilde{K^T}}{2\gamma_1} + \frac{\widetilde{\Theta^T}\Lambda\,\widetilde{\Theta}}{2\gamma_2} + \frac{\Lambda\,\widetilde{L}}{2\gamma_3}$$

Παραγωγιζοντάς την ως προς τον χρόνο προκύπτει:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}e^T P A_m e + \frac{1}{2}e^T A_m^T P e + e^T P B \Lambda\left(-\widetilde{\Theta^T}\phi(y) + \omega_1 - \widetilde{K}y + \widetilde{L}r\right) + \frac{\widetilde{K}\Lambda\dot{K}^T}{\gamma_1} + \frac{\widetilde{\Theta^T}\Lambda\dot{\hat{\Theta}}}{\gamma_2} + \frac{\Lambda\tilde{L}\dot{L}}{\gamma_3}$$

Ορίζω λοιπόν τις εξής τρεις διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν οι εκτιμήσεις που χρησιμοποιώ στο u_1

$$\dot{K}^T = \gamma_1 e^T P B y$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \gamma_2 \varphi(y) e^T P B$$

$$\dot{L} = -\gamma_3 e^T P B y r$$

Οπότε η $\dot{V}$ γίνεται:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e^T Q e + e^T P B \Lambda \omega_1 \;=>$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e^T Q e + |e^T P B||\Lambda \omega_1| \;=>$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e^T Q e + |e^T P B|\Lambda \omega_0 =>$$

Άρα $\dot{V} \leq 0$ όταν $|e^T P B| > \frac{\Lambda \omega_0}{0.5}$

Άρα στην περιοχή για την οποία ισχύει η παραπάνω ανισότητα $e \in L_\infty$.

Για να διασφαλίσουμε ότι και τα άλλα μεγέθη της Lyapunov είναι φραγμένα πρέπει να εφαρμόσουμε σ-τροποποίηση .

Οπότε οι διαφορικές εξισώσεις απο τις οποίες θα προκύπτουν οι εκτιμήσεις K,L , $\hat{\Theta}^T$,θα τροποποιηθούν ως εξής:

- $\dot{K}^T = \gamma_1 e^T P B y - \gamma_1 \sigma K^T$
- $\dot{\hat{\Theta}} = \gamma_2 \varphi(y) e^T P B - \gamma_2 \sigma \hat{\Theta}$
- $\dot{L} = -\gamma_3 e^T P B y r - \gamma_3 \sigma L$

Έτσι όλα τα σήματα της συνάρτησης Lyapunov είναι φραγμένα

$$e, \tilde{K}, \tilde{\Theta}, \tilde{L} \in L_\infty$$

$$y, K, \hat{\Theta}, L \in L_\infty$$

$$r, \varphi(y) \in L_\infty \; εξορισμού$$

$$u_1 \in L_\infty$$

$$\omega_1 \in L_\infty$$

Άρα $\dot{e} \in L_\infty$

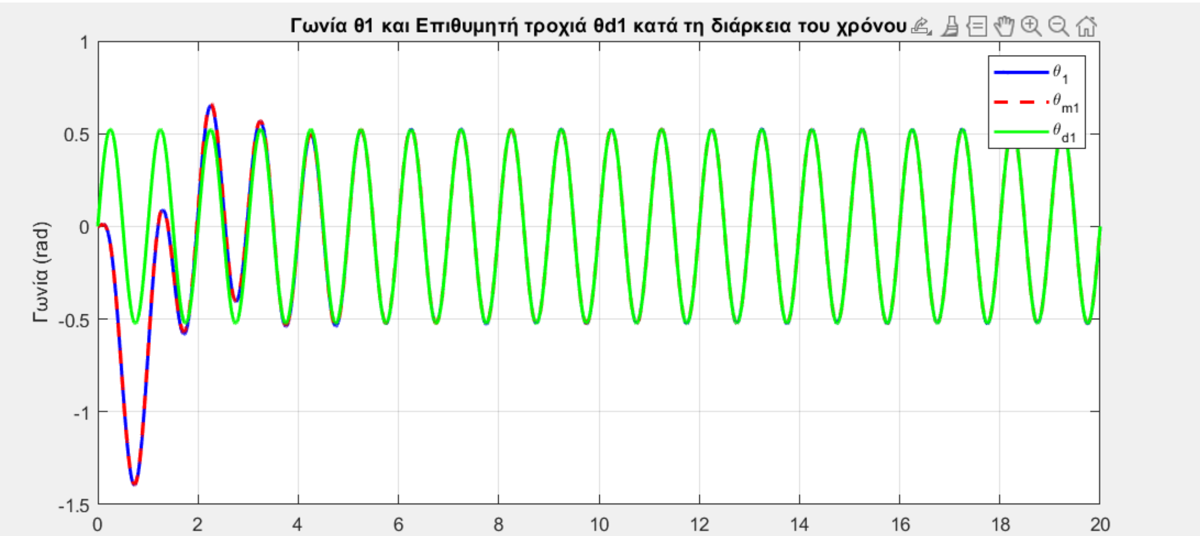
Να σημειωθεί ότι για το εκκρεμές 2 γίνεται η ίδια ακριβώς ανάλυση με την διαφορά ότι τα πρόσημα των συντελεστών α_2 και α_3 θα είναι + αντί για - .

