État de l'avancement des travaux

Projet de recherche été 2019

Alexandre Lepage, Diamilatou N'Diaye
et Amedeo Zito

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

2019-05-31

UNIVERSITÉ LAVAL
Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Objectifs du projet

Revue de littérature

Revue de littérature

Itre4: Hierarchical Archimedean copulas through multivariate compound distributions [Cossette et al., 2017]

Copule archimédienne hiérarchique

- Soient $\Theta_i = \sum_{j=1}^{M} B_{i,j}$, où M et $\underline{B}$ sont indépendants et les $B_{i,j}$ sont i.i.d. pour un même i et d qui correspond au nombre de groupes de dépendance différents.

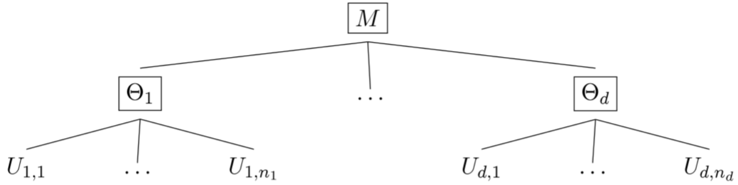

Illustration: Arbre hiérarchique à un niveau.

- Copule archimédienne :

$$
\begin{aligned}
C(u_1, \ldots, u_k) &= \mathcal{L}_\Theta\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_\Theta^{-1}\right) \\
&= \mathcal{P}_M\left(\mathcal{L}_B\left(\sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_{i,j})\right)\right) \\
&= \mathcal{P}_M\left(\mathcal{L}_B\left(\sum_{j=1}^{k} \mathcal{L}_B^{-1}\left(\mathcal{P}_M^{-1}(u_{i,j})\right)\right)\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Revue de littérature

Itre4: Hierarchical Archimedean copulas through multivariate compound distributions [Cossette et al., 2017]

- Copule archimédienne hiérarchique à un niveau:
  - De (1), on ajoute différentes lois de probabilités pour $\{B_i, i = 1,...,d\}$ et on obtient

$$C(u_1,...,u_k) = \mathcal{P}_M\left(\prod_{i=1}^{d}\mathcal{L}_{B_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\mathcal{L}_{\Theta_i}^{-1}(u_{i,j})\right)\right)$$
$$= \mathcal{L}_M\left(\sum_{i=1}^{d} -\ln\left(\mathcal{L}_{B_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\mathcal{L}_{\Theta_i}^{-1}(u_{i,j})\right)\right)\right), \qquad (2)$$

où d correspond au nombre de liens de dépendance différents à modéliser à travers la copule et $\{n_i,\ i = 1,...,d\}$ correspond au nombre d'uniformes qui sont générées par groupe de dépendance de tel sorte que $k = \sum_{i=1}^{d} n_i$

Le modèle sous-jacent:

- Soient N, la v.a. du nombre de sinistres et X_i, la v.a. de la sévérité des sinistres.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}, \tag{3}$$

où N est dépendant de $\underline{X}$ et les X_i sont dépendants entre eux.

Revue de littérature

Itre5: Collective Risk Models Dependence [Cossette et al., 2019b]

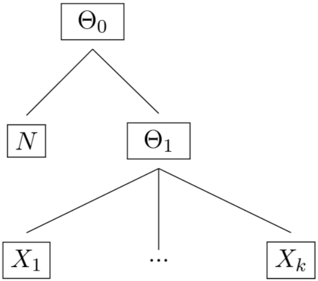

Illustration: Arbre hiérarchique du modèle collectif de risque avec dépendance, où Θ_0 correspond à M et $\Theta_1 = \sum_{i=1}^{M} B_i$, avec les B_i qui sont i.i.d. et indépendants de M.

- Adaptation de la copule archimédienne hiérarchique dont la formule apparaît en (2) au modèle collectif définit en (3).

$$C(u_0, \ldots, u_k) = \mathcal{L}_M\left(\mathcal{L}_M^{-1}(u_0) - \ln\left(\mathcal{L}_B\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_{\Theta_1}^{-1}(u_i)\right)\right)\right)$$

Méthode de simulation:

- avec l'algorithme de Itre 4.

