ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

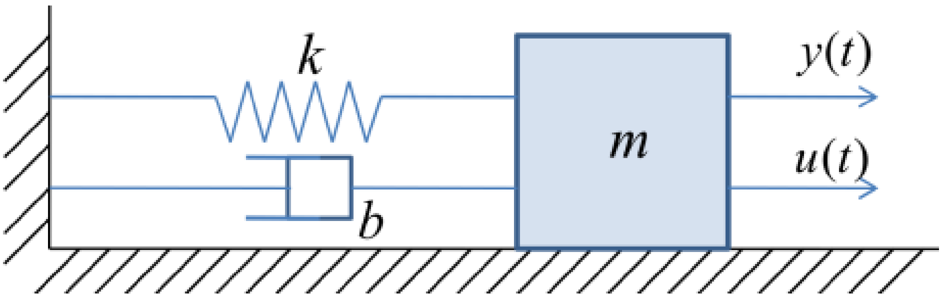
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΚΡΙΘΑΡΟΥΛΑΣ

ΑΕΜ:10545

E-mail:alexkrit@ece.auth.gr

24/4/2024

ΘΕΜΑ 1



Σχήμα 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1: Για το σύστημα Μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, μπορούμε μέσω του δευτέρου νομού του Νεύτωνα να βγάλουμε τις εξής σχέσης:

$$\Sigma F = m * y^{(2)} \rightarrow u - k * y - b * y^{(1)} = m * y^{(2)}$$

ρ

Έτσι ομαδοποιώ τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα:

$$\theta^* = [b/m \quad k/m \quad 1/m]^T$$

Και ένα διανυσμα Δ:

$$\Delta = [\, - y^{(1)} \ \ -y \quad u]^T \ \rightarrow$$

$$\Delta = [\, -\Delta_1^T * y \quad \Delta_0^T * u\,]^T, \quad \text{οπού } \Delta_i = [s^i \, s^{i-1} \ldots 1]^T$$

Χρησιμοποιούμε δηλαδή M/Laplace και καταλήγουμε στην σχέση:

$$y^{(2)} = (\Theta^*)^T * \Delta \qquad (1)$$

Επειδή τα μόνα μετρήσιμα μεγέθη είναι το y και το u και δεν γνωρίζουμε την παραγωγού του y , η παραπάνω μορφή δεν υλοποιείται .

Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα φίλτρο 1/Λ(s) 2ης τάξης (πολλοί στο αριστερό ημιεπίπεδο για να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια) ,δηλαδή

$$\Lambda(s)=(s+\rho_1)(s+\rho_2) \rightarrow \Lambda(s)= s^2+(\rho_1+\rho_2)s+ \rho_1\rho_2$$

Έτσι, καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής :

$$Z=(\theta^*)^T\zeta \text{ , Οπού}$$

- $z=y^{(2)}/\Lambda(s)=s^2y/ \Lambda(s)$
- $\zeta= \Delta/\Lambda(s)=[\ -\Delta_1^T y/\Lambda(s) \quad \Delta_0^T u/\Lambda(s)]^T$

$\Lambda(s)=(s+\rho_1)(s+\rho_2) \rightarrow \Lambda(s)= s^2+(\rho_1+\rho_2)s+ \rho_1\rho_2 \rightarrow$

$\Lambda(s)= s^2+\lambda^T \Delta_1(s)$,όπου $\lambda=[\ \rho_1+\rho_2 \quad \rho_1\rho_2]^T$

Αρά $z=s^2y/ \Lambda(s)$

$\rightarrow z= y(\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s))/ \Lambda(s)$

$\rightarrow z= y - y(\lambda^T \Delta_1(s))/ \Lambda(s)$

$\rightarrow y= z + y(\lambda^T \Delta_1(s))/ \Lambda(s) \qquad (2)$

Τώρα χωρίζουμε το διάνυσμα z

$Z=(\theta^*)^T\zeta$

$\rightarrow Z= (\theta_1^*)^T\zeta_1 + (\theta_2^*)^T\zeta_2$, όπου $\theta_1^*=[\ b/m \quad k/m]^T$