ΜΕΡΟΣ Β

Διαγράμματα προσομοίωσης

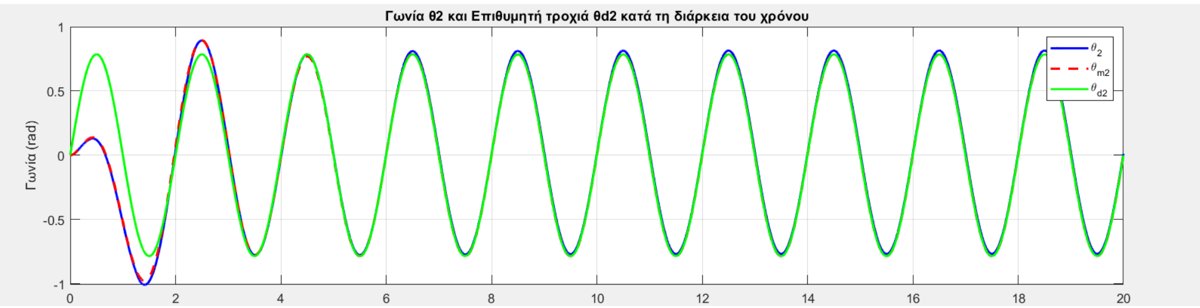
- Διάγραμμα γωνίας θ_1:

1. Την κατάσταση θ_1 του συστήματος(μπλε)
2. Την κατάσταση θ_{m1} του μοντέλου αναφοράς(κοκκινη)
3. Την επιθυμητή τροχιά θ_{d1} (πράσινη)



- Διάγραμμα γωνίας θ_2:

4. Την κατάσταση θ_2 του συστήματος(μπλε)
5. Την κατάσταση θ_{m2} του μοντέλου αναφοράς(κοκκινη)
6. Την επιθυμητή τροχιά θ_{d2} (πράσινη)



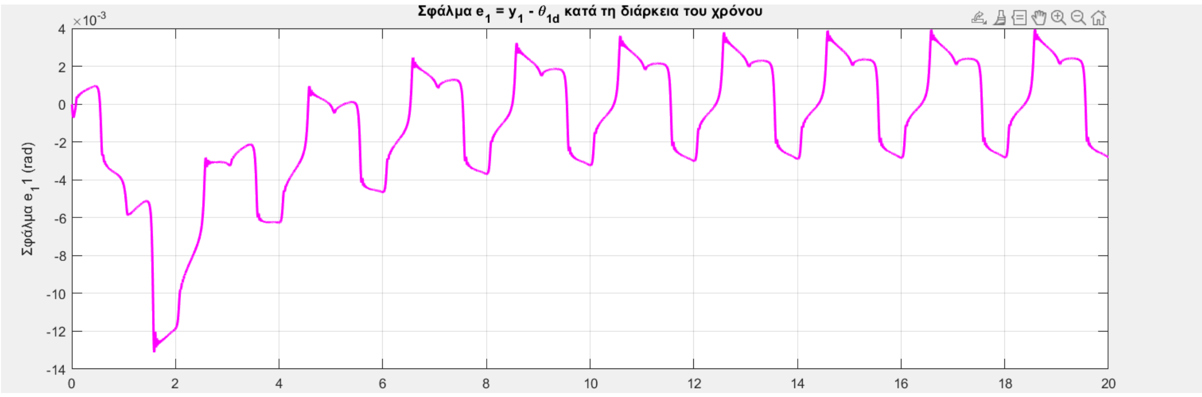
- Διάγραμμα ταχύτητας $\dot{\theta}_1$:

