

# **Étude du processus de renouvellement avec récompense dans un contexte de dépendance**

**Essai**

**Alexandre Lepage<sup>1</sup>**

Sous la direction de:

Hélène Cossette, directrice de recherche  
Étienne Marceau, codirecteur de recherche

---

1. Adresse courriel: [alexandre.lepage.3@ulaval.ca](mailto:alexandre.lepage.3@ulaval.ca)  
Répertoire GitHub: <https://github.com/alexlepage07/Essai>

# Résumé

Les processus de renouvellement avec récompenses sont très utiles, notamment en théorie de la fiabilité (p. ex. [Pal and Murthy \(2003\)](#)) et en théorie de la ruine (p.ex. [Rolski et al. \(2009\)](#)). Dans le contexte actuariel, ce genre de processus sert à modéliser la somme des coûts pour une période donnée. Récemment, dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressés à relaxer l'hypothèse d'indépendance qui existe généralement entre les variables aléatoires des temps inter-occurrences et de la sévérité. Ces chercheurs ont développé l'expression analytique de différentes mesures de risque afin d'étudier le comportement d'un tel modèle. Mentionnons les deux premiers moments, la transformée de Laplace-Stieltjes, la fonction de pénalité de Gerber-Shiu, etc. Cependant, aucune méthodologie n'a encore été développée pour approximer la distribution de probabilité de la somme des coûts hormis celle proposée par [Marceau \(2009\)](#) qui s'est intéressé au cas où les variables aléatoires sont discrètes. Le présent essai vise donc à adapter les travaux de ce dernier lorsque les variables aléatoires sont continues. Afin de modéliser la dépendance qui existe entre les variables aléatoires des temps inter-sinistres et de la sévérité, la théorie des copules est utilisée. En complément à cela, un algorithme est proposé pour effectuer de la simulation Monte-Carlo. De plus, on regarde les propriétés asymptotiques en contexte de dépendance, on examine l'ordonnancement stochastique des bornes d'approximation et on étudie l'ordonnancement stochastique du processus aléatoire selon le niveau de dépendance.

# Abstract

Renewal processes with rewards are particularly useful in reliability theory (eg [Pal and Murthy \(2003\)](#)) and in ruin theory (eg [Rolski et al. \(2009\)](#)). In the actuarial context, this type of process is used to model the sum of costs for a given period. Recently, in the literature, several authors have been interested in relaxing the independence hypothesis which generally exists between inter-occurrence times and severity random variables. These researchers developed the analytical expression of different risk measures in order to study the behavior of such a model. Let us mention the first two moments, the Laplace-Stieltjes transform, the Gerber-Shiu penalty function, etc. However, no methodology has yet been developed to approximate the probability distribution of the sum of costs except [Marceau \(2009\)](#) which was interested in the case where the random variables are discrete. This essay therefore aims to adapt the latter's work when the random variables are continuous. In order to model the dependence that exists between the random variables of inter-occurrence times and severity, the theory of copula is used. In addition to this, an algorithm is proposed to perform Monte-Carlo simulation. Moreover, we look at the asymptotic properties in a dependency context, we examine the stochastic ordering of the approximation bounds and we study the stochastic ordering of the random process according to the level of dependence.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Hypothèses du modèle étudié</b>	<b>5</b>
<b>2 Approches de calcul</b>	<b>7</b>
2.1 Simulation . . . . .	7
2.2 Approximation de la fonction de densité de probabilité . . . . .	11
2.3 Mélanges d'Erlang . . . . .	19
<b>3 Propriétés asymptotiques</b>	<b>26</b>
<b>4 Ordonnancement stochastique des bornes d'approximation</b>	<b>28</b>
<b>5 Ordonnancement stochastique selon la dépendance</b>	<b>35</b>
<b>Conclusion</b>	<b>42</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison des mesures de risque $VaR$ et $TVaR$ de $S(t)$ , $t = 5$ , lorsqu'une structure de dépendance entre $X$ et $W$ est modélisée par une copule FGM. . . .	11
2.2	Comparaison des résultats obtenus avec l'Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec des données simulées à l'aide de l'Algorithme 1. . . . .	17
2.3	Comparaison des résultats obtenus avec l'Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec des données simulées à l'aide de l'Algorithme 1. . . . .	18
2.4	Valeurs de l'espérance de $S^{(\theta)}(t)/t$ pour $\theta \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ et pour $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ . Le cas $\theta = 0$ désigne le scénario où il y a indépendance entre $X$ et $W$ . La constante $h_w$ représente le pas de discrétisation de la v.a. $W$ . . . .	25

# Liste des figures

2.1	Courbes des fonctions de répartition empiriques de $S(t)$ , $t = 5$ , selon le paramètre de dépendance $\theta$ , introduit grâce à la copule FGM. . . . .	10
2.2	Comparaison des fonctions de répartition calculées avec l'Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l'Algorithme 1 pour $m = 2^9$ et $h_x = 1/5$ . . . . .	18
2.3	Comparaison des fonctions de répartition calculées avec l'Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation <i>lower</i> et <i>upper</i> , avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation à l'aide de l'Algorithme 1 pour $m = 2^{10}$ et $h_x = 1/100$ . . . . .	19
2.4	Comparaison de la fonction de répartition de $S(t)$ , pour différentes valeurs de $t$ lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre $\theta = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant. . . . .	23
2.5	Comparaison de la fonction $F_{S(t)}^{(\theta)}(x)/t$ , pour différentes valeurs de $t$ lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre $\theta = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant. . . . .	24
4.1	Comparaison de la fonction de répartition théorique de la v.a. $N(t)$ , pour $t = 5$ , avec les approximations de celle-ci calculées avec les bornes $\underline{W}^{(l, h_w)}$ et $\underline{W}^{(u, h_w)}$ . . . . .	29

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux professeurs Hélène Cossette et Étienne Marceau pour leur soutien, leurs conseils et leurs commentaires. Merci pour avoir cru en moi.

J'aimerais également remercier la Chaire d'actuariat de l'Université Laval pour avoir subventionné cette recherche.

Enfin, je remercie ma conjointe, Stéphanie Rioux, pour m'avoir soutenu et enduré pendant toutes ces heures de réflexion où je ne parlais que de mathématiques et de programmation.

# Introduction

Les processus de renouvellement avec récompense, aussi appelés processus de renouvellement composés, ont été introduits par Andersen (1957) et sont particulièrement utiles dans le contexte de la théorie de la ruine (p.ex. Rolski et al. (2009)). Ce type de processus est décrit dans Grimmett and Stirzaker (2001) et Gallager (2013).

Dans un premier temps, les processus de renouvellement se caractérisent par une suite de variables aléatoires (v.a.) marquant le moment où se produit chacun des renouvellements. Soit la suite de v.a.  $\underline{T} = \{T_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ , où  $T_k$  représente le moment d'occurrence du  $k$ -ème événement.

À partir de cette suite de v.a., il est possible de modéliser le nombre de renouvellements qui se produira sur un intervalle de temps fixé. Soit  $\mathbf{N} = \{N(t)\}_{t \geq 0}$ , un processus de renouvellement tel que décrit dans Ross et al. (1996), Grimmett and Stirzaker (2001) et Gallager (2013). L'expression du nombre de renouvellements sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  est donnée par

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \in \mathbb{N}_+. \quad (1)$$

En ce qui a trait aux processus de renouvellement avec récompenses, il s'agit de considérer qu'à chacun des renouvellements, il se produit une récompense que l'on désirera sommer. Soit la suite de v.a indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)  $\underline{X} = \{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ , où  $X_k$  correspond à la sévérité (ou à un montant de "récompense") du  $k$ -ème événement. Dans un contexte d'analyse de la fiabilité ou d'ingénierie, cette "récompense" peut prendre des valeurs négatives et être considérée comme un coût. Dans un contexte d'assurance, on parlera plutôt de montants de sinistres. Cette dernière représentation est celle qui est étudiée dans le cas présent.

On a maintenant toutes les composantes pour modéliser la somme aléatoire que constitue un accroissement d'un processus de renouvellement avec récompenses. Soit  $\mathbf{S} = \{S(t)\}_{t \geq 0}$ , un processus de renouvellement avec récompense dont un accroissement  $S(t)$ , défini sur l'intervalle de temps  $(0, t]$ , s'exprime comme suit :

$$S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \geq 0. \quad (2)$$



Dans la littérature actuarielle, ce type de processus aléatoire est largement utilisé en théorie de la ruine. Cependant, l'hypothèse de base généralement utilisée dans ce contexte est de présumer l'indépendance entre les composantes du processus. Or, comme l'ont démontré Boudreault et al. (2006) et Nikoloulopoulos and Karlis (2008), l'hypothèse d'indépendance n'est pas toujours adéquate. En effet, Nikoloulopoulos and Karlis (2008) démontre que, dans le cas des tremblements de terre, il existe un lien de dépendance non négligeable entre le temps séparant deux secousses et l'amplitude que pouvaient atteindre ces dernières. À ce titre, définissons une autre suite de v.a. Soit la suite de v.a. i.i.d.  $\underline{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ , où  $W_k$  représente le temps écoulé entre le  $(k-1)$ -ème et le  $k$ -ème événement. La relation existante entre  $T_k$  et  $W_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ , est la suivante :

$$W_k = T_k - T_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad T_k = \sum_{i=1}^k W_i. \quad (3)$$

Ainsi, dans la structure de dépendance explorée par Boudreault et al. (2006) et par Nikoloulopoulos and Karlis (2008) lie les v.a.  $X_k$  et  $W_k$  pour  $k \in \mathbb{N}_+$ .

D'autres auteurs se sont également intéressés à ce genre de structure de dépendance et aux implications qu'elle pouvait entraîner sur les mesures de ruine. Parmi les travaux réalisés, mentionnons Albrecher and Boxma (2004), Boudreault et al. (2006), Cossette et al. (2008) et Cossette et al. (2010) qui ont développé des expressions analytiques pour différentes mesures de ruine lorsque la structure de dépendance était prédéfinie (copule FGM ou mélange de fonctions de densité de probabilité). Par la suite, Willmot and Lin (2011) propose de modéliser la structure de dépendance à l'aide d'un mélange d'Erlang afin d'augmenter la flexibilité des expressions analytiques développées pour les mesures de ruine. Puis, Jiang and Nadarajah (2019) considère le cas où les composantes de la somme aléatoire ne sont pas identiquement distribuées (i.d.) pour calculer la moyenne et la variance du processus. Enfin, Marceau (2009) s'est intéressé au calcul des masses de probabilité d'un processus de renouvellement composé lorsque les v.a. sous-jacentes sont discrètes. C'est d'ailleurs ce dernier article qui a inspiré le présent travail.

Certains auteurs se sont également intéressés à une version où les montants sont actualisés. Entre autre, il y a Asimit and Badescu (2010), Léveillé et al. (2010), Bargès et al. (2011) et Cheung and Woo (2016). Cependant, ce sujet n'est pas abordé dans le présent travail.

Plusieurs des travaux cités considèrent que le processus de dénombrement sous-jacent est poissonien. Se faisant, on présume que l'intensité du processus aléatoire est constant dans le temps et que le modèle de fréquence est équi-dispersé (voir McShane et al. (2008)). Comme cette hypothèse est très limitative, on s'intéressera tout particulièrement au cas où les temps inter-sinistres obéissent plutôt à une loi Weibull. Le cas où le paramètre de forme de la loi de

probabilité est inférieur à 1 (paramètre  $\tau$  dans (1.1)) peut être interprété comme une généralisation du processus de Poisson où l'intensité du processus n'est pas constant. On parlera alors de processus de Poisson doublement stochastique<sup>2</sup>. Plus encore, dans Lai et al. (2006) on trouve que les processus de renouvellement de type Weibull peuvent prendre une multitude de formes et s'adapter à plusieurs contextes, notamment dans la modélisation des tremblements de terre, des éruptions volcaniques et en assurance vie. On peut également consulter Boudreault et al. (2017) pour en apprendre plus à ce sujet. Pour une description détaillée de cette loi de probabilité, Rinne (2008) est fortement suggéré.

Jusqu'à maintenant, dans la littérature actuarielle, on s'est principalement intéressé au calcul de certaines quantités telles que l'espérance du processus aléatoire, la transformée de Laplace-Stieltjes (TLS) du temps de ruine, la fonction de pénalité de Gerber-Shiu, etc. Cependant, rien n'a été trouvé dans la littérature actuarielle concernant le calcul de la fonction de répartition ou de la fonction de densité de probabilité des coûts agrégés sur un intervalle de temps fixe avec ce type de processus aléatoire hormis Marceau (2013) qui a développé une formule récursive dans le cas où les v.a. sont discrètes. Considérant que le calcul de la densité de probabilité permet plus de flexibilité dans l'étude d'un modèle, il est beaucoup plus efficace de suivre l'exemple de Marceau (2013) et d'adapter ses travaux dans le cas continu. Pour cette raison, dans le présent travail, on s'intéresse aux différentes méthodes visant à estimer ou à approximer les probabilités associées au modèle présenté en (2) lorsqu'il existe une structure de dépendance unissant les v.a.  $X_k$  et  $W_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ .

À cette fin, on considère les travaux réalisés par certains auteurs pour discrétiser la distribution d'un processus de renouvellement. Entre autres, mentionnons Ayhan et al. (1999) qui propose une approche pour calculer des bornes numériques sur des fonctions de renouvellement. Puis Mercier (2007) propose une approche pour calculer des bornes sur la fonction de répartition de v.a. ou de sommes finies de v.a. Ensuite, van Noordwijk and van der Weide (2008) explique comment appliquer les propriétés des processus de renouvellement en temps discret pour des processus en temps continu. Finalement Baker and Kharrat (2018) suggère une adaptation de l'algorithme de DePril pour calculer rapidement les valeurs de la fonction de masses de probabilité (fmp) d'un processus de renouvellement. Dans le cas présent, on vise à adapter les méthodes proposées par ces auteurs pour appliquer les travaux de Marceau (2013) dans le cas où les v.a. sous-jacentes sont continues.

Cet essai est construit comme suit. Dans le Chapitre 1, on commence par poser les hypothèses utilisées. Le Chapitre 2 présente trois approches pour faire l'étude de la distribution de la v.a.  $S(t)$ , pour  $t > 0$ . La première est celle qui est généralement la plus utilisée en pratique, c.-à-d. la simulation. Ainsi, un algorithme est proposé à cette fin. Puis, on propose une méthode pour

---

2. Voir Grandell (2006).

approximer sa densité de probabilité en utilisant la discrétisation. Ensuite, une extension de cette approche utilisant un mélange d'Erlang est proposée. Dans le Chapitre 3, un rappel sur les propriétés asymptotiques des processus de renouvellement est fait et on démontre que ces propriétés tiennent même lorsqu'un lien de dépendance unit les v.a.  $X_k, W_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Dans le Chapitre 4, on examine l'ordonnancement stochastique des bornes d'approximation de la v.a.  $S(t)$  selon les méthodes de discrétisation utilisées. Finalement, dans le Chapitre 5, on étudie l'ordonnancement stochastique du processus  $\mathbf{S}$  selon le niveau de dépendance unissant les v.a.  $X_k, W_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Le code informatique utilisé pour réaliser chacun des résultats de ce travail est disponible sur <https://github.com/alexlepage07/Essai>.