$\theta_2^* =1/m$

$\zeta_1= y\Delta_1^T(s)/\Lambda(s)$

$\zeta_2= u\Delta_2^T(s)/\Lambda(s)$

Αρά η (2) γίνεται :

$$y= (\theta_1^*)^T\zeta_1 + (\theta_2^*)^T\zeta_2 +\lambda^T\zeta$$

$$\rightarrow y= \theta_\lambda^T\zeta \qquad \text{,όπου}$$

- $\theta_\lambda=[\ b/m-(\rho_1+\rho_2) \quad k/m-(\rho_1\rho_2) \quad 1/m]^T$
- και $\zeta=[\ -\Delta_1^T y/\Lambda(s) \quad \Delta_0^T u/\Lambda(s)]^T$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2: Στο ερώτημα 1 έχουμε φέρει το σύστημα μας στην μορφή **$y= \theta^T \varphi$** ,όπου $\theta^T=\theta_\lambda^T$ *διάνυσμα αγνώστων παραμετρων*

Φ=ζ *διάνυσμα οπισθοδρόμησης*

y *η έξοδος του συστήματος*

άρα ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα διάνυσμα

$Z_n=[u(t_1)\ \ y(t_1)\ \ u(t_2)\ \ y(t_2) \ldots u(t_n)\ \ y(t_n)]$

Αυτό το διάνυσμα είναι γνωστό καθώς το u και το y είναι μετρήσιμα στο σύστημα μας

άρα ικανοποιείται και η δεύτερη προϋπόθεση

Ορίζουμε την συνάρτηση κόστους :

- $V_n=1/n \sum_{t=1}^{n} l(e(\theta, t_i))$, όπου $l(e)=1/2\ e^2$
- $e=y(t) - \hat{y}(t,\theta)$ σφάλμα πρόβλεψης

Φτιάχνουμε τώρα τα διανύσματα φ_1 φ_2 φ_3 για τα μεγέθη m k b

$\varphi_1(t)$ είναι η t μέτρηση του φ_1 για t από 1 έως n

$\varphi_2(t)$ είναι η t μέτρηση του φ_2 για t από 1 έως n

$\varphi_3(t)$ είναι η t μέτρηση του φ_3 για t από 1 έως n

και τα αποθηκεύουμε σε έναν πίνακα

$\Phi=[\ \varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \varphi_3\ ]$

Και ένα διάνυσμα Y(t) να είναι η t μέτρηση της εξόδου y για t από 1 έως n

Προκύπτει λοιπόν μια διανυσματική σχέση για το σφάλμα $e=Y-\Phi\theta$

Το θ_0 (Το θ δηλαδή που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους θα μας δώσει τις παραμέτρους που ψάχνουμε)

$\theta_0 = \text{argmin}_\theta(|e|^2)/2 = \text{argmin}_\theta(e^T e)/2$

Η V_n είναι κυρτή , άρα έχει μοναδικό ελάχιστο το οποίο θα βρεθεί αν λύσουμε την εξίσωση της παραγωγού της V ως προς θ ιση με 0

Προκύπτει λοιπόν $\theta_0 = Y^T \varphi(\varphi^T\varphi)^{-1}$

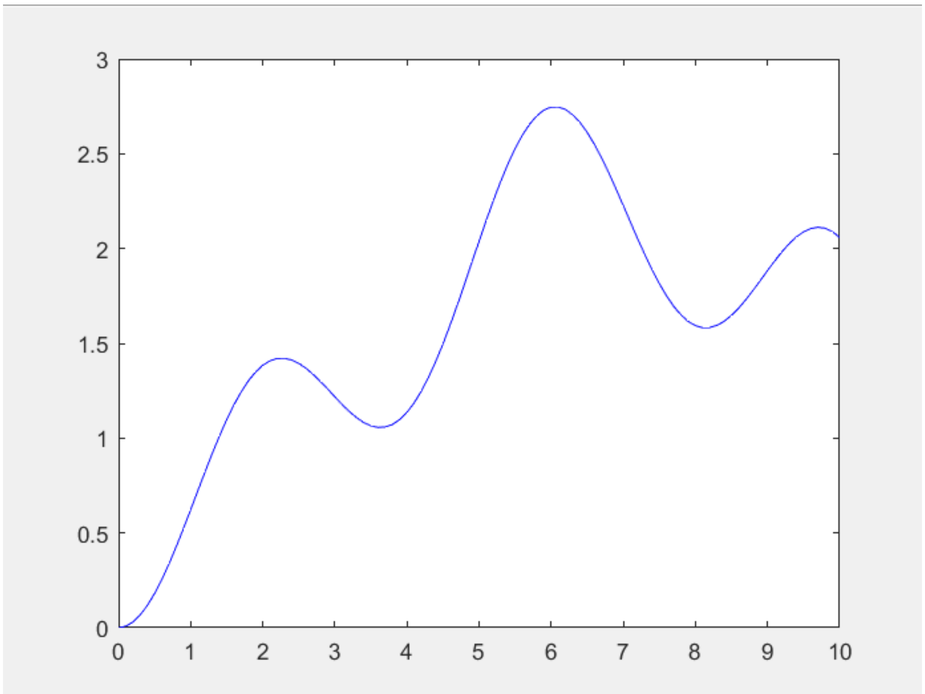
ΕΡΩΤΗΜΑ 3: Στο ερώτημα αυτό κάνουμε προσομοίωση του συστήματος με το λογισμικό του MATLAB . Αρχικά, προσομοιάζουμε το σύστημα λύνοντας την διαφορική εξίσωση του συστήματος με την χρήση της συνάρτησης ode και φτιάχνουμε την γραφική παράσταση της y(t)

Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και φτιάχνουμε την γραφική παράσταση της ŷ(t)

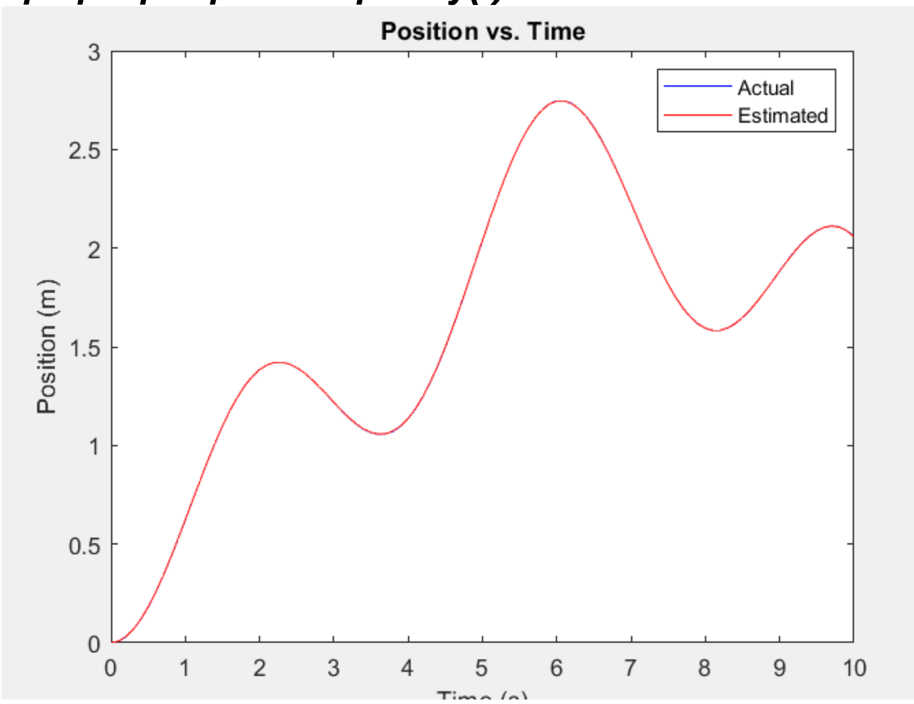
Και τέλος, φτιάχνουμε την γραφική παράσταση του σφάλματος πρόβλεψης e = y(t) – ŷ(t). Το οποίο παρατηρούμε ότι είναι της τάξης του 10^{-3} δηλαδή πολύ μικρό.

Στην συνέχεια παρατίθενται οι παραπάνω γραφικές παρατάσεις:

