

# **Distribution d'un accroissement d'un processus de renouvellement avec récompense dans un contexte de dépendance**

**Essai**

**Alexandre Lepage**

Sous la direction de:

Hélène Cossette, directrice de recherche  
Étienne Marceau, codirecteur de recherche

# Résumé

Les processus de renouvellement avec récompenses sont très utiles notamment, en théorie de la fiabilité (p. ex. [Pal and Murthy \(2003\)](#)) et dans la théorie de la ruine. Récemment, dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressé à relaxer l'hypothèse d'indépendance qui existe généralement entre les variables des temps inter-sinistres et de la sévérité. Ces chercheurs ont développé différentes mesures de risque afin d'étudier le comportement d'un tel modèle. Mentionnons les deux premiers moments, la transformée de Laplace-Stieltjes, la fonction de pénalité de Gerber-Shiu, etc. Cependant, aucune méthodologie n'a encore été développée pour approximer la distribution d'un accroissement de ce processus aléatoire hormis [Marceau \(2009\)](#) qui s'est intéressé au cas où les variables aléatoires sont discrètes. Le présent essai vise donc à adapter les travaux de ce dernier lorsque les variables aléatoires sont continues. Afin de modéliser la dépendance qui existe entre les temps inter-sinistres et les récompenses, la théorie des copules est utilisée. En complément à cela, un algorithme est proposé pour effectuer de la simulation Monte-Carlo. De plus, on regarde les propriétés asymptotiques en contexte de dépendance et la démonstration de l'ordonnancement de ce processus selon le niveau de dépendance est effectuée.

# Abstract

Renewal processes with rewards are particularly useful in reliability theory (eg [Pal and Murthy \(2003\)](#)) and in ruin theory. Recently, in the literature, several authors have been interested in relaxing the independence hypothesis which generally exists between inter-disaster time and severity variables. These researchers have developed different risk measures in order to study the behavior of such a model. Let us mention the first two moments, the Laplace-Stieltjes transform, the Gerber-Shiu penalty function, etc. However, no methodology has yet been developed to approximate the distribution of an increase in this random process except [Marceau \(2009\)](#) which was interested in the case where the random variables are discrete. This essay therefore aims to adapt the latter's work when the random variables are continuous. In order to model the dependence that exists between inter-disaster times and rewards, copula theory is used. In addition to this, an algorithm is proposed to perform Monte-Carlo simulation. Moreover, we look at the asymptotic properties in a dependency context and the ordering of this process according to the dependency level is demonstrated.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Définitions et propriétés</b>	<b>4</b>
<b>2 Approches de calcul</b>	<b>6</b>
2.1 Simulation . . . . .	6
2.2 Discrétisation . . . . .	9
2.3 Mélanges d'Erlang . . . . .	20
<b>3 Propriétés asymptotiques</b>	<b>27</b>
<b>4 Ordonnancement du risque selon la dépendance</b>	<b>29</b>
<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison des mesures de risque $VaR$ et $TVaR$ de $S(t)$ , $t = 5$ , lorsqu'une structure de dépendance entre $X$ et $W$ est modélisée par une copule FGM de paramètre $\theta = \{-1, 0, 1\}$ et avec différentes valeurs de $\kappa$ . . . . .	9
2.2	Comparaison des résultats obtenus grâce à l'algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec des données simulées grâce à l'algorithme 1.	19
2.3	Comparaison des résultats obtenus grâce à l'algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec des données simulées grâce à l'algorithme 1.	20
2.4	Valeurs de l'espérance de $S^{(\alpha)}(t)$ pour $\alpha \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ et pour $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ . Le cas $\alpha = 0$ désigne le scénario où il y a indépendance entre $X$ et $W$ . La constante $h_W$ représente le pas de discrétisation de la v.a. $W$ .	26

# Liste des figures

2.1	Courbes des fonctions de répartition empiriques de $S(t)$ , $t = 5$ , selon le paramètre de dépendance $\theta$ , introduit grâce à la copule FGM. . . . .	8
2.2	Comparaison de la fonction de répartition théorique de $N(t)$ , pour $t = 5$ , avec les approximations de celle-ci calculées en fonction des bornes $W^{(l,h)}$ et $W^{(u,h)}$ . Dans ce cas, $W \sim \text{Exp}(1)$ et $h = 1/5$ . La courbe noire, quant à elle, représente le modèle théorique où le processus $N(t)$ est poissonien de moyenne égale à 5. .	12
2.3	Comparaison des fonctions de répartition calculées grâce à l'algorithme 2 pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l'algorithme 1 pour $n = 2^9$ et $h_x = 1/5$ .	19
2.4	Comparaison des fonctions de répartition calculées grâce à l'algorithme 2 pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l'algorithme 1 pour $n = 2^{10}$ et $h_x = 1/100$ .	20
2.5	Comparaison de la fonction de répartition de $S(t)$ , pour différentes valeurs de $t$ lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre $\alpha = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant. . . . .	24
2.6	Comparaison de la fonction de répartition de $S(t)/t$ , pour différentes valeurs de $t$ lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre $\alpha = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant. . . . .	25

# Remerciements

L'auteur aimerait remercier les professeurs Étienne Marceau et Hélène Cossette pour leur soutien, leurs conseils et leurs commentaires. Merci pour avoir cru en moi. Il aimerait également remercier la Chaire d'actuariat de l'Université Laval pour avoir subventionné cette recherche.

# Introduction

Les processus de renouvellement avec récompense, aussi appelés processus de renouvellement composés, ont été introduits par Andersen (1957) et sont particulièrement utiles dans le contexte de la théorie de la ruine. Ce type de processus est décrit dans Grimmett and Stirzaker (2001) ainsi que dans Gallager (2013). On peut le définir comme  $\mathbf{S} = \{S(t)\}_{t \geq 0}$  tel que

$$S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  est un processus de renouvellement (voir p. ex. Ross et al. (1996), Grimmett and Stirzaker (2001) ou Gallager (2013)) et où  $(X_1, X_2, \dots)$  est une suite de variables aléatoires (v.a.) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) représentant des montants de "récompense". Dans un contexte d'analyse de la fiabilité ou d'ingénierie, cette "récompense" peut prendre des valeurs négatives et être considérée comme des coûts. Dans un contexte d'assurance, on parlera plutôt de montants de sinistres. Cette dernière représentation est celle qui est étudiée dans le cas présent.

Dans la littérature actuarielle, ce type de processus aléatoire est largement utilisé dans la théorie de la ruine. Cependant, l'hypothèse de base généralement utilisée dans ce contexte est de présumer l'indépendance entre les composantes du processus. Or, comme l'ont démontré Boudreault et al. (2006) et Nikolouloupoulos and Karlis (2008), cette hypothèse n'est pas toujours adéquate. Dans certains contextes tels que la modélisation du montant total des pertes occasionnées par un tremblement de terre, une dépendance non négligeable est observable entre les montants de sinistres  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et le temps qui s'est écoulé depuis le dernier sinistre  $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ . Pour cette raison, plusieurs auteurs se sont intéressés à cette nouvelle structure de dépendance et aux implications que cela entraîne sur les mesures de ruine. Parmi ces auteurs, mentionnons Albrecher and Boxma (2004), Boudreault et al. (2006), Cossette et al. (2008), Marceau (2009), Cossette et al. (2010), Willmot and Lin (2011) et Jiang and Nadarajah (2019). Également, certains auteurs se sont intéressés à une version où les montants sont actualisés. Entre autre, il y a Barges et al. (2011), Asimit and Badescu (2010), Lévêillé et al. (2010) et Cheung and Woo (2016).



Par ailleurs, plusieurs de ces auteurs considèrent que le processus de dénombrement sous-jacent est poissonien. Se faisant, on assume que l'intensité du processus aléatoire est constant dans le temps et que le modèle de fréquence est équi-dispersé (voir [McShane et al. \(2008\)](#)). Comme cette hypothèse est très limitative, on s'intéressera tout particulièrement au cas où les temps inter-sinistres obéissent plutôt à une loi Weibull. En effet, [Yannaros \(1994\)](#) démontre que les processus de renouvellement de type Weibull peuvent être exprimés comme des processus de Cox<sup>1</sup>. Plus spécifiquement, le cas où le paramètre de forme de la loi est inférieur à 1 peut être interprété comme une généralisation du processus de Poisson où l'intensité du processus n'est pas constant. On parlera alors de processus de Poisson doublement stochastique<sup>2</sup>. Plus encore, dans [Lai et al. \(2006\)](#) on trouve que les processus de renouvellement de type Weibull peuvent prendre une multitude de formes et s'adapter à plusieurs contextes. Notamment, dans la modélisation des tremblements de terre, des éruptions volcaniques et en assurance vie. On peut également consulter [Boudreault et al. \(2017\)](#) pour en apprendre plus à ce sujet. Pour une description détaillée de cette loi de probabilité, [Rinne \(2008\)](#) est fortement suggéré.

Jusqu'à maintenant, on s'est principalement intéressé au calcul de certaines quantités telles que l'espérance du processus aléatoire, la transformée de Laplace-Stieltjes, la fonction de pénalité de Gerber-Shiu, etc. Cependant, personne n'est encore parvenu à calculer la fonction de répartition ou la fonction de densité de probabilité de ce type de processus aléatoire hormis [Marceau \(2013\)](#) qui a développé une formule récursive dans le cas où les v.a. sont discrètes. Pour cette raison, on s'intéresse à différentes méthodes visant à étudier la distribution du processus de renouvellement défini en (1). Se faisant, il est possible (et plus facile) de calculer les quantités susmentionnées.

Du point de vue des processus de renouvellement ordinaires (sans récompense), plusieurs auteurs se sont intéressés à ce sujet. Mentionnons [Ayhan et al. \(1999\)](#), [Mercier \(2007\)](#), [van Noordwijk and van der Weide \(2008\)](#) et [Baker and Kharrat \(2018\)](#). Dans le cas présent, on vise à adapter les méthodes proposées par ces auteurs dans le cas où le processus de renouvellement est composé.

Cet essai est construit comme suit. Dans le Chapitre 1, on commence par définir plus concrètement le modèle à l'étude. Le Chapitre 2 présente trois approches pour faire l'étude de la distribution de  $\mathbf{S}$ . La première d'entre elle est celle qui est généralement la plus utilisée en pratique, c.-à-d. la simulation. Ainsi, un algorithme est proposé à cette fin. Puis, dans la Section 2.2, on propose une méthode pour approximer la densité de probabilité associé à un accroissement d'un processus de renouvellement composé en utilisant la discrétisation. Ensuite, une extension de cette approche utilisant un mélange d'Erlang est proposée dans la Section 2.3.

---

1. Voir [Yannaros \(1989\)](#).

2. Voir [Grandell \(2006\)](#).

Dans le Chapitre 3, un rappel sur les propriétés asymptotiques des processus de renouvellement est fait et on démontre que ces propriétés tiennent même lorsqu'un lien de dépendance unit les v.a.  $X_k, W_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Finalement, dans le Chapitre 4, l'ordonnancement de  $\mathbf{S}$  par rapport au niveau de dépendance unissant les v.a.  $X$  et  $W$  est démontré.

# Chapitre 1

## Définitions et propriétés

Soit la suite de v.a. i.i.d.  $\underline{X} = \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  représentant des montants de sinistres et la suite de v.a.  $\underline{T} = \{T_k\}_{k=1}^{\infty}$  représentant les moments d'occurrence de ces sinistres. On définit la suite de v.a. i.i.d.  $\underline{W} = \{W_k\}_{k=1}^{\infty}$  comme les temps inter-sinistres tel que  $W_k := T_k - T_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Soit un processus de renouvellement composé  $\mathbf{S} = \{S(t)\}_{t \geq 0}$  tel qu'un accroissement de longueur  $t \geq 0$  est défini comme

$$S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}},$$

tel que  $S(0) = 0$  et où  $\mathbf{N} = \{N(t)\}_{t \geq 0}$  est un processus de renouvellement défini comme

$$N(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}} \quad (1.1)$$

tel que  $N(0) = 0$ . Comme il est expliqué en introduction, on s'intéresse tout particulièrement au cas où  $W \sim \text{Weibull}(\tau, \xi)$  telle que la fonction de répartition  $F_W$  s'exprime comme

$$F_W(t) = 1 - \exp\{-(\xi t)^\tau\}, \quad t \geq 0, \quad \xi > 0, \tau > 0, \quad (1.2)$$

et la fonction de densité  $f_W$  correspond à

$$f_W(t) = \xi \tau (\xi t)^{\tau-1} \exp\{-(\xi t)^\tau\}, \quad t \geq 0, \quad \xi > 0, \tau > 0. \quad (1.3)$$

Soit  $h(t)$ , le taux de risque (*hazard rate*) associé à la v.a.  $W$ . Alors

$$h(t) = \frac{f_W(t)}{1 - F_W(t)} = \xi \tau (\xi t)^{\tau-1}.$$

Ainsi, la loi Weibull a la particularité que, lorsque  $0 < \tau < 1$ ,  $h(x)$  est décroissant (queue de distribution lourde) et le modèle de fréquence est sur-dispersé (variance plus grande que la moyenne). Tandis que, lorsque  $\tau = 1$ , celle-ci se simplifie en la loi exponentielle avec  $h(x) = \xi$ . Dans le cas où  $\tau > 1$ , alors  $h(x)$  est croissant (queue de distribution légère) et le modèle de fréquence est sous-dispersé (moyenne plus grande que la variance).