# Chapitre 1

## Hypothèses du modèle étudié

Soit les suites de v.a.  $\underline{W}$ ,  $\underline{T}$  et  $\underline{X}$  définies en introduction. On pose l'hypothèse que  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$  forment deux suites de v.a. i.i.d. Également, chaque paire de la suite bivariable  $\{(W_k, X_k)\}$  est présumée être séquentiellement indépendante et identiquement distribuée pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . En d'autres mots, chaque renouvellement est indépendant et se comporte comme le précédent. Cependant, afin de relaxer l'hypothèse d'indépendance généralement utilisée en théorie de la ruine, on suppose que les v.a.  $W_k$  et  $X_k$  ne sont pas indépendantes l'une de l'autre,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ . On utilise une copule  $C$  pour définir la structure de dépendance entre ces deux v.a. Pour une description détaillée de la théorie des copules, voir [Joe \(1997\)](#) ou [Nelsen \(2007\)](#).

On a  $(W_k, X_k) \sim (W, X)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ . Alors, la fonction de répartition bivariable des couples de v.a.  $(W_k, X_k)$ , désignée par  $F_{W,X}$ , appartient à la classe de Fréchet tel que  $F_{W,X} \in \mathcal{CF}(F_W, F_X)$ , où  $F_W$  et  $F_X$  correspondent aux fonctions de répartition marginales de  $W$  et de  $X$ . Avec le théorème de Sklar ([Sklar \(1959\)](#)), on a

$$F_{W,X}(w, x) = C(F_W(w), F_X(x)), \quad w, x \in \mathbb{R}_+,$$

où  $C$  correspond à une copule bivariable.

Comme il est expliqué en introduction, on s'intéresse tout particulièrement au cas où les temps inter-occurrences obéissent à une loi Weibull. Autrement dit,  $W \sim W_k \sim \text{Weibull}(\tau, \xi)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ , où  $\tau$  correspond au paramètre de forme de la loi et  $\xi$  est le paramètre d'échelle. La fonction de répartition  $F_W$  est donnée par

$$F_W(t) = 1 - \exp\{-(\xi t)^\tau\}, \quad t \geq 0, \quad \xi, \tau > 0, \quad (1.1)$$

et la fonction de densité  $f_W$  est

$$f_W(t) = \xi \tau (\xi t)^{\tau-1} \exp\{-(\xi t)^\tau\}, \quad t \geq 0, \quad \xi, \tau > 0. \quad (1.2)$$

Le taux de risque (*hazard rate*)  $h(t)$  de la v.a.  $W$  est défini par

$$h(t) = \frac{f_W(t)}{1 - F_W(t)} = \xi\tau(\xi t)^{\tau-1}, \quad t \geq 0.$$

Ainsi, la loi Weibull a la particularité que, lorsque  $0 < \tau < 1$ ,  $h(t)$  est une fonction décroissante en  $t$  (queue de distribution lourde) et le modèle de fréquence est sur-dispersé (variance plus grande que l'espérance). Lorsque  $\tau = 1$ , on a  $h(t) = \xi, \forall t$ , ce qui correspond au taux de risque de la loi exponentielle. Dans le cas où  $\tau > 1$ , alors  $h(t)$  est une fonction croissante en  $t$  (queue de distribution légère) et le modèle de fréquence est sous-dispersé (espérance plus grande que la variance). Ainsi, la loi Weibull offre beaucoup de flexibilité dans la modélisation des temps inter-occurrences.

Dans le présent essai, les coûts d'un sinistre ou la récompense au  $k$ -ème renouvellement est une v.a. continue.

## Chapitre 2

# Approches de calcul

Tel que mentionné précédemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à développer l'expression analytique de plusieurs mesures de ruine telles que la TLS du temps de ruine ou la fonction de pénalité de Gerber-Shiu. Or, cette approche offre peu de flexibilité puisqu'elle implique de fixer la structure de dépendance et d'utiliser un modèle le plus simple possible. De plus, le développement de ces expressions est coûteux en terme de temps si l'on désire faire une étude exhaustive des mesures de risque et de ruine associées à un certain risque. Elle est donc peu intéressante à utiliser dans la pratique.

Dans ce cas, quelle est l'approche la plus efficace à utiliser pour pouvoir évaluer le risque ? Généralement, dans ce cas, on fait appel à la simulation Monte-Carlo (voir [Mooney \(1997\)](#)). À cet effet, un algorithme est proposé dans la Section 2.1. Cependant, la simulation n'est pas la seule solution possible. On peut arriver à approximer la densité de probabilité de  $\mathbf{S}$  en utilisant la discrétisation telle que présenté dans la Section 2.2. Avec la densité de probabilité ainsi approximée, il est possible de calculer une grande quantité de mesures de risque telles que l'espérance, la variance, la prime *Stop-Loss*, la VaR et la TVaR.

### 2.1 Simulation

On considère le modèle présenté en (2) sous les hypothèses postulées au Chapitre 1. On désire simuler un accroissement du processus  $\mathbf{S}$ . Pour y arriver, il faut simuler des réalisations de  $\underline{X}$  et de  $\underline{W}$  en considérant la structure de dépendance les unissant. À cette fin, on utilise la théorie des copules.

Afin de simuler des réalisations de  $\underline{X}$  en tenant compte de la structure de dépendance unissant  $X_k$  avec  $W_k$ , il faut obtenir l'expression de la fonction quantile de  $X_k$  conditionnellement à la valeur de  $W_k$ . Pour se faire, on débute par trouver l'expression de la copule conditionnelle de

$(X|W = w)$ . Avec Brechmann et al. (2013), on sait que

$$F_{X|W=w}(x) = C_{1|2}(F_X(x)|F_W(w)), \quad (2.1)$$

où

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Par la suite, afin de trouver la fonction quantile, il s'agit d'inverser (2.1) en posant

$$u = C_{1|2}(F_X(x)|F_W(w)).$$

Se faisant, on trouve (2.2).

$$F_{X|W=w}^{-1}(u) = F_X^{-1} \left( C_{1|2}^{-1}(u|F_W(w)) \right), \quad u \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Ainsi, la première étape afin de réaliser la simulation est d'identifier l'expression de la copule conditionnelle  $C_{1|2}$  et de l'inverser pour trouver  $C_{1|2}^{-1}$  afin d'obtenir des réalisations de  $\underline{X}$  sachant le temps écoulé entre chaque événement. Pour la suite, il s'agit de suivre les étapes de l'Algorithme 1.

---

**Algorithme 1 :** Simuler un processus de renouvellement avec récompenses lorsqu'il y a une structure de dépendance unissant  $X$  et  $W$ .

---

**input** :  $t$  : la durée du processus ;

$n$  : nb de réalisations de la simulation (p. ex.  $n = 10^5$ ).

**output** : vecteur de dimension  $n \times 1$  correspondant à des réalisations du processus  $S(t)$ .

```

1 for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
2   poser  $T_0 = 0$  ;
3   poser  $i = 1$  ;
4   do
5     simuler  $W_i^{(j)}$ , une réalisation de  $W$  ;
6     calculer  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$  ;
7     incrémenter  $i = i + 1$  ;
8   while  $T_i^{(j)} \leq t$ 
9   calculer  $N(t)^{(j)} = \max(i) - 1$  ;
10  retirer le dernier élément de la suite  $W^{(j)} = (W_1^{(j)} \dots W_{N(t)^{(j)}+1}^{(j)})$  ;
11  if  $N(t)^{(j)} = 0$  then
12     $S(t)^{(j)} = 0$  ;
13  next  $j$  ;
14  end
15  calculer  $U_i^{(j)} = F_W(W_i^{(j)})$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$  ;
16  simuler le vecteur  $(V_1^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$ , des réalisations des v.a.  $V_i \sim V \sim Unif(0, 1)$  ;
17  calculer  $X_i^{(j)} = F_X^{-1}(C_{1|2}^{-1}(V_i^{(j)}|U_i^{(j)}))$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N(t)^{(j)}$  ;
18  calculer  $S(t)^{(j)} = \sum_{i=1}^{N(t)^{(j)}} X_i^{(j)}$ .
19 end

```

---

L'Algorithme 1 est programmé dans la fonction `simul_Proc_Renouv` du fichier `Fonctions_essai.R`.

L'exemple ci-dessous sert à illustrer l'application de l'Algorithme 1.

**Exemple 1.** On considère que  $X_k \sim X \sim \text{Exp}(1)$  et que  $W_k \sim W \sim \text{Weibull}(\tau = 1.1, \xi = \Gamma(1 + 1/1.1))$ ,  $\forall k$ , avec  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[W] = 1$ . On pose  $t = 5$  et la copule  $C$  utilisée est la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) de paramètre  $\theta$  définie par

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)),$$

où  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  et  $\theta \in [-1, 1]$ . La copule conditionnelle quant à elle correspond à

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = u_1(1 + \theta(1 - u_1)(1 - 2u_2)). \quad (2.3)$$



Quant à l'inversion de la copule conditionnelle (2.3), il suffit de poser  $v = C_{1|2}(u_1|u_2)$ . On a alors

$$\begin{aligned} v &= u_1 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - 2u_2)) \\ &= u_1 + \theta(1 - 2u_2)u_1 - \theta(1 - 2u_2)u_1^2 \\ &= (1 + \theta(1 - 2u_2))u_1 - \theta(1 - 2u_2)u_1^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Posons  $a = -\theta(1 - 2u_2)$  et  $b = 1 + \theta(1 - 2u_2)$ . On réécrit (2.4) comme suit :

$$\begin{aligned} v &= bu_1 + au_1^2 \\ vu_1^{-2} &= bu_1^{-1} + a \\ 0 &= -vu_1^{-2} + bu_1^{-1} + a. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de deuxième degré. En appliquant la formule quadratique, on trouve

$$u_1^{-1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4va}}{-2v}.$$

On conclut que

$$u_1 = \frac{2v}{1 + \theta(1 - 2u_2) + \sqrt{(1 + \theta(1 - 2u_2))^2 - 4v\theta(1 - 2u_2)}}. \quad (2.5)$$

Avec le fichier `Simulation_processus_renouvellement_recompense.R`, lorsque l'on pose  $n = 10^5$ ,  $t = 5$ , et  $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ , on obtient les résultats du Tableau 2.1 ainsi que l'Illustration 2.1.

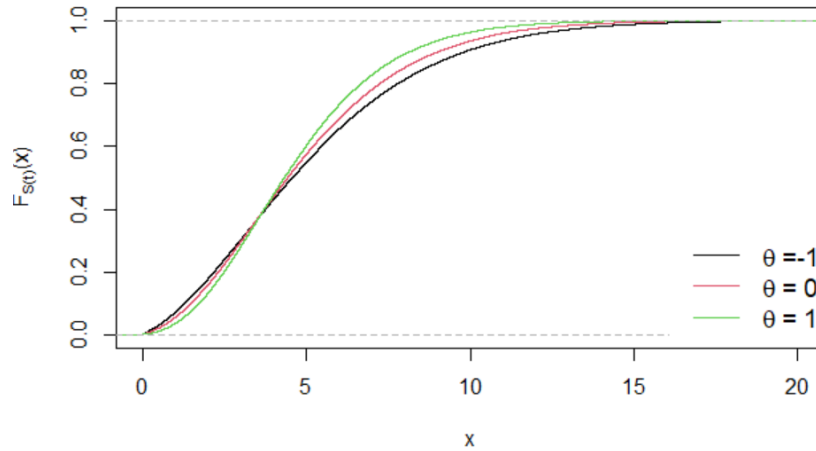


ILLUSTRATION 2.1 – Courbes des fonctions de répartition empiriques de  $S(t)$ ,  $t = 5$ , selon le paramètre de dépendance  $\theta$ , introduit grâce à la copule FGM.

	$\theta \setminus \kappa$	0	0.01	0.1	0.5	0.9	0.99
$VaR_\kappa(S(t))$	-1	0.00	0.13	1.27	4.57	9.82	15.41
	0	0.00	0.21	1.46	4.42	9.00	13.87
	1	0.00	0.39	1.71	4.32	8.14	12.24
$TVaR_\kappa(S(t))$	-1	5.18	5.21	5.65	7.82	12.30	17.51
	0	4.93	4.96	5.37	7.26	11.17	15.80
	1	4.70	4.73	5.08	6.69	9.96	13.85

TABLEAU 2.1 – Comparaison des mesures de risque  $VaR$  et  $TVaR$  de  $S(t)$ ,  $t = 5$ , lorsqu’une structure de dépendance entre  $X$  et  $W$  est modélisée par une copule FGM.

Posons  $\mathbf{S}^{(\theta)}$  pour mettre en évidence que le paramètre de dépendance du processus  $\mathbf{S}$  est  $\theta$ . En considérant le Tableau 2.1 on observe que

$$TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(1)}) \leq TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(0)}) \leq TVaR_\kappa(\mathbf{S}^{(-1)}), \quad \forall \kappa \in [0, 1], \quad (2.6)$$

et que

$$\begin{cases} VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(1)}) \leq VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(0)}) \leq VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(-1)}), & \kappa \in [0, 0.1] \\ VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(1)}) \geq VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(0)}) \geq VaR_\kappa(\mathbf{S}^{(-1)}), & \kappa \in [0.5, 1]. \end{cases} \quad (2.7)$$

De plus, considérant que  $TVaR_0(S(t)) = \mathbb{E}[S(t)]$ , on constate que

$$\mathbb{E}[\mathbf{S}^{(1)}] \neq \mathbb{E}[\mathbf{S}^{(0)}] \neq \mathbb{E}[\mathbf{S}^{(-1)}]. \quad (2.8)$$

En combinant (2.6), (2.7) et (2.8), on se demande si la relation suivante est valide quand  $-1 \leq \theta \leq 1$  :

$$\mathbf{S}^{(1)} \preceq_{\text{icx}} \mathbf{S}^{(0)} \preceq_{\text{icx}} \mathbf{S}^{(-1)}, \quad (2.9)$$

où  $\preceq_{\text{icx}}$  signifie plus petit ou égal selon l’ordre stochastique croissant convexe (voir p.e. *Shaked and Shanthikumar (2007)* ou *Denuit et al. (2006)*). Le résultat (2.9) est démontré au Chapitre 5.

## 2.2 Approximation de la fonction de densité de probabilité

Une approche alternative à la simulation consiste à discrétiser les v.a.  $X$  et  $W$  comme il est décrit dans *Mercier (2007)*, *van Noortwijk and van der Weide (2008)* et dans *Bargès et al. (2009)* afin d’utiliser les propriétés des processus de renouvellement en temps discret dans l’optique d’approximer la fmp de  $S(t)$ ,  $t > 0$ .