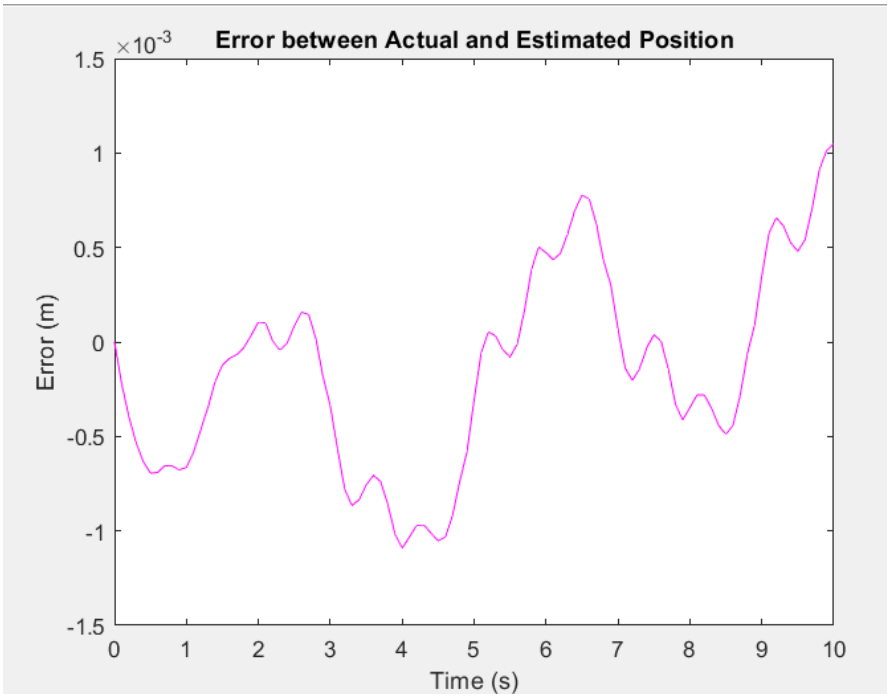
Γραφική παράσταση του y(t):



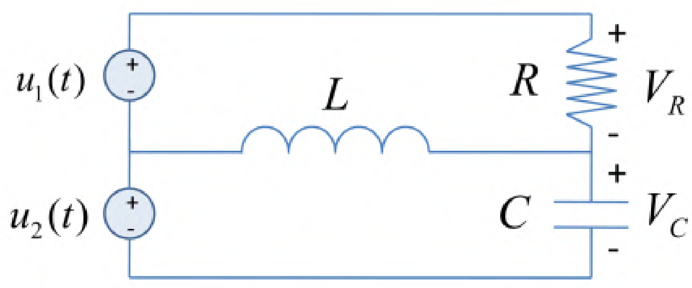
Γραφική παράσταση του ŷ(t):



Γραφική παράσταση του e:



<u>**ΘΕΜΑ 2**</u>



Σχήμα 2: Κύκλωμα RLC.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1:Για να βρούμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος θα κάνουμε κυκλωματική ανάλυση:

Είναι γνωστό ότι για το πηνίο και τον πυκνωτή ισχύουν αντίστοιχα οι εξής τύποι:

- V=L*di/dt   , για το πηνίο
- I=C*Dv/dt   , για τον πυκνωτή

Ορίζουμε λοιπόν 3 Βρόχους για το κύκλωμα μας:

- Β1: Ο πάνω βρόχος
- Β2: Ο κάτω βρόχος
- Β3: Ο υπερβρόχος του κυκλώματος

Γίνεται σαφές ότι για τον βρόχο Β1 ,το ρεύμα που τον διαρρέει βρίσκεται από την σχέση

$$I_1=V_R/R$$

Ενώ το ρεύμα που διαρρέει τον Β2 δίνεται από την σχέση:

$$I_2=CV_C^{(1)}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchoff έχουμε :

- Για τον Β1: $u_1(t)=LI_1^{(1)}- LI_2^{(1)}+V_R$

$$\rightarrow u_1(t)= L\, V_R^{(1)} /R - LCV_C^{(2)}+V_R$$

- Για τον B2: $u_2(t)=LI_2^{(1)}- LI_1^{(1)}+V_C$

  → $u_1(t)= LC*V_C^{(2)}- L\ V_R^{(1)}\ /R\ LC*V_C^{(2)}+V_c$

- Για τον B3,προσθετουμε τις δυο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και προκύπτει:

$$u_1(t)+ u_2(t)= V_R + V_C \qquad (1)$$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι :

- $V_R =u_1(t)+ u_2(t) – V_C$
- $V_C =u_1(t)+ u_2(t) – V_R$

Αντικαθιστώντας το V_R στην σχέση του B1και το V_C στην σχέση του B2 προκύπτουν οι εξής δυο εξισώσεις:

- $u_1(t)=L/R * (u_1^{(1)}(t)+ u_2^{(1)}(t) – V_C^{(1)}) - LCV_C^{(2)} + u_1(t)+ u_2(t) – V_C$