Afin de relaxer l'hypothèse d'indépendance généralement utilisée dans la théorie de la ruine, on suppose qu'il existe un lien de dépendance unissant les variables aléatoires  $X_k, W_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Cependant, on considère que les couples entre eux sont i.i.d. Dans cet ouvrage, le lien unissant ces paires de v.a. est modélisé par une copule dénotée  $C$ . Pour une description détaillée sur la théorie des copules, voir [Joe \(1997\)](#) ou [Nelsen \(2006\)](#).

## Chapitre 2

# Approches de calcul

Comme il est mentionné précédemment, plusieurs auteurs se sont intéressé à développer l'expression analytique de certaines quantités pour des modèles bien précis. Cependant, comment fait-on pour calculer ses quantités si le modèle n'admet pas de forme analytique ou si celle-ci est extrêmement coûteuse à trouver ? Généralement, dans ce cas, on fait appel à la simulation Monte-Carlo (voir [Mooney \(1997\)](#)). À cet effet, un algorithme est proposé dans la Section 2.1. Cependant, la simulation n'est pas la seule solution possible. On peut arriver à approximer la densité de probabilité de  $\mathbf{S}$  en utilisant la discrétisation telle que présentée dans la Section 2.2. Avec la densité de probabilité ainsi approximée, il est possible de calculer une grande quantité de mesures de risques telles que l'espérance, la variance, la prime *Stop-Loss*, la VaR et la TVaR.

### 2.1 Simulation

On considère le modèle présenté au Chapitre 1. On désire simuler  $S(t)$ , pour  $t \geq 0$ . Pour y arriver, il faut simuler des réalisations de  $X$  et de  $W$  en considérant qu'il existe une structure de dépendance les unissant. À cette fin, on utilise la théorie des copules.

Soit  $F_{X,W}$ , la fonction de répartition bivariable des couples  $\{(X_k, W_k)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ . On a que  $F_{X,W}$  appartient à la classe de Fréchet, dénoté  $F_{X,W} \in \mathcal{CF}(F_X, F_W)$ , où  $F_X$  et  $F_W$  désignent les fonctions de répartition marginales de  $X$  et de  $W$ . Avec le théorème de Sklar, on sait que

$$F_{X,W}(x, w) = C(F_X(x), F_W(w)), \quad x, w \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, on a

$$F_{X|W=w}(x) = C_{1|2}(F_X(x)|F_W(w)),$$

où

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Donc

$$F_{X|W=w}^{-1}(u) = F_X^{-1} \left( C_{1|2}^{-1}(u|F_W(w)) \right), \quad u \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

Ainsi, la première étape de l'algorithme de simulation est d'identifier l'expression de la copule conditionnelle  $C_{1|2}$  et de l'inverser pour trouver  $C_{1|2}^{-1}$  afin de pouvoir calculer les réalisations de  $X$  sachant le temps qui s'est écoulé depuis le sinistre précédent. Pour la suite, il s'agit de suivre les étapes de l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1 :** Simuler un processus de renouvellement avec récompenses lorsqu'il y a une structure de dépendance unissant  $X$  et  $W$ .

---

**input** :  $t$  : la durée du processus ;

$n$  : nb de réalisations de la simulation (p. ex.  $n = 10^5$ ).

**output** : vecteur de dimension  $n \times 1$  correspondant à des réalisations du processus  $S(t)$ .

```

1 for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
2   poser  $T_0 = 0$  ;
3   poser  $i = 1$  ;
4   do
5     simuler  $W_i^{(j)}$ , une réalisation de  $W$  ;
6     calculer  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$  ;
7     incrémenter  $i = i + 1$  ;
8   while  $T_i^{(j)} \leq t$ 
9   calculer  $N(t)^{(j)} = \max(i) - 1$  ;
10  retirer le dernier élément de la suite  $W^{(j)} = (W_1^{(j)} \dots W_{N(t)^{(j)}+1}^{(j)})$  ;
11  if  $N(t)^{(j)} = 0$  then
12     $S(t)^{(j)} = 0$  ;
13  next  $j$  ;
14  end
15  calculer  $U_i^{(j)} = F_W(W_i^{(j)})$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$  ;
16  simuler le vecteur  $(V_1^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$ , des réalisations des v.a.  $V_i \sim V \sim Unif(0, 1)$  ;
17  calculer  $X_i^{(j)} = F_X^{-1}(C_{1|2}^{-1}(V_i^{(j)}|U_i^{(j)}))$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$  ;
18  calculer  $S(t)^{(j)} = \sum_{i=1}^{N(t)^{(j)}} X_i^{(j)}$ .
19 end

```

---

L'exemple 1 sert à illustrer l'application de l'algorithme 1.

**Exemple 1.** On considère que  $X \sim \text{Exp}(1)$ ,  $W \sim \text{Weibull}(\tau = 1.1, \xi = \Gamma(1 + 1/1.1))$  avec  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[W] = 1$ . On pose  $t = 5$  et la copule utilisée est la copule FGM de paramètre  $\theta$  définie

comme

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)),$$

où  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  et  $\theta \in [-1, 1]$ . La copule conditionnelle quant à elle correspond à

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = u_1(1 + \theta(1 - u_1)(1 - 2u_2)). \quad (2.2)$$

Pour ce qui est de l'inversion de la copule conditionnelle (2.2), il suffit de poser  $v = C_{1|2}(u_1|u_2)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} v &= u_1(1 + \theta(1 - u_1)(1 - 2u_2)) \\ &= u_1 + \theta(1 - 2u_2)u_1 - \theta(1 - 2u_2)u_1^2 \\ &= (1 + \theta(1 - 2u_2))u_1 - \theta(1 - 2u_2)u_1^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Posons  $a = -\theta(1 - 2u_2)$  et  $b = 1 + \theta(1 - 2u_2)$ . On peut réécrire (2.3) comme

$$\begin{aligned} v &= bu_1 + au_1^2 \\ vu_1^{-2} &= bu_1^{-1} + a \\ 0 &= -vu_1^{-2} + bu_1^{-1} + a. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de deuxième degré. On applique alors la formule quadratique et on trouve

$$u_1^{-1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4va}}{-2v}.$$

On conclut que

$$u_1 = \frac{2v}{1 + \theta(1 - 2u_2) + \sqrt{(1 + \theta(1 - 2u_2))^2 - 4v\theta(1 - 2u_2)}}. \quad (2.4)$$

Avec (2.4), il est possible d'appliquer l'algorithme 1. Avec le langage de programmation R, on commence par poser un ancrage avec la commande `set.seed(2020)`. Puis, avec  $n = 10^5$ ,  $t = 5$ , et  $\theta \in \{-1, 0, 1\}$  on obtient les résultats présentés dans le tableau 2.1 et l'illustration 2.1.

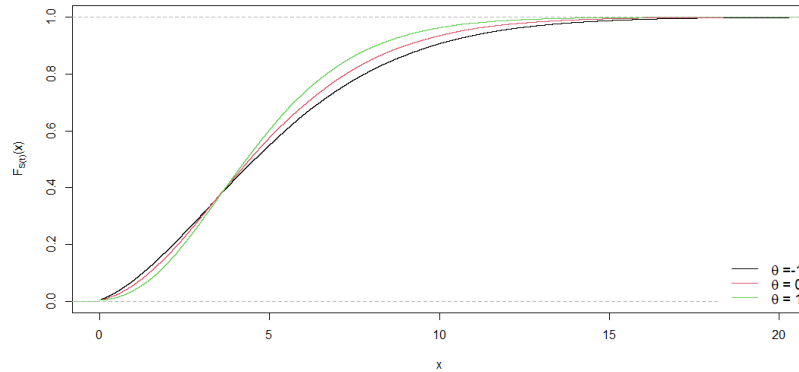


ILLUSTRATION 2.1 – Courbes des fonctions de répartition empiriques de  $S(t)$ ,  $t = 5$ , selon le paramètre de dépendance  $\theta$ , introduit grâce à la copule FGM.

	$\theta \setminus \kappa$	0	0.01	0.1	0.5	0.9	0.99
$VaR_\kappa(S(t))$	-1	0.00	0.13	1.27	4.57	9.82	15.41
	0	0.00	0.21	1.46	4.42	9.00	13.87
	1	0.00	0.39	1.71	4.32	8.14	12.24
$TVaR_\kappa(S(t))$	-1	5.18	5.21	5.65	7.82	12.30	17.51
	0	4.93	4.96	5.37	7.26	11.17	15.80
	1	4.70	4.73	5.08	6.69	9.96	13.85

TABLEAU 2.1 – Comparaison des mesures de risque  $VaR$  et  $TVaR$  de  $S(t)$ ,  $t = 5$ , lorsqu’une structure de dépendance entre  $X$  et  $W$  est modélisée par une copule FGM de paramètre  $\theta = \{-1, 0, 1\}$  et avec différentes valeurs de  $\kappa$ .

Posons  $\mathbf{S}^{(\theta)}$  comme étant le cas où le paramètre de dépendance du processus  $\mathbf{S}$  vaut  $\theta$ . Dans ce cas, on observe avec le tableau 2.1 que

$$TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(1)}) \leq TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(0)}) \leq TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(-1)}), \quad \forall \kappa \in [0, 1] \quad (2.5)$$

pour  $t = 5$ . De plus, considérant que  $TVaR_0(S(t)) = \mathbb{E}[S(t)]$ , on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{S}^{(1)}] \neq \mathbb{E}[\mathbf{S}^{(0)}] \neq \mathbb{E}[\mathbf{S}^{(-1)}]. \quad (2.6)$$

En combinant (2.5) et (2.6) on déduit (2.7).

$$\mathbf{S}^{(1)} \preceq_{\text{icx}} \mathbf{S}^{(0)} \preceq_{\text{icx}} \mathbf{S}^{(-1)}. \quad (2.7)$$

Le résultat (2.7) sera démontré mathématiquement à la Section 4.

## 2.2 Discrétisation

Une approche alternative à la simulation consiste à discrétiser les v.a.  $X$  et  $W$  comme il est décrit dans Mercier (2007) et dans van Noortwijk and van der Weide (2008) afin d’utiliser les propriétés des processus de renouvellement en temps discret. De cette façon, il est possible d’appliquer (2.8) qui s’inspire de Marceau (2009).

$$f_{\tilde{S}(t)}(s) = \begin{cases} 1 - F_W(t), & s = 0 \\ \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^s f_{\tilde{S}(t-i)}(s-j) f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(i, j), & s \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\tilde{\cdot}$  correspond à la version discrétisée d’une variable aléatoire continue et  $s, t \in \mathbb{N}$ . De plus, on a  $f_{\tilde{S}(0)}(s) = \mathbb{1}_{\{s=0\}}$ . Cependant comme les lois de probabilité marginales utilisées dans Marceau (2009) ne comportent pas de masse de probabilité à zéro, on remarque que, dans (2.8), les indices de la double somme commencent à 1. Toutefois, si on considère qu’il est possible d’avoir des masses à zéro, il faut adapter (2.8) en conséquence. Par ailleurs, comme il s’agit



d'un double produit de convolution, afin de gagner en efficacité, il serait judicieux d'utiliser la transformée de Fourier rapide (*FFT*) (voir Klugman et al. (2013)). Afin de tenir compte de ces deux aspects, l'approche suggérée consiste à modifier (2.8) de la manière suivante :

$$f_{\tilde{S}(t)}(s) = \begin{cases} 1 - F_W(t) + \sum_{k=0}^t f_{\tilde{S}(k)}(0) \times f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(t - k, 0), & s = 0 \\ \sum_{k=0}^t \left[ f_{\tilde{S}(k)} * f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(t - k, \cdot) \right](s) & s \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\left[ f_{\tilde{S}(k)} * f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(t - k, \cdot) \right](s)$  désigne le produit de convolution des fonctions  $f_{\tilde{S}(k)}(x)$  et  $f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(t - k, x)$  par rapport à une constante  $s \in \mathbb{N}_+$ . Les produits de convolution se trouvant à l'intérieur de la somme en (2.9) peuvent ainsi être résolus avec la *FFT*. La fonction caractéristique sous-jacente à cette transformation est définie dans la définition 1.