### 2.2.1 Méthodes de discrétisation

Afin de construire des v.a. discrètes  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{W}$  comme approximation des v.a.  $X$  et  $W$ , on applique l'une des méthodes de discrétisation proposées dans la Section 5.1 de Bargès et al. (2009). Pour les deux prochaines méthodes, on suppose un pas de discrétisation  $h > 0$ .

**Définition 1. Méthode "upper" :** Cette méthode consiste à définir la fmp de  $\widetilde{X}$  (ou  $\widetilde{W}$ ) comme suit :

$$f_{\widetilde{X}}(jh) = \begin{cases} F_X(h), & j = 0, \\ F_X((j+1)h) - F_X(jh), & j \in \mathbb{N}_+. \end{cases} \quad (2.10)$$

**Définition 2. Méthode "lower" :** Cette deuxième méthode reprend la même idée que dans la Définition 1 à la différence que l'on translate d'une position les éléments du vecteur de masses de probabilité de manière à ce que la masse de probabilité à zéro soit nulle. On obtient

$$f_{\widetilde{X}}(jh) = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ F_X(jh) - F_X((j-1)h), & j \in \mathbb{N}_+. \end{cases} \quad (2.11)$$

Une fois que les marginales sont discrétisées, il est possible de calculer les masses de probabilité conjointes d'un modèle bivarié en utilisant la Section 5.2 de Bargès et al. (2009). Pour des pas de discrétisation  $h_w$  et  $h_x$  et, avec une copule  $C$ , la fonction de répartition du couple  $(\widetilde{W}, \widetilde{X})$  est donnée par

$$F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(ih_w, jh_x) = C(F_{\widetilde{W}}(ih_w), F_{\widetilde{X}}(jh_x)), \quad (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (2.12)$$

pour  $h_w, h_x > 0$ . À partir de (2.12), il est possible de calculer les valeurs de la fmp conjointe avec

$$f_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(ih_w, jh_x) = \begin{cases} F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(0, 0), & i = j = 0 \\ F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(0, jh_x) - F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(0, (j-1)h_x), & i = 0, j \in \mathbb{N}_+ \\ F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(ih_w, 0) - F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}((i-1)h_w, 0), & i \in \mathbb{N}_+, j = 0 \\ F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(ih_w, jh_x) - F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}((i-1)h_w, jh_x) & i, j \in \mathbb{N}_+. \\ -F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(ih_w, (j-1)h_x) + F_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}((i-1)h_w, (j-1)h_x), & \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.2.2 Algorithme récursif

Dans la Section 3 de [Marceau \(2009\)](#), une formule récursive est proposée afin de calculer les valeurs de la fmp d'un processus de renouvellement en temps discret. Soit  $\widetilde{W}$ ,  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{S}(t)$ , une version discrétisée des v.a.  $W$ ,  $X$  et  $S(t)$ . Cette fonction est présentée dans la proposition suivante :

**Proposition 1.** *On considère un processus de renouvellement en temps discret  $\widetilde{S}(t)$ , avec dépendance entre les v.a.  $\widetilde{W}$  et  $\widetilde{X}$ , dont la fmp est désignée par  $f_{\widetilde{S}(t)}$ , pour  $t \in \mathbb{N}$ . Alors,*

$$f_{\widetilde{S}(t)}(s) = \begin{cases} 1 - F_{\widetilde{W}}(t), & s = 0 \\ \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^s f_{\widetilde{S}(t-i)}(s-j) f_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(i, j), & s \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $f_{\widetilde{S}(0)}(s) = \mathbb{1}_{\{s=0\}}$ .

**Preuve.** Voir la Proposition 1 de [Marceau \(2009\)](#). □

Comme les lois de probabilité marginales utilisées dans [Marceau \(2009\)](#) ne comportent pas de masse de probabilité à zéro, on remarque que, dans (2.14), les indices  $i$  et  $j$  de la double somme commencent à 1. Toutefois, si on considère qu'il est possible d'avoir une masse à zéro, il faut adapter (2.14) pour inclure la possibilité qu'un événement puisse avoir un coût nul. Soit  $h_w = h_x = 1$ , alors (2.14) devient

$$f_{\widetilde{S}(t)}(s) = \begin{cases} 1 - F_{\widetilde{W}}(t) + \sum_{i=0}^t f_{\widetilde{S}(i)}(0) f_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(t-i, 0), & s = 0 \\ \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^s f_{\widetilde{S}(t-i)}(s-j) f_{\widetilde{W}, \widetilde{X}}(i, j), & s \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (2.15)$$

On remarque dans (2.15) que le cas  $s \in \mathbb{N}_+$  constitue un double produit de convolution. Par conséquent, il est judicieux d'utiliser l'algorithme de Transformée de Fourier rapide (*FFT*) afin de gagner en efficacité (voir [Klugman et al. \(2013\)](#)). Les définitions ci-dessous permettent de comprendre l'opération qui est effectuée lors de l'application de cet algorithme et pourquoi on peut l'utiliser dans le cas présent.

**Définition 3. Transformée de Fourier discrète (TFD) :** Soit une v.a.  $Y$  définie sur  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  dont le vecteur des masses de probabilité est désigné par  $\underline{f}_Y = \{f_k\}_{k=0}^{m-1}$ . La TFD du vecteur  $\underline{f}_Y$  est calculée comme suit :

$$\hat{f}_z = \varphi_z(\underline{f}_Y) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k \exp \left\{ \frac{2\pi i}{m} k z \right\} = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{2\pi i}{m} Y z \right\} \right], \quad (2.16)$$

où  $i = \sqrt{-1}$  et  $z = 0, 1, \dots, m-1$ . Cette fonction est appelée la **fonction caractéristique** et on la dénote par  $\varphi$ .

**Définition 4.** Soit une v.a.  $Y$  définie sur  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  dont les valeurs de la fmp sont regroupées dans le vecteur  $\underline{f}_Y = \{f_k\}_{k=0}^{m-1}$  et dont la TFD de ces masses de probabilité est désignée par le vecteur  $\underline{\hat{f}}_Y = \{\hat{f}_z\}_{z=0}^{m-1}$ . L'inversion de la TFD est calculée comme suit :

$$f_k = \varphi_k^{-1}(\underline{\hat{f}}_Y) = \frac{1}{m} \sum_{z=0}^{m-1} \hat{f}_z \exp \left\{ \frac{-2\pi i}{m} kz \right\}, \quad (2.17)$$

$k = 0, 1, \dots, m-1$ .

**Lemme 1.** Soit la suite de v.a. indépendantes  $\underline{Y} = \{Y_j\}_{j=1}^n$  avec vecteurs de masses de probabilité  $\underline{f}_{Y_j}$  tel que  $f_{Y_j}$  est défini sur l'ensemble  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ , pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ . On définit  $V = \sum_{j=1}^n Y_j$  dont le vecteur de masses de probabilité est désigné par  $\underline{f}_V$  et est également de longueur  $m$ . Alors,

$$\varphi_z(\underline{f}_V) = \prod_{j=1}^n \varphi_z(\underline{f}_{Y_j}), \quad z = 0, 1, \dots, m-1$$

**Preuve.** Soit  $a = \frac{2\pi i}{m}$ , alors

$$\varphi_z(f_V) = \mathbb{E}[e^{azV}] = \mathbb{E}[e^{az \sum_{j=1}^n Y_j}] \stackrel{\text{ind.}}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{azY_j}] = \prod_{j=1}^n \varphi_z(f_{Y_j}).$$

□

**Corollaire 1.** On peut utiliser l'algorithme de Transformée de Fourier rapide tel que décrit dans *Klugman et al. (2013)* pour calculer rapidement les valeurs de (2.15).

**Preuve.** Tel que décrit dans le Chapitre 1, les couples  $(W_k, X_k)$  sont indépendants séquentiellement. Il en va de même pour  $(\widetilde{W}_k, \widetilde{X}_k)$ . Ainsi, l'expression  $S_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \widetilde{X}_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}$  est indépendante du couple  $(\widetilde{W}_i, \widetilde{X}_i)$ , pour  $i \in \mathbb{N}_+$ , avec  $S_0 = X_0 = 0$ . Conséquemment, on peut utiliser le Lemme 1 pour effectuer le produit de convolution de (2.15). □

**Remarque 1.** Pour bien fonctionner, l'algorithme de Fourier rapide doit être utilisé sur des vecteurs de longueurs  $m = 2^l$ ,  $l \in \mathbb{N}_+$  suffisamment longs (p.ex.  $l = 10$ ) pour couvrir l'ensemble du domaine de la somme.

La prochaine section présente concrètement comment l'algorithme FFT est utilisé pour calculer (2.15).

### 2.2.3 Algorithme de calcul

L'Algorithme 2 présente les étapes à suivre afin de calculer (2.15) selon l'une des méthodes de discrétisation *lower* ou *upper*.

---

**Algorithme 2 :** Calculer les masses de probabilité associées à l'approximation de  $S(t)$ .

---

**input :**  $F_X$  : la fonction de répartition de  $X$  ;

$F_W$  : la fonction de répartition de  $W$  ;

$C_\theta$  : la fonction correspondant à la copule de paramètre  $\theta$  utilisée ;

$h_x$  : le pas de discrétisation associé à  $X$  ;

$m$  : longueur des vecteurs de masses de probabilité ( $m = 2^l$ ,  $l \in \mathbb{N}_+$ ) ;

$\eta$  : méthode utilisée pour approximer  $S(t)$ ,  $\eta \in \{ "l", "u" \}$  ;

$t$  : durée du processus  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**output :** vecteur des masses de probabilité correspondant à  $f_{\tilde{S}(t)}(x)$ , de longueur  $m$ .

- 1 Définir le pas de discrétisation de  $W$  :  $h_w = (t + 1)/m$  ;
  - 2 Définir un vecteur  $v = (0, 1, \dots, m - 1)$  ;
  - 3 Définir  $x = v \times h_x$  et  $w = v \times h_w$  ;
  - 4 **if**  $\eta = "l"$  **then**
    - 5 | calculer  $F_{\tilde{X}}(x) = F_{X^{(l, h_x)}}(x)$  et  $F_{\tilde{W}}(x) = F_{W^{(u, h_w)}}(w)$  à l'aide des Définitions 2 et 1 ;
  - 6 **else**
    - 7 | calculer  $F_{\tilde{X}}(x) = F_{X^{(u, h_x)}}(x)$  et  $F_{\tilde{W}}(x) = F_{W^{(l, h_w)}}(w)$  à l'aide des Définitions 1 et 2 ;
  - 8 **end**
  - 9 Calculer les valeurs de la matrice  $\mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{X}}}$  de dimension  $m \times m$  avec (2.12) ;
  - 10 Calculer les valeurs de la matrice  $\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{X}}}$  de dimension  $m \times m$  avec (2.13) ;
  - 11 Définir  $k_{max} = \lfloor t/h_w \rfloor + 1$  ;
  - 12 Définir  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}$ , une matrice de dimension  $k_{max} \times m$  ;
  - 13 Poser  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[1, ] = (1, 1, \dots, 1)$  ;
  - 14 **for**  $k \leftarrow 2$  **to**  $k_{max}$  **do**
    - 15 |  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] = \varphi((\bar{F}_{\tilde{W}}((k - 1)h_w), 0, \dots, 0))$  ;
    - 16 | **for**  $j \leftarrow 2$  **to**  $k$  **do**
      - 17 | |  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] + \varphi(\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{X}}}[j, ]) \times \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k - j + 1, ]$  ;
    - 18 | **end**
    - 19 |  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] \times \left( 1 + \varphi(\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{X}}}[1, ]) \right)$  ;
    - 20 |  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ] = \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, ]}{\sum_{j=1}^m Re(\varphi^{-1}(\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k, j]))}$  ;
  - 21 **end**
  - 22 **Return**  $f_{\tilde{S}(t)}(x) = Re(\varphi^{-1}(\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}[k_{max}, ]))$ .
-

Dans cet algorithme, on définit  $\mathbf{f}[i, j]$  comme étant l'élément de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne d'une matrice  $\mathbf{f}$ , tandis que  $\mathbf{f}[i, ]$  représente l'entièreté de la  $i$ -ème ligne de la matrice  $\mathbf{f}$ . Par ailleurs, la valeur  $\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{W}}, \widetilde{\mathbf{X}}}[1, 1]$  désigne  $\mathbb{P}[\widetilde{W} = 0, \widetilde{X} = 0]$  et  $\varphi_{\mathbf{S}}[1, ]$  correspond à  $\varphi_{S(0)}(r)$ ,  $r > 0$ .  $\varphi_{S(t)}$  correspond à la fonction caractéristique de la transformée de Fourier du processus  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

Pour déterminer la longueur  $m$  des vecteurs utilisés dans l'algorithme, on choisit  $l$  suffisamment grand pour inclure toutes les valeurs plausibles que peut prendre la v.a.  $S(t)$  (p.ex.  $l = 9$ ). En revanche, si  $m$  est trop grand, il est possible que  $\mathbf{R}$  ne permette pas de créer de matrices de dimension  $m \times m$  pour des raisons d'allocation de mémoire. Également, il faut considérer que le temps de calcul augmente de façon exponentielle avec la valeur de  $l$ . Pour pallier à ce problème, on préférera augmenter la valeur du pas de discrétisation  $h_x$  pour garder  $l < 11$ .

Le pas de discrétisation  $h_w$  est déterminé à la ligne 2 de l'algorithme afin de maximiser les performances de l'approximation. Pour ce qui est de  $h_x$ , il s'agit de le prendre suffisamment petit pour maximiser la précision des calculs, mais de le prendre suffisamment grand pour que  $x = v \times h_x$  puisse couvrir la totalité de l'ensemble des valeurs plausibles de la v.a.  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

$\varphi(\cdot)$  désigne la fonction caractéristique utilisée pour la transformation de Fourier discrète telle que définie en (2.16), réalisée sur  $z = 0, 1, \dots, m - 1$ .  $\varphi^{-1}(\cdot)$  représente l'opération inverse telle que présentée dans (2.17). Enfin  $Re(\cdot)$  correspond à l'opération de ne garder que la partie réelle d'un nombre complexe.

**Remarque 2.** La TFD est implémentée en  $\mathbf{R}$  avec la fonction `fft`<sup>1</sup> qui provient du package de base. L'inversion se fait également avec cette fonction, mais avec l'argument `inverse = TRUE`. Cependant, elle n'applique pas la division par  $m$  qui est effectuée dans la Définition 4. À noter aussi, que la valeur produite par la fonction `fft` est un nombre complexe. Il faut donc extraire la partie réelle avec la fonction `Re` du logiciel  $\mathbf{R}$ .

La ligne 20 de l'Algorithme 2 permet d'ajuster la fonction de densité de probabilité considérant le fait que la ligne 19 s'appelle elle-même. Ainsi, on s'assure que la somme des valeurs de la fmp est égale à 1. À noter que, plus  $h_w$  est petit, moins l'ajustement de l'étape 20 sera important. Bref, en augmentant la valeur de  $m$ , on améliore la précision des valeurs produites par l'Algorithme 2.

**Proposition 2.** Afin de calculer la borne upper de la v.a.  $S(t)$ ,  $t > 0$ , il faut discrétiser la v.a.  $W$  selon la méthode lower et la v.a.  $X$  selon la méthode upper.