→$V_C^{(2)}=(1/RC)u_1^{(1)}(t)+(1/RC)u_2^{(1)}(t)-(1/RC)V_C^{(1)}+(1/LC)u_2(t)-(1/LC)V_C$

→$V_C^{(2)} +(1/RC)V_C^{(1)}+(1/LC)V_C =(1/RC)u_1^{(1)}(t)+(1/RC)u_2^{(1)}(t)+(1/LC)u_2(t)$ (2)

Αντίστοιχα:

- $V_R^{(2)} +(1/RC)V_R^{(1)}+(1/LC)V_R =u_1^{(2)}(t)+(1/LC)u_1^{(1)}(t)+u_2^{(2)}(t)$ (3)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη στις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι :

- $V_C(s)=(1/(s^2+s/RC+1/LC))*(u_1(s)*s/RC + u_2(s)*(s/RC + 1/LC)$
- $V_R(s)=(1/(s^2+s/RC+1/LC))*(u_1(s)*(s^2 +1/LC) + u_2(s)*s^2)$

Από τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$[V_C(s)\ \ V_R(s)]^T=(1/(s^2+s/RC+1/LC))\begin{bmatrix} \frac{s}{RC} & \frac{s}{RC}+1/LC \\ s^2+\frac{1}{LC} & s^2 \end{bmatrix}[u_1(s)\ u_2(s)]^T$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μορφή:

$$V(s)=G(s)*u(s) \qquad ,\text{οπου}$$

$$G(s) = (1/(s^2+s/RC+1/LC))\begin{bmatrix} \frac{s}{RC} & \frac{s}{R\dot{C}} + \frac{1}{L\dot{C}} \\ s^2 + \frac{1}{LC} & s^2 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε λοιπόν τον πίνακα μεταφοράς πρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους R,C,L.

Εφαρμόζοντας μέθοδο ελάχιστων τετράγωνων για την σχέση (2)

Προκύπτει:

$$\theta^*=[1/RC \quad 1/LC \quad 1/RC \quad 0 \quad 1/RC \quad 1/LC]^T$$

$$\Delta=[\,-V_C^{(1)} \quad -V_C \quad u_1^{(1)}(t) \quad u_1(t) \quad u_2^{(1)}(t) \quad u_2(t)]^T$$

Οπότε $V_C^{(2)}=(\theta^*)^T \Delta$

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα φίλτρο $1/\Lambda(s)$ $2^{ης}$ τάξης (πολλοί στο αριστερό ημιεπίπεδο για να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια) ,δηλαδή

$$\Lambda(s)=(s+\rho_1)(s+\rho_2) \rightarrow \Lambda(s)= s^2+(\rho_1+\rho_2)s+ \rho_1\rho_2$$

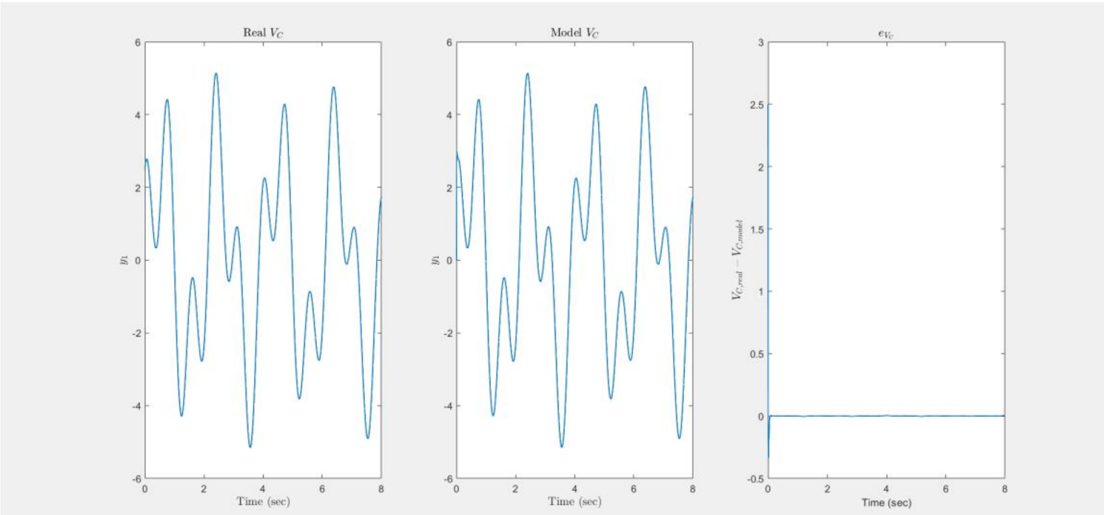
Οπότε $V_C=(\theta_\lambda)^T \zeta$,οπού

