

---

# Introduction à la théorie des copules

Professeur : Etienne Marceau

5 décembre 2018

# 1 Info pratiques

Professeur et auteur : Etienne Marceau

Livre en cours : Mathématiques actuarielles : dépendance, agrégation et allocation

Titre du chapitre : Mesures de dépendance et copules

## 2 Introduction

### 2.1 D'où vient le mot copule ?

#### 2.1.1 Quelques citations de dictionnaires

Copule (logique) : Verbe d'un jugement en tant qu'il exprime une relation entre le sujet et le prédicat. L'assertion réside dans la copule. (Le petit Robert de la langue française, 2015).

Copule (linguistique) : Mot qui relie le sujet au prédicat. Le verbe "être" est une copule. (Le petit Robert de la langue française, 2015).

Copule (linguistique, un peu plus détaillé) : 1. Le verbe *être* est appelé *copule* quand, dans une phrase de base, il constitue avec un attribut (adjectif, syntagme nominal ou syntagme prépositionnel) le prédicat d'un syntagme nominal. La copule sert à énoncer les propriétés qui définissent le sujet dans des phrases prédicatives (ex : Pierre est heureux, Pierre sera un ingénieur, Pierre était à la maison). On distingue la copule *être* et l'auxiliaire *être* des phrases passives ou l'auxiliaire *être* des verbes intransitifs. On étend parfois le terme de copule à des verbes comme *devenir*, *sembler*, *paraître*, *rester*. 2. La conjonction *et* est dite *copule* quand elle lie deux (ou plus de deux) phrases ou continuant de phrases. (Larousse. Le Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, 2011).

Histoire du mot (en linguistique) : Nom féminin (1482) emprunté au latin classique *copula* "lien, union" spécialement "liaison de mots" et, en latin chrétien, "lien moral", "union dans le mariage", issu par composition d'un *co-apula* dérivé de *cum* "avec" de *apere* "attacher". (Le Robert. Dictionnaire historique de la langue française. 1994.)

## 2.1.2 Naissance du mot

Histoire de la naissance du mot *copule* en probabilité, statistique et mathématique par celui qui l'a "inventé" (ou "emprunté" plutôt) : *"Having worked out the basic properties of these functions, I wrote about them to Fréchet, in English. He asked me to write a note about them in French. While writing this, I decided I needed a name for these functions. Knowing the word "copula" as a grammatical term for a word or expression that links a subject and predicate, I felt that this would make an appropriate name for a function that links a multidimensional distribution to its one-dimensional margins, and used it as such. Fréchet received my note, corrected one mathematical statement, made some minor corrections to my French, and had the note published by the Statistical Institute of the University of Paris as Sklar (1959)." (Sklar (1996)).*

## 2.2 Copules et actuariat

Depuis le milieu des années 1990, la théorie des copules a connu un essor important.

D'un thème confidentiel de recherche qui intéressait un groupe restreint de chercheurs en mathématiques, en théorie des probabilités et en statistique, la théorie des copules est devenue aujourd'hui un thème important de recherche.

Désormais, elle intéresse les chercheurs en actuariat, en finance quantitative, en statistique, en économétrie, etc.

La théorie des copules est devenue un thème incontournable dans le contexte de la modélisation des risques en actuariat et en gestion quantitative des risques.

Elle permet d'analyser les relations de dépendance entre les v.a. et de construire une large variété de modèles multivariés incorporant des relations de dépendance spécifiques.

# 3 Définition des copules



## 3.1 Définition pour d'une copule bivariee

La notion de copule a été introduite par [?].

Une copule  $C$  est la fonction de répartition sur  $[0, 1]^2$  d'un vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, U_2)$  dont toutes les composantes  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) obéissent à la loi uniforme  $(0, 1)$ .

**Définition 1** *Une copule  $C(u_1, u_2)$  est une application  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  ayant les propriétés suivantes (celles d'une fonction de répartition conjointe en fait) :*

- $C(u_1, u_2)$  est non décroissante sur  $[0, 1]^2$  ;
- $C(u_1, u_2)$  est continue à droite sur  $[0, 1]^2$  ;
- $\lim_{u_i \rightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$  pour  $i = 1, 2$  ;

- $\lim_{u_1 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$  et  $\lim_{u_2 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$  ;
- **Inégalité du rectangle** : pour tout  $a_1 \leq b_1$  et  $a_2 \leq b_2$ , on a

$$C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) \geq 0.$$

Selon cette propriété,  $C$  est une copule à la condition qu'elle place une masse positive sur tout rectangle  $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$  inclus dans  $[0, 1]^2$ .

**Notation 2** Soit la copule  $C$  et soit le vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, U_2)$  ( $U_1 \sim U_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ ) avec

$$F_{\underline{U}}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ . Alors, on note  $\underline{U} \sim C$ .

**Remarque 3** Soit  $\underline{U} \sim C$ . Alors, l'inégalité du rectangle signifie

$$\begin{aligned}
 C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) &= \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2) \\
 &= \Pr(U_1 \in (a_1, b_1], U_2 \in (a_2, b_2]) \\
 &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^2 \{U_i \in (a_i, b_i]\}\right) \\
 &= \Pr(\underline{U} \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]),
 \end{aligned}$$

ce qui correspond à la probabilité que le couple  $\underline{U} = (U_1, U_2)$  prenne des valeurs dans le rectangle  $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ .

**Remarque 4** Inégalité du triangle et copule continue. Soit  $C$  une copule continue. L'inégalité du rectangle est satisfaite si

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) \geq 0,$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ .

## 3.2 Définition pour d'une copule multivariée

Une copule  $C$  est la fonction de répartition sur  $[0, 1]^n$  d'un vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  dont toutes les composantes  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) obéissent à la loi uniforme  $(0, 1)$ .

**Définition 5** Une copule multivariée  $C(u_1, \dots, u_n)$  est une application  $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  ayant les propriétés suivantes :

- $C(u_1, \dots, u_n)$  est non décroissante sur  $[0, 1]^n$  ;
- $C(u_1, \dots, u_n)$  est continue à droite sur  $[0, 1]^n$  ;
- au moins une composantes est égale à 0 :  $\lim_{u_i \rightarrow 0} C(u_1, \dots, u_n) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$  ;

- toutes les composantes, sauf  $u_i$ , sont égales à 1 :  $\lim_{u_j \rightarrow 1, j \neq i} C(u_1, \dots, u_n) = u_i$  ;
- inégalité de l'hyperrectangle : pour tout  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ , on a

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) \geq 0,$$

avec  $u_{j,1} = a_j$  et  $u_{j,2} = b_j$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Selon cette propriété,  $C$  est une copule à la condition qu'elle place une masse positive sur tout hyperrectangle  $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$  inclus dans  $[0, 1]^n$ .

**Définition 6** Hyperrectangle = généralisation à une dimension supérieure ( $n > 2$ ) d'un rectangle de dimension deux

**Notation 7** Soit la copule  $C$  et soit le vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, U_2)$  ( $U_1 \sim$

$U_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$  avec

$$F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alors, on note  $\underline{U} \sim C$ .

**Remarque 8** Soit  $\underline{U} \sim C$ . Alors, l'inégalité de l'hyperrectangle signifie

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) &= \Pr \left( \bigcap_{i=1}^n \{U_i \in (a_i, b_i]\} \right) \\ &= \Pr(\underline{U} \in (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \end{aligned}$$

pour tout hyperrectangle  $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \subseteq [0, 1]^n$ .

Si  $n = 3$ , on déduit

$$\begin{aligned} \Pr \left( \bigcap_{i=1}^3 \{U_i \in (a_i, b_i]\} \right) &= C(b_1, b_2, b_3) - C(a_1, b_2, b_3) - C(b_1, a_2, b_3) - C(b_1, b_2, a_3) \\ &\quad + C(a_1, a_2, b_3) + C(a_1, b_2, a_3) + C(b_1, a_2, a_3) \\ &\quad - C(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

**Remarque 9** *Inégalité de l'hyperrectangle et copule continue. Soit  $C$  une copule continue. L'inégalité de l'hyperrectangle est satisfaite si*

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n) \geq 0,$$

*pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

## 4 Théorème de Sklar



## 4.1 Énoncé du théorème

Le résultat fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar.

### Théorème 10 Théorème de Sklar

- Soit  $F \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$  ayant des fonctions de répartition marginales  $F_1, \dots, F_n$ .
- Volet #1. Alors, il existe une copule  $C$  telle que pour tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Si  $F_1, \dots, F_n$  sont continues, alors  $C$  est unique. Sinon,  $C$  est uniquement déterminée sur  $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$ .

- Volet #2. Inversement, si  $C$  est une copule et  $F_1 \dots F_n$  sont des fonctions de répartition alors la fonction définie par

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

est une fonction de répartition multivariée avec les fonctions de répartition marginales  $F_1 \dots F_n$ .

## 4.2 Démonstration du théorème

On effectue la démonstration dans le cas où les marginales  $F_1, \dots, F_n$  sont continues. Pour une preuve détaillée du théorème, on peut voir e.g. [?] ou [?].

- Volet #1. Soit un vecteur de v.a. continues  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  avec une fonction de répartition  $F_{\underline{X}}$  dont les marginales continues sont  $F_1, \dots, F_n$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)), \end{aligned}$$

pour  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Par le théorème de la transformation de probabilité (probability integral transform or probability transformation), on sait que

$$F_{X_i}(X_i) = U_i \sim Unif(0, 1)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors,

$$\Pr \left( F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n) \right)$$

correspond à la fonction de répartition de

$$\left( F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \right) = (U_1, \dots, U_n).$$

On introduit la fonction multivariée  $C$  tel que

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr \left( F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n) \right) \\ &= C \left( F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n) \right) \end{aligned}$$

Selon la Définition 5, la fonction  $C$  est une copule.

– Volet #2. Soit  $\underline{U} \sim C$ . On définit un vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , à

$$X_i = F_i^{-1}(U_i)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors, l'expression de la fonction de répartition de  $\underline{X}$  est donnée par

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_n^{-1}(U_n) \leq x_n) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), \dots, U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \end{aligned}$$

## 5 Conséquences pratiques du théorème de Sklar

Les conséquences pratiques du théorème de SKlar sont les suivantes :

1. extraire la copule associée à la fonction de répartition pour toute distribution continue multivariée ;
2. construire une distribution multivariée en reliant les marginales (continues ou discrètes) par le biais d'une copule.

## 5.1 Extraire une copule grâce au théorème de Sklar

Soit  $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ , dont les marginales  $F_1, \dots, F_n$  sont continues.

**Corollaire 11** *Soit  $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ , dont les marginales  $F_1, \dots, F_n$  sont continues. Alors, la copule  $C$  associée à  $F_{\underline{X}}$  est donnée par*

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{\underline{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\right).$$

**Preuve.** D'après la démonstration du volet#1 de théorème de Sklar, la copule  $C$  associée à  $F_{\underline{X}}$  est donnée par

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \\ &= \Pr(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_n(X_n) \leq u_n) \\ &= \Pr\left(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)\right) \\ &= F_{\underline{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\right). \end{aligned}$$



### 5.1.1 Exemple - Copule EFGM

Soit la fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM est donnée par

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right) \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right) \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right) e^{-\beta_1 x_1} e^{-\beta_2 x_2}, \quad (1)$$

avec un paramètre de dépendance  $-1 \leq \theta \leq 1$  et avec  $\beta_i > 0$ .