7. Την κατάσταση $\dot{\theta}_1$ του συστήματος(μπλε)
8. Την κατάσταση $\dot{\theta}_{m1}$ του μοντέλου αναφοράς(κόκκινη)
9. Την επιθυμητή ταχύτητας $\dot{\theta}_{d1}$ (πράσινη)

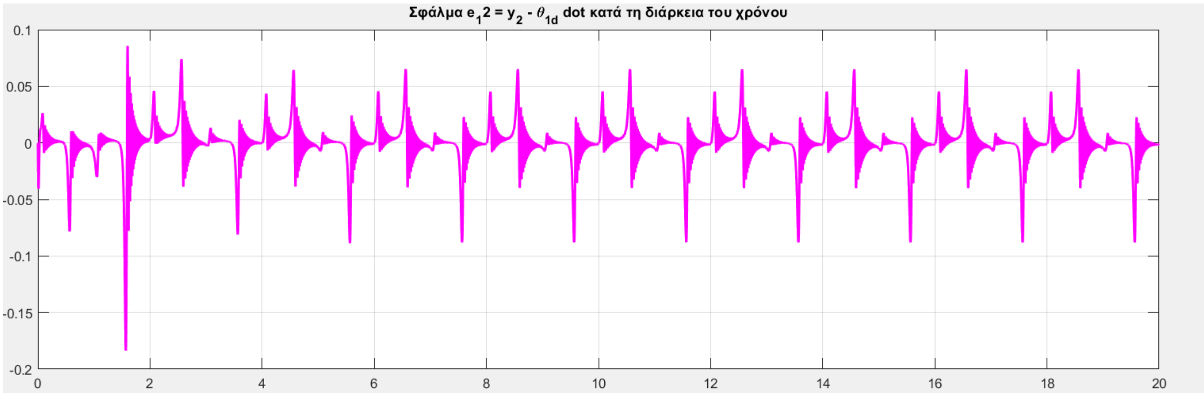
- Διάγραμμα ταχύτητας $\dot{\theta}_2$:

10. Την κατάσταση $\dot{\theta}_2$ του συστήματος(μπλε)
11. Την κατάσταση $\dot{\theta}_{m2}$ του μοντέλου αναφοράς(κόκκινη)
12. Την επιθυμητή ταχύτητας $\dot{\theta}_{d2}$ (πράσινη)

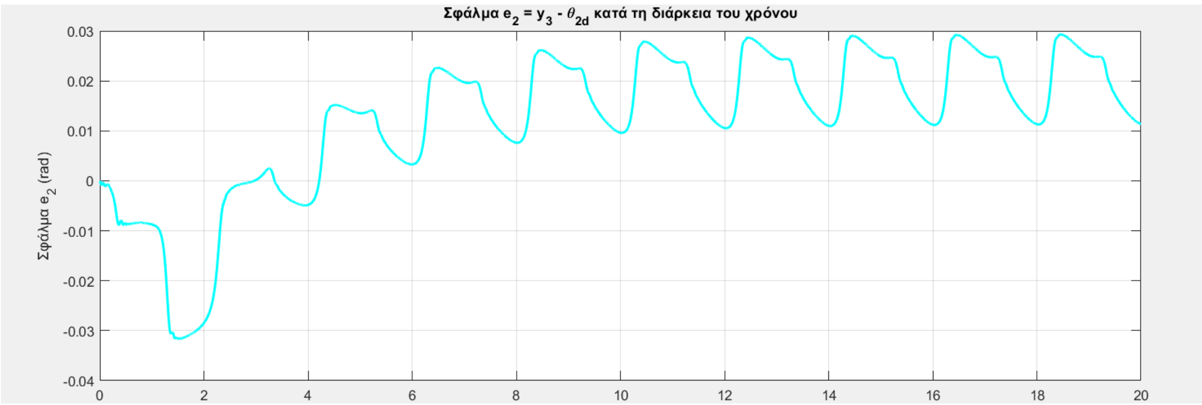
- Διάγραμμα σφάλματος e_{11} (γωνίας θ_1):