**Définition 1. Transformée de Fourier :** Soit une v.a.  $X$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction caractéristique associée à la v.a.  $X$  par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i \times \mathbb{E}[\sin(tX)],$$

où  $i = \sqrt{-1}$  et  $t > 0$ .

**Proposition 1.** Soit la suite de v.a. indépendantes, mais pas nécessairement identiques  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . On définit  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Alors  $\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$ .

**Preuve.**  $\varphi_S(t) = \mathbb{E}[e^{itS}] = \mathbb{E}[e^{it \sum_{k=1}^n X_k}] \stackrel{\text{ind.}}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$ . □

La *FFT* est implémentée en R avec la fonction `fft`<sup>1</sup> qui provient du *package* de base. L'inversion se fait également avec cette fonction, mais avec l'argument `inverse = TRUE`.

**Remarque :** Pour bien fonctionner, l'algorithme de Fourier rapide doit être utilisé sur des vecteurs de longueurs  $2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_+$  et doivent être suffisamment longs (p.ex.  $m = 10$ ) pour couvrir l'ensemble du domaine de la somme.

### 2.2.1 Méthodes de discrétisation

Afin d'effectuer la discrétisation des variables aléatoires  $X$  et  $W$ , on applique l'une des méthodes proposées dans la Section 5.1 de Bargès et al. (2009).

---

1. <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/fft>

**Définition 2. Méthode "upper" :** Cette méthode consiste à définir un pas de discrétisation  $h > 0$ , puis à définir les masses de probabilité comme suit :

$$f_{\tilde{X}}(jh) = \begin{cases} F_X(h), & j = 0 \\ F_X((j+1)h) - F_X(jh), & j \in \mathbb{N}_+. \end{cases} \quad (2.10)$$

**Définition 3. Méthode "lower" :** Cette deuxième méthode reprend la même idée que dans la définition 2 à la différence que l'on décale le vecteur des probabilités de manière à ce que la masse de probabilité à zéro soit nulle. On obtient donc le résultat présenté en (2.11).

$$f_{\tilde{X}}(jh) = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ F_X(jh) - F_X((j-1)h), & j \in \mathbb{N}_+. \end{cases} \quad (2.11)$$

Une fois que les marginales sont discrétisées, il est possible de calculer les masses de probabilités conjointes d'un modèle bivarié en utilisant la Section 5.2 de Bargès et al. (2009). Pour un pas de discrétisation  $h$  et, avec une copule  $C$ , la fonction de répartition du couple  $(\tilde{W}, \tilde{X})$  peut être calculée avec (2.12).

$$F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(ih, jh) = C(F_{\tilde{W}}(ih), F_{\tilde{X}}(jh)), \quad (2.12)$$

pour  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $h > 0$ . À partir de (2.12), il est possible de calculer les masses de probabilités conjointes avec (2.13).

$$f_{\tilde{W}, \tilde{X}}(ih, jh) = \begin{cases} F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(0, 0), & i = j = 0 \\ F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(0, jh) - F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(0, (j-1)h), & i = 0, j \in \mathbb{N}_+ \\ F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(ih, 0) - F_{\tilde{W}, \tilde{X}}((i-1)h, 0), & i \in \mathbb{N}_+, j = 0 \\ F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(ih, jh) - F_{\tilde{W}, \tilde{X}}((i-1)h, jh) & i, j \in \mathbb{N}_+ \\ -F_{\tilde{W}, \tilde{X}}(ih, (j-1)h) + F_{\tilde{W}, \tilde{X}}((i-1)h, (j-1)h), & \end{cases} \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Ordonnancement des bornes du processus

Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{W}^{(u,h)} = \{W_k^{(u,h)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{W}^{(l,h)} = \{W_k^{(l,h)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  correspondant respectivement à la version discrétisée de la suite de v.a.  $\underline{W}$  selon les méthodes *upper* et *lower*, pour un pas de discrétisation  $h > 0$ . Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{X}^{(u,h')} = \{X_k^{(u,h')}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$

et  $\underline{X}^{(l,h')} = \{X_k^{(l,h')}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  correspondants à la version discrétisée de la suite de v.a.  $\underline{X}$  selon les méthodes *upper* et *lower*, pour un pas de discrétisation  $h' > 0$ , égal ou non à  $h$ . On définit également les suites de v.a.  $\underline{T}^{(u,h)} = \{T_k^{(u,h)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\underline{T}^{(l,h)} = \{T_k^{(l,h)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $T_0^{(u,h)} = T_0^{(l,h)} = 0$  et  $T_k^{(\eta,h)} = \sum_{i=1}^k W_i^{(\eta,h)}$ , pour  $\eta \in \{u, l\}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ .

Conformément à [Mercier \(2007\)](#), on considère que la version discrétisée d'une v.a. selon la méthode *lower* (*upper*) correspond à sa borne inférieure (supérieure). Toutefois, lors du calcul des bornes de  $\mathbf{N}$ , une sorte de torsion est effectuée par rapport aux bornes de  $\underline{W}$ . L'illustration 2.2 présente comment la méthode de discrétisation de  $\underline{W}$  affecte les bornes de  $\mathbf{N}$ .

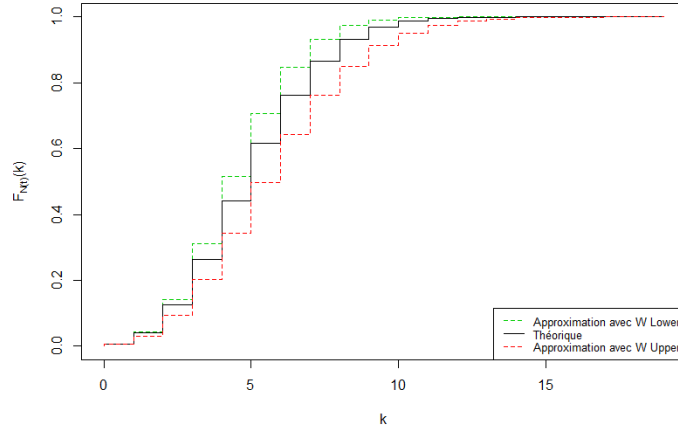


ILLUSTRATION 2.2 – Comparaison de la fonction de répartition théorique de  $N(t)$ , pour  $t = 5$ , avec les approximations de celle-ci calculées en fonction des bornes  $W^{(l,h)}$  et  $W^{(u,h)}$ . Dans ce cas,  $W \sim \text{Exp}(1)$  et  $h = 1/5$ . La courbe noire, quant à elle, représente le modèle théorique où le processus  $N(t)$  est poissonien de moyenne égale à 5.

Afin de bien définir les bornes de la fonction de répartition du processus  $S(t)$ , on désire démontrer pourquoi cette torsion se produit. Pour y arriver, on utilise l'ordre en dominance stochastique *sd* (voir p.ex. [Marceau \(2013\)](#), [Denuit et al. \(1999\)](#) ou [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#)).

**Définition 4.** Soit les v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X'] < \infty$ . Alors  $X$  est inférieure à  $X'$  sous l'ordre en dominance stochastique, notée  $X \preceq_{sd} X'$ , si  $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$  ou, de façon équivalente, si  $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq 1 - F_{X'}(x) = \bar{F}_{X'}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 2.** Soient les v.a.  $X^{(u,h')}$ ,  $X^{(u,h)}$ ,  $X$ ,  $X^{(l,h)}$  et  $X^{(l,h')}$  définies précédemment. Alors on a

$$X^{(u,h')} \preceq_{sd} X^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} X^{(l,h)} \preceq_{sd} X^{(l,h')},$$

pour  $0 < h \leq h'$ .

**Preuve.** Voir Marceau (2013). □

Par la proposition 2, on a

$$W_k^{(u,h)} \preceq_{\text{sd}} W_k \preceq_{\text{sd}} W_k^{(l,h)}, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

Également, par le théorème 1, on a

$$T_k^{(u,h)} \preceq_{\text{sd}} T_k \preceq_{\text{sd}} T_k^{(l,h)}, \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (2.14)$$

**Théorème 1.** *L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la composition : Soit les suites de v.a. i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  et  $X'_1, \dots, X'_n$  telles que  $X_i \preceq_{\text{sd}} X'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors on a*

$$\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{\text{sd}} \sum_{i=1}^n X'_i.$$

Pour un processus de renouvellement  $N(t)$ , on sait que

$$F_{N(t)}(k) = 1 - F_{T_{k+1}}(t) = \bar{F}_{T_{k+1}}(t), \quad t > 0 \quad (2.15)$$

(voir p.ex. Gallager (2013) ou Marceau (2013)). En combinant (2.14) et (2.15), on déduit que

$$\bar{F}_{T_{k+1}^{(l,h)}}(t) \leq \bar{F}_{T_{k+1}}(t) \leq \bar{F}_{T_{k+1}^{(u,h)}}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Pour définir les bornes de  $\mathbf{N}$ , on désire respecter (2.17) conformément à la définition 4.

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{N}^{(l,h)}}(k) &\leq F_{\mathbf{N}}(k) \leq F_{\mathbf{N}^{(u,h)}}(k) \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{N}^{(u,h)} &\preceq_{\text{sd}} \mathbf{N} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{N}^{(l,h)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \geq 0$ . Pour y arriver, il faut définir  $F_{\mathbf{N}^{(u,h)}}(k) = \bar{F}_{T_{k+1}^{(l,h)}}(t)$  et  $F_{\mathbf{N}^{(l,h)}}(k) = \bar{F}_{T_{k+1}^{(u,h)}}(t)$ , pour  $h > 0$ ,  $t \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\mathbf{S}^{(l,h,h')} = \{S^{l,h,h'}(t)\}_{t \geq 0}$  et  $\mathbf{S}^{(u,h,h')} = \{S^{u,h,h'}(t)\}_{t \geq 0}$ , les bornes inférieures et supérieures de  $\mathbf{S}$  tels que

$$\mathbf{S}^{(l,h,h')} = \sum_{k=1}^{\mathbf{N}^{(l,h)}} X_k^{(l,h')} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(l,h')} \mathbb{1}_{\{T_k^{(u,h)} \leq t\}}$$

et

$$\mathbf{S}^{(u,h,h')} = \sum_{k=1}^{\mathbf{N}^{(u,h)}} X_k^{(u,h')} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(u,h')} \mathbb{1}_{\{T_k^{(l,h)} \leq t\}},$$

où  $S^{l,h,h'}(0) = S^{u,h,h'}(0) = 0$ . Dans le cas où  $X_k$  est **indépendant** de  $\mathbf{N}$  ( $X_k$  indépendant de  $W_k$ ),  $k \in \mathbb{N}_+$ , alors on peut appliquer directement le théorème 2 pour poser (2.18).

$$\mathbf{S}^{(u,h,h')} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{S} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{S}^{(l,h,h')}. \quad (2.18)$$

**Théorème 2.** *L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution :*  
*Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{B}' = \{B'_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  telles que  $B_i \preceq_{\text{sd}} B'_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_+$ .  
On définit également les v.a. discrètes  $N$  et  $N'$  telles que  $N \preceq_{\text{sd}} N'$ . Finalement, on pose  $S = \sum_{i=1}^N B_i$  et  $S' = \sum_{i=1}^{N'} B'_i$ , où toutes les v.a. sont **indépendantes**. Alors  $S \preceq_{\text{sd}} S'$ .*

