1 Semaine 13-17 mai 2019

1.1 Notation

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
2. $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, ...\}$

1.2 À faire no 1

Rédiger en LaTeX tous les développements mathématiques des travaux de la semaine du 6 mai 2019.

1.3 À faire no 2

1. Contexte :
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times 1_{\{N \geq i\}}$$
2. Hypothèses :
   - N est une v.a. discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec $E[N] < \infty$.
   - $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}_+\}$, où $\underline{X}$ forme une suite de v.a. strictement positives identiquement distribuées et $X_i \sim X$ avec $E[X] < \infty$.
   - $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}_+\}$, où $\underline{X}$ forme une suite de v.a. strictement positives indépendantes
   - N et $\underline{X}$ sont indépendantes.
3. Développer l'expression de $E[S]$.

1.4 À faire no 3

1. Contexte :
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times 1_{\{N \geq i\}}$$
2. Hypothèses :
   - N est une v.a. discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec $E[N] < \infty$.
   - $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}_+\}$, où $\underline{X}$ forme une suite de v.a. strictement positives identiquement distribuées et $X_i \sim X$ avec $E[X] < \infty$.
   - N et $\underline{X}$ sont indépendantes.
3. Développer l'expression de $E[S]$.
4. Développer l'expression générale de $F_S(x)$, $x \geq 0$.
5. Hypothèses additionnelles :
   - $N \sim \mathit{Binomiale}(5, 0.3)$.
   - $X \sim \mathit{Exponentielle}\left(\beta = \frac{1}{10}\right)$.

- Les composantes de $\underline{X}$ sont comonotones.

Questions :

(a) Développer l'expression de $F_S(x)$, $x \geq 0$.

(b) Calculer $F_S(x)$, pour $x = 0, 10, 20, 30$.

(c) Calculer $E[S]$.

1.5 À faire no 4

1. Contexte :
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times 1_{\{N \geq i\}}$$
2. Hypothèses :
   - N est une v.a. discrète définie sur $\{0, 1, 2\}$.
   - X_1, X_2 sont des v.a. identiquement distribuées définies sur $\mathbb{N}_+$, avec
   $$F_{X_1}(k) = F_{X_2}(k) = F_X(k)$$
   pour $k \in \mathbb{N}_+$.
   - Soit une copule C de dimension 3. La fonction de répartition conjointe de (N, X_1, X_2), notée F_{N,X_1,X_2}, est définie par
   $$F_{N,X_1,X_2}(n, k_1, k_2) = C\left(F_N(n), F_{X_1}(k_1), F_{X_2}(k_2)\right)$$
   pour $n \in \{0, 1, 2\}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_+$.
3. Développer l'expression générale de
$$f_{N,X_1,X_2}(n, k_1, k_2)$$
en fonction de F_{N,X_1,X_2}.
4. Développer l'expression générale de $F_S(x)$, $x \geq 0$.
5. Hypothèses additionnelles no1 :
   - $\Pr(N = 0) = 0.4$, $\Pr(N = 1) = 0.5$, $\Pr(N = 2) = 0.1$.
   - Soit X une v.a. discrète définie sur $\{1, 2, ..., 20\}$, dont la fmp est
   $$f_X(k) = \frac{\left(\frac{4}{3+k}\right)^3 - \left(\frac{4}{4+k}\right)^3}{1 - \left(\frac{4}{24}\right)^3},$$
   pour $k = 1, 2, ..., 20$.
   - C est une copule de Clayton à trois (3) dimensions
   $$C(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1^{-\delta} + u_2^{-\delta} + u_3^{-\delta} - 2\right)^{-\frac{1}{\delta}}$$
   pour $(u_1, u_2, u_3) \in [0, 1]^3$.

   Questions (effectuer les calculs pour $\delta = 2,\ 5,\ 10$):

(a) Calculer les valeurs $f_{N,X_1,X_2}(n,k_1,k_2)$ pour

$$(n,k_1,k_2) \in \{0,1,2\} \times \{1,2,...,20\} \times \{1,2,...,20\}.$$

(b) Développer l'expression de $f_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est la valeur maximale pouvant être prise par S selon les hypothèses du modèle.
(c) Indiquer la valeur de k_0.
(d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(e) Calculer les valeurs de $F_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(f) Calculer $E[S]$.
(g) Calculer $\pi_S(k)$, pour $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(h) Calculer $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = F_S(k)$ avec $k \in \{0,1,2,...,k_0-1\}$.

6. Hypothèses additionnelles no2 :
   - $\Pr(N=0)=0.4$, $\Pr(N=1)=0.5$, $\Pr(N=2)=0.1$.
   - Soit X une v.a. discrète définie sur $\{1,2,...,20\}$, dont la fmp est

$$f_X(k) = \frac{\left(\frac{4}{3+k}\right)^3 - \left(\frac{4}{4+k}\right)^3}{1-\left(\frac{4}{24}\right)^3},$$

pour $k = 1,2,...,20$.
   - C est une copule de Clayton imbriquée à trois (3) dimensions

$$C(u_1,u_2,u_3) = \left(u_1^{-2} + \left(\left(u_2^{-5}+u_3^{-5}-1\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^{-2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

pour $(u_1,u_2,u_3) \in [0,1]^3$.

Questions:

(a) Calculer les valeurs $f_{N,X_1,X_2}(n,k_1,k_2)$ pour

$$(n,k_1,k_2) \in \{0,1,2\} \times \{1,2,...,20\} \times \{1,2,...,20\}.$$

(b) Développer l'expression de $f_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$, où k_0 est la valeur maximale pouvant être prise par S selon les hypothèses du modèle.
(c) Indiquer la valeur de k_0.
(d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(e) Calculer les valeurs de $F_S(k)$, $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(f) Calculer $E[S]$.
(g) Calculer $\pi_S(k)$, pour $k \in \{0,1,2,...,k_0\}$.
(h) Calculer $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = F_S(k)$ avec $k \in \{0,1,2,...,k_0-1\}$.