En remplaçant  $x_i$  par  $-\frac{1}{\beta_i} \ln(1 - u_i)$  ( $i = 1, 2$ ) dans (1), on déduit

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1) (1 - u_2)$$

pour  $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ .



## 5.2 Construire une distribution multivariée grâce au théorème de Sklar

En se basant sur la seconde partie du théorème de Sklar, une copule permet de combiner différentes lois marginales afin de créer une loi multivariée.

La copule  $C(u_1, \dots, u_n)$  décrit la relation de dépendance entre les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  alors que les marginales décrivent le comportement de chacune des v.a.

Dans le cas de v.a. continues, la copule contient toute l'information relative à la relation de dépendance entre les v.a.

On peut dès lors étudier les marginales et la copule séparément.

Le cas de marginales discrètes est traité à la section 19.

## 5.3 Avantages de l'approche via les copules

Elle offre de la flexibilité pour la création de lois multivariées

À cet égard, les marginales n'ont pas besoin d'être identiques.

Pour les vecteurs de v.a. continues, il est possible de distinguer la modélisation des marginales de celle de la structure de dépendance (copule).

En distinguant la modélisation des marginales de celle de celle de la copule, on peut décomposer la procédure d'estimation.

## 6 Bornes de Fréchet

Soit  $C$  une copule définie sur  $[0, 1]^n$ . Puisque  $C$  est une fonction de répartition, on a

$$W(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M(u_1, \dots, u_n),$$

où

$$W(u_1, u_2) = \max(u_1 + \dots + u_n - (n - 1); 0)$$

et

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1; \dots; u_n)$$

correspondent aux borne inférieure et borne supérieure de Fréchet.

Pour tout  $n = 2, 3, \dots$ ,

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = M(u_1, \dots, u_n)$$

correspond à la copule borne supérieure de Fréchet.

Pour tout  $n = 2$ ,

$$C^-(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)$$

correspond à la copule borne inférieure de Fréchet.

## 7 Copule et fonction de densité

Soit  $C$  une copule continue. La fonction de densité associée à la copule par

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n).$$

Soit un vecteur de v.a. continues  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  dont la fonction de répartition est

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)),$$

Alors, la fonction de densité est donnée par

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n), \end{aligned}$$

où  $f_{X_i}(x_i)$  est la fonction de densité de  $X_i$  i.e.  $f_{X_i}(x_i) = \frac{dF_{X_i}(x_i)}{dx_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

## 8 Simulation

Les copules sont très pratiques lorsque l'on veut recourir à la simulation.

Soit un vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  dont la fonction de répartition est

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = C\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\right),$$

On veut produire une réalisation  $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}\right)$  de  $\underline{X}$ .

Les marginales de  $F_{\underline{X}}$  peuvent être continues ou discrètes.

**Algorithme 12** *Simulation à partir d'une copule.*

1. *Simuler une réalisation  $\underline{U}^{(j)} = \left( U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)} \right)$  de  $\underline{U} \sim C$ .*
2. *Simuler une réalisation  $\underline{X}^{(j)}$  avec*

$$X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1} \left( U_1^{(j)} \right) \quad \dots \quad X_n^{(j)} = F_{X_n}^{-1} \left( U_n^{(j)} \right) .$$



## 9 Copules associées

Soit une copule  $C$  et  $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ . À partir de  $C$ , il est possible de créer 3 copules pour les paires de v.a. suivantes :

$$(U_1, 1 - U_2), (1 - U_1, U_2), (1 - U_1, 1 - U_2).$$

La copule pour le couple  $(U_1, 1 - U_2)$  est

$$\begin{aligned} F_{U_1, 1-U_2}(u_1, u_2) &= \Pr(U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2) \\ &= \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 > 1 - u_2) \\ &= u_1 - C(u_1, 1 - u_2). \end{aligned}$$

La copule pour le couple  $(1 - U_1, U_2)$  est

$$\begin{aligned} F_{1-U_1, U_2}(u_1, u_2) &= \Pr(1 - U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= \Pr(U_1 > 1 - u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= u_2 - C(1 - u_1, u_2). \end{aligned}$$

La copule pour le couple  $(1 - U_1, 1 - U_2)$  est appelée copule de survie, notée  $\hat{C}(u_1, u_2)$ , et elle donnée par

$$\begin{aligned} F_{1-U_1, 1-U_2}(u_1, u_2) &= \Pr(1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2) \\ &= \Pr(U_1 > 1 - u_1, U_2 > 1 - u_2) \\ &= 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + C(1 - u_1, 1 - u_2) \\ &= C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1. \end{aligned}$$

Les 3 copules associées  $C$  satisfont les propriétés suivantes :

$$C^-(u_1, u_2) \leq F_{U_1, 1-U_2}(u_1, u_2) = u_1 - C(u_1, 1 - u_2) \leq C^+(u_1, u_2)$$

$$C^-(u_1, u_2) \leq F_{1-U_1, U_2}(u_1, u_2) = u_2 - C(1 - u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2)$$

$$C^-(u_1, u_2) \leq F_{1-U_1, 1-U_2}(u_1, u_2) = \hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1$$

Soit un couple de  $(X_1, X_2)$  dont les marginales sont  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  :

– Soit  $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$  et  $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$ . Alors, on a

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{U_1, 1-U_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) = F_{X_1}(x_1) - C(F_{X_1}(x_1), 1 - F_{X_2}(x_2))$$

– Soit  $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$  et  $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$ . Alors, on a

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{1-U_1, U_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) = F_{X_2}(x_2) - C(1 - F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

– Soit  $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$  et  $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= F_{1-U_1, 1-U_2}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= \hat{C}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= C(1 - F_{X_1}(x_1), 1 - F_{X_2}(x_2)) + F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1 \end{aligned}$$

## 10 Copule de survie et théorème de Sklar

Soit une copule  $C$  et  $\underline{U} = (U_1, U_2) \sim C$ . Soit un couple de  $(X_1, X_2)$  dont les marginales sont  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) + 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) \\ &= C(1 - \overline{F}_{X_1}(x_1), 1 - \overline{F}_{X_2}(x_2)) + \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1\end{aligned}$$

Comme

$$\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1,$$

on déduit

$$\overline{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \hat{C}(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)).$$

Dès lors, il est possible d'adapter le théorème de Sklar dans le contexte des fonctions de survie.

Pour  $n = 2, 3, 4, \dots$ , on a

$$\overline{F}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}(\overline{F}_{X_1}(x_1), \dots, \overline{F}_{X_n}(x_n))$$

permettant d'extraire une copule  $\hat{C}$  à partir de la fonction de survie conjointe d'une loi continue multivariée avec

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_n) = \overline{F}_{X_1, \dots, X_n}(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, \overline{F}_{X_n}^{-1}(u_n)).$$

Puisque  $\hat{C}$  est une copule, on laissera tomber la décoration <sup>III</sup>. On utilisera cette méthode pour générer les copules appartenant à la classe Archimédienne de copules, qui comprend notamment les copules de Clayton, de Frank et Gumbel.

Il est aussi possible de construire une fonction de survie multivariée en combinant des fonctions marginales de survie à l'aide d'une copule.

# 11 Propriété d'invariance

## 11.1 Importante propriété

Un des intérêts de l'utilisation des copules découle de la propriété d'invariance.

**Axiom 13** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie avec la copule  $C$ . Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de  $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$  est la copule  $C$ .*

2. Si  $\phi_1$  est non décroissante et  $\phi_2$  est non croissante, alors la structure de dépendance de  $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$  est la copule  $u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$ .
3. Si  $\phi_1$  est non croissante et  $\phi_2$  est non décroissante, alors la structure de dépendance de  $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$  est la copule  $u_2 - C(1 - u_1, u_2)$ .
4. Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont non croissantes, alors la structure de dépendance de  $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$  est la copule  $\hat{C}$ .

On souligne que la forme de la copule ne dépend pas de la forme de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , ce qui est important pour l'estimation.



## 11.2 Exemple

On suppose que les rendements instantanés sur les titres 1 et 2 sont définis par les v.a.  $R_1$  et  $R_2$ .

De plus, la copule associée au couple  $(R_1, R_2)$  est  $C$ .

La valeur au temps 1 du titre  $i$  par la v.a.  $S_i(1) = S_i(0) \exp(R_i)$ , où le scalaire  $S_i(0)$  est la valeur du titre  $i$  au temps 0.

Alors, la copule associée au couple  $(S_1(1), S_2(1))$  est aussi  $C$ .

# 12 Fonction de répartition conditionnelle

## 12.1 Définition

Soit la copule  $C$  pour laquelle les dérivées partielles par rapport à  $u_1$  et  $u_2$

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \text{ et } C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$$

existent. Ainsi, les expressions des fonctions de répartition conditionnelles de  $X_2|X_1 = x_1$  et de  $X_1|X_2 = x_2$  pour un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$  sont données par

$$F_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = C_{2|1}(F_{X_2}(x_2) | F_{X_1}(x_1))$$

et

$$F_{X_1|X_2=x_2}(x_1) = C_{1|2}(F_{X_1}(x_1) | F_{X_2}(x_2)).$$

## 12.2 Simulation et fonction de répartition conditionnelle

Soit un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition conjointe est définie par les marginales  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  ainsi que la copule  $C$ . On veut produire les  $m$  réalisations  $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right), \dots, \left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)}\right)$  de la paire  $(X_1, X_2)$ . À cette fin, il suffit de produire  $m$  réalisations  $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right), \dots, \left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$  du couple  $(U_1, U_2)$  dont la fonction de répartition est la copule  $C$  et de calculer  $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$  pour  $i = 1, 2$  en appliquant la méthode inverse. Une approche générale pour produire la réalisation  $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) de  $(U_1, U_2)$  est d'utiliser la fonction de répartition conditionnelle en appliquant la procédure décrite ci-dessous.

### Algorithme 14 Procédure générale

1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1$  et  $V_2$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2$ .
2. On calcule  $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$  et  $U_2^{(j)} = C_{2|1}^{-1}(V_2^{(j)} | U_1^{(j)})$  où  $C_{2|1}^{-1}(v | u_1)$  est la fonction inverse de  $C_{2|1}(u_2 | u_1)$ , obtenue en trouvant la solution de  $C_{2|1}(u_2 | u_1) = v$ .
3. On répète pour  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Il y a aussi des méthodes spécifiques de simulation associées à certaines copules. Elles sont décrites à la section suivante.

## 13 Copule complète

Dans le cas où  $n = 2$ , on dit qu'une copule est *complète* si elle inclut la copule borne supérieure de Fréchet, la copule d'indépendance et la copule borne inférieure de Fréchet comme cas particuliers ou cas limites.

## 14 Copules de bases

Dans cette section, on présente brièvement les copules fréquemment utilisées, leurs principales caractéristiques et, dans certains cas, un algorithme de simulation spécifique pour la copule.

## 14.1 Copule d'indépendance

### 14.1.1 Définition

La copule indépendance est définie par

$$C^I(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n,$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 14.1.2 Simulation

**Algorithme 15** Simulation des réalisations de  $(U_1, \dots, U_n)$



1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}, \dots, V_n^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1, \dots, V_n$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. On calcule  $U_i^{(j)} = V_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pour  $n = 2$ , les réalisations produites par la copule sont uniformément réparties sur la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir figure 1).

## 14.2 Copule borne supérieure de Fréchet

### 14.2.1 Définition

La copule borne supérieure de Fréchet est représentée par

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1; \dots; u_n),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 14.2.2 Simulation

**Algorithme 16** Simulation des réalisations de  $(U_1, \dots, U_n)$

1. On simule la réalisation  $V^{(j)}$  de la v.a.  $V$  où  $V \sim U(0, 1)$ .
2. On calcule  $U_i^{(j)} = V^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pour  $n = 2$ , les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale  $u_1 = u_2$  dans  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir figure 1).

## 14.3 Copule bivarée de la borne inférieure de Fréchet

### 14.3.1 Définition

La copule borne supérieure de Fréchet correspond à  $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$

### 14.3.2 Simulation

#### Algorithme 17 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

1. On simule une réalisation  $V^{(j)}$  de la v.a.  $V \sim U(0, 1)$ .
2. On calcule  $U_1^{(j)} = V^{(j)}$  et  $U_2^{(j)} = 1 - V^{(j)}$ .

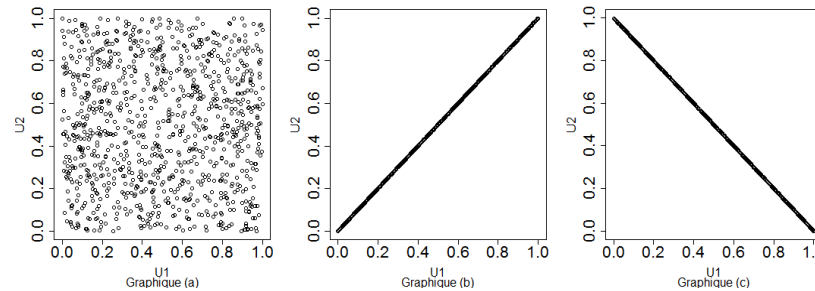


Fig. 1 – Les graphiques (a), (b) et (c) reproduisent 1000 réalisations de  $(U_1, U_2)$  provenant de la copule indépendance, borne supérieure de Fréchet et borne inférieure de Fréchet.

Les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale  $u_1 = 1 - u_2$  dans  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir figure 1).

## 14.4 Copule bivarée de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM)

### 14.4.1 Définition

La copule EFGM est déduite à partir de la loi exponentielle bivarée EFGM en utilisant la relation

$$C(u_1, u_2) = F_{X_1, X_2} \left( F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2) \right),$$

pour  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ .

La copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) se présente comme une forme de perturbation de la copule indépendance

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2), \quad (2)$$

pour  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Le cas particulier est  $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ .

La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2).$$

### 14.4.2 Simulation

L'algorithme suivant de simulation est basée sur la méthode de la fonction de répartition conditionnelle.

### Algorithme 18 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1$  et  $V_2$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2$ .
2. On pose  $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ .
3. On définit  $W_1^{(j)} = \alpha \left( 2U_1^{(j)} - 1 \right) - 1$  et

$$W_2^{(j)} = \left( 1 - \alpha \left( 2U_1^{(j)} - 1 \right) \right)^2 + 4\alpha V_2^{(j)} \left( 2U_1^{(j)} - 1 \right).$$

4. On calcule  $U_2^{(j)} = \frac{2V_2^{(j)}}{\left( \sqrt{W_2^{(j)}} - W_1^{(j)} \right)}.$

Dans la figure 2, on présente un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité.



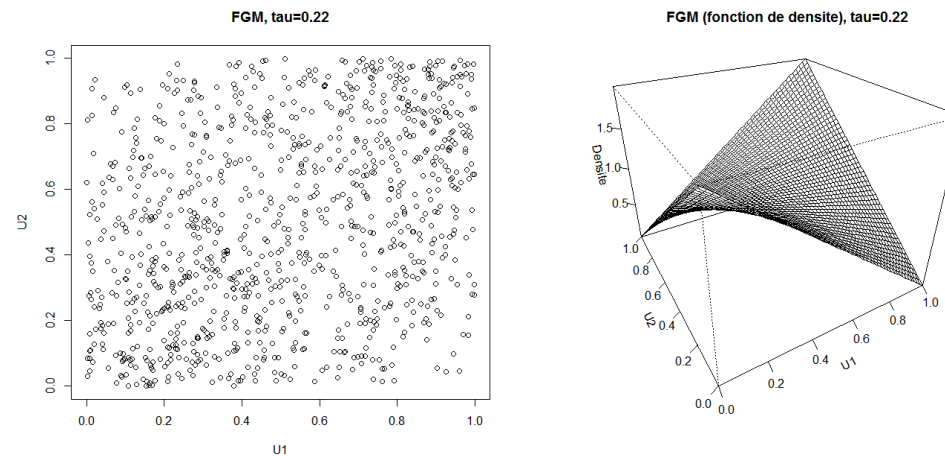


Fig. 2 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de EFGM et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

La copule introduit une relation de dépendance modérée qui peut être positive ( $\alpha > 0$ ) ou négative ( $\alpha < 0$ ).

Pour  $\alpha > 0$  ( $\alpha > 0$ ), on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale  $u_1 = u_2$  ( $u_1 = 1 - u_2$ ) de la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

# 15 Copules archimédiennes

## 15.1 Préliminaires

Les copules archimédiennes est une importante classe de copules.

Une copule  $C$  est dite archimédienne si elle s'écrit sous la forme

$$C(u_1, \dots, u_n) = \psi \left( \psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_n) \right)$$

où la fonction  $\psi$  est appelée un générateur.

La fonction  $\psi$  doit satisfaire les propriétés suivantes :

- $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  avec  $\psi(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$
- $\psi$  est une fonction continue
- $\psi$  est une fonction strictement décroissante sur  $[0, \psi^{-1}(0)]$
- $\psi^{-1}$  est la fonction inverse, i.e.

$$\psi^{-1}(x) = \inf \{u, \psi(u) \leq x\}.$$

Quelle est la fonction  $\psi$  ? Quelles sont les fonctions qui satisfont ces propriétés ?

La fonction  $\psi$  va générer une copule archimédienne pour **toute** dimension  $n$  si et seulement  $\psi$  est complètement monotone i.e.

$$(-1)^k \frac{d^k \psi(x)}{dx^k} \geq 0.$$

Une fonction est complètement monotone si et seulement si elle est une transformée de Laplace Stieltjes d'une v.a. strictement positive.

On présente ci-dessous une méthode générale de construction de copules archimédiennes par le biais de transformées de Laplace-Stieltjes de v.a. strictement positives..

À partir de fonctions  $\psi$  dites  $d$ —monotones, on peut générer des copules qui vont exister pour des dimensions  $n = 2, \dots, d$  seulement.

Pour l'instant, on n'aborde pas les copules générées par le biais de telles fonctions.

## 15.2 Construction des copules archimédiennes - Étape #1

Une copule de la famille archimédienne peut être déduite de la fonction de survie multivariée d'une loi exponentielle-mélange multivariée.

Selon une loi exponentielle-mélange multivariée, les v.a.  $Y_1, \dots, Y_n$  obéissent à des lois exponentielles univariées dont les paramètres correspondent à une v.a.  $\Theta$  mélange.

Soit une v.a. **strictement positive**  $\Theta$  avec une fonction de répartition  $F_\Theta$  et une transformée de Laplace-Stieltjes  $\mathcal{L}_\Theta$ .

La v.a.  $\Theta$  peut être discrète ou continue.

Soit un vecteur de v.a.  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  où

- $(Y_1|\Theta = \theta), \dots, (Y_n|\Theta = \theta)$  sont conditionnellement indépendantes ;
- $(Y_i|\Theta = \theta) \sim \text{Exp}(\theta), i = 1, 2, \dots, n.$

La fonction de survie de la v.a.  $Y_i$  est

$$\overline{F}_{Y_i}(x_i) = E \left[ e^{-\Theta x_i} \right] = \mathcal{L}_{\Theta}(x_i)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n.$

La fonction de survie de  $\underline{Y}$  est

$$\begin{aligned}
 \overline{F}_{\underline{Y}}(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{Y}|\Theta=\theta}(x_1, \dots, x_n) dF_\Theta(\theta) \\
 &= \int_0^\infty \overline{F}_{Y_1|\Theta=\theta}(x_1) \times \dots \times \overline{F}_{Y_n|\Theta=\theta}(x_n) dF_\Theta(\theta) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\theta x_1} \times \dots \times e^{-\theta x_n} dF_\Theta(\theta) \\
 &= E \left[ e^{-\Theta x_1} \times \dots \times e^{-\Theta x_n} \right] \\
 &= E \left[ e^{-\Theta(x_1 + \dots + x_n)} \right] \\
 &= \mathcal{L}_\Theta(x_1 + \dots + x_n)
 \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .



## 15.3 Construction des copules archimédiennes - Étape #2

On applique la partie no1 du théorème de Sklar.

Allons-y !

L'expression de la copule est

$$C(u_1, \dots, u_n) = \overline{F}_{\underline{Y}} \left( \overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1), \dots, \overline{F}_{Y_i}^{-1}(u_n) \right).$$

Bon, euh, on a

$$x_i = \overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1) = \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u_i)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

On remplace les arguments  $x_1, \dots, x_n$  de

$$\overline{F}_{\underline{Y}}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}_{\Theta}(x_1 + \dots + x_n)$$

par

$$x_i = \overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_i) = \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u_i)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors, l'expression de la copule est

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{L}_{\Theta}(\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u_1) + \dots + \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u_n))$$

pour  $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ .

La fonction  $\psi$  correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes de  $\Theta$ .

**Exemple 19** Soit  $\Theta \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$  avec

$$\mathcal{L}_{\Theta}(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression de  $\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}$  est la solution de

$$\mathcal{L}_{\Theta}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = u.$$

On obtient

$$x = \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u) = u^{-\alpha} - 1$$

*pour  $u \in [0, 1]$ . On conclut*

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \left( \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n (u_i^{-\alpha} - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - (n - 1) \right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

*pour  $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ . Le résultat est appelée la copule de Clayton.  $\square$*

## 15.4 Simulation pour les copules archimédiennes

Rappel : On sait

$$C(u_1, \dots, u_n) = \overline{F}_{\underline{Y}} \left( \overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1), \dots, \overline{F}_{Y_i}^{-1}(u_n) \right).$$

Objectif : simuler des réalisations  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  où

$$F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n).$$

Méthode générale :

1. Simulation de  $\underline{Y}^{(j)}$  de  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ .

2. Simulation de  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i} \left( Y_i^{(j)} \right)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Méthode générale appliquée à une copule archimédienne :

1. Simulation de  $\underline{Y}^{(j)}$  de  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  (dédue de la construction de la distribution multivariée de  $\underline{Y}$ ) :
  - (a) Simulation de  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ .
  - (b) Simulation de  $\underline{V}^{(j)}$  de  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  qui est un vecteur de v.a. iid de loi  $Unif(0, 1)$ .
  - (c) Simulation de  $Y_i^{(j)}$  avec

$$\left( Y_i | \Theta = \Theta^{(j)} \right) = F_{Y_i | \Theta = \Theta^{(j)}}^{-1} \left( V_i^{(j)} \right) = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left( 1 - V_i^{(j)} \right)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2. Simulation de  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i} \left( Y_i^{(j)} \right) = \mathcal{L}_{\Theta} \left( Y_i^{(j)} \right),$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

On applique l'algorithme pour la copule de Clayton.

Méthode générale appliquée à une copule archimédienne :

1. Simulation de  $\underline{Y}^{(j)}$  de  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  (déduite de la construction de la distribution multivariée de  $\underline{Y}$ ) :
  - (a) Simulation de  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta \sim \text{Gamma} \left( \frac{1}{\alpha}, 1 \right)$ .
  - (b) Simulation de  $\underline{V}^{(j)}$  de  $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$  qui est un vecteur de v.a. iid de loi  $\text{Unif}(0, 1)$ .

(c) Simulation de  $Y_i^{(j)}$  avec

$$\left(Y_i | \Theta = \Theta^{(j)}\right) = F_{Y_i | \Theta = \Theta^{(j)}}^{-1} \left(V_i^{(j)}\right) = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left(1 - V_i^{(j)}\right)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2. Simulation de  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  avec

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i} \left(Y_i^{(j)}\right) = \mathcal{L}_{\Theta} \left(Y_i^{(j)}\right) = \left(\frac{1}{1 + Y_i^{(j)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .



## 15.5 Copule bivarée de Ali-Mikhail-Haq

### 15.5.1 Définition

L'expression de la copule de Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1, u_2) &= \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)} \\ &= u_1 u_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^k, \end{aligned} \quad (3)$$

pour  $\alpha \in [-1, 1]$ . Le cas particulier est  $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ .

La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = \frac{1 - \alpha + 2\alpha \frac{u_1 u_2}{1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)}}{(1 - \alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^2}.$$

## 15.5.2 Simulation

On fournit deux algorithmes de simulation pour la copule AMH.

Le premier algorithme est plus intéressant.

La méthode de simulation du premier algorithme est basée sur la méthode de simulation de la loi exponentielle-géométrique et l'application de la méthode d'inversion de création des copules (selon la première partie du théorème de Sklar).

La méthode de simulation du premier algorithme se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivarée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

### Algorithme 20 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

#### 1. (Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-géométrique bivarée).

(a) On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$  qui obéit à une loi géométrique de type 2.

(b) On simule les réalisations  $(W_1^{(j)}, W_2^{(j)})$  de  $(W_1, W_2)$  avec

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left( 1 - V_1^{(j)} \right)$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left( 1 - V_2^{(j)} \right)$$

où  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  sont des réalisations indépendantes de  $V_1 \sim Unif(0, 1)$  et  $V_2 \sim Unif(0, 1)$ .

2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On simule les réalisations  $U_1^{(j)}$  et  $U_2^{(j)}$  avec

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1} \left( W_1^{(j)} \right) = \frac{(1 - \alpha)}{\left( e^{W_1^{(j)}} - \alpha \right)}$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2} \left( W_2^{(j)} \right) = \frac{(1 - \alpha)}{\left( e^{W_2^{(j)}} - \alpha \right)}.$$

L'algorithme suivant de simulation est basée sur la méthode de la fonction de répartition conditionnelle.

### Algorithme 21 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$ .

1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1$  et  $V_2$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2$ .
2. On pose  $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ .
3. On définit  $A = 1 - U_1^{(j)}$ ,  $B = -\alpha \left( 2AV_2^{(j)} + 1 \right) + 2\alpha^2 A^2 \times V_2^{(j)} + 1$  et
 
$$C = 1 + \alpha^2 \left( 4A^2 V_2^{(j)} - 4AV_2^{(j)} + 1 \right) + \alpha \left( 4AV_2^{(j)} - 4V_2^{(j)} + 2 \right).$$
4. On calcule  $U_2^{(j)} = \frac{2 \times V_2^{(j)} (A\alpha - 1)^2}{(B + \sqrt{C})}$ .

On présente un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité sont reproduits dans la figure 3.

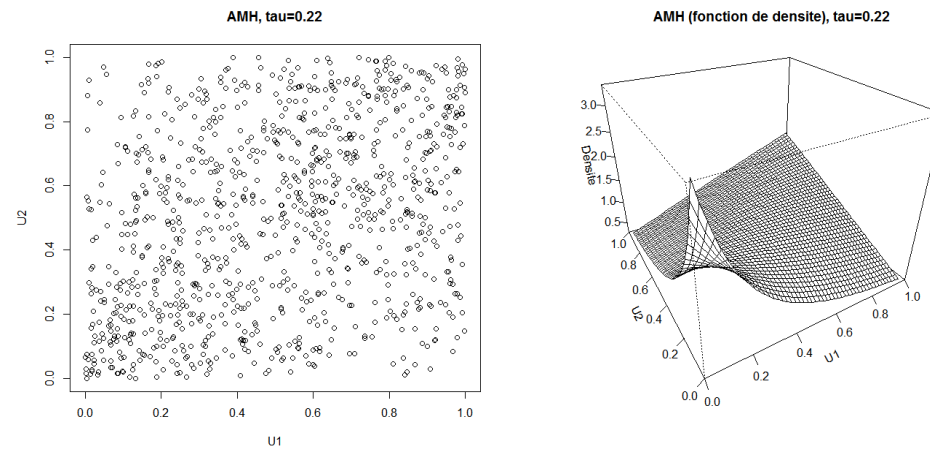


Fig. 3 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de AMH et de sa fonction de densité ( $\tau$  de Kendall = 0.22).

La copule permet d'introduire une relation de dépendance modérée qui peut être positive ou négative.

Pour  $\alpha > 0$  ( $\alpha > 0$ ), on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale  $u_1 = u_2$  ( $u_1 = 1 - u_2$ ) de la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 15.6 Copule bivarée de Clayton

### 15.6.1 Définition

La copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$  et  $\alpha > 0$ .

Les cas limites sont

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2).$$



L'expression de la fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = \frac{1 + \alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} \left( u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right)^{-2 - \frac{1}{\alpha}}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left( u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right)^{-1 - \frac{1}{\alpha}}.$$

## 15.6.2 Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivarée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

### Algorithme 22 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

**1. (Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-gamma bivarée).**

- (a) On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ .
- (b) On simule les réalisations  $\left(W_1^{(j)}, W_2^{(j)}\right)$  de  $(W_1, W_2)$  où  $\left(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}\right) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$ , pour  $i = 1, 2$ , i.e.

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln \left(1 - V_2^{(j)}\right)$$

où  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  sont des réalisations indépendantes de  $V_1 \sim \text{Unif}(0, 1)$  et  $V_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On simule les réalisations  $U_1^{(j)}$  et  $U_2^{(j)}$  avec

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1} \left( W_1^{(j)} \right) = \left( 1 + W_1^{(j)} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2} \left( W_2^{(j)} \right) = \left( 1 + W_2^{(j)} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Les figures 4 et 5 reproduisent des graphiques des réalisations de la copule de Clayton et des graphiques de sa fonction de densité.

La copule induit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de  $\underline{U}$ .

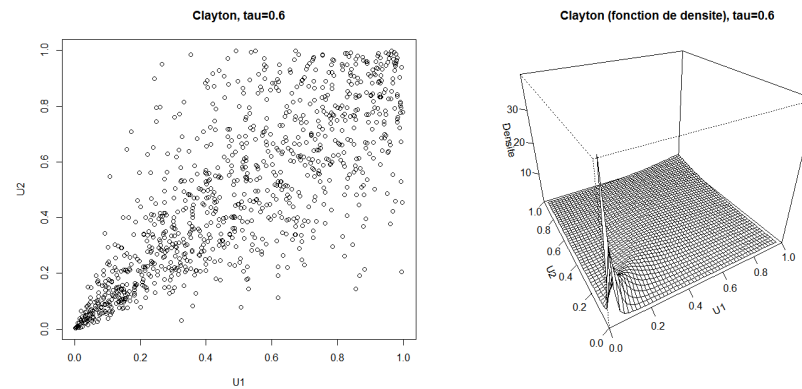


Fig. 4 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité ( $\tau$  de Kendall = 0.22).

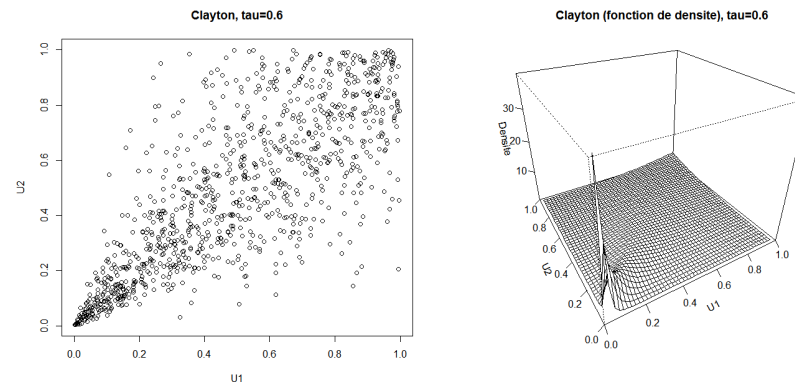


Fig. 5 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité ( $\tau$  de Kendall = 0.6).

La copule introduit une relation de dépendance forte aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et faible aux valeurs extrêmes de la queue à droite.

### 15.6.3 Simulation – approche via la copule conditionnelle

Il est aussi possible d'utiliser l'algorithme basée sur la copule conditionnelle

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left( u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

En effet, pour  $v \in ]0, 1[$ , on identifie l'expression de  $u_2$  qui satisfait

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{1}{u_1^{\alpha+1}} \left( u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right)^{-1-\frac{1}{\alpha}} = v.$$

On a

$$\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}} = v \times u_1^{\alpha+1}$$

qui devient

$$\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right) = \left(v \times u_1^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

On obtient

$$u_2 = \left(\left(v \times u_1^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - u_1^{-\alpha} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

### Algorithme 23 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$ .

1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1$  et  $V_2$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2$ .

2. On pose  $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ .

3. On calcule

$$U_2^{(j)} = \left( \left( V_2^{(j)} \times \left( U_1^{(j)} \right)^{\alpha+1} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \left( U_1^{(j)} \right)^{-\alpha} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

#### 15.6.4 Version multivariée

La copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = \left( u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - (n-1) \right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $\alpha > 0$ .

#### Algorithme 24 Simulation des réalisations de $(U_1, \dots, U_n)$



1. **(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-gamma bivarée).**

(a) On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ .

(b) On simule les réalisations  $\left(W_1^{(j)}, \dots, W_n^{(j)}\right)$  de  $(W_1, \dots, W_n)$  où  $(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}) \sim Exp\left(\Theta^{(j)}\right)$ , i.e.

$$W_i^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_1^{(j)}\right)$$

pour  $i = 1, \dots, n$ , où  $V_1^{(j)} \dots V_n^{(j)}$  sont des réalisations indépendantes de  $V_1 \sim Unif(0, 1) \dots V_n \sim Unif(0, 1)$ .

2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On simule les réalisations  $U_1^{(j)} \dots U_n^{(j)}$  avec

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1}\left(W_1^{(j)}\right) = \left(1 + W_1^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \dots U_n^{(j)} = \overline{F}_{W_n}\left(W_n^{(j)}\right) = \left(1 + W_n^{(j)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

## 15.7 Copule bivarée de Frank

### 15.7.1 Définition

L'expression de la copule de Frank est

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$  et  $\alpha \neq 0$ .

Les cas limites sont  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$ .

La fonction de densité est

$$c(u_1, u_2) = \frac{\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)} (1 - e^{-\alpha})}{\left(e^{-\alpha(u_1+u_2)} - e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha u_2} + e^{-\alpha}\right)^2}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}.$$

La copule de Frank est complète.

## 15.7.2 Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivarée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

### **Algorithme 25 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$ ( $\alpha > 0$ )**

- 1. (Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-logarithmique bivarée).**

- (a) On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta$  de loi logarithmique avec paramètre  $\gamma = 1 - e^{-\alpha}$ .
- (b) On simule les réalisations  $(W_1^{(j)}, W_2^{(j)})$  de  $(W_1, W_2)$  où  $(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}) \sim \text{Exp}(\Theta^{(j)})$ , pour  $i = 1, 2$ , i.e.

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln(1 - V_1^{(j)})$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln(1 - V_2^{(j)})$$

où  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  sont des réalisations indépendantes de  $V_1 \sim \text{Unif}(0, 1)$  et  $V_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On simule les

réalisations  $U_1^{(j)}$  et  $U_2^{(j)}$  avec

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1} \left( W_1^{(j)} \right) = \frac{\ln(1 - \gamma e^{-W_1^{(j)}})}{\ln(1 - \gamma)}$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2} \left( W_2^{(j)} \right) = \frac{\ln(1 - \gamma e^{-W_2^{(j)}})}{\ln(1 - \gamma)}$$

Un aperçu des réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité est fourni dans les figures 6 et 7.

Lorsque  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de  $\underline{U}$ .

Les réalisations se concentrent autour de la diagonale  $u_1 = u_2$  ( $u_1 = 1 - u_2$ ) sur la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

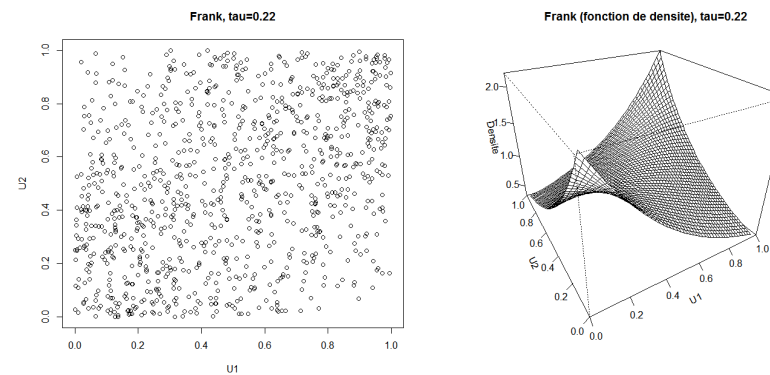


Fig. 6 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité ( $\tau$  de Kendall = 0.22).

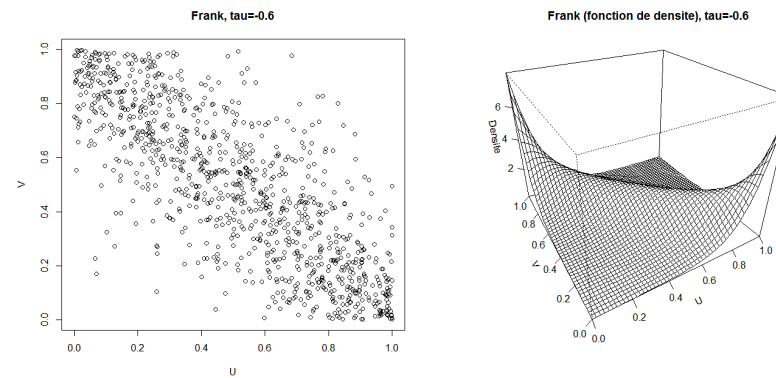


Fig. 7 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).



La dépendance est modérée aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et de la queue à droite.

### 15.7.3 Simulation – approche via la copule conditionnelle

Il est aussi possible d'utiliser l'algorithme basée sur la copule conditionnelle dont l'expression est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}.$$

En effet, pour  $v \in ]0, 1[$ , on identifie l'expression de  $u_2$  qui satisfait

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)} = v.$$

On a

$$e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1) = v \times (e^{-\alpha} - 1) + v \times (e^{-\alpha u_1} - 1) (e^{-\alpha u_2} - 1)$$

qui devient

$$e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1) - v \times (e^{-\alpha u_1} - 1) (e^{-\alpha u_2} - 1) = v \times (e^{-\alpha} - 1)$$

et

$$(e^{-\alpha u_2} - 1) = \frac{v \times (e^{-\alpha} - 1)}{e^{-\alpha u_1} (1 - v) + v}.$$

On obtient

$$u_2 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{v \times (e^{-\alpha} - 1)}{e^{-\alpha u_1} (1 - v) + v} \right).$$

### Algorithme 26 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$ .

1. On simule les réalisations  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $V_1$  et  $V_2$  où  $V_i \sim U(0, 1)$  pour  $i = 1, 2$ .
2. On pose  $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ .
3. On calcule

$$U_2^{(j)} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{V_2^{(j)} \times (e^{-\alpha} - 1)}{e^{-\alpha U_1^{(j)}} (1 - V_2^{(j)}) + V_2^{(j)}} \right).$$

### 15.7.4 Version multivariée

On définit par la copule de Frank par

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\alpha u_i} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $\alpha > 0$ .

#### Algorithme 27 Simulation des réalisations de $(U_1, \dots, U_n)$

1. On simule les réalisations  $Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $Z_1, \dots, Z_n$  où  $Z_i \sim \text{Exp}(1)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2. On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta$  de loi logarithmique avec paramètre  $\gamma = 1 - e^{-\alpha}$ .

3. On calcule  $U_i^{(j)} = \frac{\ln(1 - \gamma e^{-\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}})}{\ln(1 - \gamma)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 15.8 Copule bivarée de Gumbel

### 15.8.1 Définition

On définit la copule de Gumbel par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \exp\left(-\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$  et  $\alpha \geq 1$ .

Les cas limites sont

- $\lim_{\alpha \rightarrow 1} C_\alpha(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
- et  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$ .

La fonction de densité est

$$\begin{aligned}
 & c(u_1, u_2) \\
 = & C_\alpha(u_1, u_2) \times \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \\
 & \times ((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2} \left( \alpha - 1 + ((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right).
 \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = C_\alpha(u_1, u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1} ((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

## 15.8.2 Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivarée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

### Algorithme 28 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

1. (Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle-stable bivarée, aussi appelée loi Weibull bivarée).



- (a) On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta$  de loi Stable  $(\varphi, 1, \gamma, 0)$  où  $\varphi = \frac{1}{\alpha}$  et  $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ).
- (b) On simule les réalisations  $(W_1^{(j)}, W_2^{(j)})$  de  $(W_1, W_2)$  où  $(W_i | \Theta = \Theta^{(j)}) \sim \text{Exp}(\Theta^{(j)})$ , pour  $i = 1, 2$ , i.e.

$$W_1^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln(1 - V_1^{(j)})$$

$$W_2^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln(1 - V_2^{(j)})$$

où  $V_1^{(j)}$  et  $V_2^{(j)}$  sont des réalisations indépendantes de  $V_1 \sim \text{Unif}(0, 1)$  et  $V_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On simule les

réalisations  $U_1^{(j)}$  et  $U_2^{(j)}$  avec

$$U_1^{(j)} = \overline{F}_{W_1} \left( W_1^{(j)} \right) = \exp \left( - \left( W_1^{(j)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

$$U_2^{(j)} = \overline{F}_{W_2} \left( W_2^{(j)} \right) = \exp \left( - \left( W_2^{(j)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

Comme il est expliqué dans [?], il existe plusieurs paramétrisation de la loi stable.

Dans le présent contexte, la loi  $Stable(\varphi, 1, \gamma, 0)$ , avec les paramètres indiqués, est définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

La transformée de Laplace associée à la loi  $Stable(\varphi, 1, \gamma, 0)$  est  $e^{-t^\varphi}$ .

**Algorithme 29** Simulation d'une réalisation  $W^{(j)}$  d'une v.a.  $W$  obéissant à une loi *Stable*  $(\varphi, 1, \gamma, 0)$  avec  $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$

1. On simule une réalisation  $R^{(j)}$  de la v.a.  $R \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
2. On simule une réalisation  $V^{(j)}$  de la v.a.  $V \sim \text{Exp}(1)$ .
3. On calcule

$$A = \frac{\sin\left(\varphi\left(R^{(j)} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(\cos\left(R^{(j)}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}}$$

$$B = \left(\frac{\cos\left(\varphi\frac{\pi}{2} + (\varphi - 1)R^{(j)}\right)}{V^{(j)}}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}}.$$

4. On calcule  $W^{(j)} = A \times B$ .

*On peut exprimer  $W = \gamma Y$  où  $Y$  obéit à une loi stable standard  $Stable(\varphi, 1, 1, 0)$  et  $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$ .*

*Le présent algorithme est une adaptation d'un algorithme fourni dans [?] permettant de simuler une réalisation de  $Y$ .*

Des réalisations de la copule de Gumbel et sa fonction de densité sont représentées dans les figures 8 et 9.

La copule introduit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de  $\underline{U}$ .

La copule introduit une relation de dépendance plus forte entre les valeurs extrêmes de la queue à droite et plus faible entre les valeurs extrêmes de la queue à gauche.

La copule est aussi appelée «Gumbel-Hougaard».

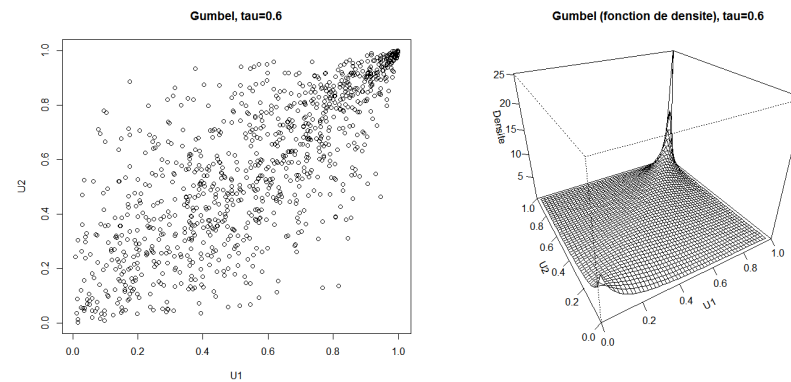


Fig. 8 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

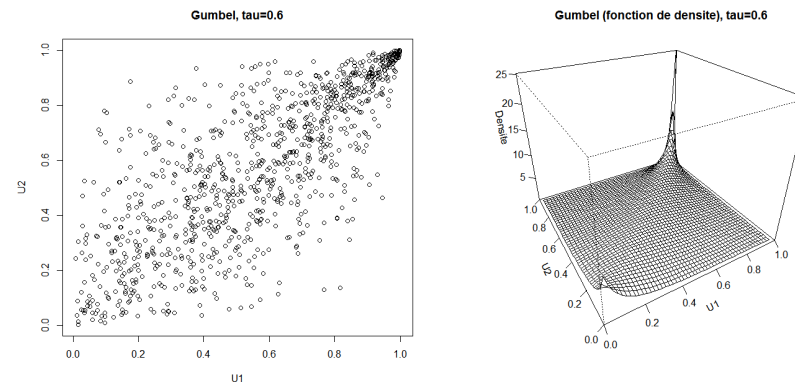


Fig. 9 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité ( $\tau$  de Kendall = 0.6).

### 15.8.3 Simulation – approche via la copule conditionnelle

On peut aussi voir recours à l'approche basée sur la copule conditionnelle pour simuler des réalisations de  $(U_1, U_2)$ .

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = C_\alpha(u_1, u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1} \left( (-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

En effet, pour  $v \in ]0, 1[$ , on identifie l'expression de  $u_2$  qui satisfait

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1} (e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)} = v.$$

Contrairement aux copules de Clayton et de Frank, l'inversion doit être réalisée par optimisation numérique.

### 15.8.4 Version multivariée

La copule de Gumbel est définie par

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = \exp \left( - \left\{ \sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\alpha \right\} \right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $\alpha \geq 1$ .

#### Algorithme 30 Simulation des réalisations de $(U_1, \dots, U_n)$

1. On simule les réalisations  $Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $Z_1, \dots, Z_n$  où  $Z_i \sim \text{Exp}(1)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. On simule la réalisation  $\Theta^{(j)}$  de la v.a.  $\Theta$  de loi Stable  $(\varphi, 1, \gamma, 0)$  où  $\varphi = \frac{1}{\alpha}$  et  $\gamma = \left( \cos \left( \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right)^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ).



3. On calcule  $U_i^{(j)} = \exp \left( - \left( \frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 16 Copules elliptiques

La famille des copules elliptiques comprend notamment la copule normale et la copule de Student.

Elles sont couramment utilisées en finance.

Elles se caractérisent par des graphiques en points de forme elliptique.

## 16.1 Copule normale bivariée

### 16.1.1 Définition

La copule normale est définie par

$$C_{\alpha}^N(u_1, u_2) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Contrairement aux copules présentées précédemment, la copule normale n'a pas de forme analytique.

Les cas particuliers sont

- $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
- $C_1(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$
- $C_{-1}(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$ .

L'expression de la fonction de densité  $c(u_1, u_2)$  est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\frac{(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2)}{2(1-\alpha^2)}}} e^{\frac{(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2)}{2}}.$$

On a

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \alpha\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Lorsque  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de  $\underline{U}$ .

La copule normale est complète.

### 16.1.2 Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivariée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

**Algorithme 31 Simulation des réalisations de  $(U_1, U_2)$** 

1. **(Simulation d'une réalisation de la loi normale standard bivariee).** *On simule une réalisation  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)})$  de la paire de v.a.  $(Z_1, Z_2)$  où  $(Z_1, Z_2)$  obéit à une loi normale bivariee standard avec un coefficient de corrélation  $\alpha$ .*
2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** *On calcule  $U_i^{(j)} = \Phi(Z_i^{(j)})$ ,  $i = 1, 2$ .*

Dans les figures 10 et 11, on présente des graphiques avec des réalisations de la copule normale et avec sa fonction de densité.

Les réalisations de la copule normale prennent la forme d'une ellipse.

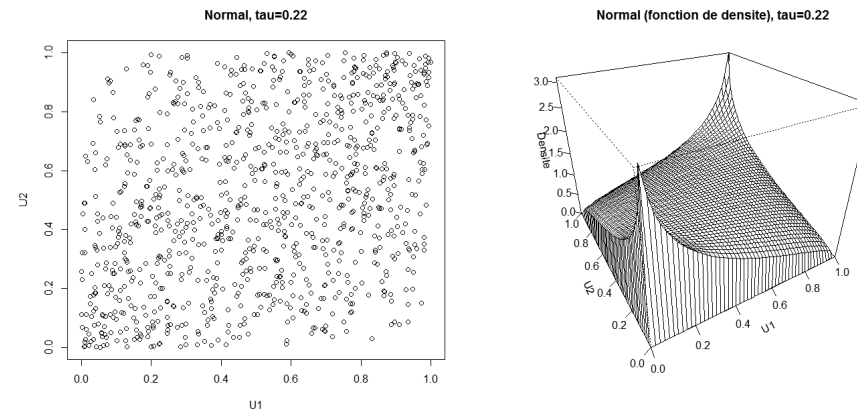


Fig. 10 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

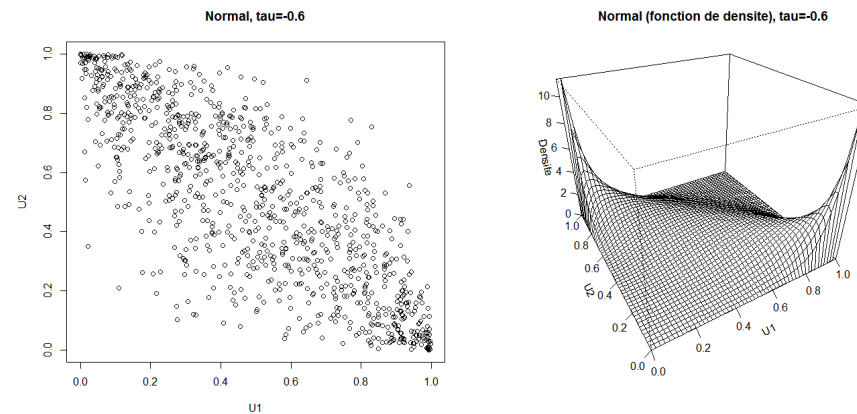


Fig. 11 – Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).



Pour  $\alpha > 0$ , cette ellipse se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre  $\alpha$ ) autour de la diagonale entre le point inférieur gauche et le point supérieur droit de la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Pour  $\alpha < 0$ , l'ellipse de points se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre  $\alpha$ ) autour de la diagonale entre le point supérieur gauche et le point inférieur droit de la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### 16.1.3 Version multivariée

On définit la copule normale par

$$C_{\underline{\alpha}}(u_1, \dots, u_n) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)\right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ ,  $i < j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Algorithme 32 Simulation des réalisations de $(U_1, \dots, U_n)$

1. On simule une réalisation  $\left(Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)}\right)$  du vecteur de v.a.  $(Z_1, \dots, Z_n)$  où  $(Z_1, \dots, Z_n)$  obéit à une loi normale multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation  $\underline{\alpha}$ .
2. On calcule  $U_i^{(j)} = \Phi\left(Z_i^{(j)}\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 16.2 Copule de Student bivarée

### 16.2.1 Définition

L'expression de la copule de Student est

$$C_{\nu, \underline{\alpha}}^S(u_1, u_2) = t_{\nu, \underline{\alpha}} \left( t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2) \right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Les cas limites sont

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\nu, \alpha}^S(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$  et
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_{\nu, \alpha}^S = C^+(u_1, u_2)$ .

La fonction de densité est

$$\begin{aligned}
 & c(u_1, u_2) \\
 = & \alpha^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha t_\nu^{-1}(u_1)t_\nu^{-1}(u_2) + t_\nu^{-1}(u_2)^2}{\nu(1 - \alpha^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \\
 & \times \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_2)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}.
 \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = t_{\nu+1} \left( \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + (t_{\nu}^{-1}(u_1))^2}} \frac{t_{\nu}^{-1}(u_2) - \alpha t_{\nu}^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right).$$

La copule de Student tend vers la copule normale quand  $\nu \rightarrow \infty$ .

Comme la copule normale, la copule de Student n'a pas de forme explicite.

La copule de Student est complète.

### 16.2.2 Simulation

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivariee à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

### Algorithme 33 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

1. **(Simulation d'une réalisation de la loi Student standard bivariee).** *On simule une réalisation  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)})$  de la paire de v.a.  $(Z_1, Z_2)$  où  $(Z_1, Z_2)$  obéit à une loi de Student bivariee standard avec un coefficient de corrélation  $\alpha$  et un degré de liberté  $\nu$ .*
2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** *On calcule  $U_i^{(j)} = t_\nu(Z_i^{(j)})$ ,  $i = 1, 2$  où  $t_\nu$  est la fonction de répartition d'une loi de Student.*

### 16.2.3 Version multivariée

La copule de Student est définie par

$$C_{\nu, \underline{\alpha}}(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu, \underline{\alpha}} \left( t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n) \right),$$

pour  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ ,  $i < j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Algorithme 34** Simulation des réalisations de  $(U_1, \dots, U_n)$

1. On simule une réalisation  $\left(Z_1^{(j)}, \dots, Z_n^{(j)}\right)$  du vecteur de v.a.  $(Z_1, \dots, Z_n)$  où  $(Z_1, \dots, Z_n)$  obéit à une loi de Student multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation  $\underline{\alpha}$ .
2. On calcule  $U_i^{(j)} = t_\nu \left(Z_i^{(j)}\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Si  $\underline{\alpha}$  est égale à la matrice identité, cela n'implique pas l'indépendance comme c'est le cas pour la copule normale.



## 17 Copules avec singularité

Dans cette section, on présente brièvement des copules ayant une composante singulière.

### 17.1 Copule bivariée de Fréchet

#### 17.1.1 Définition

La copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules borne inférieure de Fréchet, indépendance et borne supérieure de Fréchet avec

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + \beta C^-(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp(u_1, u_2),$$

pour  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,  $\alpha + \beta \leq 1$ .

Les cas particuliers sont

- $C_{0,0}(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ ,
- $C_{1,0}(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$
- $C_{0,1}(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$ .

La copule de Fréchet est complète.

### 17.1.2 Simulation

#### Algorithme 35 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$

1. On simule une réalisation  $(V_1^{\perp(j)}, V_2^{\perp(j)})$  de la copule indépendance.
2. On simule une réalisation  $(V_1^{+(j)}, V_2^{+(j)})$  de la copule borne supérieure de Fréchet.
3. On simule une réalisation  $(V_1^{-(j)}, V_2^{-(j)})$  de la copule borne supérieure de Fréchet.
4. On simule une réalisation  $J^{(j)}$  de la v.a. discrète  $J$  où  $f_J(0) = \alpha$ ,  $f_J(1) = \beta$  et  $f_J(2) = 1 - \alpha - \beta$ .
5. On calcule  $U_i^{(j)} = \mathbf{1}_{\{J=0\}} \times V_i^{+(j)} + \mathbf{1}_{\{J=1\}} \times V_i^{-(j)} + \mathbf{1}_{\{J=2\}} \times V_i^{\perp(j)}$ , pour  $i = 1, 2$ .

La copule de Fréchet comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$  et deux portions singulières avec réalisations distribuées uniformément sur les diagonales  $u_1 = u_2$  et  $u_1 = 1 - u_2$  dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

En posant  $\beta = 0$ , on obtient la copule de Spearman dont l'expression est

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + (1 - \alpha) C^\perp(u_1, u_2),$$

pour  $\alpha \in [0, 1]$ .

La copule de Spearman introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de  $\underline{U}$ .

Cette copule comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$  et une portion singulière avec réalisations distribuées uniformément sur la diagonale  $u_1 = u_2$  dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 17.2 Copule bivarée de Cuadras-Augé

### 17.2.1 Définition

La copule de Cuadras-Augé se présente sous la forme d'une moyenne géométrique des copules indépendance et borne supérieure de Fréchet

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1, u_2) &= C^+(u_1, u_2)^\alpha C^\perp(u_1, u_2)^{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} u_1 u_2^{1-\alpha}, & \text{si } u_1 \leq u_2 \\ u_1^{1-\alpha} u_2, & \text{si } u_1 \geq u_2 \end{cases}, \end{aligned}$$

pour  $\alpha \in [0, 1]$ .

Les cas particuliers sont

- $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
- $C_1(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$ .

## 17.2.2 Simulation

### Algorithme 36 Simulation des réalisations de $(U_1, U_2)$ pour $\alpha \in (0, 1)$

1. (Simulation de la loi exponentielle bivarée de Marshall-Olkin (voir copule Marshall-Olkin)).

(a) On simule les réalisations  $Y_0^{(j)}$ ,  $Y_1^{(j)}$  et  $Y_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $Y_0 \sim \text{Exp}(\alpha)$  et  $Y_1 \sim Y_2 \sim \text{Exp}(1 - \alpha)$ .

(b) On calcule la réalisation  $W_i^{(j)} = \min(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)})$  de la v.a.  $W_i$  pour  $i = 1, 2$ . Note : on a

$$W_1 \sim W_2 \sim \text{Exp}(1)$$

avec  $F_W(x) = 1 - \exp(-x)$ .

## 2. (Application de la première partie du théorème de Sklar).

On calcule

$$U_i^{(j)} = F_{W_i} \left( W_i^{(j)} \right) = 1 - \exp \left( -W_i^{(j)} \right),$$

pour  $i = 1, 2$ .

Dans la figure 12, on reproduit deux graphiques de réalisations de  $(U_1, U_2)$  provenant de la copule de Cuadras-Augé.

La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de  $\underline{U}$ .

La copule comporte une portion continue avec

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha, \beta} (u_1, u_2) = \begin{cases} (1 - \alpha) u_2^{-\alpha}, & \text{si } u_1 < u_2 \\ (1 - \beta) u_1^{-\alpha}, & \text{si } u_1 > u_2 \end{cases}$$

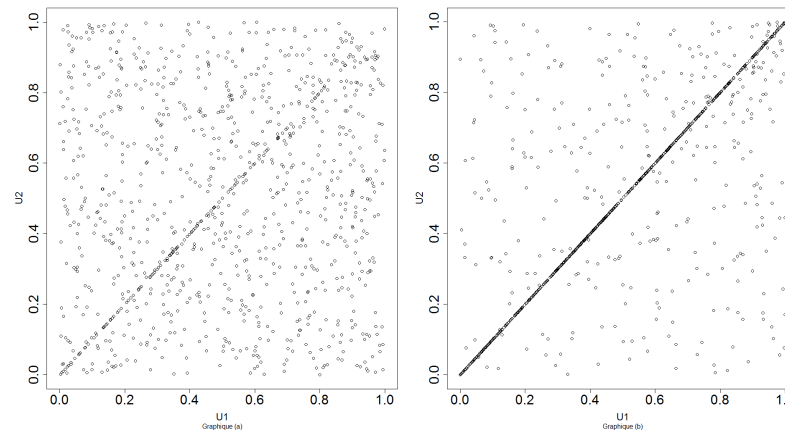


Fig. 12 – Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de  $(U_1, U_2)$  provenant de la copule de Cuadras-Augé pour  $\alpha$  égal à 0.2 (a) et 0.8 (b).



et une portion singulière dont la masse se trouve concentrée sur la diagonale  $u_1 = u_2$  dans la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 17.3 Copule bivarée de Marshall-Olkin

### 17.3.1 Définition

La copule de Marshall-Olkin est définie par

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \min(u_1^{1-\alpha}u_2; u_1u_2^{1-\beta}) = \begin{cases} u_1^{1-\alpha}u_2, & \text{si } u_1^\alpha \geq u_2^\beta \\ u_1u_2^{1-\beta}, & \text{si } u_1^\alpha \leq u_2^\beta \end{cases},$$

pour  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ .

Les cas particuliers sont

- $C_{0,0}(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$
- $C_{1,1}(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$

- Avec  $\beta = \alpha$ , la copule de Marshall-Olkin devient la copule de Cuadras-Augé.

En fait, la copule de Marshall-Olkin est aussi appelée copule de Cuadras-Augé généralisée.

### 17.3.2 Simulation

La méthode de simulation est basée sur la méthode de simulation de la loi exponentielle bivarée Marshall-Olkin et l'application de la méthode d'inversion de création des copules (selon la première partie du théorème de Sklar).

La méthode de simulation se fonde sur la méthode d'inversion de construction de copule.

- On simule une réalisation de la loi continue bivarée à laquelle est associée la copule.
- On applique la première partie du théorème de Sklar.

**Algorithme 37 Simulation des réalisations de  $(U_1, U_2)$  pour  $\alpha, \beta \in (0, 1)$**

1. **(Simulation d'une réalisation de la loi exponentielle bivarée Marshall-Olkin).**
  - (a) On simule les réalisations  $Y_0^{(j)}$ ,  $Y_1^{(j)}$  et  $Y_2^{(j)}$  des v.a. indépendantes  $Y_0 \sim \text{Exp}(1)$ ,  $Y_1 \sim \text{Exp}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$  et  $Y_2 \sim \text{Exp}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$ .
  - (b) On calcule  $X_i^{(j)} = \min\left(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)}\right)$  pour  $i = 1, 2$ .
2. **(Application de la première partie du théorème de Sklar).** On calcule  $U_1^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_1^{(j)}}{\alpha}\right)$  et  $U_2^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_2^{(j)}}{\beta}\right)$ .

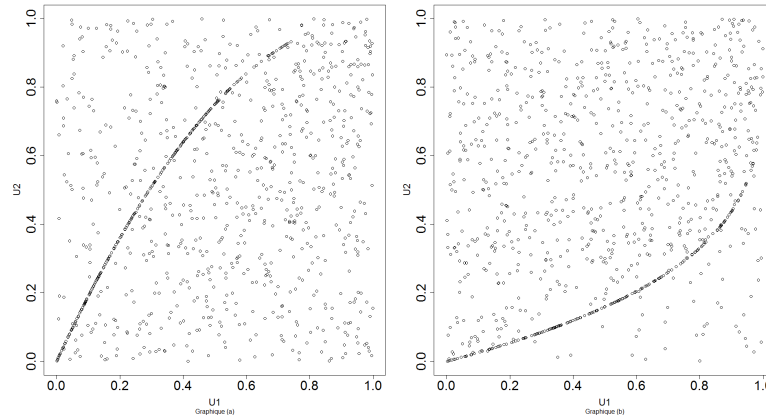


Fig. 13 – Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de  $(U_1, U_2)$  provenant de la copule de Cuadras-Augé pour des valeurs pour  $(\alpha, \beta)$  de  $(0.6, 0.3)$  (a) et  $(0.2, 0.8)$  (b).

On représente des réalisations de  $(U_1, U_2)$  provenant de la copule de Marshall-Olkin à la figure 13.

La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes

de  $\underline{U}$ .

Comme la copule de Cuadras-Augé, la copule a une portion continue et une portion singulière :

– la portion continue est

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha, \beta}(u_1, u_2) = \begin{cases} (1 - \alpha) u_1^{-\alpha}, & \text{si } u_1^\alpha > u_2^\beta \\ (1 - \beta) u_2^{-\beta}, & \text{si } u_1^\alpha < u_2^\beta \end{cases}$$

– la portion singulière correspond à la masse qui se trouve concentrée sur la courbe  $u_1^\alpha = u_2^\beta$  dans la surface  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 18 Illustrations

### 18.1 Lois bivariées avec marginales exponentielles

Soit un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  avec  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$  avec  $F_{X_i}(x_i) = 1 - \exp(-\beta_i x_i)$ ,  $i = 1, 2$ . En combinant ces marginales à l'aide de copules, on crée les exemples suivants de  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$  :

– copule de Clayton :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \left( \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}, x_1, x_2 \geq 0;$$

– copule de Frank :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\left( e^{-\alpha(1-e^{-\beta_1 x_1})} - 1 \right) \left( e^{-\alpha(1-e^{-\beta_2 x_2})} - 1 \right)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right), x_1, x_2 \geq 0$$

– copule de Gumbel :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = e^{-\left\{ \left( -\ln(1-e^{-\beta_1 x_1}) \right)^\alpha + \left( -\ln(1-e^{-\beta_2 x_2}) \right)^\alpha \right\}^{(1/\alpha)}}, x_1, x_2 \geq 0$$

– copule normale (gaussienne) :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \bar{\Phi}_{\underline{\alpha}} \left( \Phi^{-1} \left( (1 - e^{-\beta_1 x_1}) \right), \Phi^{-1} \left( (1 - e^{-\beta_2 x_2}) \right) \right), x_1, x_2 \geq 0$$



## 19 Copules et lois discrètes

### 19.1 Mise en place

Soit le couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  dont la structure de dépendance est définie par une copule  $C$  et leurs marginales.

La fonction de répartition conjointe  $F_{M_1, M_2}$  de  $(M_1, M_2)$  avec les marginales  $F_{M_1}$  et  $F_{M_2}$  est définie par

$$F_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = C\left(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)\right), \quad (4)$$

pour  $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ .

La f.m.p. conjointe de  $(M_1, M_2)$  est donnée par

$$\begin{aligned} f_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = & F_{M_1, M_2}(m_1, m_2) - F_{M_1, M_2}(m_1 - 1, m_2) \\ & - F_{M_1, M_2}(m_1, m_2 - 1) + F_{M_1, M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1), \end{aligned} \quad (5)$$

pour  $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$  et avec  $F_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = 0$  si  $m_1 < 0$  ou  $m_2 < 0$ .

Modéliser la dépendance avec des copules comme dans l'équation (4) est une approche adéquate et intéressante pour construire une distribution bivariée.

Plusieurs propriétés de dépendance stochastique d'une copule sont également valides pour la distribution bivariée obtenue avec l'équation (4).

Par exemple, les relations d'ordres stochastiques sont préservées. Il est important de rappeler que la copule déduite à partir d'une loi discrète bivariée n'est pas unique.

Dans le prochain exemple, on illustre l'impact du choix d'une copule sur la distribution de la somme de v.a.

## 19.2 Exemple – Copule de Clayton avec marginales de loi binomiale

On veut illustrer le choix d'une copule sur la distribution d'un couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  où  $M_i \sim \text{Bin}(n_i, q_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Les paramètres sont fournis dans le tableau suivant :

$i$	$n_i$	$q_i$
1	5	0.2
2	5	0.3

On considère la copule de Clayton

On définit  $N = M_1 + M_2$ .