Méthodes de calcul exact:

- avec la transformation de Fourrier:
  - Soient $f_{X_{i\Theta_0,\Theta_{0,1}}} = f_{X_i|\Theta_0,\Theta_{0,1}}(x|\theta_0,\theta_{0,1})$, $P_{N_{\Theta_0}}(t) = E[t^n|\Theta_0 = \theta_0]$, $\mathbb{F}$ est la transformation de Fourrier et $\mathbb{F}^{-1}$ est son inverse, alors

$$f_{S_{\Theta_0,\Theta_{0,1}}} = \mathbb{F}^{-1}\left(P_{N_{\Theta_0}}\left(\mathbb{F}\left(f_{X_{i\Theta_0,\Theta_{0,1}}}\right)\right)\right).$$

- avec la distribution multivariée de mélange d'Erlang.

Calcul exacte avec la distribution multivariée de mélange d'Erlang:

- **Motivation:** On veut instaurer un lien de dépendance entre les X_i et avec N. Pour se faire, définissons une v.a. strictement positive J_i qui servira de paramètre de forme aux X_i.
- Soit X_i, la v.a. de la sévérité qui est représentée comme $\sum_{j=1}^{J^{(,\perp)}} C_j^{(\perp,\perp)}$, où $C_j^{(\perp,\perp)} \sim C \sim Exp(\beta)$ avec $E[C] = 1/\beta$.
- Les J_i sont dépendants entre eux et dépendants de N. Tandis que les $C_{i,j}$ sont i.i.d. et indépendants de N et de J_i.
- Il s'ensuit que $X_i \sim Erl(J_i, \beta)$.

Revue de littérature

Itre5: Collective Risk Models Dependence [Cossette et al., 2019b]

- Soit $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. On peut réécrire S comme $S = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J_i} C_{i,j}$. Donc $S \sim Erl(\sum_{j=1}^{N} J_i, \beta)$.
- Pour simplifier la notation, définissons $L = \sum_{i=1}^{N} J_i$. Il en résulte que $S \sim Erl(L, \beta)$ où

$$
\begin{aligned}
Pr(L = l) &= \zeta_l \\
&= \begin{cases} Pr(N = 0) & l = 0, \\ \sum_{i=1}^{l} Pr(N = i, J_1 + ... + J_i = l) & l \in \mathbb{N} \end{cases} \\
&= \begin{cases} Pr(N = 0) & l = 0, \\ \sum_{i=1}^{l} \gamma_{N,J_1,...,J_l - i+1}(i, j_1, ... j_i) & l \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

- On obtient donc la fonction de répartition définie en (4) et la $TVaR$ définie en (5).

$$F_S(x) = \gamma_N(0) + \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l H(x; l, \beta) \tag{4}$$

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l \frac{l}{\beta} \bar{H}(VaR_\kappa(S); l+1, \beta) \tag{5}$$

Lectures en cours

Lectures en cours

1. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask [Genest and Favre, 2007]
2. Composite Likelyhood Estimation Method for Hierarchical Archimedean Copulas Defined with Multivariate Compound Distributions [Cossette et al., 2019a]

Références

Références I

Cossette, H., Gadoury, S.-P., Marceau, E., and Mtalai, I. (2017).
Hiearchical archimedean copulas trough multivariate compound distributions.
Insurance: Mathematics and Economics, 76.

Cossette, H., Gadoury, S.-P., Marceau, E., and Robert, C. Y. (2019a).
Composite likelyhood estimation method for hierarchical archimedean copulas defined with multivariate compound distributions.
Journal of Multivariate Analysis, 172.

Cossette, H., Marceau, E., and Mtalai, I. (2019b).
Collective risk models with dependance.

Références II

Genest, C. and Favre, A.-C. (2007).
Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask.
Journal of Hydrologic Engineering.