---

1. <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/fft>

Pour calculer la borne lower, il suffit de faire le contraire.

**Preuve.** Voir Chapitre 4. □

L'Algorithme 2 est programmé dans la fonction `approx_densite_St` du fichier `Fonctions_essai.R`.

## 2.2.4 Exemples numériques

**Exemple 2.** Soit les v.a.  $X$  et  $W$  telles que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-\beta x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ F_W(w) &= 1 - e^{-(\xi w)^\tau}, \quad w \in \mathbb{R}^+, \\ F_{W,X}(w, x) &= C_\theta(F_W(w), F_X(x)), \quad (w, x) \in (\mathbb{N}_+)^2, \end{aligned}$$

où  $C_\theta$  désigne la copule FGM de paramètre  $\theta$ . On pose  $\beta = 2$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $\xi = \Gamma(1 + 1/\tau)$  et  $\theta = 1$ . En saisissant  $m = 2^9$ ,  $h_x = 1/5$  et  $t = 2$  comme intrants de l'Algorithme 2 on obtient les résultats présentés dans le Tableau 2.2 ainsi que l'Illustration 2.2 avec le fichier `Approximation_distribution_St.R`.

Méthode	Espérance	Variance	TVaR $_{\kappa}(S(t))$					VaR $_{\kappa}(S(t))$				
			0	0.5	0.9	0.99	0.999	0	0.5	0.9	0.99	0.999
<i>Lower</i>	1.83	2.64	1.83	3.08	5.30	7.91	10.20	0.00	1.40	4.00	6.80	9.20
Simulation	1.49	1.95	1.49	2.58	4.68	6.91	9.00	0.00	1.20	3.60	6.00	8.20
<i>Upper</i>	1.18	1.45	1.18	2.08	3.83	5.98	7.94	0.00	0.80	2.80	5.00	7.00

$h_w = (t + 1)/m = 0.00586$ .

TABLEAU 2.2 – Comparaison des résultats obtenus avec l'Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec des données simulées à l'aide de l'Algorithme 1.



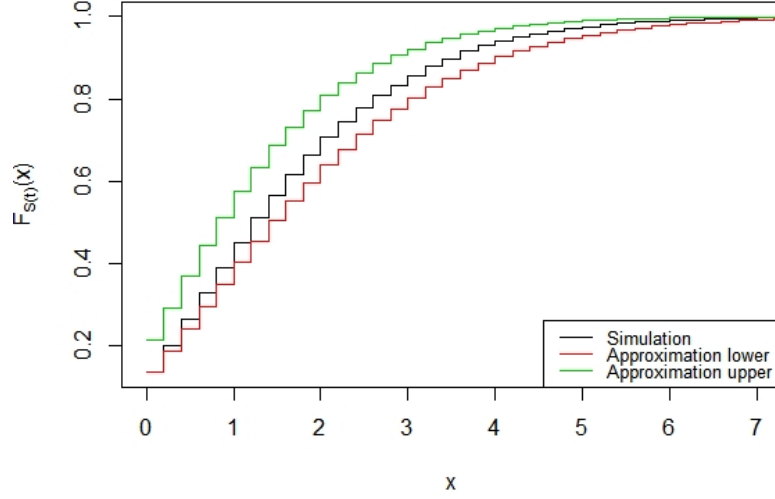


ILLUSTRATION 2.2 – Comparaison des fonctions de répartition calculées avec l’Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation avec l’Algorithme 1 pour  $m = 2^9$  et  $h_x = 1/5$ .

On voit dans le Tableau 2.2 ainsi que dans l’Illustration 2.2 que

$$S^{(u, h_w, h_x)}(t) \preceq_{\text{sd}} S(t) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h_w, h_x)}(t),$$

où  $\preceq_{\text{sd}}$  désigne l’ordre en dominance stochastique. Cette observation appuie la Proposition 5 du Chapitre 4.

**Exemple 3.** On reprend l’Exemple 2, mais on change la valeur de  $h_x$  pour  $h_x = 1/100$  et on pose  $m = 2^{10}$ . On obtient les résultats présentés dans le Tableau 2.3 et l’Illustration 2.3.

Méthode	Espérance	Variance	TVaR $_{\kappa}(S(t))$					VaR $_{\kappa}(S(t))$				
			0	0.5	0.9	0.99	0.999	0	0.5	0.9	0.99	0.999
<i>Lower</i>	1.49	1.96	1.49	2.56	4.53	6.84	8.73	0.00	1.16	3.42	5.92	8.04
Simulation	1.49	1.95	1.49	2.56	4.50	6.82	8.85	0.00	1.17	3.42	5.90	8.03
<i>Upper</i>	1.46	1.90	1.46	2.52	4.46	6.75	8.64	0.00	1.14	3.37	5.83	7.93

$h_w = (t + 1)/m = 0.00293$ .

TABEAU 2.3 – Comparaison des résultats obtenus avec l’Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec des données simulées à l’aide de l’Algorithme 1.

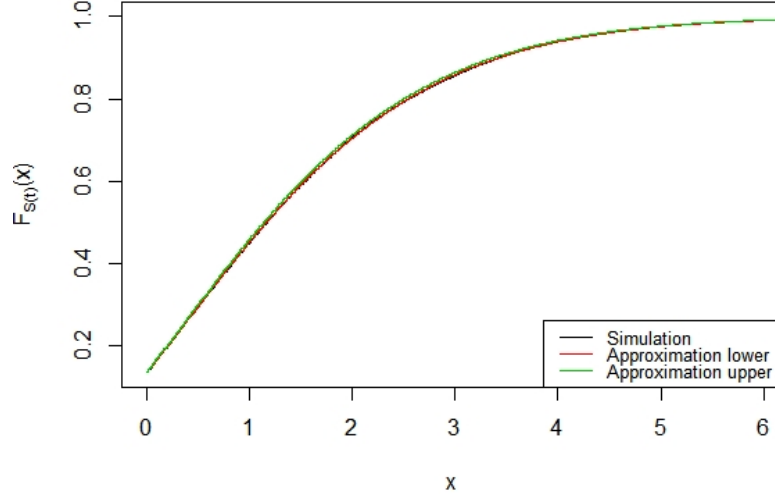


ILLUSTRATION 2.3 – Comparaison des fonctions de répartition calculées avec l’Algorithme 2, pour les méthodes de discrétisation *lower* et *upper*, avec la fonction de répartition empirique calculée par simulation à l’aide de l’Algorithme 1 pour  $m = 2^{10}$  et  $h_x = 1/100$ .

On voit dans le Tableau 2.3 et dans l’Illustration 2.3 que les deux méthodes d’approximation convergent, de même que les résultats de simulation, vers la véritable distribution de  $S(t)$ ,  $t = 2$ .

## 2.3 Mélanges d’Erlang

Pour cette section, on considère que la v.a. de sévérité  $X$  obéit à un mélange d’Erlang dénoté  $X_k \sim X \sim \text{MxErl}(\{(p_j, \beta), j \in \mathbb{N}\})$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . La TLS de la densité de probabilité de  $X$  est donnée par

$$\mathcal{L}_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \mathcal{L}_{D_j}(r), \quad (2.18)$$

où  $r \geq 0$ ,  $p_j \in [0, 1]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$  et  $\mathcal{L}_{D_j}(r)$  correspond à la TLS de la  $j$ -ième composante de la suite de v.a. positives et indépendantes  $\underline{D} = \{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  telle que  $D_j \sim \text{Erl}(j, \beta)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , de moyenne  $j/\beta$ .  $D_0$  correspond à une v.a. dégénérée telle que  $\mathbb{P}[D_0 = 0] = 1$  et  $\mathcal{L}_{D_0}(r) = 1$ ,  $r \geq 0$ . Si on définit une v.a.  $J_k \sim J$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , telle que la fmp correspond à  $\mathbb{P}[J = j] = p_j$  pour  $j \in \mathbb{N}$ , alors (2.18) devient

$$\mathcal{L}_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \mathcal{L}_B(r)^j = \mathcal{P}_J(\mathcal{L}_B(r)), \quad (2.19)$$

où  $r \geq 0$ ,  $\mathcal{P}_J(s)$  correspond à la fonction génératrice des probabilités (fgp) de  $J$  définie par

$$\mathcal{P}_J(s) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \quad s \in [0, 1]$$

et  $\mathcal{L}_B(r)$  est la TLS d'une loi exponentielle de moyenne  $1/\beta$ . On peut donc représenter  $\underline{X}$  comme  $\underline{X} = \{X_k = \sum_{j=1}^{J_k} B_{k,j}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  où les réalisations de  $\mathbf{B} = \{B_{k,j}\}_{k,j \in \mathbb{N}_+}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour les prochaines étapes, on utilisera plutôt une représentation vectorielle de  $\mathbf{B}$  défini comme suit :  $\underline{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ , où  $B_{1,1} = B_1$ ,  $B_{1,2} = B_2$ ,  $\dots$ ,  $B_{2,1} = B_{J_1+1}$ ,  $\dots$ . En combinant ce résultat avec (2), on peut exprimer  $S(t)$  ainsi :

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{J_k} B_{k,j} = \sum_{i=1}^{M(t)} B_i, \quad (2.20)$$

où  $M(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} J_k$  pour  $t \in \mathbb{N}_+$  avec  $M(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ . (2.20) permet de poser la Proposition 3 afin d'identifier la TLS de  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ .

**Proposition 3.** *La TLS de  $S(t)$ ,  $\mathcal{L}_{S(t)}$ , pour  $t \in \mathbb{N}_+$ , est donnée par*

$$\mathcal{L}_{S(t)}(r) = \mathcal{P}_{M(t)}(\mathcal{L}_B(r)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{M(t)}(j) \mathcal{L}_B(r)^j, \quad (2.21)$$

où  $f_{M(t)}(j) = \mathbb{P}[M(t) = j]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$ , et

$$\mathcal{P}_{M(t)}(s) = 1 - F_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \times (\mathcal{P}_{J|W=l}(s) \mathcal{P}_{N_{t-1}}(s)), \quad s \in [0, 1], \quad (2.22)$$

pour  $t \in \mathbb{N}_+$ .

**Preuve.** Il a déjà été défini que  $M(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} J_k$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ , et que  $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{T_k \leq t\}$ . Par conséquent, on a

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_k \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \in \mathbb{N}_+. \quad (2.23)$$

En conditionnant sur le premier évènement, on trouve

$$\begin{aligned} f_{M(t)}(0) &= \mathbb{P}(M(t) = 0) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(M(t) = 0 | W_1 > t) + \mathbb{P}(M(t) = 0 | W_1 \leq t)] \\ &= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \mathbb{P}(M_{t-l} = 0, J_1 = 0 | W_1 = l) \\ &= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) f_{J|W=l}(0) f_{M_{t-l}}(0), \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $\bar{F}_W$  correspond à la fonction de survie de  $W$ , c.-à-d.  $\bar{F}_W(t) = 1 - F_W(t)$ . Avec (2.23), on a un processus de renouvellement avec récompense similaire à celui présenté dans [Marceau](#)

(2009), à la différence que la variable de "récompense" ( $X$  dans Marceau (2009) et  $J$  dans le cas présent) peut prendre des valeurs nulles dans le cas présent. Il est donc possible d'adapter la Proposition 1 de ce dernier avec (2.24) pour trouver les valeurs de la fmp associées à  $M(t)$ . On obtient

$$f_{M(t)}(m) = \begin{cases} \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) f_{J|W=l}(0) f_{M_{t-l}}(0), & m = 0 \\ \sum_{l=1}^t \sum_{j=1}^m f_W(l) f_{J|W=l}(j) f_{M_{t-l}}(m-j), & m \in \mathbb{N}_+ \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $f_{M_0}(m) = \mathbb{1}_{\{m=0\}}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Il est possible de réécrire (2.25) sous la forme d'un produit de convolution permettant ainsi d'appliquer l'algorithme FFT :

$$f_{M(t)}(m) = \begin{cases} \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) f_{J|W=l}(0) f_{M_{t-l}}(0), & m = 0 \\ \sum_{l=1}^t f_W(l) \times f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m), & m \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $f * g(x) = \sum_{j=0}^x f(j) \times g(x-j)$  pour  $x \in \mathbb{N}$ . À partir de (2.26), il est aisé d'identifier la fgp de  $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M(t)}(s) &= f_{M(t)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^t f_W(l) \times f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m) s^m \\ &= \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \sum_{m=0}^{\infty} f_{J|W=l} * f_{M_{t-l}}(m) s^m, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$s \in [0, 1]$ . Comme les couples  $(X_k, W_k)$  sont séquentiellement indépendants pour  $k \in \mathbb{N}_+$ , il s'ensuit que les couples  $(J_k, W_k)$  sont également séquentiellement indépendants pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Or, sous l'hypothèse d'indépendance, la fgp d'un produit de convolution correspond au produit des fgs. Ainsi, (2.27) devient

$$\mathcal{P}_{M(t)}(s) = \bar{F}_W(t) + \sum_{l=1}^t f_W(l) \times \mathcal{P}_{J|W=l}(s) \times \mathcal{P}_{M_{t-l}}(s), \quad s \in [0, 1],$$

ce qui correspond à l'expression donnée en (2.22). Pour ce qui est de (2.21), il suffit de considérer que  $S(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} B_i$  et que les  $B_i$  sont indépendants entre eux de même que par rapport à  $M(t)$  pour  $i \in \mathbb{N}_+$  et pour  $t \in \mathbb{N}$ . Alors, le résultat découle naturellement.  $\square$

**Corollaire 2.**  $S(t) \sim \text{MxErl}(\{(f_{M(t)}(j), \beta), j \in \mathbb{N}_+\}, t \in \mathbb{N}_+)$ .

**Preuve.** Le résultat découle de la comparaison de (2.21) avec la représentation de la TLS d'un mélange d'Erlang donnée en (2.19).  $\square$

En utilisant le Corollaire 2, on peut appliquer l'Algorithme 2 pour calculer les valeurs de la fmp du processus  $M(t), t \geq 0$ , puis appliquer (2.28) pour calculer la fonction de répartition de  $S(t)$  :

$$F_{S(t)}(x) = F_{M(t)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_{M(t)}(j)H(x; j, \beta), \quad (2.28)$$

où  $H(x; j, \beta)$  correspond à la fonction de répartition d'une loi Erlang de paramètre de forme  $j$  et de paramètre d'échelle  $\beta$  telle que

$$H(x; j, \beta) = \frac{\beta^j x^{j-1}}{\Gamma(j)} e^{-\beta x}, \quad x, \beta > 0, \quad j \in \mathbb{N}_+. \quad (2.29)$$

L'Exemple 4 illustre l'application de cette approche.