- $\theta_\lambda^T=[\ \theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]$

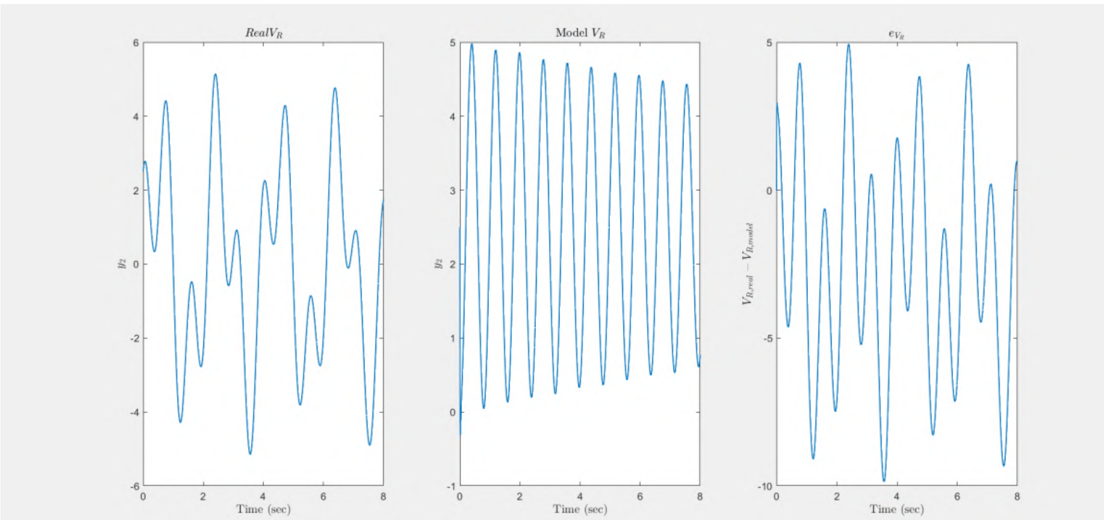
  $=[1/RC-\lambda_1 \quad 1/LC-\lambda_2 \quad 1/RC \quad 0 \quad 1/RC \quad 1/LC]^T$
- $\zeta=[\,-\Delta_1^T y/\Lambda(s) \quad \Delta_1^T u_1/\Lambda(s) \quad \Delta_1^T u_2/\Lambda(s)]^T$

  $=[-sy/\Lambda(s) \quad -y/\Lambda(s) \quad su_1/\Lambda(s) \quad u_1/\Lambda(s) \quad su_2/\Lambda(s) \quad u_2/\Lambda(s)]^T$

Τρέχοντας τον αλγόριθμο για t από 0 έως 8 με περίοδο δειγματοληψίας $T=10^{-6}$ παρατηρούμε στα παρακάτω διαγραμματα ότι με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων έχουμε μια καλή προσέγγιση του V_C,καθώς το σφάλμα είναι σχεδόν καθ’ όλη την διάρκεια του πειράματος σταθερό κοντά στο 0.



Αντίθετα, η εκτίμηση για το V_R δεν φαίνεται να είναι το ίδιο καλή.



ΕΡΩΤΗΜΑ 2: Προσθέτοντας σε ορισμένες τυχαίες χρονικές στιγμές τυχαίες τιμές πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις καταγεγραμμένες , παρατηρούμε ότι τα τυχαία σφάλματα δεν επηρεάζουν πολύ τις εκτιμήσεις V_R και V_C καθώς τα διαγράμματα των εκτιμήσεων δεν αλλάζουν σχεδόν καθόλου. Αυτό που αλλάζει είναι ότι παρατηρούμε στα διαγράμματα των πραγματικών τιμών αλλά και τον σφαλμάτων κάποιες κατακόρυφες γραμμές οι οποίες δηλώνουν τα τυχαία σφάλματα που εισαγαμε