**Remarque 1.** *S'il n'y a pas indépendance entre les v.a. on ne peut utiliser le Théorème 2 pour ordonner le processus composé avec ses approximations. Dans ce cas, il faut alors utiliser une autre approche.*

Soit les deux suites de v.a. i.i.d.  $\underline{X}^{(\eta, h', \alpha)} = \{X_i^{(\eta, h', \alpha)}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{W}^{(\eta^c, h, \alpha)} = \{W_i^{(\eta^c, h, \alpha)}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ ,  $\eta \in \{l, u\}$ ,  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\eta^c$  correspond au complément de  $\eta$ , soit  $\eta^c = l\mathbb{1}_{\{\eta=u\}} + u\mathbb{1}_{\{\eta=l\}}$ . La fonction de répartition conjointe des couples  $\{(W_i^{(\eta^c, h, \alpha)}, X_i^{(\eta, h', \alpha)})\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  est définie comme en (2.12) avec une copule  $C_\alpha$ , où  $\alpha$  désigne le paramètre de dépendance. On a également que les couples  $(W_i^{(\eta^c, h, \alpha)}, X_i^{(\eta, h', \alpha)})$  sont indépendants séquentiellement, pour  $i \in \mathbb{N}_+$ . Soit la suite de v.a.  $\underline{T}^{(\eta^c, h, \alpha)} = \{T_i^{(\eta^c, h, \alpha)}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  telle que  $T_i^{(\eta^c, h, \alpha)} = \sum_{k=1}^i W_k^{(\eta^c, h, \alpha)}$ ,  $\eta \in \{l, u\}$ ,  $h > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit le processus de renouvellement avec récompense (*Renewal-Reward Process*)  $\mathbf{S}^{(\eta, h, h', \alpha)} = \{S^{(\eta, h, h', \alpha)}(t)\}_{t \geq 0}$  tel que

$$S^{(\eta, h, h', \alpha)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(\eta, h', \alpha)} \mathbb{1}_{\{T_i^{(\eta^c, h, \alpha)} \leq t\}},$$

où  $\eta \in \{l, u\}$ ,  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Les processus  $S^{(l, h, h', \alpha)}(t)$  et  $S^{(u, h, h', \alpha)}(t)$  forment les bornes de discrétisation du processus continu  $\mathbf{S}^\alpha = \{S^\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  tel que

$$S^\alpha(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i^\alpha \leq t\}},$$

pour  $t \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Les théorèmes 3 et 4 permettent d'ordonner le processus  $S(t)$  avec ses bornes, selon l'ordre en dominance stochastique lorsqu'il existe une dépendance entre les v.a. des temps inter-sinistres et de la sévérité.

**Théorème 3.** *Soit deux vecteurs de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  et  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  avec fonction de répartition conjointe  $F_{\underline{X}}((x)) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$  et  $F_{\underline{Y}}((y)) = C(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_n}(y_n))$ , où  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  partagent la même copule  $C$ . Si  $X_i \preceq_{\text{sd}} Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors  $\underline{X} \preceq_{\text{sd}} \underline{Y}$ .*

**Théorème 4.** *Soit deux processus aléatoires discrets  $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  et  $\{S'(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ , alors  $S(t) \preceq_{\text{sd}} S'(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$  si*

$$S(0) \preceq_{\text{sd}} S'(0)$$

et

$$[S(t)|S(1) = s_1, \dots, S(t-1) = s_{t-1}] \preceq_{\text{sd}} [S'(t)|S'(1) = s'_1, \dots, S'(t-1) = s'_{t-1}]$$

pour  $s_j \leq s'_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

**Proposition 3.** Soit un processus de renouvellement avec récompense  $\mathbf{S}^\alpha = \{S^\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  dont la fonction de répartition conjointe de ses composantes  $X$  et  $W$  est définie comme  $F_{X,W} : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow [0, 1]$  telle que  $F_{X,W}(x, w) = C_\alpha(F_X(x), F_W(w))$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x, w \in \mathbb{R}^+$ . Pour  $\alpha$  fixé et avec les bornes lower  $\mathbf{S}^{(l,h,h',\alpha)}$  et upper  $\mathbf{S}^{(u,h,h',\alpha)}$  de  $\mathbf{S}^\alpha$ , on a

$$\mathbf{S}^{(u,h,h',\alpha)} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{S}^\alpha \preceq_{\text{sd}} \mathbf{S}^{(l,h,h',\alpha)},$$

$h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Avec la proposition 2, on a

$$\underline{X}^{(u,h,\alpha)} \preceq_{\text{sd}} \underline{X}^\alpha \preceq_{\text{sd}} \underline{X}^{(l,h,\alpha)}$$

et

$$\underline{W}^{(u,h,\alpha)} \preceq_{\text{sd}} \underline{W}^\alpha \preceq_{\text{sd}} \underline{W}^{(l,h,\alpha)},$$

pour  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Avec le théorème 2, on a

$$\underline{T}^{(u,h,\alpha)} \preceq_{\text{sd}} \underline{T}^\alpha \preceq_{\text{sd}} \underline{T}^{(l,h,\alpha)}, \quad (2.19)$$

pour  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour ordonner les bornes de  $\mathbf{S}$ , on utilise les théorèmes 3 et 4 qui proviennent de Shaked and Shanthikumar (2007). D'abord, on a  $S^{(u,h,h',\alpha)}(0) = S^\alpha(0) = S^{(l,h,h',\alpha)}(0) = 0$ . Donc

$$S^{(l,h,h',\alpha)}(0) \preceq_{\text{sd}} S^\alpha(0) \preceq_{\text{sd}} S^{(u,h,h',\alpha)}(0).$$

Ensuite, pour  $t = h$ , on a  $S^{(l,h,h',\alpha)}(h) = X_1^{(l,h',\alpha)} \mathbb{1}\{T_1^{(u,h,\alpha)} \leq h\}$ ,  $S^\alpha(h) = X_1^\alpha \mathbb{1}\{T_1^\alpha \leq h\}$  et  $S^{(u,h,h',\alpha)}(h) = X_1^{(u,h',\alpha)} \mathbb{1}\{T_1^{(l,h,\alpha)} \leq h\}$ . Étant donné (2.19), on sait que

$$\mathbb{P}[T_1^{(l,h,\alpha)} \leq h] \leq \mathbb{P}[T_1^\alpha \leq h] \leq \mathbb{P}[T_1^{(u,h,\alpha)} \leq h].$$

Donc

$$\mathbb{P}[\mathbb{1}\{T_1^{(l,h,\alpha)} \leq h\} = 1] \leq \mathbb{P}[\mathbb{1}\{T_1^\alpha \leq h\} = 1] \leq \mathbb{P}[\mathbb{1}\{T_1^{(u,h,\alpha)} \leq h\} = 1].$$

Conséquemment

$$\mathbb{P}[S^{(l,h,h',\alpha)}(h) = X_1^{(l,h',\alpha)}] \leq \mathbb{P}[S^\alpha(h) = X_1^\alpha] \leq \mathbb{P}[S^{(u,h,h',\alpha)}(h) = X_1^{(u,h',\alpha)}]. \quad (2.20)$$

De plus, si  $\mathbb{1}\{T_1^{(u,h,\alpha)} \leq h\} = \mathbb{1}\{T_1^{(l,h,\alpha)} \leq h\} = 1$ , alors

$$S^{(u,h,h',\alpha)}(h) = X_1^{(u,h',\alpha)} \preceq_{\text{sd}} X_1^\alpha = S^\alpha(h) \preceq_{\text{sd}} X_1^{(l,h',\alpha)} = S^{(l,h,h',\alpha)}(h). \quad (2.21)$$

En combinant (2.20) avec (2.21), on peut affirmer que

$$S^{(u,h,h',\alpha)}(h) \preceq_{\text{sd}} S^\alpha(h) \preceq_{\text{sd}} S^{(l,h,h',\alpha)}(h), \quad \forall h > 0. \quad (2.22)$$

Ensuite, pour  $t = 2h$ , on a

$$\begin{aligned} S^{(\eta, h, h', \alpha)}(2h) &= \bigcup_{s_1 \in \text{Supp}\{S^\alpha(h)\}} \left[ S^{(\eta, h, h', \alpha)}(2h) | S^{(\eta, h, h', \alpha)}(h) = s_1 \right] \\ &= \bigcup_{s_1 \in \text{Supp}\{S^\alpha(h)\}} \left[ S^{(\eta, h, h', \alpha)}(h) + s_1 | S^{(\eta, h, h', \alpha)}(h) = s_1 \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\eta \in \{l, u\}$ ,  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étant donné (2.22), on a

$$\begin{aligned} \left[ S^{(u, h, h', \alpha)}(h) + s_1^u | S^{(u, h, h', \alpha)}(h) = s_1^u \right] &\preceq_{\text{sd}} [S^\alpha(h) + s_1 | S^\alpha(h) = s_1] \\ &\preceq_{\text{sd}} [S^{(l, h, h', \alpha)}(h) + s_1^l | S^{(l, h, h', \alpha)}(h) = s_1^l], \end{aligned} \quad (2.24)$$

$h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , avec  $s_1^u \leq s_1 \leq s_1^l$ . Étant donné (2.23), (2.24) et le théorème (1), on déduit que

$$S^{(u, h, h', \alpha)}(2h) \preceq_{\text{sd}} S^\alpha(2h) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h, h', \alpha)}(2h),$$

$h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Finalement, on généralise pour  $t = kh$  et, similairement, on a

$$S^{(\eta, h, h', \alpha)}(kh) = \bigcup_{\substack{s_1 \in \text{Supp}\{S^\alpha(h) \\ \dots \\ s_{k-1} \in \text{Supp}\{S^\alpha((k-1)h)\}}} \left[ S^{(\eta, h, h', \alpha)}(kh) | S^{(\eta, h, h', \alpha)}(h) = s_1, \dots, S^{(\eta, h, h', \alpha)}((k-1)h) = s_{k-1} \right],$$

$\eta \in \{l, u\}$ ,  $h, h' > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Or, récursivement, on peut trouver

$$\begin{aligned} &\left[ S^{(u, h, h', \alpha)}(kh) | S^{(u, h, h', \alpha)}(h) = s_1^u, \dots, S^{(u, h, h', \alpha)}((k-1)h) = s_{k-1}^u \right] \\ &= \left[ S^{(u, h, h', \alpha)}(h) + s_{k-1}^u | S^{(u, h, h', \alpha)}(h) = s_1^u, \dots, S^{(u, h, h', \alpha)}((k-1)h) = s_{k-1}^u \right] \\ &\preceq_{\text{sd}} [S^\alpha(h) + s_{k-1} | S^\alpha(h) = s_1, \dots, S^\alpha((k-1)h) = s_{k-1}] \\ &\preceq_{\text{sd}} \left[ S^{(l, h, h', \alpha)}(h) + s_{k-1}^l | S^{(l, h, h', \alpha)}(h) = s_1^l, \dots, S^{(l, h, h', \alpha)}((k-1)h) = s_{k-1}^l \right] \\ &= \left[ S^{(l, h, h', \alpha)}(kh) | S^{(l, h, h', \alpha)}(h) = s_1^l, \dots, S^{(l, h, h', \alpha)}((k-1)h) = s_{k-1}^l \right], \end{aligned}$$

pour  $s_i^u \leq s_i \leq s_i^l$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Ainsi, on peut appliquer le théorème 4 pour trouver

$$S^{(u, h, h', \alpha)}(kh) \preceq_{\text{sd}} S^\alpha(kh) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h, h', \alpha)}(kh), \quad (2.25)$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $h, h' > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Il est important de mentionner que la copule unissant  $X_i^{(\eta, h', \alpha)}$  et  $W_i^{(\eta^c, h, \alpha)}$  pour  $i \in \mathbb{N}_+$  est la même pour  $\eta \in \{l, u\}$ . Ce faisant, le théorème 3 permet d'assurer la relation en (2.25) pour pouvoir conclure la démonstration.  $\square$

### 2.2.3 Algorithme de calcul

L'algorithme 2 présente les étapes à suivre afin de calculer (2.9) selon l'une des méthodes de discrétisation *lower* ou *upper*.