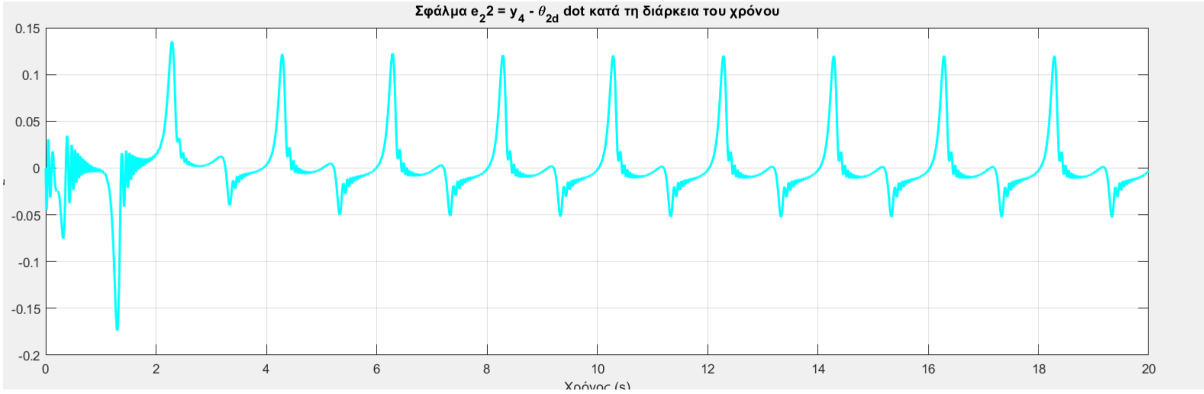
- Διάγραμμα σφάλματος e_{12} (ταχύτητας $\dot{\theta}_1$):



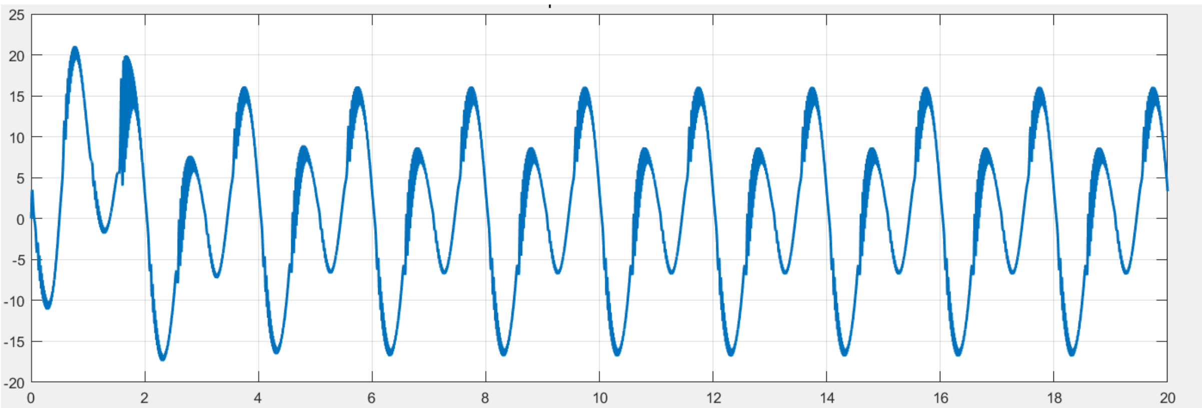
- Διάγραμμα σφάλματος e_{21} (γωνίας θ_2):



- Διάγραμμα σφάλματος e_{22} (ταχύτητας $\dot{\theta}_2$):



- Διάγραμμα εισόδου u_1:



- Διάγραμμα εισόδου u_2: