Notes de travail

Prof. Étienne Marceau

Estimation de copules hiérarchiques pour un modèle de risque collectif

Préparé par

Alexandre Lepage, Diamilatou N'diaye, Amedeo Zito

le 06 juin 2019

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat
Université Laval
Automone 2018

Table des matières

Chaptire 1 - Notions générales

1.1 - Fonction Maximum de Vraisemblance

Soit λ le paramètre de la loi de fréquence et β le vecteur de paramètres de la loi de sévérité. La densité d'une distribution multivariée non absolument continue est donné par :

$$\begin{aligned} f_{N,X_1,\ldots,X_n}(n,x_1,\ldots,x_n;\lambda,\beta) = &\frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial_n} C(F_N(n;\lambda),F_{X_1;\beta}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n;\beta);\alpha) \\ &- \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial_n} C(F_N(n-1;\lambda),F_{X_1}(x_1;\beta),\ldots,F_{X_n}(x_n;\beta);\alpha) \end{aligned}$$

On a n_0 le nombre observé de 0, n_1 le nombre observer fréquence 1, $\ldots$, n_k le nombre observer fréquence k. $x_{k,i}$ représente la i-ième observation du k-ième sinistre.
Afin d'estimer les paramètres, on utilise la fonction de maximum de vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Lambda) = &(\Pr(N=0))^{n_0} \\ &\times \prod_{i=1}^{n_1} f_{N,X_1}(1,x_{1,i};\lambda,\beta) \\ &\times \prod_{i=1}^{n_2} f_{N,X_1,X_2}(2,x_{1,i},x_{2,i};\lambda,\beta) \\ &\ldots \\ &\times \prod_{i=1}^{n_k} f_{N,X_1,\ldots,X_n}(k,x_{1,i},\ldots,x_{k,i};\lambda,\beta) \end{aligned}$$

Chaptire 2 - Copule de Clayton

On a la copule de clayton C :

$$C(u_0,\ldots,u_n;\alpha) = (u_0^{-\alpha}+\cdots+u_n^{-\alpha}-n)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Soit $N \sim Binom(5,q)$ la v.a. de la fréquence et $X_i \sim Exp(\beta)$ la v.a. de la sévérité. Alors $f_{N,X_1,\ldots,X_n}(n,x_1,\ldots,x_n;\lambda,\beta)$ devient

$$\begin{aligned} f_{N,X_1,\ldots,X_n}(n,x_1,\ldots,x_n;\lambda,\beta) = &\frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial_n}(F_N(n)^{-\alpha}+(1-e^{-\beta x_1})^{-\alpha}+\cdots+(1-e^{-\beta x_n})^{-\alpha}-n)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &- \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial_n}(F_N(n-1)^{-\alpha}+(1-e^{-\beta x_1})^{-\alpha}+\cdots+(1-e^{-\beta x_n}-n)^{-\alpha}-n)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

L'expression $\frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial_n}(F_N(n)^{-\alpha}+(1-e^{-\beta x_1})^{-\alpha}+\cdots+(1-e^{-\beta x_n})^{-\alpha}-n)^{-\frac{1}{\alpha}}$ est trouvé à l'aide du package "Deriv".

Pour tester le fonctionnement de l'estimation. On simuler 10000 valeurs de N avec un algorithme de simulation pour la copule de clayton (VOIR diapos de theorie de risque sur les copules)

..plus d'explication..

2.1 - Binomiale

Premier test : les paramètres à estimer : $\alpha = 5$, $q = \frac{2}{5}$ et $\beta = \frac{1}{100}$.
MONTRER VALEURS SIMULÉES
RESULTATS
Premier test : les paramètres à estimer : $\alpha = 10$, $q = \frac{3}{5}$ et $\beta = \frac{1}{1000}$.
MONTRER VALEURS SIMULÉES
RESULTATS

2.2 - Poisson

Test : les paramètres à estimer : $\alpha = 5$, $\lambda = 1$ et $\beta = \frac{1}{100}$.
MONTRER VALEURS SIMULÉES
RESULTATS

Chaptire 3 - Copule hiérarchique