Ros Roger, Alexandre

Febrer 2023

6. Self reducibility CLIQUE. Suposem que tenim un algorisme que decideix `CLIQUE` en temps polinòmic. Dissenyeu un algorisme tal que donat un graf G i donat un natural k, retorni una clica de k vèrtexs, si existeix. Demostreu que si $\mathtt{CLIQUE} \in \mathtt{P}$ aleshores *trobar* una clica també és computable en temps polinòmic.

Solució:
Sigui `X` una TM que decideix en temps polinòmic

$$\mathtt{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid \exists\, S \subseteq V(G) \wedge \exists\, t \geq k \text{ s.t. } G[S] \cong K_t\}$$

Aleshores el següent algorisme troba una clica de k vèrtexs en temps polinòmic fent ús de la suposada `X`, donat el graf i el natural k:

Algorithm 1 `QuickCLIQUE`

```
Input
    G   undirected graph
    k   natural number

if X rejects on input ⟨G, k⟩ then
    report no k-clique found
end if

for every vertex u ∈ V(G) do
    if X accepts on input ⟨G − u, k⟩ then
        G ← G − u                                   ▷ Descartem el vèrtex del graf
    end if
end for

return V(G) as the set of vertices forming a k-clique
```

Primerament en demostrarem la seva correctesa.

Si el graf G no conté cap k-clica, llavors `X` rebutjarà l'entrada i no trobarem cap clica. Notem que si un graf conté una m-clica, llavors també conté una p-clica per a qualsevol $p \leq m$. Per tant, és possible que la k-clica sigui un subconjunt d'una altra clica, però només ens interessa la k-clica.

Si el graf sí conté una k-clica, llavors considerem els últims k vèrtexs visitats al bucle **for** que formen una k-clica (anomenarem aquest conjunt S). Tots els vèrtexs que no són de S seran clarament descartats del graf, doncs encara seguirà existint la k-clica formada per S. Els vèrtexs de S mai podran ser descartats, doncs si suposem que $u \in S$ és descartat, això vol dir que seguirà havent-hi una k-clica formada per k vèrtexs a $G - u$, però un d'aquests no és a S (doncs $|S| = k$ i $u \in S$) i apareix a una posició posterior que u, per tant S no estava formada per els últims k vèrtexs que formaven una clica. ※

Al final del **for**, G es convertirà en el subgraf induït per S, que serà un K_k.

Finalment demostrarem que `QuickCLIQUE` és un algorisme polinòmic. L'execució de `X` al principi té temps polinòmic, doncs només executem una vegada l'algorisme. En el bucle **for**, l'algorisme `X` s'executa n vegades, on $n = |V(G)|$. A més, la construcció del graf $G - u$ té un cost constant, per tant el cost del bucle segueix essent polinòmic, doncs el producte de dos polinomis és un polinomi.

Per tant, el problema de *trobar* la k-clica té cost polinòmic si $\mathtt{CLIQUE} \in \mathtt{P}$ i existís aquesta suposada `X`. ■