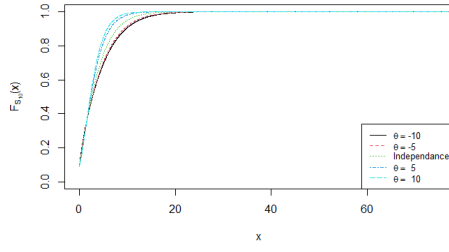
L'avantage du modèle proposé dans la Section 2.3 est qu'il est possible d'utiliser les propriétés des processus de renouvellement en temps discret alors que la v.a. de la sévérité est continue sans avoir à la discrétiser. Par ailleurs, comme il est expliqué dans Willmot and Lin (2011), il est possible d'approximer n'importe quelle distribution positive et continue avec un mélange d'Erlang, selon un certain niveau de précision.

**Exemple 4.** *On considère*

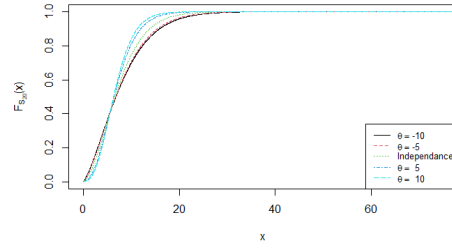
$$\begin{aligned} \beta &= 1, \\ F_J(j) &= 1 - (1 - q)^j, \quad j \in \mathbb{N}_+, \quad F_J(0) = 0, \\ F_W(w) &= 1 - e^{-(\xi w)^\tau}, \quad w \in \mathbb{R}^+, \\ F_{W,J}(w, j) &= C_\theta(F_W(w), F_J(j)), \quad (w, j) \in (\mathbb{N}_+)^2, \end{aligned}$$

où  $C_\theta$  désigne la copule de Frank avec  $\theta \in \{-10, -5, 5, 10\}$ . Le cas  $C_{\theta=0}$  désigne la copule d'indépendance (c.-à-d.  $C_0(u_1, u_2) = u_1 u_2$ ). On pose également  $q = 1/2$ ,  $\tau = 1.5$  et  $\xi = \Gamma(1 + 1/\tau)/5$ .

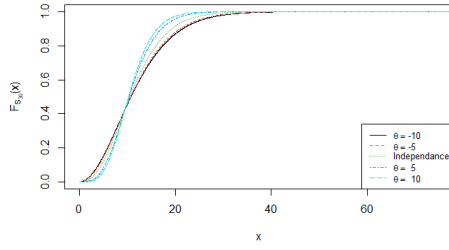
Avec le fichier `Melange_Erlang.R`, on applique l'Algorithme 2 avec  $m = 10$  pour obtenir les Illustrations 2.4 et 2.5. La première compare des valeurs de la fonction de répartition  $F_{S(t)}^{(\theta)}(x)$  pour  $\theta = -10, -5, 0, 5, 10$ , avec  $t = 10, 20, 30, 40, 50$ , tandis que la seconde présente la fonction  $F_{S(t)}^{(\theta)}(x)/t$ , pour  $t = 10, 20, 30, 40, 50, 1000$ . Cette dernière sera intéressante pour l'étude du comportement asymptotique de  $S(t)$  au Chapitre 3.



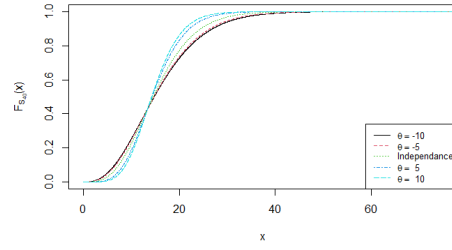
(a)  $t = 10$



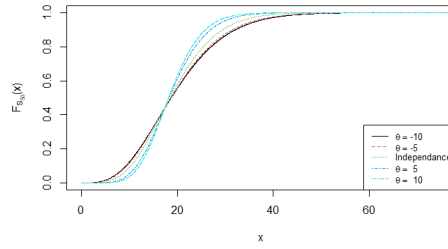
(b)  $t = 20$



(c)  $t = 30$

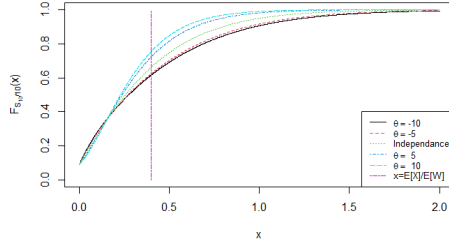


(d)  $t = 40$

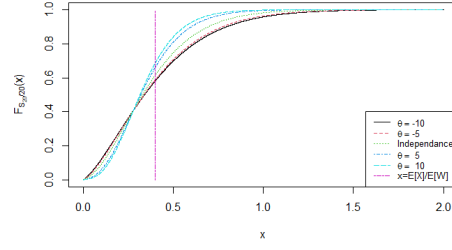


(e)  $t = 50$

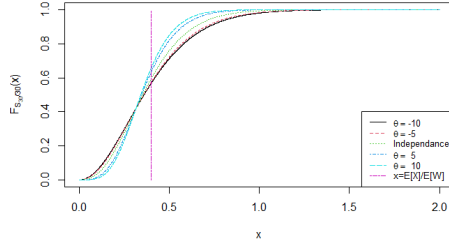
ILLUSTRATION 2.4 – Comparaison de la fonction de répartition de  $S(t)$ , pour différentes valeurs de  $t$  lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre  $\theta = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant.



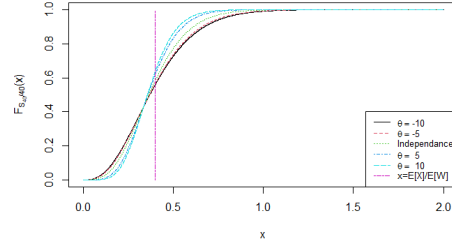
(a)  $t = 10$



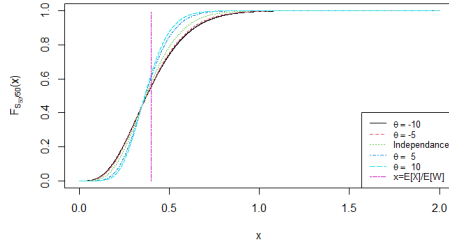
(b)  $t = 20$



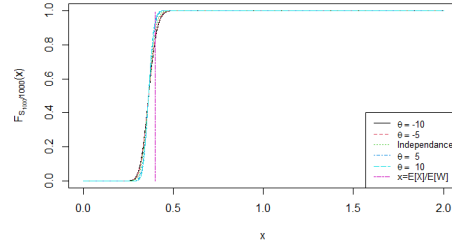
(c)  $t = 30$



(d)  $t = 40$



(e)  $t = 50$



(f)  $t = 1000$

ILLUSTRATION 2.5 – Comparaison de la fonction  $F_{S(t)}^{(\theta)}(x)/t$ , pour différentes valeurs de  $t$  lorsque la copule utilisée est celle de Frank de paramètre  $\theta = -10, -5, 5, 10$ . Ces résultats sont également comparés avec le cas indépendant.

Pour ce qui est du calcul de l'espérance de  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}_+$ , on a

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{\xi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) = 5,$$

$$\mathbb{E}[J] = 1/q = 2,$$

$$\mathbb{E}[B] = 1/\beta = 1.$$

Comme  $C_j$  est indépendant de  $J$ , peu importe la valeur de  $\theta$ ,  $j \in \mathbb{N}_+$ , alors on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^J C_j\right] = \mathbb{E}_J\left[\sum_{j=1}^J \mathbb{E}[C_j | J = n]\right] \stackrel{\text{i.d.}}{=} \mathbb{E}_J[J \times \mathbb{E}[B | J = n]] \stackrel{\text{ind}}{=} E[J] \times \mathbb{E}[B] = 2 \times 1 = 2.$$

Dans le Tableau 2.4, on présente les valeurs de l'espérance de  $S^{(\theta)}(t)/t$  pour  $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$  et pour  $\theta \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$ .

$t$	$h_w$	$\mathbb{E}[S^{(-10)}(t)/t]$	$\mathbb{E}[S^{(-5)}(t)/t]$	$\mathbb{E}[S^{(0)}(t)/t]$	$\mathbb{E}[S^{(5)}(t)/t]$	$\mathbb{E}[S^{(10)}(t)/t]$
10	0.0107	0.4028	0.3899	0.3452	0.2944	0.2746
20	0.0205	0.4010	0.3944	0.3722	0.3472	0.3376
30	0.0303	0.3997	0.3953	0.3805	0.3639	0.3575
40	0.0400	0.3994	0.3961	0.3850	0.3725	0.3677
50	0.0498	0.3984	0.3958	0.3870	0.3770	0.3732
1000	0.9775	0.3640	0.3639	0.3635	0.3630	0.3628

TABLEAU 2.4 – Valeurs de l'espérance de  $S^{(\theta)}(t)/t$  pour  $\theta \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$  et pour  $t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ . Le cas  $\theta = 0$  désigne le scénario où il y a indépendance entre  $X$  et  $W$ . La constante  $h_w$  représente le pas de discrétisation de la v.a.  $W$ .

Comme on peut le voir dans l'Illustration 2.5 et dans le Tableau 2.4, lorsque la valeur de  $t$  augmente, on se rapproche du comportement asymptotique des processus de renouvellement avec récompense qui est présenté dans [Gallager \(2013\)](#) et dans [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#). À  $t = 1000$ , on observe une convergence de  $S(t)/t$ . Ce sujet est abordé en détail au Chapitre 3.

**Remarque 3.** Dans le Tableau 2.4, on remarque que le pas de discrétisation  $h_w$  est très près de 1 avec  $t = 1000$ . Ceci est cohérent puisque, pour cet exemple,  $m = 2^{10} = 1024$ . Ainsi  $h_w = 1001/1024 = 0.9775$ . Pour conserver un bon niveau de précision, il faudrait augmenter la valeur de  $m$ . Cependant, comme il est mentionné à la Section 2.2.3, cela peut entraîner des problèmes d'allocation de la mémoire de calcul (RAM) puisqu'il faudra réaliser des opérations sur des matrices de taille  $m \times m$ .



## Chapitre 3

# Propriétés asymptotiques

Dans la littérature des processus de renouvellement (voir p. ex. [Gallager \(2013\)](#) ou [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#)), on s'intéresse au comportement asymptotique de ceux-ci en lien avec la loi des grands nombres. Ces auteurs se sont d'ailleurs penchés sur le cas particulier des processus de renouvellement avec récompense. Le présent chapitre vise donc à démontrer le Théorème 3 en ajoutant des précisions par rapport au lien de dépendance existant entre les composantes aléatoires du modèle.

**Théorème 1. *Loi forte des grands nombres.*** Soit une séquence de v.a. i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$  de moyenne  $\mu$ . La somme partielle  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu, \text{ avec probabilité } 1.$$

**Preuve.** Voir le Théorème 5.2.2 (page 220) de [Gallager \(2013\)](#). □

**Théorème 2. *Loi forte pour les processus de renouvellement.*** Soit un processus de renouvellement  $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  comme défini en (1). Si  $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[W]}, \text{ avec probabilité } 1. \quad (3.1)$$

**Preuve.** Voir p. ex. Théorème 10.2(1) (page 417) de [Grimmett and Stirzaker \(2001\)](#) ou Théorème 5.3.1 (page 222) de [Gallager \(2013\)](#). □

**Lemme 2.** Soit le processus aléatoire  $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  défini en (2). Si l'espérance de  $X$  existe, peu importe qu'il y ait ou non un lien de dépendance entre les v.a.  $X$  et  $W$ , alors la relation ci-dessous est vraie.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}[X], \quad N(t) \in \mathbb{N}_+. \quad (3.2)$$

**Preuve.** On sait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$ . Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k.$$

En appliquant le Théorème 1, on obtient directement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}[X].$$

□

**Théorème 3.** Soit le processus  $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{N}_+}$  défini en (2). En supposant que  $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$  et que  $\mathbb{E}[X] < \infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \quad (3.3)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]}. \quad (3.4)$$

**Preuve.** Pour démontrer (3.3), on commence par réarranger  $S(t)/t$  comme suit :

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{N}_+. \quad (3.5)$$

Avec le théorème d'arithmétique des limites (voir, p.ex., Théorème 1.5.16 (page 90) de Hubbard and Hubbard (2015)), (3.1), (3.2) et (3.5) on trouve aisément

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \mathbb{E}[X] \times \frac{1}{\mathbb{E}[W]}.$$

Par la suite, on démontre (3.4) comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{S(t)}{t} \right] = \mathbb{E} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]} \right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]}.$$

□

Si on revient à l'Exemple 4, on observe bien dans l'Illustration 2.5f et le Tableau 2.4 la convergence décrite dans Théorème 3, et ce, peu importe le niveau de dépendance unissant les suites de v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$ . Par contre, la distribution de  $\frac{S^{(\theta)}(t)}{t}$  est influencée par  $\theta$ . En effet, on observe que

$$\frac{S^{(\theta)}(t)}{t} \preceq_{\text{ds}} \frac{S^{(\theta')}(t)}{t}, \quad t > 0,$$

quand  $\theta' \leq \theta$ .

## Chapitre 4

# Ordonnancement stochastique des bornes d'approximation

Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{W}^{(u, h_w)} = \{W_k^{(u, h_w)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{W}^{(l, h_w)} = \{W_k^{(l, h_w)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  correspondant respectivement à la version discrétisée de la suite de v.a.  $\underline{W}$  selon les méthodes *upper* et *lower*, pour un pas de discrétisation  $h_w > 0$ . Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{X}^{(u, h_x)} = \{X_k^{(u, h_x)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{X}^{(l, h_x)} = \{X_k^{(l, h_x)}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  correspondant aux versions discrétisées de la suite de v.a.  $\underline{X}$  selon les méthodes *upper* et *lower*, pour un pas de discrétisation  $h_x > 0$ , égal ou non à  $h_w$ . Afin de condenser les expressions, posons  $\eta \in \{l, u\}$ , où  $\eta$  désigne la borne (*lower* ou *upper*) utilisée. Posons également  $\eta^c$  comme étant le complément de  $\eta$ , i.e.

$$\eta^c = \begin{cases} u, & \eta = l, \\ l, & \eta = u. \end{cases}$$

On définit également les suites de v.a.  $\underline{T}^{(\eta, h_w)} = \{T_k^{(\eta, h_w)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\eta \in \{l, u\}$ , telles que  $T_0^{(\eta, h_w)} = 0$  et  $T_k^{(\eta, h_w)} = \sum_{i=1}^k W_i^{(\eta, h_w)}$ , pour  $\eta \in \{u, l\}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ .

Conformément à [Mercier \(2007\)](#), on considère que la version discrétisée d'une v.a. selon la méthode *lower* (*upper*) correspond à sa borne inférieure (supérieure). Toutefois, lors du calcul des bornes d'un accroissement du processus aléatoire  $\mathbf{N}$ , on observe une inversion par rapport aux bornes de la suite de v.a.  $\underline{W}$ . L'Exemple 5 illustre comment la méthode de discrétisation de  $\underline{W}$  affecte les bornes de la v.a.  $N(t)$ ,  $t > 0$ .