---

**Algorithme 2 :** Calculer les masses de probabilités associées à l'approximation de  $S(t)$ .

---

**input** :  $F_X$  : la fonction de répartition de  $X$  ;

$F_W$  : la fonction de répartition de  $W$  ;

$C_\alpha$  : la fonction correspondant à la copule de paramètre  $\alpha$  utilisée ;

$h_x$  : le pas de discrétisation associé à  $X$  ;

$n$  : longueur des vecteurs de masses de probabilités ( $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_+$ ) ;

$\eta$  : méthode utilisée pour approximer  $S(t)$ ,  $\eta \in \{ "l", "u" \}$  ;

$t$  : durée du processus  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**output** : vecteur des masses de probabilités correspondant à  $f_{\tilde{S}(t)}(x)$ , de longueur  $n$ .

1 Définir le pas de discrétisation de  $W$  :  $h_w = (t + 1)/n$  ;

2 définir un vecteur  $v = (0, 1, \dots, n - 1)$  ;

3 définir  $x = v \times h_x$  et  $w = v \times h_w$  ;

4 **if**  $\eta = "l"$  **then**

5 | calculer  $F_{\tilde{X}}(x) = F_{X^{(l, h_x)}}(x)$  et  $F_{\tilde{W}}(w) = F_{W^{(u, h_w)}}(w)$  à l'aide des définitions 3 et 2 ;

6 **else**

7 | calculer  $F_{\tilde{X}}(x) = F_{X^{(u, h_x)}}(x)$  et  $F_{\tilde{W}}(w) = F_{W^{(l, h_w)}}(w)$  à l'aide des définitions 2 et 3 ;

8 **end**

9 calculer les masses de probabilités conjointes cumulées  $F_{\tilde{W}, \tilde{X}}$  de dimension  $n \times n$  avec  
(2.12) ;

10 calculer la matrice des masses de probabilités conjointes  $f_{\tilde{W}, \tilde{X}}$  de dimension  $n \times n$  avec  
(2.13) ;

11 définir  $k_{max} = \lfloor t/h_w \rfloor + 1$  ;

12 définir  $\varphi_S$ , une matrice de dimension  $k_{max} \times n$  ;

13 poser  $\varphi_S[1, ] = (1, 1, \dots, 1)$  ;

14 **for**  $k \leftarrow 2$  **to**  $k_{max}$  **do**

15 |  $\varphi_S[k, ] = fft((\bar{F}_{\tilde{W}}((k - 1)h_w), 0, \dots, 0))$  ;

16 | **for**  $j \leftarrow 2$  **to**  $k$  **do**

17 | |  $\varphi_S[k, ] = \varphi_S[k, ] + fft(f_{\tilde{W}, \tilde{X}}[j, ]) \times \varphi_S[k - j + 1, ]$  ;

18 | **end**

19 |  $\varphi_S[k, ] = \varphi_S[k, ] + fft(f_{\tilde{W}, \tilde{X}}[1, ]) \times \varphi_S[k, ]$  ;

20 |  $\varphi_S[k, ] = \frac{n\varphi_S[k, ]}{\sum_{j=1}^n Re(fft^{-1}(\varphi_S[k, j]))}$  ;

21 **end**

22 **Return**  $f_{\tilde{S}(t)}(x) = Re(fft^{-1}(\varphi_S[k_{max}, ]))/n$ .

---

Dans cet algorithme, on définit  $\mathbf{f}[i, j]$  comme étant l'élément de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne d'une matrice  $\mathbf{f}$ , tandis que  $\mathbf{f}[i, ]$  représente l'entièreté de la  $i$ -ème ligne de la matrice  $\mathbf{f}$ . Par ailleurs, la valeur  $f_{\tilde{W}, \tilde{X}}[1, 1]$  désigne  $\mathbb{P}[\tilde{W} = 0, \tilde{X} = 0]$  et  $\varphi_S[1, ]$  correspond à  $\varphi_{S(0)}(r)$ ,  $r > 0$ .



Pour déterminer la longueur  $n$  des vecteurs utilisés dans l'algorithme, on choisit  $m$  suffisamment grand pour inclure toutes les valeurs possibles que peut prendre  $S(t)$  (p.ex.  $m = 9$ ). En revanche, si  $n$  est trop grand, il est possible que  $\mathbf{R}$  ne permette pas de créer de matrices de dimension  $n \times n$  pour des raisons d'allocation de mémoire. Il faut considérer que le temps de calcul augmente de façon exponentielle. Pour pallier à ce problème, on préférera augmenter la valeur de  $h_x$  pour garder  $m < 11$ .

En ce qui a trait au pas de discrétisation,  $h_w$  est calculé dans l'algorithme afin de maximiser les performances de l'approximation. Pour ce qui est de  $h_x$ , il s'agit de le prendre suffisamment petit pour maximiser la précision des calculs, mais de le prendre suffisamment grand pour que  $x = v \times h_x$  puisse couvrir l'entièreté du domaine du processus  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

L'appellation  $fft(\cdot)$  désigne la transformation de Fourier rapide et  $fft^{-1}(\cdot)$  représente son inverse. Également  $Re(\cdot)$  correspond à l'opération de ne garder que la partie réelle d'un nombre complexe.

Pour ce qui est de la raison d'être de la ligne 20 de l'algorithme 2, celle-ci sert à ajuster la densité de probabilité considérant le fait que la ligne 19 s'appelle elle-même. Ainsi, on s'assure que les masses de probabilité somment à 1. À noter que, plus  $h_w$  est petit, moins l'ajustement de l'étape 20 sera important. En d'autres mots, plus on augmente la valeur de  $n$ , plus l'algorithme 2 sera précis.

## 2.2.4 Exemples numériques

**Exemple 2.** *On considère que*

$$\begin{aligned} F_X(w) &= 1 - e^{-\beta w}, \quad w \in \mathbb{R}^+, \\ F_W(w) &= 1 - e^{-(\xi w)^\tau}, \quad w \in \mathbb{R}^+, \\ F_{W,J}(w, j) &= C_\alpha(F_W(w), F_J(j)), \quad (w, j) \in (\mathbb{N}_+)^2, \end{aligned}$$

où  $C_\alpha$  désigne la copule fgm de paramètre  $\alpha$ . On pose  $\beta = 2$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $\xi = \Gamma(1 + 1/\tau)$  et  $\alpha = 1$ . En saisissant  $n = 2^9$ ,  $h_x = 1/5$  et  $t = 2$  comme intrants de l'algorithme 2 on obtient les résultats présentés dans le tableau 2.2 ainsi que l'illustration 2.3.

Méthode	Espérance	Variance	TVaR $_{\kappa}(S(t))$					VaR $_{\kappa}(S(t))$				
$\kappa$			0	0.5	0.9	0.99	0.999	0	0.5	0.9	0.99	0.999
<i>Lower</i>	1.83	2.64	1.83	3.08	5.30	7.91	10.20	0.00	1.40	4.00	6.80	9.20
Simulation	1.49	1.95	1.49	2.58	4.68	6.91	9.00	0.00	1.20	3.60	6.00	8.20
<i>Upper</i>	1.18	1.45	1.18	2.08	3.83	5.98	7.94	0.00	0.80	2.80	5.00	7.00

TABLEAU 2.2 – Comparaison des résultats obtenus grâce à l’algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec des données simulées grâce à l’algorithme 1.

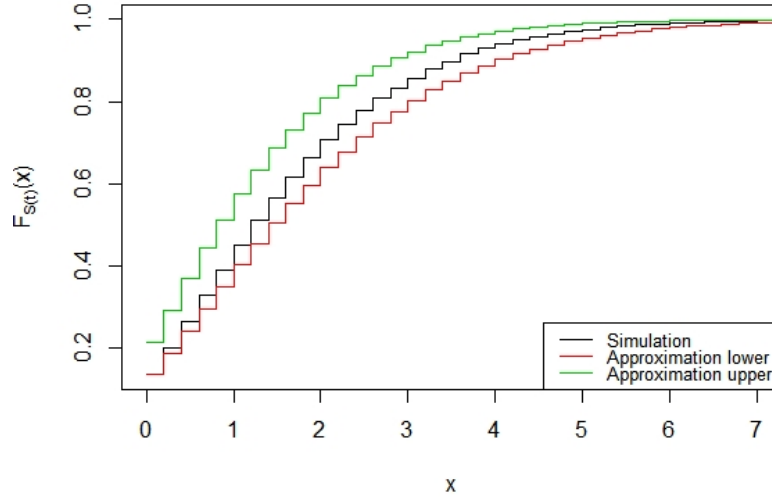


ILLUSTRATION 2.3 – Comparaison des fonctions de répartition calculées grâce à l’algorithme 2 pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper* avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l’algorithme 1 pour  $n = 2^9$  et  $h_x = 1/5$ .

On voit donc dans le tableau 2.2 ainsi que dans l’illustration 2.3 que

$$S^{(u, h_w, h_x)}(t) \preceq_{\text{sd}} S(t) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h_w, h_x)}(t),$$

ce qui corrobore les résultats de la Section 2.2.2.

**Exemple 3.** On reprend l’exemple 2, mais on change la valeur de  $h_x$  pour  $h_x = 1/100$  et on pose  $n = 2^{10}$ . On trouve alors les résultats présentés dans le tableau 2.3 ainsi que l’illustration 2.4.

Méthode	Espérance	Variance	TVaR $_{\kappa}(S(t))$					VaR $_{\kappa}(S(t))$				
$\kappa$			0	0.5	0.9	0.99	0.999	0	0.5	0.9	0.99	0.999
<i>Lower</i>	1.49	1.96	1.49	2.56	4.53	6.84	8.73	0.00	1.16	3.42	5.92	8.04
Simulation	1.49	1.95	1.49	2.56	4.50	6.82	8.85	0.00	1.17	3.42	5.90	8.03
<i>Upper</i>	1.46	1.90	1.46	2.52	4.46	6.75	8.64	0.00	1.14	3.37	5.83	7.93

TABLEAU 2.3 – Comparaison des résultats obtenus grâce à l’algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec des données simulées grâce à l’algorithme 1.

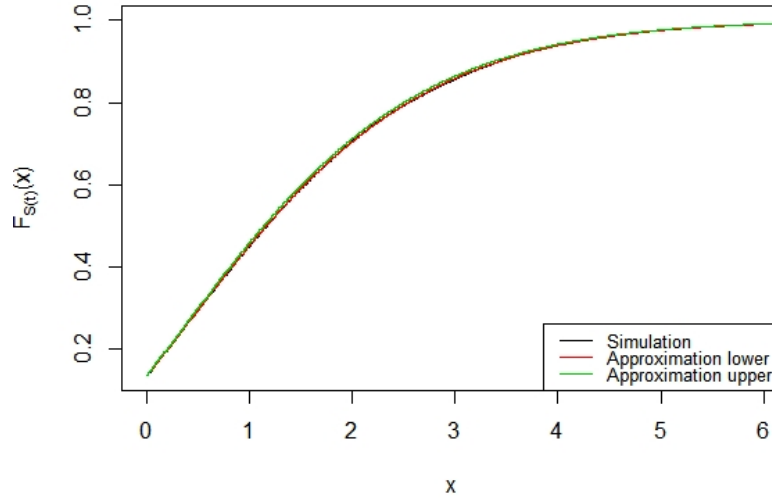


ILLUSTRATION 2.4 – Comparaison des fonctions de répartition calculées grâce à l’algorithme 2 pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper* avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l’algorithme 1 pour  $n = 2^{10}$  et  $h_x = 1/100$ .

On voit dans le tableau 2.3 et dans l’illustration 2.4 que les deux méthodes d’approximation convergent, de même que les résultats de simulation, vers la véritable distribution de  $S(t)$ ,  $t = 2$ .

## 2.3 Mélanges d’Erlang

Pour cette section, on considère que la v.a. de sévérité  $X$  obéit à un mélange d’Erlang dénoté  $X_k \sim X \sim \text{MxErl}(\{(p_j, \beta), j \in \mathbb{N}\})$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . La transformée de Laplace-Stieltjes (TLS) de  $X$  est donné par

$$\mathcal{L}_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \mathcal{L}_{D_j}(r), \quad (2.26)$$

où  $r \geq 0$ ,  $p_j \in [0, 1]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$  et  $\mathcal{L}_{D_j}(r)$  correspond à la TLS de la  $j$ -ième composante de la suite de v.a. positives et indépendantes  $\underline{D} = \{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  telle que  $D_j \sim$

$\text{Erl}(j, \beta)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , de moyenne  $j/\beta$ .  $D_0$  correspond à une v.a. dégénérée telle que  $\mathbb{P}[D_0 = 0] = 1$  et  $\mathcal{L}_{D_0}(r) = 1$ ,  $r \geq 0$ . Si on définit une v.a.  $J$  telle que la fonction de masse de probabilité correspond à  $\mathbb{P}[J = j] = p_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$ , alors (2.26) devient

$$\mathcal{L}_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \mathcal{L}_C(r)^j = \mathcal{P}_J(\mathcal{L}_C(r)), \quad (2.27)$$

où  $r \geq 0$ ,  $\mathcal{P}_J(s)$  correspond à la fonction génératrice des probabilités (fgp) de  $J$  définie par

$$\mathcal{P}_J(s) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \quad s \in [0, 1]$$

et  $\mathcal{L}_C(r)$  est la TLS d'une loi exponentielle de moyenne  $1/\beta$ . On peut donc représenter  $\underline{X}$  comme  $\{X_i = \sum_{j=1}^J C_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  où les réalisations de la matrice  $\mathbf{C} = \{C_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}_+}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. La suite de v.a.  $\underline{C} = \{C_j\}_{j \in \mathbb{N}_+}$  correspond à une représentation vectorielle de  $\mathbf{C}$ . En combinant ce résultat avec (1), on peut exprimer  $S(t)$  comme

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{J_i} C_{i,j} = \sum_{j=1}^{M(t)} C_j, \quad (2.28)$$

où  $M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i$  pour  $t \in \mathbb{N}_+$  avec  $M(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ . L'équation (2.28) permet de poser la proposition (4) afin d'identifier la TLS de  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

**Proposition 4.** *La TLS de  $S(t)$ ,  $\mathcal{L}_{S(t)}$ , pour  $t \in \mathbb{N}_+$ , est donnée par*

$$\mathcal{L}_{S(t)}(r) = \mathcal{P}_{M(t)}(\mathcal{L}_C(r)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{M(t)}(j) \mathcal{L}_C(r)^j, \quad (2.29)$$

où  $f_{M(t)}(j) = \mathbb{P}[M(t) = j]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$ , et

$$\mathcal{P}_{M(t)}(s) = 1 - F_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \times (\mathcal{P}_{J|W=l}(s) \mathcal{P}_{N_{t-1}}(s)), \quad s \in [0, 1], \quad (2.30)$$

pour  $t \in \mathbb{N}_+$ .

**Preuve.** Il a déjà été défini que  $M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ , et que  $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}\{T_i \leq t\}$ . Par conséquent, on a

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_i \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}, \quad t \in \mathbb{N}_+. \quad (2.31)$$

En conditionnant sur le premier événement, on trouve

$$\begin{aligned}
f_{M(t)}(0) &= \mathbb{P}[M(t) = 0] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}[M(t) = 0 | W_1 > t] + \mathbb{P}[M(t) = 0 | W_1 \leq t]] \\
&= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \mathbb{P}[M_{t-l} = 0, J_1 = 0 | W_1 = l] \\
&= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) f_{J|W=l}(0) f_{M_{t-l}}(0), \tag{2.32}
\end{aligned}$$

où  $\bar{F}_W$  correspond à la fonction de survie de  $W$ , c.-à-d.  $\bar{F}_W(t) = 1 - F_W(t)$ . Avec (2.31), on a un processus de renouvellement avec récompense similaire à celui présenté dans Marceau (2009), à la différence que la variable de "récompense" ( $X$  dans Marceau (2009) et  $J$  dans le cas présent) peut prendre des valeurs nulles dans notre cas. Il est donc possible d'adapter la proposition 1 de ce dernier avec (2.32) pour trouver les masses de probabilités associées à  $M(t)$ . On a donc

$$f_{M(t)}(m) = \begin{cases} \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) f_{J|W=l}(0) f_{M_{t-l}}(0), & m = 0 \\ \sum_{l=1}^t \sum_{j=1}^m f_W(l) f_{J|W=l}(j) f_{M_{t-l}}(m-j), & m \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \tag{2.33}$$

avec  $f_{M_0}(m) = \mathbb{1}_{\{m=0\}}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Il est possible de réécrire (2.33) sous la forme d'un produit de convolution.

$$f_{M(t)}(m) = \begin{cases} \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \times f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(0), & m = 0 \\ \sum_{l=1}^t f_W(l) \times f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m), & m \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \tag{2.34}$$

où  $f * g(x) = \sum_{j=0}^x f(j) \times g(x-j)$  pour  $x \in \mathbb{N}$ . Ainsi, à partir de (2.34), il est aisé d'identifier la fgp de  $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{M(t)}(s) &= f_{M(t)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^t f_W(l) \times f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m) s^m \\
&= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \sum_{m=0}^{\infty} f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m) s^m, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$s \in [0, 1]$ . Comme les couples  $(X_i, W_i)$  sont indépendants pour  $i \in \mathbb{N}_+$ , il s'ensuit que les couples  $(J_i, W_i)$  sont également indépendants pour  $i \in \mathbb{N}_+$ . Or, sous l'hypothèse d'indépendance, la fgp d'un produit de convolution correspond au produit des fgp. Ainsi, (2.35) devient

$$\mathcal{P}_{M(t)}(s) = \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \times \mathcal{P}_{J|W=l}(s) \times \mathcal{P}_{M_{t-l}}(s), \quad s \in [0, 1].$$

La démonstration de (2.30) est donc faite. Pour ce qui est de (2.29), il suffit de considérer que  $S(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} C_i$  et que les  $C_i$  sont indépendants entre eux de même que par rapport à  $M(t)$  pour  $i \in \mathbb{N}_+$  et pour  $t \in \mathbb{N}$ . Le résultat découle naturellement.  $\square$

**Corollaire 1.**  $S(t) \sim \text{MxErl}(\{(f_{M(t)}(j), \beta), j \in \mathbb{N}_+\}, t \in \mathbb{N}_+).$

**Preuve.** En comparant (2.29) avec la représentation de la TLS d'un mélange d'Erlang présentée en (2.27), cette conclusion est évidente.  $\square$

En utilisant le corollaire 1, on peut appliquer l'algorithme 2 pour calculer les masses de probabilité du processus  $M(t), t \geq 0$ , puis appliquer (2.36) pour calculer la fonction de répartition de  $S(t)$ .

$$F_{S(t)}(x) = F_{M(t)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_{M(t)}(j) H(x; j, \beta), \quad (2.36)$$

où  $H(x; j, \beta)$  correspond à la fonction de répartition d'une loi Erlang de paramètre de forme  $j$  et de paramètre d'échelle  $\beta$ . L'exemple 4 illustre l'application de cette approche.

L'avantage du modèle proposé dans la Section 2.3 est qu'il est possible d'utiliser les propriétés des processus de renouvellement en temps discret alors que la v.a. de la sévérité est continue. Cela permet donc d'éviter d'avoir à approximer cette dernière en la discrétisant. Par ailleurs, comme il est expliqué dans Willmot and Lin (2011), il est possible d'approximer n'importe quelle distribution positive et continue avec un mélange d'Erlang, selon un certain niveau de précision.

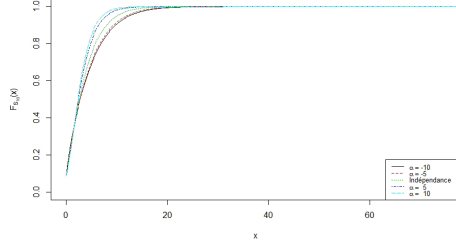
**Exemple 4.** *On considère*

$$\begin{aligned} \beta &= 1, \\ F_J(j) &= 1 - (1 - q)^j, \quad j \in \mathbb{N}_+, \quad F_J(0) = 0, \\ F_W(w) &= 1 - e^{-(\xi w)^\tau}, \quad w \in \mathbb{R}^+, \\ F_{W,J}(w, j) &= C_\alpha(F_W(w), F_J(j)), \quad (w, j) \in (\mathbb{N}_+)^2, \end{aligned}$$

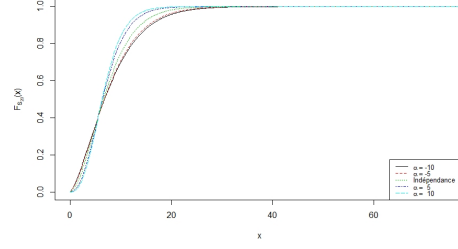
où  $C_\alpha$  désigne la copule de Frank avec  $\alpha \in \{-10, -5, 5, 10\}$ . Le cas  $C_{\alpha=0}$  désigne la copule d'indépendance (c.-à-d.  $C_0(u_1, u_2) = u_1 u_2$ ). On pose également  $q = 1/2$ ,  $\tau = 1.5$  et  $\xi = \Gamma(1 + 1/\tau)/5$ .

En utilisant l'algorithme 2 avec  $m=10$ , on obtient l'illustration qui 2.5 compare des valeurs de la fonction de répartition  $F_{S(t)}^{(\alpha)}(x)$  pour  $\alpha = -10, -5, 0, 5, 10$ , avec  $t = 10, 20, 30, 40, 50$ , ainsi que

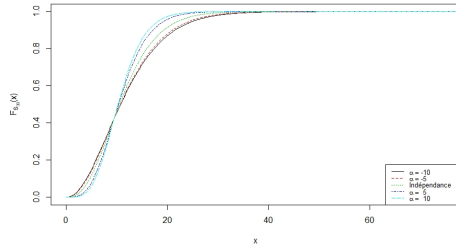
*l'illustration 2.6 qui présente la fonction de répartition de  $S^{(\alpha)}(t)/t$ ,  $t = 10, 20, 30, 40, 50, 1000$ . Dans ce dernier cas, on s'intéressera au comportement asymptotique de  $S(t)/t$ .*



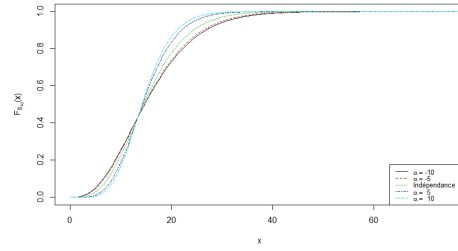
(a)  $t = 10$



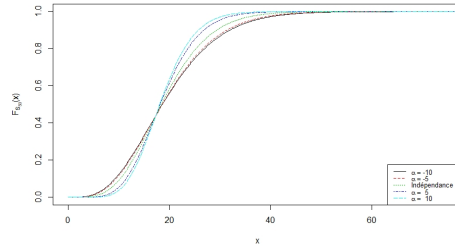
(b)  $t = 20$



(c)  $t = 30$

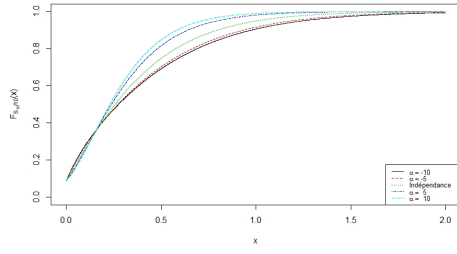


(d)  $t = 40$

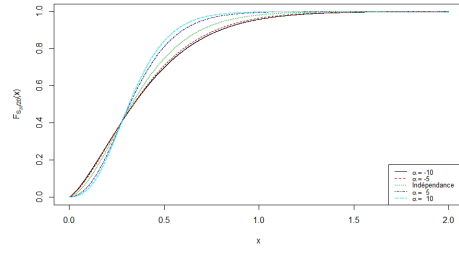


(e)  $t = 50$

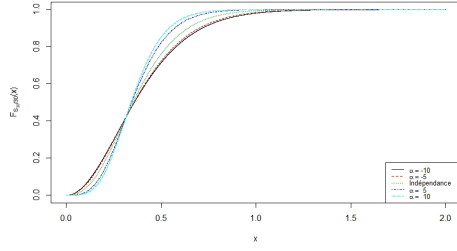
ILLUSTRATION 2.5 – Comparaison de la fonction de répartition de  $S(t)$ , pour différentes valeurs de  $t$  lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre  $\alpha = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant.



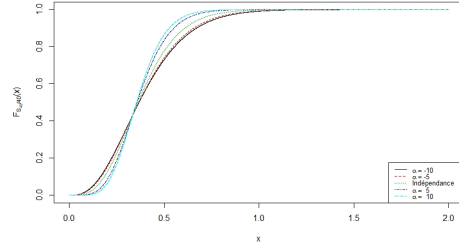
(a)  $t = 10$



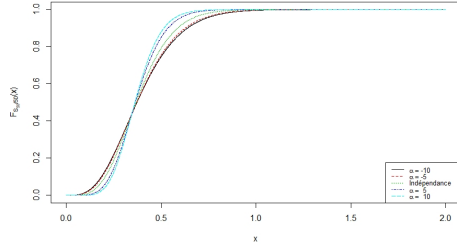
(b)  $t = 20$



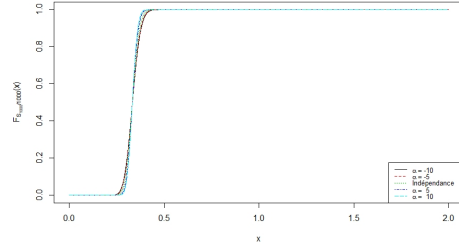
(c)  $t = 30$



(d)  $t = 40$



(e)  $t = 50$



(f)  $t = 1000$

ILLUSTRATION 2.6 – Comparaison de la fonction de répartition de  $S(t)/t$ , pour différentes valeurs de  $t$  lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre  $\alpha = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant.

Pour ce qui est du calcul de l'espérance de  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ , on a

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{\xi} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) = 5,$$

$$\mathbb{E}[J] = 1/q = 2,$$

$$\mathbb{E}[C] = 1/\beta = 1.$$

Comme  $C_j$  est indépendant de  $J$ , peu importe la valeur de  $\alpha$ ,  $j \in \mathbb{N}_+$ , alors on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^J C_j \right] = \mathbb{E}_J \left[ \sum_{j=1}^J \mathbb{E}[C_j | J = n] \right] \stackrel{\text{i.d.}}{=} \mathbb{E}_J [J \times \mathbb{E}[C | J = n]] \stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[J] \times \mathbb{E}[C] = 2 \times 1 = 2.$$

Dans le tableau 2.4 on trouve l'espérance de  $S^{(\alpha)}(t)$  pour  $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$  et pour  $\alpha \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ .



$t$	$h_W$	$\mathbb{E}[S^{(-10)}(t)]$	$\mathbb{E}[S^{(-5)}(t)]$	$\mathbb{E}[S^{(0)}(t)]$	$\mathbb{E}[S^{(5)}(t)]$	$\mathbb{E}[S^{(10)}(t)]$
10	0.0107	4.028	3.899	3.452	2.944	2.746
20	0.0205	8.019	7.889	7.445	6.944	6.752
30	0.0303	11.990	11.860	11.416	10.916	10.724
40	0.0400	15.974	15.844	15.401	14.901	14.710
50	0.0498	19.922	19.792	19.349	18.850	18.658

TABLEAU 2.4 – Valeurs de l’espérance de  $S^{(\alpha)}(t)$  pour  $\alpha \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$  et pour  $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ . Le cas  $\alpha = 0$  désigne le scénario où il y a indépendance entre  $X$  et  $W$ . La constante  $h_W$  représente le pas de discrétisation de la v.a.  $W$ .

Comme on peut le voir dans l’illustration 2.6 et dans le tableau 2.4, lorsque la valeur de  $t$  augmente, on se rapproche du comportement asymptotique des processus de renouvellement avec récompense qui est présenté dans [Gallager \(2013\)](#) et dans [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#). À  $t = 1000$ , on voit clairement la convergence de  $S(t)/t$  vers sa moyenne. Ce sujet est abordé en détail au Chapitre 3.

## Chapitre 3

# Propriétés asymptotiques

Dans la littérature des processus de renouvellement (voir p. ex. [Gallager \(2013\)](#) ou [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#)), on s'intéresse au comportement asymptotique de ceux-ci en lien avec la loi des grands nombres. Ces auteurs se sont d'ailleurs penché sur le cas particulier des processus de renouvellement avec récompense. Le présent chapitre vise donc à démontrer le théorème 7 en ajoutant des précisions par rapport au lien de dépendance existant entre les composantes aléatoires du modèle.

**Théorème 5. *Loi forte des grands nombres.*** Soit une séquence de v.a. i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$  de moyenne  $\mu$ . La somme partielle  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu.$$

**Théorème 6. *Loi forte des processus de renouvellement.*** Soit un processus de renouvellement  $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  comme définit en (1.1). Si  $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[W]}. \quad (3.1)$$

**Preuve.** Voir p. ex. [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#) ou [Gallager \(2013\)](#). □

**Lemme 1.** Soit le processus aléatoire  $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  défini en (1). Si l'espérance de  $X$  existe, peu importe qu'il y ait ou non un lien dépendance entre les v.a.  $X$  et  $W$ , alors la relation (3.2) est vraie.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}[X], \quad N(t) \in \mathbb{N}_+. \quad (3.2)$$

**Preuve.** On sait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$ . Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

En appliquant le théorème 5, on obtient directement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}[X].$$

□

**Théorème 7.** *Soit le processus  $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  défini en (1). En supposant que  $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$  et que  $\mathbb{E}[X] < \infty$ , alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad (3.3)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]}. \quad (3.4)$$

**Preuve.** Pour démontrer (3.3), on commence par réexprimer  $S(t)/t$  comme

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{N}_+. \quad (3.5)$$

Avec le théorème d'arithmétique des limites (voir, p.ex., Theorem 1.5.16 de [Hubbard and Hubbard \(2015\)](#)), (3.1), (3.2) et (3.5) on trouve aisément

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \mathbb{E}[X] \times \frac{1}{\mathbb{E}[W]}.$$

Par la suite, pour démontrer (3.4), il suffit de considérer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{S(t)}{t} \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]}.$$

□

Si on revient à l'exemple 4, les résultats du tableau 2.4 confirment l'application de (3.4) dans le cas de l'indépendance. En effet, pour  $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ , on a  $\mathbb{E}[S^{(0)}(t)]/t = 2/5 = \mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[W]$ . En revanche, plus la dépendance entre  $X$  et  $W$  est prononcée, plus  $\mathbb{E}[S^{(\alpha)}(t)]$  s'éloigne de  $\mathbb{E}[S^{(0)}(t)]$ , pour  $t \in \mathbb{N}_+$ ,  $\alpha \neq 0$ . Toutefois, comme on le voit dans le tableau 2.4, cet écart demeure constant pour  $t = 20, 30, 40, 50$ . Ainsi, si on fait tendre  $t$  vers l'infini, l'écart entre les ratios  $\mathbb{E}[S^{(0)}(t)]/t$  et  $\mathbb{E}[S^{(\alpha)}(t)]/t$ ,  $\alpha \neq 0$ , finit par se résorber comme on le voit dans l'illustration 2.6. Pour cette raison, on peut supposer que le théorème 7 fonctionne non seulement lorsqu'il y a indépendance entre les v.a.  $X_j$  et  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_+$ , mais aussi lorsqu'il existe un lien de dépendance. En revanche, on peut s'attendre à ce que cette convergence soit moins forte dans ce dernier cas. De plus, si l'on regarde l'illustration 2.6f, on voit que pour  $t = 1000$ ,  $S(t)/t$  commence à converger vers  $\mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[W]$  (c.-à-d.  $2/5 = 0.4$ ), et ce, peu importe la force de dépendance unissant les v.a.  $X$  et  $W$ .

## Chapitre 4

# Ordonnancement du risque selon la dépendance

Dans les exemples 1 et 4, on a pu observer graphiquement que l'on peut ordonnancer  $S(t)$  selon le niveau de dépendance unissant les v.a.  $X$  et  $W$ , pour  $t \geq 0$ . Ce chapitre, vise donc à démontrer mathématiquement cette observation.

Soit la suite des couples aléatoires i.i.d.  $\{(X_k, W_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec fonction de répartition conjointe  $F_{X,W}(x, w)$  appartenant à la classe de Fréchet  $\mathcal{CF}(F_X, F_W)$  telle que  $F_{X,W}(x, w) = C_\alpha(F_X(x), F_W(w))$ . On représente la borne inférieure de cette classe comme  $\{(X_k^-, W_k^-)\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec fonction de répartition  $F_{X^-, W^-}(x, w) = \max(F_X(x) + F_W(w) - 1, 0)$ ,  $x, w \in \mathbb{R}^+$ . En ce qui attrait à la borne supérieure, on la désigne par  $\{(X_k^+, W_k^+)\}_{k \in \mathbb{N}}$  et sa fonction de répartition conjointe s'exprime comme  $F_{X^+, W^+}(x, w) = \min(F_X(x), F_W(w))$ . Posons également  $T_k^+ = \sum_{j=1}^k W_j^+$  et  $T_k^- = \sum_{j=1}^k W_j^-$  avec  $T_0^+ = T_0^- = 0$ . Soit les processus de renouvellement avec récompense  $\mathbf{S}^+ = \{S^+(t)\}_{t \geq 0}$  et  $\mathbf{S}^- = \{S^-(t)\}_{t \geq 0}$  tels que

$$S^+(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^+ \mathbb{1}\{T_k^+ \leq t\} \quad \text{et} \quad S^-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^- \mathbb{1}\{T_k^- \leq t\}, \quad t > 0.$$

Pour  $t = 0$ , on a  $S^+(0) = S^-(0) = 0$ .

Afin de pouvoir ordonner le processus  $S(t)$  avec  $S^+(t)$  et  $S^-(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , par rapport à la dépendance qui existe entre les v.a.  $X_k, W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , il faut utiliser l'ordre supermodulaire présentée, p.ex., dans Shaked and Shanthikumar (2007) et dans Denuit et al. (1999).

**Définition 5.** Une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **supermodulaire** si, pour tout vecteur

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , elle satisfait

$$\begin{aligned} & g(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ & \geq g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n), \end{aligned}$$

pour  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $\epsilon, \delta > 0$ .

En d'autres mots, si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable deux fois, alors elle est super modulaire si et seulement si

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

**Définition 6.** Soit deux vecteurs de variables aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  de longueur  $n$  et dont l'esperance conjointe existe. Alors  $\mathbf{X}$  est dit plus petit que  $\mathbf{Y}$  sur l'ordre **supermodulaire**, noté  $\mathbf{X} \preceq_{\text{sm}} \mathbf{Y}$ , si

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[g(\mathbf{Y})]$$

pour toute fonction supermodulaire  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 7.** Soit les couples de v.a.  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$ , tout deux définis dans  $\mathbb{R}^2$ , et ayant les fonctions de répartition conjointes respectives  $F$  et  $G$ . Supposons que  $X_i$  et  $Y_i$  ont la même distribution marginale pour  $i = 1, 2$ . Alors, si

$$F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

alors le couple  $(X_1, X_2)$  est dit plus petit que  $(Y_1, Y_2)$  sur l'ordre **PQD** (Positive Quadrant Dependent order), dénoté  $(X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (Y_1, Y_2)$ .

**Lemme 2.** Soit le couple de v.a.  $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$  dont la fonction de répartition conjointe appartient à la classe de Fréchet ( $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ ). Posons  $F^-$  comme étant la borne inférieure de la classe de Fréchet telle que

$$F^-(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Posons également  $F^+$  comme étant la borne supérieure de cette classe. Celle-ci s'exprime comme

$$F^+(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour n'importe quelle fonction de répartition  $F \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ , alors on a

$$F^-(x_1, x_2) \leq F(x_1, x_2) \leq F^+(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$(X_1^-, X_2^-) \preceq_{\text{PQD}} (X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (X_1^+, X_2^+).$$

**Preuve.** Avec la définition de la classe de Fréchet et la définition 7, ce résultat découle naturellement.  $\square$

**Lemme 3.** *Dans le cas bivarié, on a*

$$(X_1, X_2) \preceq_{\text{sm}} (Y_1, Y_2) \Leftrightarrow (X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (Y_1, Y_2).$$

**Preuve.** Voir Shaked and Shanthikumar (2007).  $\square$

Étant donné les lemmes 2 et 3, on a que

$$(X_k^-, W_k^-) \preceq_{\text{sm}} (X_k, W_k) \preceq_{\text{sm}} (X_k^+, W_k^+), \quad (4.1)$$

pour  $i \in \mathbb{N}_+$ .

**Théorème 8.** *L'ordre sm est fermé sous la conjonction : Soit la suite de vecteurs indépendants de v.a.  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  où la longueur du vecteur  $\mathbf{X}_i$  est de  $k_i \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Soit une autre suite de vecteurs indépendants de v.a.  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$  où la longueur du vecteur  $\mathbf{Y}_i$  est également de  $k_i \in \mathbb{N}_+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si  $\mathbf{X}_i \preceq_{\text{sm}} \mathbf{Y}_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors*

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n] \preceq_{\text{sm}} [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n].$$

Considérant que les couples  $(X_i, W_i)$  sont indépendants pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , de même que pour leurs bornes, et considérant (4.1), alors, avec le théorème 8 on a

$$[(X_1^-, W_1^-), (X_2^-, W_2^-), \dots] \preceq_{\text{sm}} [(X_1, W_1), (X_2, W_2), \dots] \preceq_{\text{sm}} [(X_1^+, W_1^+), (X_2^+, W_2^+), \dots]. \quad (4.2)$$

Désormais, il faut faire le lien entre l'ordre supermodulaire de la suite des couples  $(X_i, W_i)$  (de même que pour leurs bornes) et l'ordonnancement de  $S(t)$  avec  $S^-(t)$  et  $S^+(t)$ .

On a

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{T_{k-1} + W_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} g(X_k, W_k | T_{k-1}),$$

pour  $t \geq 0$  et avec  $S(0) = 0$ ,  $T_0 = 0$ . À noter que le terme  $T_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est noté comme connu ; la raison étant que cette quantité est calculée à l'itération précédente et est donc considérée connue pour l'itération présente. On peut donc écrire  $S(t)$  ( $S^+(t)$  et  $S^-(t)$ ) comme une somme de fonctions  $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Cependant,  $g$  n'est pas supermodulaire puisque la fonction croît par rapport à  $X_k$ , mais décroît par rapport à  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ .

Si on pose

$$X_k = F_X^{-1}(U_{1,k}) \text{ et } W_k = F_W^{-1}(1 - U_{2,k}), \quad (4.3)$$

pour  $U_{1,k} \sim U_1 \sim \text{Unif}(0, 1)$  et  $U_{2,k} \sim U_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , alors on peut définir

$$g'(U_{1,k}, U_{2,k} | T_{k-1}) = F_X^{-1}(U_{1,k}) \mathbb{1}_{\{F_W^{-1}(1 - U_{2,k}) + T_{k-1} \leq h\}}. \quad (4.4)$$

Dans ce cas, comme  $g'$  est croissante par rapport à  $U_{1,k}$  et  $U_{2,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $g'$  est supermodulaire. Selon cette représentation, avec le théorème de Sklar, on a

$$F_{U_{1,1}-U_2}(u_1, u_2) = C(F_X(F_X^{-1}(u_1)), F_W(F_W^{-1}(u_2))) = C(u_1, u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1]. \quad (4.5)$$

**Définition 8.** Un couple de variables aléatoires  $(X_1, X_2)$  est **comonotone** si et seulement si il existe deux fonction non décroissante  $\{g_i\}_{i=1}^2$  et une v.a.  $U$  telle que  $(X_1, X_2) = (g_1(U), g_2(U))$ .

**Définition 9.** Un couple de variables aléatoires  $(X_1, X_2)$  est **anti-monotone** si et seulement si il existe une fonction non décroissante  $g_1$ , une fonction non croissante  $g_2$  et une v.a.  $U$  telle que  $(X_1, X_2) = (g_1(U), g_2(U))$ .

**Corollaire 2.** Comme la fonction de répartition d'une v.a. est non décroissante alors, pour  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ , on a que

1. si  $(X_1, X_2) = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U))$ , alors le couple  $(X_1, X_2)$  est comonotone ;
2. si  $(X_1, X_2) = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(1 - U))$ , alors le couple  $(X_1, X_2)$  est anti-monotone.

**Preuve.** Découle naturellement des définitions 8 et 9. □

Soit  $(U_{1,k}^-, U_{2,k}^-)$  et  $(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+)$  les couples de v.a. suivant une loi uniforme  $(0,1)$  servant à générer les représentations des couples  $(X_k^-, W_k^-)$  et  $(X_k^+, W_k^+)$  respectivement. Considérant que, avec le corollaire 2, on peut représenter les couples  $(X_k^-, W_k^-)$  et  $(X_k^+, W_k^+)$  comme

$$\begin{aligned} (X_k^-, W_k^-) &= (F_X^{-1}(V), F_W^{-1}(1 - V)), \\ (X_k^+, W_k^+) &= (F_X^{-1}(V), F_W^{-1}(V)) \end{aligned}$$

pour  $V \sim U_1^- \sim U_1^+ \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Avec (4.3), on a

$$\begin{aligned} (X_k^-, W_k^-) &= (F_X^{-1}(V), F_W^{-1}(1 - V)) = (F_X^{-1}(U_1^-), F_W^{-1}(1 - U_2^-)), \\ (X_k^+, W_k^+) &= (F_X^{-1}(V), F_W^{-1}(V)) = (F_X^{-1}(U_1^+), F_W^{-1}(1 - U_2^+)). \end{aligned}$$

Donc, si on pose  $V = U_1^- = U_1^+$ , il s'ensuit que  $U_2^- = U_1^-$  et  $U_2^+ = 1 - U_1^+$ . On remarque alors une inversion des bornes de Fréchet sous cette représentation. On a alors

$$F_{U_1^+, U_2^+}(u_1, u_2) \leq F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) \leq F_{U_1^-, U_2^-}(u_1, u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Par conséquent, avec les lemmes 2 et 3, on a

$$(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+) \preceq_{\text{sm}} (U_{1,k}, U_{2,k}) \preceq_{\text{sm}} (U_{1,k}^-, U_{2,k}^-), \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (4.6)$$

Avec le théorème 8 et (4.6), on trouve

$$[(U_{1,1}^+, U_{2,1}^+), (U_{1,2}^+, U_{2,2}^+), \dots] \preceq_{\text{sm}} [(U_{1,1}, U_{2,1}), (U_{1,2}, U_{2,2}), \dots] \preceq_{\text{sm}} [(U_{1,1}^-, U_{2,1}^-), (U_{1,2}^-, U_{2,2}^-), \dots] \quad (4.7)$$

**Théorème 9.** *Soit deux vecteurs de v.a.  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  de longueur  $n$ . Si  $\mathbf{X} \preceq_{\text{sm}} \mathbf{Y}$ , alors  $\phi(\mathbf{X}) \preceq_{\text{icx}} \phi(\mathbf{Y})$  pour toute fonction supermodulaire  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Remarque 2.** *L'ordre icx correspond à une représentation univariée de l'ordre sm.*

Considérant que  $g'$  définit en (4.4) est supermodulaire, considérant également (4.7) et le théorème 9, on a

$$\begin{aligned} [g'(U_{1,1}^+, U_{2,1}^+ | T_0^+), g'(U_{1,2}^+, U_{2,2}^+ | T_1^+), \dots] &\preceq_{\text{sm}} [g'(U_{1,1}, U_{2,1} | T_0), g'(U_{1,2}, U_{2,2} | T_1), \dots] \\ &\preceq_{\text{sm}} [g'(U_{1,1}^-, U_{2,1}^- | T_0^-), g'(U_{1,2}^-, U_{2,2}^- | T_1^-), \dots] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalement, considérant que l'opération de la somme est à la fois croissante et convexe, en utilisant le théorème 9 avec 4.8, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+ | T_k^+) \preceq_{\text{icx}} \sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}, U_{2,k} | T_k) \preceq_{\text{icx}} \sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}^-, U_{2,k}^- | T_k^-)$$

Par conséquent, on conclut que

$$S^+(t) \preceq_{\text{icx}} S(t) \preceq_{\text{icx}} S^-(t), \quad t \geq 0.$$

□



# Conclusion

<Texte de la conclusion. Une thèse ou un mémoire devrait normalement se terminer par une conclusion placée avant les annexes, le cas échéant. La conclusion est traitée comme un chapitre normal, sauf qu'elle n'est pas numérotée.>

# Bibliographie

- Albrecher, H. and Boxma, O. J. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2) :245–254.
- Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 12(2) :275–279.
- Asimit, A. V. and Badescu, A. L. (2010). Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(2) :93–104.
- Ayhan, H., Limon-Robles, J., and Wortman, M. (1999). An approach for computing tight numerical bounds on renewal functions. *IEEE Transactions on Reliability*, 48(2) :182–188.
- Baker, R. and Kharrrat, T. (2018). Event count distributions from renewal processes : fast computation of probabilities. *IMA Journal of Management Mathematics*, 29(4) :415–433.
- Barges, M., Cossette, H., Loisel, S., and Marceau, E. (2011). On the moments of aggregate discounted claims with dependence introduced by a fgm copula. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41(1) :215–238.
- Bargès, M., Cossette, H., and Marceau, E. (2009). Tvar-based capital allocation with copulas. *Insurance : Mathematics and Economics*, 45(3) :348–361.
- Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., and Marceau, E. (2006). On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(5) :265–285.
- Boudreault, M., Cossette, H., and Marceau, E. (2017). On a joint frequency and severity loss model applied to earthquake risk. *Available at SSRN 3015906*.
- Cheung, E. C. and Woo, J.-K. (2016). On the discounted aggregate claim costs until ruin in dependent sparre andersen risk processes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(1) :63–91.
- Cossette, H., Marceau, E., and Marri, F. (2008). On the compound poisson risk model with dependence based on a generalized farlie–gumbel–morgenstern copula. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(3) :444–455.

- Cossette, H., Marceau, E., and Marri, F. (2010). Analysis of ruin measures for the classical compound poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3) :221–245.
- Denuit, M., Genest, C., and Marceau, É. (1999). Stochastic bounds on sums of dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 25(1) :85–104.
- Gallager, R. G. (2013). *Stochastic processes : theory for applications*. Cambridge University Press.
- Grandell, J. (2006). *Doubly stochastic Poisson processes*, volume 529. Springer.
- Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R. (2001). *Probability and random processes*. Oxford University Press.
- Hubbard, J. H. and Hubbard, B. B. (2015). *Vector calculus, linear algebra, and differential forms : a unified approach*.
- Jiang, X. and Nadarajah, S. (2019). Efficient expressions for moments of dependent random sums using copulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353 :130–139.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2013). *Loss models : Further topics*. John Wiley & Sons.
- Lai, C.-D., Murthy, D., and Xie, M. (2006). Weibull distributions and their applications.
- Léveillé, G., Garrido, J., and Fang Wang, Y. (2010). Moment generating functions of compound renewal sums with discounted claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3) :165–184.
- Marceau, E. (2009). On the discrete-time compound renewal risk model with dependence. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(2) :245–259.
- Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat*. Springer Berlin.
- McShane, B., Adrian, M., Bradlow, E. T., and Fader, P. S. (2008). Count models based on weibull interarrival times. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(3) :369–378.
- Mercier, S. (2007). Discrete random bounds for general random variables and applications to reliability. *European journal of operational research*, 177(1) :378–405.
- Mooney, C. Z. (1997). *Monte carlo simulation*, volume 116. Sage publications.
- Nelsen, R. B. (2006). An introduction to copulas. springer, new york. *MR2197664*.

- Nikoloulopoulos, A. K. and Karlis, D. (2008). Fitting copulas to bivariate earthquake data : the seismic gap hypothesis revisited. *Environmetrics : The official journal of the International Environmetrics Society*, 19(3) :251–269.
- Pal, S. and Murthy, G. (2003). An application of gumbel’s bivariate exponential distribution in estimation of warranty cost of motor cycles. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution : a handbook*. CRC press.
- Ross, S. M., Kelly, J. J., Sullivan, R. J., Perry, W. J., Mercer, D., Davis, R. M., Washburn, T. D., Sager, E. V., Boyce, J. B., and Bristow, V. L. (1996). *Stochastic processes*, volume 2. Wiley New York.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic orders*. Springer Science & Business Media.
- van Noortwijk, J. M. and van der Weide, J. A. (2008). Applications to continuous-time processes of computational techniques for discrete-time renewal processes. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(12) :1853–1860.
- Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2011). Risk modelling with the mixed erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(1) :2–16.
- Yannaros, N. (1989). On cox and renewal processes. *Statistics & probability letters*, 7(5) :431–433.
- Yannaros, N. (1994). Weibull renewal processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46(4) :641–648.