**Exemple 5.** Soit  $W_k \sim W \sim \text{Exp}(1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . On discrétise  $\underline{W}$  de manière à produire des réalisations de  $\underline{W}^{(l, h_w)}$  et de  $\underline{W}^{(u, h_w)}$ , avec  $h_w = 1/5$ . En posant  $t = 5$ , alors la v.a.  $N(t)$  suit une loi de Poisson avec une espérance de 5. L'Illustration 4.1 compare la fonction de

*répartition approximée selon les deux méthodes de discrétisation avec la véritable fonction de répartition d'une loi de Poisson.*

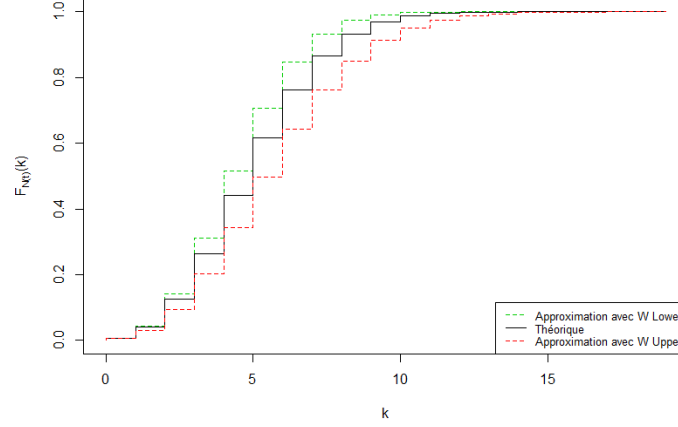


ILLUSTRATION 4.1 – Comparaison de la fonction de répartition théorique de la v.a.  $N(t)$ , pour  $t = 5$ , avec les approximations de celle-ci calculées avec les bornes  $\underline{W}^{(l,h_w)}$  et  $\underline{W}^{(u,h_w)}$ .

Afin de bien définir les bornes de la fonction de répartition de la v.a.  $S(t)$ , on désire démontrer pourquoi cette inversion des bornes se produit. Pour y arriver, on utilise l'ordre en dominance stochastique (voir p.ex. Denuit et al. (2006), Shaked and Shanthikumar (2007) ou Marceau (2013)).

**Définition 5.** Soit les v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X'] < \infty$ . Alors  $X$  est inférieure à  $X'$  sous l'ordre en dominance stochastique, notée  $X \preceq_{sd} X'$ , si  $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$  ou, de façon équivalente, si  $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq 1 - F_{X'}(x) = \bar{F}_{X'}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Dans un premier temps, il faut être en mesure d'ordonner stochastiquement les bornes des suites de v.a.  $\underline{X}$ ,  $\underline{W}$  et  $\underline{T}$ . Pour se faire, on utilise la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.** Soit les v.a.  $X^{(u,h')}$ ,  $X^{(u,h)}$ ,  $X$ ,  $X^{(l,h)}$  et  $X^{(l,h')}$  définies précédemment. Alors, on a

$$X^{(u,h')} \preceq_{sd} X^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} X^{(l,h)} \preceq_{sd} X^{(l,h')}, \quad (4.1)$$

pour  $0 < h \leq h'$ .

**Preuve.** Voir la Proposition 7.24 (p.256) de Marceau (2013). □

De la même manière que pour la v.a.  $X$ , la Proposition 4, permet d'ordonner stochastiquement les bornes de la v.a.  $W$  comme suit :

$$W_k^{(u,h_w)} \preceq_{sd} W_k \preceq_{sd} W_k^{(l,h_w)}, \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (4.2)$$

Pour ce qui est de l'ordonnancement stochastique des bornes de la suite de v.a.  $\underline{T}$ , il suffit de considérer (3) et d'utiliser le théorème qui suit.

**Théorème 4. *Propriété de fermeture sous la convolution :*** Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{W} = \{W_k\}_k^n$  et  $\underline{W}' = \{W'_k\}_k^n$  telles que  $W_k \preceq_{\text{sd}} W'_k$ , pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , alors

$$\sum_{i=1}^n W_i \preceq_{\text{sd}} \sum_{i=1}^n W'_i.$$

**Preuve.** Voir la Proposition 3.3.17 (page 114) de Denuit et al. (2006).  $\square$

Considérant (3), (4.2) et le Théorème 4, alors

$$T_k^{(u, h_w)} \preceq_{\text{sd}} T_k \preceq_{\text{sd}} T_k^{(l, h_w)}, \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (4.3)$$

D'un point de vue vectoriel, on ordonne stochastiquement les bornes des vecteurs de v.a.  $\underline{W}$ ,  $\underline{X}$  et  $\underline{T}$  grâce au théorème qui suit.

**Théorème 5.** Soit deux vecteurs de v.a.  $\underline{T} = \{T_k\}_{k=1}^n$  et  $\underline{T}' = \{T'_k\}_{k=1}^n$ . Si

$$\begin{aligned} T_1 &\preceq_{\text{sd}} T'_1, \\ [T_2|T_1 = t_1] &\preceq_{\text{sd}} [T'_2|T'_1 = t'_1], \\ &\vdots \\ [T_n|T_1 = t_1, \dots, T_{n-1} = t_{n-1}] &\preceq_{\text{sd}} [T'_n|T'_1 = t'_1, \dots, T'_{n-1} = t'_{n-1}], \end{aligned}$$

avec  $t_k \leq t'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , alors

$$\underline{T} \preceq_{\text{sd}} \underline{T}'.$$

**Preuve.** Voir le Théorème 6.B.3 (page 268) de Shaked and Shanthikumar (2007).  $\square$

Avec le Théorème 5, on établit que

$$\underline{T}^{(u, h_w)} \preceq_{\text{sd}} \underline{T} \preceq_{\text{sd}} \underline{T}^{(l, h_w)}. \quad (4.4)$$

Maintenant que les composantes des processus aléatoires  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{S}$  sont ordonnées stochastiquement, on désire faire de même pour ces deux processus. Afin de déterminer le lien entre la v.a.  $N(t), t > 0$ , et la suite de v.a.  $\underline{T}$ , on utilise la relation suivante :

$$F_{N(t)}(k) = 1 - F_{T_{k+1}}(t) = \bar{F}_{T_{k+1}}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t > 0 \quad (4.5)$$

Or, considérant (4.3) et la Définition 5, on a

$$\bar{F}_{T_{k+1}^{(u, h_w)}}(t) \leq \bar{F}_{T_{k+1}}(t) \leq \bar{F}_{T_{k+1}^{(l, h_w)}}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t > 0. \quad (4.6)$$

Soit  $N^{(l,h_w)}(t)$  et  $N^{(u,h_w)}(t)$ , les v.a. correspondant aux bornes de la v.a.  $N(t)$ ,  $t > 0$  lorsque l'on applique respectivement les méthodes de discrétisation *lower* et *upper* sur la suite de v.a.  $\underline{W}$  avec un pas de discrétisation  $h_w > 0$ . En combinant (4.4), (4.5) et (4.6) on déduit

$$F_{N^{(u,h_w)}(t)}(k) \leq F_{N(t)}(k) \leq F_{N^{(l,h_w)}(t)}(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t > 0. \quad (4.7)$$

Avec la Définition 5 et (4.7), on trouve

$$N^{(l,h_w)}(t) \preceq_{\text{sd}} N(t) \preceq_{\text{sd}} N^{(u,h_w)}(t), \quad t > 0, \quad (4.8)$$

ce qui nous amène à considérer le processus  $\mathbf{N}$  dans son ensemble. Pour pouvoir l'ordonner, il suffit de considérer le théorème suivant :

**Théorème 6.** *Soit deux processus aléatoires en temps discret  $\mathbf{N} = \{N(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{N}' = \{N'(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ . Si*

$$N(0) \preceq_{\text{sd}} N'(0)$$

*et si*

$$[N(t) | N(h_w) = n_1, \dots, N(t - h_w) = n_{t-1}] \preceq_{\text{sd}} [N'(t) | N'(h_w) = n'_1, \dots, N'(t - h_w) = n'_{t-1}],$$

*pour  $n_j \leq n'_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$  et  $\forall t \in \mathbb{N}_+$ , alors*

$$\mathbf{N} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{N}'.$$

**Preuve.** Voir le Théorème 6.B.31 (page 282) de Shaked and Shanthikumar (2007).  $\square$

Avec le Théorème 6 et le résultat (4.8), on obtient

$$\mathbf{N}^{(l,h_w)} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{N} \preceq_{\text{sd}} \mathbf{N}^{(u,h_w)}. \quad (4.9)$$

Grâce à (4.9), on confirme ce que l'on a observé dans l'Exemple 5. En effet, la borne inférieure du processus aléatoire  $\mathbf{N}$  correspond à l'approximation réalisée avec la méthode de discrétisation *upper* de la suite de v.a.  $\underline{W}$ , tandis que la borne supérieure correspond à l'approximation réalisée avec la méthode *lower*.

En connaissance de ce résultat, poussons la réflexion plus loin en recommandant une approche de discrétisation des suites de v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$  afin d'établir des bornes cohérentes pour le processus aléatoire  $\mathbf{S}$ . Pour y arriver, le théorème ci-dessous est à considérer.

**Théorème 7. Propriété de fermeture sous la composition :** *Soit les suites de v.a. i.i.d.  $\underline{X} = \{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et  $\underline{X}' = \{X'_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  telles que  $X_k \preceq_{\text{sd}} X'_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . On définit également les v.a. discrètes  $N$  et  $N'$  telles que  $N \preceq_{\text{sd}} N'$ . Finalement, on pose  $S = \sum_{k=1}^N X_k$  et  $S' = \sum_{k=1}^{N'} X'_k$ , où toutes les v.a. sont **indépendantes**. Alors  $S \preceq_{\text{sd}} S'$ .*

**Preuve.** Voir la Proposition 3.3.31 (page 121) de [Denuit et al. \(2006\)](#).  $\square$

**Proposition 5.** Soit  $\mathbf{S}^{(l,h_w,h_x)} = \{S^{(l,h_w,h_x)}(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{S}^{(u,h_w,h_x)} = \{S^{(u,h_w,h_x)}(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ , les bornes inférieures ( $l$ ) et supérieures ( $u$ ) du processus aléatoire  $\mathbf{S}$ , obtenues par discrétisation des v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$ , avec des pas de discrétisation respectifs de  $h_w > 0$  et  $h_x > 0$ . Si on pose l'hypothèse d'indépendance et que l'on définit les bornes inférieures et supérieures de la v.a.  $S(t), t > 0$  ainsi

$$S^{(l,h_w,h_x)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(u,h_w)}(t)} X_k^{(l,h_x)} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(l,h_x)} \mathbb{1}_{\{T_k^{(u,h_w)} \leq t\}}$$

et

$$S^{(u,h_w,h_x)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(l,h_w)}(t)} X_k^{(u,h_x)} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(u,h_x)} \mathbb{1}_{\{T_k^{(l,h_w)} \leq t\}},$$

alors

$$S^{(u,h_w,h_x)}(t) \preceq_{\text{sd}} S(t) \preceq_{\text{sd}} S^{(l,h_w,h_x)}(t).$$

**Preuve.** Étant donné les inégalités (4.1) et (4.9), il suffit d'appliquer le Théorème 7 pour démontrer ce résultat.  $\square$

Au regard des résultats obtenus dans le présent travail, la Proposition 5 semble valide dans le cas où les v.a.  $X$  et  $W$  sont dépendantes. Voici le raisonnement qui porte à croire que cette hypothèse est vraie<sup>1</sup> :

**Conjecture 1.** On a  $S^{(\eta,h_w,h_x)}(0) = S(0) = 0$ , pour  $\eta \in \{l, u\}$ . Donc

$$S^{(u,h_w,h_x)}(0) \preceq_{\text{sd}} S(0) \preceq_{\text{sd}} S^{(l,h_w,h_x)}(0).$$

Pour  $t = h_w$ , comme  $W^{(l,h_w)} \in \{h_w, 2h_w, \dots\}$  et  $W^{(u,h_w)} \in \{0, h_w, 2h_w, \dots\}$ , alors  $T^{(l,h_w)} \in \{h_w, 2h_w, \dots\}$  et  $T^{(u,h_w)} \in \{0, h_w, 2h_w, \dots\}$ . Donc,

$$S^{(l,h_w,h_x)}(h_w) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(l,h_x)} \mathbb{1}_{\{T_k^{(u,h_w)} \leq h_w\}} \quad (4.10)$$

$$S(h_w) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{T_k \leq h_w\}} \quad (4.11)$$

$$S^{(u,h_w,h_x)}(h_w) = X_1^{(u,h_x)} \mathbb{1}_{\{T_1^{(l,h_w)} \leq h_w\}}, \quad (4.12)$$

---

1. À ce jour, nous n'avons pas été en mesure de démontrer ce résultat mathématiquement. Mes directeurs et moi avons donc convenu de laisser les lignes qui suivent dans l'état actuel. Leur validation fera l'objet de travaux futurs.

pour  $h_w > 0$ . Ainsi, avec (4.12), on ne peut avoir plus qu'un événement puisque la plus petite valeur que peut prendre  $T_1^{(l, h_w)}$  est  $h_w$ . Conséquemment,  $S^{(u, h_w, h_x)}(h_w) \in \{X_1^{(u, h_x)}, 0\}$ . Dans le cas de (4.10), comme  $T_k^{(u, h_w)} = 0$  si  $T_k \in [0, h_w[$ , alors on s'attend à ce que la somme (4.10) comprenne plus d'événements que celle en (4.11). Ces constats sont appuyés par (4.3) et permettent de déduire la relation suivante :

$$(S^{(u, h_w, h_x)}(h_w)|\underline{X}^{(u, h_x)} = \underline{x}) \preceq_{\text{sd}} (S(h_w)|\underline{X} = \underline{x}) \preceq_{\text{sd}} (S^{(l, h_w, h_x)}(h_w)|\underline{X}^{(l, h_x)} = \underline{x}).$$

D'autre part, comme  $X_k^{(u, h_x)} \preceq_{\text{sd}} X_k \preceq_{\text{sd}} X_k^{(l, h_x)}$ , alors la relation suivante semble logique

$$S^{(u, h_w, h_x)}(h_w) \preceq_{\text{sd}} S(h_w) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h_w, h_x)}(h_w). \quad (4.13)$$

Cependant, qu'en est-il de la dépendance ? Cette question est abordée sous l'angle de quatre scénarios.

Comme la fonction de répartition conjointe des couples de v.a.  $(W_k, X_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , appartient à la classe de Fréchet<sup>2</sup> (i.e.  $F_{W, X} \in \mathcal{CF}(F_W, F_X)$ ), alors tout modèle de dépendance est borné par le cas comonotone (borne supérieure de la classe) et le cas anti-monotone (borne inférieure).

1. La copule  $C$  modélisant la dépendance entre  $W_k$  et  $X_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ , correspond à la borne supérieure de Fréchet (cas comonotone) définie comme suit :

$$F^+(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Dans cette situation, les suites de v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$  ont tendance à fluctuer dans le même sens puisque leur corrélation est positive. De ce fait, on obtient une corrélation négative entre les suites de v.a.  $\underline{X}$  et  $\{\mathbb{1}\{T_k \leq h_w\}\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ . Cela signifie que si la suite de v.a.  $\underline{W}$  prend de petites valeurs, alors la v.a.  $N(h_w)$  risque d'être grande, mais on s'attend à ce que la suite de v.a.  $\underline{X}$  prenne de petites valeurs.

- a) Dans ce scénario où la suite de v.a.  $\underline{W}$  prend de petites valeurs, on s'attend à ce que (4.10) voit un grand nombre d'événements comparativement à (4.12) qui est limité à un seul en raison de la méthode de discrétisation et de la longueur de l'accroissement du processus aléatoire. De plus, la relation (4.1) vient accentuer cet écart puisque la copule  $C^+$  est la même pour (4.10), (4.11) et (4.12). Conséquemment, ce scénario appuie l'intuition de (4.13).
- b) Supposons maintenant que la suite de v.a.  $\underline{W}$  prenne de grandes valeurs. Dans ce scénario, il est plus probable que (4.12) prenne comme valeur zéro puisque  $\mathbb{P}\left(\mathbb{1}\{T_k^{(l, h_w)}\} \leq h_w\right)$  est plus petite que dans le cas de l'indépendance. Du côté de (4.10), la probabilité que la v.a.  $S^{(l, h_w, h_x)}(h_w)$  prenne comme valeur zéro est moins élevée que pour (4.12) étant donné la relation (4.2). Bien que le nombre d'événements attendus soit faible étant donnée les grandes valeurs de  $\underline{W}$ , on s'attend à ce

---

2. Voir Joe (1997).



que l'amplitude de ces événements soit plus élevée du fait de la comonotonie. Par ailleurs l'écart entre (4.10) et (4.12) est amplifié du fait de (4.1). Conséquemment, ce deuxième scénario appuie également l'intuition de (4.13).

2. La copule  $C$  modélisant la dépendance entre  $W_k$  et  $X_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ , correspond à la borne inférieure de Fréchet (anti-monotone) définie comme suit :

$$F^-(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Sous cette hypothèse de structure de dépendance, les suites de v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$  ont tendance à fluctuer dans le sens opposé puisque leur corrélation est négative. Il en résulte une corrélation positive entre la v.a.  $N(h_W)$  et la suite de v.a.  $\underline{X}$ .

- a) Reprenons l'exemple où la suite de v.a.  $\underline{W}$  prend de petites valeurs. On a alors que le modèle de dépendance vient gonfler les valeurs probables que peut prendre (4.10), autant du point de vu de la fréquence que de la sévérité. En contrepartie, (4.12) est toujours limité à un seul événement. On en déduit que, sous ce scénario, l'écart entre les bornes est accentué par la structure de dépendance, ce qui appuie l'hypothèse (4.13).
- b) Si  $\underline{W}$  prend de grandes valeurs, alors les déductions sont similaires au scénario 1b, à la différence que l'amplitude des événements est affaiblie du fait de l'anti-monotonie. Malgré tout, même si l'écart entre les bornes est amoindri, il n'en demeure pas moins présent à cause de (4.1) et de (4.2). Ce dernier scénario est donc également conforme à l'intuition (4.13).

Donc, ces quatre scénarios permettent de généraliser pour toute structure de dépendance puisqu'elles sont toutes incluses dans l'espace de Fréchet  $\mathcal{CF}(F_W, F_X)$ . Conséquemment, comme ces scénarios appuient l'hypothèse (4.13), on déduit qu'elle est vraie peu importe la structure de dépendance.

Pour  $t > h_w$ , sans perte de généralité, on peut considérer la même logique que pour  $t = h_w$  afin de poser

$$S^{(u, h_w, h_x)}(t) \preceq_{\text{sd}} S(t) \preceq_{\text{sd}} S^{(l, h_w, h_x)}(t), \quad t \geq 0,$$

ce qui conduit à la conjecture.

En somme, il importe de bien définir la méthode de discrétisation à utiliser pour les suites de v.a.  $\underline{W}$  et  $\underline{X}$  afin de s'assurer que les approximations *lower* et *upper* puissent borner de façon adéquate la v.a.  $S(t)$ ,  $t > 0$ .

## Chapitre 5

# Ordonnancement stochastique selon la dépendance

Dans les Exemples 1 et 4, on observe graphiquement que l'on pourrait ordonner  $S(t)$  selon le niveau de dépendance unissant les v.a.  $X_k$  et  $W_k$ , pour  $t \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ce chapitre, vise donc à démontrer mathématiquement cette observation.

Soit la suite des couples de v.a. i.i.d.  $\{(W_k, X_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec fonction de répartition conjointe  $F_{W,X}(w, x)$  appartenant à la classe de Fréchet  $\mathcal{CF}(F_W, F_X)$  dont les bornes sont définies en (4.14) et (4.15). Comme il est expliqué dans Joe (1997), peu importe la copule  $C$  utilisée et sa paramétrisation, la fonction de répartition conjointe  $F_{W,X}(w, x) = C_\theta(F_W(w), F_X(x))$  est toujours bornée par ces deux fonctions.

Afin de distinguer la structure de dépendance utilisée, désignons  $(\underline{W}, \underline{X}) = \{(W_k^-, X_k^-)\}_{k \in \mathbb{N}}$  comme étant la suite des couples de v.a.  $\{(W_k, X_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  lorsque la structure de dépendance utilisée est l'anti-monotonie. En ce qui a trait au cas de la comonotonie, on désigne la suite des couples de v.a. comme suit :  $(\underline{W}^+, \underline{X}^+) = \{(X_k^+, W_k^+)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . De plus, posons  $T_k^+ = \sum_{j=1}^k W_j^+$  et  $T_k^- = \sum_{j=1}^k W_j^-$ , avec  $T_0^+ = T_0^- = 0$ . Enfin, désignons les processus de renouvellement avec récompense  $\mathbf{S}^+ = \{S^+(t)\}_{t \geq 0}$  et  $\mathbf{S}^- = \{S^-(t)\}_{t \geq 0}$  tels que

$$S^+(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^+ \mathbb{1}\{T_k^+ \leq t\} \quad \text{et} \quad S^-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^- \mathbb{1}\{T_k^- \leq t\}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

avec  $S^+(0) = S^-(0) = 0$ .

Afin de pouvoir ordonner la v.a.  $S(t)$ ,  $t > 0$ , selon sa structure de dépendance, il faut utiliser l'ordre en dominance supermodulaire présentée dans Shaked and Shanthikumar (2007) et Denuit et al. (2006).

**Définition 6.** Une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **supermodulaire** si, pour tout vecteur  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ , elle satisfait

$$\begin{aligned} &g(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\geq g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n), \end{aligned}$$

pour  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $\epsilon, \delta > 0$ .

En d'autres mots, une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , différentiable deux fois, est supermodulaire si et seulement si

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0,$$

$1 \leq i < j \leq n$ .

**Définition 7.** Soit deux vecteurs de variables aléatoires  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  de longueur  $n$ . Alors  $\underline{X}$  est dit plus petit que  $\underline{Y}$  selon **l'ordre supermodulaire** (*sm*), noté  $\underline{X} \preceq_{\text{sm}} \underline{Y}$ , si

$$\mathbb{E}[g(\underline{X})] \leq \mathbb{E}[g(\underline{Y})]$$

pour toute fonction supermodulaire  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un autre type d'ordre stochastique est très utile et intimement lié à l'ordre *sm*. Il s'agit de l'ordre PQD (*Positive Quadrant Dependent order*). Celui-ci est également abordé dans [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#).

**Définition 8.** Soit les couples de v.a.  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$ , définis dans  $\mathbb{R}^2$ , et ayant les fonctions de répartition conjointes respectives  $F_{\underline{X}}$  et  $F_{\underline{Y}}$ . Supposons que  $X_i$  et  $Y_i$  ont la même distribution marginale pour  $i = 1, 2$ . Si

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{Y}}(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

alors le couple  $(X_1, X_2)$  est dit plus petit que  $(Y_1, Y_2)$  selon **l'ordre PQD**, désigné  $(X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (Y_1, Y_2)$ .

**Corollaire 3.** Soit le couple de v.a.  $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$  dont la fonction de répartition conjointe appartient à la classe de Fréchet ( $F \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ ). Posons  $F^-$  comme étant la borne inférieure de la classe de Fréchet définie en (4.15). Posons également  $F^+$  comme étant la borne supérieure de cette classe décrite en (4.14). Pour n'importe quelle fonction de répartition  $F \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ , on a

$$F^-(x_1, x_2) \leq F(x_1, x_2) \leq F^+(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$(X_1^-, X_2^-) \preceq_{\text{PQD}} (X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (X_1^+, X_2^+).$$

**Preuve.** Avec la définition de la classe de Fréchet et la Définition 8, ce résultat découle naturellement.  $\square$

Ce résultat permet d'introduire la relation qui existe entre l'ordre supermodulaire et PQD.

**Lemme 3.** *Soit les couples de v.a.  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$ , définis dans  $\mathbb{R}^2$ , et ayant les fonctions de répartition conjointes respectives  $F_{\underline{X}}$  et  $F_{\underline{Y}}$ . Avec  $F_{X_1} = F_{Y_1}$  et  $F_{X_2} = F_{Y_2}$ , on a*

$$(X_1, X_2) \preceq_{\text{sm}} (Y_1, Y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (X_1, X_2) \preceq_{\text{PQD}} (Y_1, Y_2).$$

**Preuve.** Voir (9.A.18) dans le Chapitre 9.A.4 (page 395) de Shaked and Shanthikumar (2007).  $\square$

Le Corollaire 3 et le Lemme 3 permettent ainsi d'ordonner les éléments de la classe de Fréchet des couples de v.a.  $(W_k, X_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , selon l'ordre sm, comme suit :

$$(W_k^-, X_k^-) \preceq_{\text{sm}} (W_k, X_k) \preceq_{\text{sm}} (W_k^+, X_k^+), \quad (5.2)$$

pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ce résultat implique que les bornes de la classe de Fréchet correspondent également aux bornes de l'ordre sm. Par la suite, pour considérer l'ensemble de la suite des paires de v.a.  $(\underline{W}, \underline{X}) = \{(W_k, X_k)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ , il faut utiliser le théorème qui suit.

**Théorème 8. Propriété de fermeture sous la conjonction :** *Soit la suite de vecteurs indépendants de v.a.  $[\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n]$  où la longueur du vecteur  $\underline{X}_k$  est de  $m_k$ . Soit une autre suite de vecteurs indépendants de v.a.  $[\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_n]$  où la longueur du vecteur  $\underline{Y}_k$  est également de  $m_k \in \mathbb{N}_+$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Si  $\underline{X}_k \preceq_{\text{sm}} \underline{Y}_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , alors*

$$[\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n] \preceq_{\text{sm}} [\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_n].$$

**Preuve.** Voir le Théorème 9.A.9 (page 395) de Shaked and Shanthikumar (2007).  $\square$

Considérant que les couples  $(X_k, W_k)$  sont séquentiellement indépendants pour  $k \in \mathbb{N}_+$ , de même que pour leurs bornes, et considérant (5.2), alors le Théorème 8 permet de poser l'inégalité suivante :

$$(\underline{W}^-, \underline{X}^-) \preceq_{\text{sm}} (\underline{W}, \underline{X}) \preceq_{\text{sm}} (\underline{W}^+, \underline{X}^+). \quad (5.3)$$

Il est désormais possible d'établir le lien qui existe entre l'ordonnancement de la suite de paires de v.a.  $(\underline{W}, \underline{X})$  et celui de la v.a.  $S(t)$ ,  $t > 0$ .

D'abord, on a

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{T_{k-1} + W_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} g(W_k, X_k | T_{k-1}), \quad (5.4)$$

pour  $t \geq 0$  et avec  $S(0) = 0$ ,  $T_0 = 0$ . À noter que le terme  $T_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est noté comme connu ; la raison étant que cette quantité est calculée à l'itération précédente et est donc considérée connue pour l'itération présente. On peut donc écrire la représentation des v.a.  $S(t)$ ,  $S^+(t)$  et  $S^-(t)$  comme une somme de fonctions  $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Cependant,  $g$  n'est pas une fonction supermodulaire puisque la fonction est croissante par rapport à  $X_k$ , mais décroît par rapport à  $W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Afin de contourner ce problème, il suffit d'aborder (5.4) sous un autre angle.

Soit  $F_W^{-1}$  et  $F_X^{-1}$ , les fonction quantiles des v.a.  $W_k$  et  $X_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}_+$ . Si on pose

$$W_k = F_W^{-1}(U_{1,k}) \quad \text{et} \quad X_k = F_X^{-1}(1 - U_{2,k}), \quad (5.5)$$

où  $U_{1,k} \sim U_1 \sim \text{Unif}(0, 1)$  et  $U_{2,k} \sim U_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , et que l'on définit

$$g'(U_{1,k}, U_{2,k} | T_{k-1}) = F_X^{-1}(1 - U_{2,k}) \mathbf{1}_{\{F_W^{-1}(U_{1,k}) + T_{k-1} \leq h\}}, \quad (5.6)$$

alors on obtient une représentation de la v.a.  $S(t)$  selon une fonction  $g'$  qui est croissante par rapport à  $U_{1,k}$  et  $U_{2,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Par conséquent,  $S(t)$  est une fonction supermodulaire de  $U_{1,k}$  et de  $U_{2,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$  puisque la somme est aussi une opération croissante.

**Remarque 4.** *Du point de vue de la modélisation de la dépendance, la relation existant entre  $U_{1,k} \sim U_1$  et  $U_{2,k} \sim U_2$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$  est modélisée à l'aide du théorème de Sklar comme suit :*

$$\begin{aligned} F_{U_{1,1}-U_2}(u_1, u_2) &= F_{W,X}(F_W^{-1}(u_1), F_X^{-1}(u_2)) \\ &= C_\theta(F_W(F_W^{-1}(u_1)), F_X(F_X^{-1}(u_2))) \\ &= C_\theta(u_1, u_2), \end{aligned}$$

$$u_1, u_2 \in [0, 1].$$

En ce qui a trait aux bornes de la classe de Fréchet, il importe de rappeler les définitions de la comonotonicité et de l'anti-monotonicité.

**Définition 9.** *Un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  est **comonotone** si et seulement si il existe deux fonctions non décroissantes  $\{g_i\}_{i=1}^2$  et une v.a.  $U$  telle que  $(X_1, X_2) = (g_1(U), g_2(U))$ .*

**Définition 10.** *Un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  est **anti-monotone** si et seulement si il existe une fonction non décroissante  $g_1$ , une fonction non croissante  $g_2$  et une v.a.  $U$  telle que  $(X_1, X_2) = (g_1(U), g_2(U))$ .*

**Corollaire 4.** *Soit  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ . On sait que la fonction quantile d'une v.a. est non décroissante. Il s'ensuit que...*

1. si  $(X_1, X_2) = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U))$ , alors le couple  $(X_1, X_2)$  est comonotone ;

2. si  $(X_1, X_2) = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(1 - U))$ , alors le couple  $(X_1, X_2)$  est anti-monotone.

**Preuve.** Découle naturellement des Définitions 9 et 10. □

Soit les suites de couples de v.a.  $\{(U_{1,k}^-, U_{2,k}^-)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  et  $\{(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  telles que  $U_{i,k}^- \sim U_{i,k}^+ \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ces couples de v.a. servent à générer les représentations des couples  $(W_k^-, X_k^-)$  et  $(W_k^+, X_k^+)$  comme suit :

$$\begin{aligned}(W_k^-, X_k^-) &= (F_W^{-1}(U_{1,k}^-), F_X^{-1}(1 - U_{2,k}^-)), \\ (W_k^+, X_k^+) &= (F_W^{-1}(U_{1,k}^+), F_X^{-1}(1 - U_{2,k}^+)).\end{aligned}$$

Le Corollaire 4 permet de définir la relation qui existe entre les v.a.  $U_{1,k}^-$  et  $U_{2,k}^-$ , ainsi qu'entre les v.a.  $U_{1,k}^+$  et  $U_{2,k}^+$  comme suit :

$$\begin{aligned}\text{Anti-monotonicité : } U_{1,k}^- &= 1 - U_{2,k}^- = U_k, \\ \text{Comonotonicité : } U_{1,k}^+ &= U_{2,k}^+ = U_k,\end{aligned}$$

où  $U_k \sim \text{Unif}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . De cette façon, on trouve

$$\begin{aligned}(W_k^-, X_k^-) &= (F_W^{-1}(U_k), F_X^{-1}(U_k)), \\ (W_k^+, X_k^+) &= (F_W^{-1}(U_k), F_X^{-1}(1 - U_k)).\end{aligned}$$

On remarque ainsi une inversion des bornes de Fréchet par rapport à celles des couples de v.a.  $\{(W_k, X_k)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  sous cette représentation. Étant donné le Corollaire 3, ce résultat implique l'inégalité qui suit.

$$F_{U_1^+, U_2^+}(u_1, u_2) \leq F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) \leq F_{U_1^-, U_2^-}(u_1, u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

Par conséquent, avec le Lemme 3, on déduit

$$(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+) \preceq_{\text{sm}} (U_{1,k}, U_{2,k}) \preceq_{\text{sm}} (U_{1,k}^-, U_{2,k}^-), \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (5.7)$$

Avec le Théorème 8 et (5.7), on obtient

$$\{(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+)\}_{k \in \mathbb{N}_+} \preceq_{\text{sm}} \{(U_{1,k}, U_{2,k})\}_{k \in \mathbb{N}_+} \preceq_{\text{sm}} \{(U_{1,k}^-, U_{2,k}^-)\}_{k \in \mathbb{N}_+}. \quad (5.8)$$

Il ne reste plus qu'à établir le lien entre l'inégalité (5.8) et la fonction  $g'$  pour pouvoir ordonner la v.a.  $S(t)$  avec ses bornes selon l'espace de Fréchet. À cette fin, on utilise le théorème qui suit.

**Théorème 9.** Soit deux vecteurs de v.a.  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  de longueur  $n$ . Si  $\underline{X} \preceq_{\text{sm}} \underline{Y}$ , alors  $\phi(\underline{X}) \preceq_{\text{icx}} \phi(\underline{Y})$  pour toute fonction supermodulaire  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Il est possible, maintenant, d'énoncer la proposition qui suit.

**Proposition 6.** *Soit un processus aléatoire avec récompense  $\mathbf{S}$  dont un accroissement  $S(t)$  définit sur l'intervalle de temps  $(0, t]$  est décrit en (2), pour  $t \geq 0$ . Soit  $S^-(t)$ , une version de  $S(t)$  où la structure de dépendance unissant les v.a.  $W_k$  et  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , est modélisée avec la borne inférieure de Fréchet défini en (4.15). Soit  $S^+(t)$ , une autre version de  $S(t)$  où cette même structure de dépendance est modélisée avec la borne supérieure de Fréchet défini en (4.14). Pour toute structure de dépendance unissant les v.a.  $W_k$  et  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , la relation suivante est vraie :*

$$S^+(t) \preccurlyeq_{\text{icx}} S(t) \preccurlyeq_{\text{icx}} S^-(t), \quad t \geq 0.$$

**Preuve.** La fonction  $g'$  défini en (5.6) est supermodulaire puisqu'elle est croissante à la fois en  $U_{1,k}$  et en  $U_{2,k}$ . Conséquemment, avec (5.8) et le Théorème 9, on a

$$\{g'(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+ | T_0^+)\}_{k \in \mathbb{N}_+} \preccurlyeq_{\text{sm}} \{g'(U_{1,k}, U_{2,k} | T_0)\}_{k \in \mathbb{N}_+} \preccurlyeq_{\text{sm}} \{g'(U_{1,k}^-, U_{2,k}^- | T_0^-)\}_{k \in \mathbb{N}_+}. \quad (5.9)$$

Considérant que la somme d'éléments positifs est une opération croissante, alors, avec le Théorème 9, on déduit de (5.9) l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}^+, U_{2,k}^+ | T_{k-1}^+) \preccurlyeq_{\text{icx}} \sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}, U_{2,k} | T_{k-1}) \preccurlyeq_{\text{icx}} \sum_{k=1}^{\infty} g'(U_{1,k}^-, U_{2,k}^- | T_{k-1}^-);$$

ce qui permet de conclure

$$S^+(t) \preccurlyeq_{\text{icx}} S(t) \preccurlyeq_{\text{icx}} S^-(t), \quad t \geq 0.$$

□

Comme il a été fait pour le Chapitre 4, il est possible de généraliser ce résultat pour le processus  $\mathbf{S}$  dans son intégralité.

**Proposition 7.** *Soit le processus  $\mathbf{S} = \{S(t)\}_{t \geq 0}$ , défini en (2), et ses versions comonotone et anti-monotone  $\mathbf{S}^+ = \{S^+(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\mathbf{S}^- = \{S^-(t)\}_{t \geq 0}$ , telles que définies dans (5.1). Alors*

$$\mathbf{S}^- \preccurlyeq_{\text{icx}} \mathbf{S} \preccurlyeq_{\text{icx}} \mathbf{S}^+.$$

**Preuve.** Avec la Proposition 6, on sait qu'il est possible d'ordonner chacun des accroissements du processus aléatoire  $\mathbf{S}$ . Si l'ordre convexe croissant reste le même pour tout accroissement  $[0, t]$ ,  $t > 0$ , alors on peut généraliser l'ordonnancement sur l'intégrité du processus aléatoire  $\mathbf{S}$  pour le comparer avec ses bornes de Fréchet  $\mathbf{S}^-$  et  $\mathbf{S}^+$ . Cette méthodologie s'appuie sur celle utilisée pour démontrer le Théorème 6 par Shaked and Shanthikumar (2007). □

Au final, la Proposition 6 vient corroborer l'intuition des Exemples 1 et 4 selon laquelle plus la dépendance entre les v.a. des temps inter-occurrences et de la sévérité est élevée, moins le risque est grand de tomber sur un événement majeur. Ce résultat est particulièrement intéressant en gestion du risque lorsque l'on désire connaître l'incidence de la dépendance sur la dangerosité d'un risque.



# Conclusion

En conclusion, les processus de renouvellement avec récompense ont fait l'objet de plusieurs travaux dans le contexte de la théorie de la ruine et de la théorie des files d'attente.

L'inclusion d'une structure de dépendance entre le temps écoulé et l'amplitude du prochain événement permet de tenir compte d'un phénomène analogue à l'accumulation, puis à la libération d'énergie. Se faisant, l'approche proposée dans cet essai est tout à fait appropriée pour modéliser des phénomènes naturels. On peut penser, entre autres, aux tremblements de terre (voir [Nikoloulopoulos and Karlis \(2008\)](#)) ou aux tempêtes ([Salvadori and De Michele \(2006\)](#)). Dans cet essai, la structure de dépendance entre les v.a. des temps inter-occurrences et de l'amplitude des événements est modélisée avec la théorie des copules.

Afin d'étudier les propriétés et les mesures de risque de ce genre de modèle, un algorithme de simulation utilisant l'approche de Monte-Carlo est proposé à la Section 2.1.

Également, une approche alternative s'inspirant des travaux de [Marceau \(2009\)](#) est proposée dans la Section 2.2.3 pour approximer la distribution d'un accroissement du processus  $\mathbf{S}$  sans recourir à la simulation. Dans les Exemples 2 et 3, la simulation n'est utilisée que pour valider les résultats.

Une extension de cette dernière approche consiste à utiliser un mélange d'Erlang pour modéliser la v.a. de sévérité. En effet, selon [Willmot and Lin \(2011\)](#), il est possible d'approximer n'importe quelle distribution positive et continue avec un mélange d'Erlang. Ce faisant, il n'est plus nécessaire de discrétiser la v.a. de la sévérité puisque, comme il est décrit dans la Section 2.3, la structure de dépendance lie les couples de v.a.  $(W_k, J_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , où  $\{J_k\}_k \in \mathbb{N}_+$  forme une suite de v.a. discrètes. Il en résulte que l'approximation peut être plus précise. Cela est particulièrement intéressant lorsque l'échelle de la v.a. de sévérité est élevée puisque nous n'avons plus besoin d'établir un gros pas de discrétisation pour compenser le fort besoin en mémoire vive nécessaire pour couvrir l'entièreté du domaine.

Dans le cadre de l'approximation de la distribution de la v.a.  $S(t)$ ,  $t > 0$ , il importe d'utiliser la bonne stratégie de discrétisation afin d'assurer la convergence des bornes d'approximation *lower* et *upper*. À cet effet, le Chapitre 4 propose une approche assurant la convergence vers la véritable distribution de la v.a.  $S(t)$

Enfin, l'analyse des résultats obtenus a permis d'observer certaines propriétés intéressantes, autant sur le plan de l'ordonnancement du risque que des comportements asymptotiques. À ce titre, les comportements asymptotiques sont étudiés au Chapitre 3 et on démontre que ceux-ci tiennent peu importe la structure de dépendance unissant les v.a.  $W_k$  et  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Également, il est démontré au Chapitre 5 qu'il est possible d'ordonner le risque du processus  $S(t)$  en fonction de la force de la dépendance unissant les v.a.  $X$  et  $W$ .

Dans le futur, il pourrait être intéressant de considérer les processus de renouvellement alternés avec récompense. Dans cette classe de processus aléatoires, on ajouterait une suite de v.a.  $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$  représentant la durée de chaque événement. Il y aurait alors une alternance entre la v.a.  $W_k$  et  $D_k$  pour modéliser le temps. Pour un exemple d'application, voir [Salvadori and De Michele \(2006\)](#). Avec cette approche, les phénomènes météorologiques pouvant durer plusieurs jours pourraient être mieux modélisés. On peut penser aux pluies abondantes ou aux tremblements de terre qui regroupent des séquences de secousses secondaires à la suite d'une secousse principale.

# Bibliographie

- Albrecher, H. and Boxma, O. J. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2) :245–254.
- Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 12(2) :275–279.
- Asimit, A. V. and Badescu, A. L. (2010). Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(2) :93–104.
- Ayhan, H., Limon-Robles, J., and Wortman, M. (1999). An approach for computing tight numerical bounds on renewal functions. *IEEE Transactions on Reliability*, 48(2) :182–188.
- Baker, R. and Kharrrat, T. (2018). Event count distributions from renewal processes : fast computation of probabilities. *IMA Journal of Management Mathematics*, 29(4) :415–433.
- Bargès, M., Cossette, H., Loisel, S., and Marceau, E. (2011). On the moments of aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41(1) :215–238.
- Bargès, M., Cossette, H., and Marceau, E. (2009). TVaR-based capital allocation with copulas. *Insurance : Mathematics and Economics*, 45(3) :348–361.
- Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., and Marceau, E. (2006). On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(5) :265–285.
- Boudreault, M., Cossette, H., and Marceau, E. (2017). On a joint frequency and severity loss model applied to earthquake risk. *SSRN 3015906*.
- Brechmann, E. C., Hendrich, K., and Czado, C. (2013). Conditional copula simulation for systemic risk stress testing. *Insurance : Mathematics and Economics*, 53(3) :722–732.
- Cheung, E. C. and Woo, J.-K. (2016). On the discounted aggregate claim costs until ruin in dependent Sparre Andersen risk processes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(1) :63–91.

- Cossette, H., Marceau, E., and Marri, F. (2008). On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern copula. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(3) :444–455.
- Cossette, H., Marceau, E., and Marri, F. (2010). Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3) :221–245.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006). *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons.
- Gallager, R. G. (2013). *Stochastic Processes : Theory for Applications*. Cambridge University Press.
- Grandell, J. (2006). *Doubly Stochastic Poisson Processes*, volume 529. Springer.
- Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R. (2001). *Probability and Random Processes*. Oxford University Press.
- Hubbard, J. H. and Hubbard, B. B. (2015). *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms : a Unified Approach*.
- Jiang, X. and Nadarajah, S. (2019). Efficient expressions for moments of dependent random sums using copulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353 :130–139.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*. CRC Press.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2013). *Loss Models : Further Topics*. John Wiley & Sons.
- Lai, C.-D., Murthy, D., and Xie, M. (2006). Weibull distributions and their applications. In *Springer Handbooks*, pages 63–78. Springer.
- Léveillé, G., Garrido, J., and Fang Wang, Y. (2010). Moment generating functions of compound renewal sums with discounted claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3) :165–184.
- Marceau, E. (2009). On the discrete-time compound renewal risk model with dependence. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(2) :245–259.
- Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat*. Springer.
- McShane, B., Adrian, M., Bradlow, E. T., and Fader, P. S. (2008). Count models based on Weibull interarrival times. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(3) :369–378.
- Mercier, S. (2007). Discrete random bounds for general random variables and applications to reliability. *European journal of operational research*, 177(1) :378–405.

- Mooney, C. Z. (1997). *Monte-Carlo Simulation*, volume 116. Sage Publications.
- Nelsen, R. B. (2007). *An Introduction to Copulas*. Springer Science & Business Media.
- Nikoloulopoulos, A. K. and Karlis, D. (2008). Fitting copulas to bivariate earthquake data : the seismic gap hypothesis revisited. *Environmetrics*, 19(3) :251–269.
- Pal, S. and Murthy, G. (2003). An application of Gumbel’s bivariate exponential distribution in estimation of warranty cost of motor cycles. *International Journal of Quality & Reliability Management*, pages 488–502.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull Distribution : a Handbook*. CRC Press.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. L. (2009). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.
- Ross, S. M., Kelly, J. J., Sullivan, R. J., Perry, W. J., Mercer, D., Davis, R. M., Washburn, T. D., Sager, E. V., Boyce, J. B., and Bristow, V. L. (1996). *Stochastic Processes*, volume 2. Wiley New York.
- Salvadori, G. and De Michele, C. (2006). Statistical characterization of temporal structure of storms. *Advances in Water Resources*, 29(6) :827–842.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer Science & Business Media.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition á n dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8 :229–231.
- van Noortwijk, J. M. and van der Weide, J. A. (2008). Applications to continuous-time processes of computational techniques for discrete-time renewal processes. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(12) :1853–1860.
- Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2011). Risk modelling with the mixed Erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(1) :2–16.