Pour  $\alpha = 5$ , on obtient les valeurs suivantes de  $f_{M_1, M_2}$  :

0.166906 0.155288 0.005132 0.000312 0.000039 0.000003

0.001148 0.190529 0.179227 0.033420 0.004887 0.000390

0.000015 0.012838 0.103802 0.071440 0.015396 0.001309

0.000001 0.001347 0.018351 0.023877 0.006991 0.000632

0.000000 0.000142 0.002085 0.003095 0.000987 0.000091

0.000000 0.000007 0.000103 0.000155 0.000050 0.000005

Pour  $\alpha = 5$ , on calcule les valeurs suivantes de  $f_S(k)$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$  :

0.166906 0.156436 0.195676 0.192378 0.138608 0.094823 0.041755 0.011498

0.001775 0.000141 0.000005

Pour  $\alpha = 5$ , le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est

$$\begin{aligned}\rho_P(M_1, M_2) &= \frac{\text{Cov}(M_1, M_2)}{\sqrt{\text{Var}(M_1, M_2)}} \\ &= 0.7369852.\end{aligned}$$

On utilise l'optimisation numérique pour identifier la valeur du paramètre de dépendance  $\alpha$  fournissant une valeur fixée de  $\rho_P(M_1, M_2)$ .

Par exemple, on obtient les valeurs suivantes de  $\alpha$  pour des valeurs fixées de  $\rho_P(M_1, M_2)$  :

$\rho_P(M_1, M_2)$	$\alpha$
0.02	0.034857
0.5	1.600301
0.8	8.712199

## 19.3 Exemple – Copules de Frank, Clayton et de Gumbel avec marginales de loi négative binomiale

On veut illustrer l'impact du choix d'une copule sur la distribution d'un couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  où

$$M_i \sim NB(\alpha_i, q_i), i = 1, 2.$$

On considère les copules de Frank, de Clayton et de Gumbel.

On définit  $N = M_1 + M_2$ .

On fixe  $\alpha_1 = 3$ ,  $q_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\alpha_2 = 2$  et  $q_2 = \frac{1}{9}$ .

En utilisant l'optimisation numérique, on fixe le paramètre de dépendance des trois copules de telle sorte que

$$\text{Cov}(M_1, M_2) = 0.5 \times \sqrt{\text{Var}(M_1) \text{Var}(M_2)}.$$

On obtient  $E[N] = 31$  et  $\text{Var}(N) = 379.1206$ .

Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de  $VaR_\kappa(N)$  et  $TVaR_\kappa(N)$  pour  $\kappa = 0.95$  et  $0.995$  :

Copule	Frank	Clayton	Gumbel
$\theta$	4.118	1.774	1.410
$VaR_{0.95}(N)$	67	65	66
$VaR_{0.995}(N)$	93	91	104
$TVaR_{0.95}(N)$	78.40738	76.63825	82.74425
$TVaR_{0.995}(N)$	103.3001	100.8877	119.8066

On constate que le choix de la copule a un impact non négligeable sur le comportement de  $N$ .



## 19.4 Proposition – Copule EFGM et marginales discrètes

Dans la proposition suivante, on a fourni l'expression simple de la fonction de masse de probabilité conjointe du couple  $(M_1, M_2)$  lorsque la structure de dépendance est définie par la copule EFGM.

**Proposition 38** *Soit le couple de v.a. discrètes  $(M_1, M_2)$  dont la fonction de répartition est définie par les marginales  $F_{M_1}$  et  $F_{M_2}$  ainsi que la copule EFGM. Alors, la fonction de masse de probabilité conjointe de  $(M_1, M_2)$  est donnée par*

$$f_{M_1, M_2}(k_1, k_2) = f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) + \theta \prod_{i=1}^2 f_{M_i}(k_i) (1 - 2F_{M_i}(k_i) + f_{M_i}(k_i)),$$

où  $f_{M_1}$  et  $f_{M_2}$  sont les fonctions de masse de probabilité univariées de  $M_1$  et  $M_2$ .

**Preuve.** L'expression est déduite de (5).

On a

$$\begin{aligned}
 f_{M_1, M_2}(k_1, k_2) &= F_{M_1, M_2}(k_1, k_2) - F_{M_1, M_2}(k_1 - 1, k_2) \\
 &\quad - F_{M_1, M_2}(k_1, k_2 - 1) + F_{M_1, M_2}(k_1 - 1, k_2 - 1) \\
 &= F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) (1 - F_{M_1}(k_1)) (1 - F_{M_2}(k_2)) \\
 &\quad - F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2) - \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2) (1 - F_{M_1}(k_1 - 1)) (1 - F_{M_2}(k_2)) \\
 &\quad - F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) - \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) (1 - F_{M_1}(k_1)) (1 - F_{M_2}(k_2 - 1)) \\
 &\quad + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1) + \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1) (1 - F_{M_1}(k_1 - 1)) (1 - F_{M_2}(k_2 - 1)).
 \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned}
 f_{M_1, M_2}(k_1, k_2) &= F_{M_2}(k_2) f_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2 - 1) f_{M_1}(k_1) \\
 &\quad + \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) (1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2)) \\
 &\quad - \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2) (1 - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2) + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2)) \\
 &\quad - \alpha F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) (1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_2}(k_2 - 1) + F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1)) \\
 &\quad + \alpha F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1) (1 - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2 - 1) + F_{M_1}(k_1 - 1) F_{M_2}(k_2 - 1)) \\
 &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
 &\quad + \alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) \left( \frac{1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2)}{+ F_{M_2}(k_2) (F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1))} \right) \\
 &\quad - \alpha f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2 - 1) \left( \frac{1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2 - 1)}{+ F_{M_2}(k_2 - 1) (F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1))} \right).
 \end{aligned}$$

Puis, on réarrange les termes

$$\begin{aligned}
 f_{M_1, M_2}(k_1, k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
 &\quad + \alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left( \begin{array}{l} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2 - 1) \\ + (F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1))(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}(k_2 - 1)) \end{array} \right) \\
 &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
 &\quad + \alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \times \left( \begin{array}{l} 1 - F_{M_1}(k_1) - F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1) \\ - F_{M_1}(k_1 - 1) - F_{M_2}(k_2) - F_{M_2}(k_2 - 1) \\ + (F_{M_1}(k_1) + F_{M_1}(k_1 - 1))(F_{M_2}(k_2) + F_{M_2}(k_2 - 1)) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 f_{M_1, M_2}(k_1, k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\
 &\quad + \alpha f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \left( \begin{array}{l} 1 - 2F_{M_1}(k_1) + f_{M_1}(k_1) - 2F_{M_2}(k_2) + f_{M_2}(k_2) \\ + 4F_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) - 2F_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ - 2f_{M_1}(k_1) F_{M_2}(k_2) + f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \end{array} \right) \\
 &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) + \alpha \prod_{i=1}^2 f_{M_i}(k_i) (1 - 2F_{M_i}(k_i) + f_{M_i}(k_i)).
 \end{aligned}$$



## 20 Méthodes d'agrégation de risques dépendants

### 20.1 Introduction

Les méthodes d'agrégation se regroupent en quelques catégories :

- bornes inférieures et supérieures,
- expressions exactes,

- méthodes basées sur la simulation et
- méthodes numériques.

On a déjà présenté les méthodes de simulation.

Dans cette section, on aborde l'évaluation de bornes minimale et maximale pour la  $VAR$ , la méthode fondée sur la discrétisation et la méthode des rectangles.

## 20.2 Méthode avec discrétisation

### 20.2.1 Description de la méthode

On considère un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$  dont la structure de dépendance est définie par une copule  $C$  et les marginales continues  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  i.e.

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

On définit  $S = X_1 + X_2$  et on veut évaluer  $F_S(s)$  pour  $s \in \mathbb{R}$ .

La fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

On sait que la fonction de densité de  $S$  s'exprime en termes de  $f_{X_1, X_2}$  avec

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1, X_2}(x_1, s - x_1) dx_1.$$

De plus, on déduit que  $F_S(s) = \int_0^s f_S(t) dt$ .

Néanmoins, la tâche est impossible pour la majorité des copules à moins de recourir à l'intégration numérique (en utilisant par exemple un logiciel tel que Maple<sup>®</sup>).

On explique une méthode basée sur la discrétisation des marginales  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$ .

L'idée est d'évaluer approximativement les v.a. continues  $X_1$  et  $X_2$  par des v.a. discrètes  $\widetilde{X}_1$  et  $\widetilde{X}_2$  où

$$\widetilde{X}_i \in \{0h, 1h, 2h, \dots\},$$

pour  $i = 1, 2$  et pour un pas de discrétisation  $h > 0$ .

On choisit une méthode de discrétisation parmi celles qui sont expliquées au chapitre ??.

La fonction de répartition conjointe  $F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}$  de  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  est définie en fonction de la même copule  $C$  que celle qui est associée à  $F_{X_1, X_2}$  et des fonctions de répartition marginales  $F_{\tilde{X}_i}(x_i)$  de  $\tilde{X}_i$  ( $i = 1, 2$ ) :

$$F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = C\left(F_{\tilde{X}_1}(k_1h), F_{\tilde{X}_2}(k_2h)\right),$$

pour  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ .

Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ ,

$$f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = \Pr\left(\tilde{X}_1 = k_1h, \tilde{X}_2 = k_2h\right),$$



sont déterminées comme suit.

Pour  $k_1 = 0, k_2 = 0$ , on a

$$f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(0, 0) = F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(0, 0).$$

Pour  $k_1 \in \mathbb{N}^+$  et  $k_2 = 0$ , on a

$$f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1 h, 0) = F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1 h, 0) - F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}((k_1 - 1) h, 0).$$

Pour  $k_1 = 0$  et  $k_2 \in \mathbb{N}^+$ , on a

$$f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(0, k_2 h) = F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(0, k_2 h) - F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(0, (k_2 - 1) h).$$

Enfin, pour  $k_1 \in \mathbb{N}^+$  et  $k_2 \in \mathbb{N}^+$ , on a

$$\begin{aligned} f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) &= F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) \\ &\quad - F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(k_1 h, (k_2 - 1) h) \\ &\quad - F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}((k_1 - 1) h, k_2 h) \\ &\quad + F_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}((k_1 - 1) h, (k_2 - 1) h). \end{aligned}$$

On approxime la v.a.  $S$  par la  $\tilde{S} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \in \{0h, 1h, 2h, \dots\}$ .

La fonction de masse de probabilité de  $\tilde{S}$  est donnée par

$$f_{\tilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^k f_{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2}(jh, (k-j)h),$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ .

Ensuite, il est aisé de calculer  $F_{\tilde{S}}(kh)$  et toutes fonctions de  $\tilde{S}$ , notamment les mesures de risque  $VaR_{\kappa}(\tilde{S})$  et  $TVaR_{\kappa}(\tilde{S})$ .

### 20.2.2 Exemple

On suppose que  $X_i \sim Pa(\alpha_i, \lambda_i)$  avec  $\lambda_1 = 11$ ,  $\lambda_2 = 12$ ,  $\alpha_1 = 2.1$ ,  $\alpha_2 = 2.2$ .

On définit  $S = X_1 + X_2$ .

La fonction de répartition conjointe de  $(X_1, X_2)$  est

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

où  $C(u_1, u_2)$  est une copule de Clayton avec paramètre de dépendance  $\alpha = 10$ .

On discrétise les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  jusqu'à 5000 avec les trois méthodes de discrétisation et un pas de  $h = 1$  pour évaluer la fonction de répartition de  $S$ .

Le tableau suivant présente les valeurs des  $VaR$  obtenues avec les trois méthodes d'arithmétisation :

$\kappa$	$VaR_{\kappa}(\tilde{S})_{upper}$	$VaR_{\kappa}(\tilde{S})_{dispersion}$	$VaR_{\kappa}(\tilde{S})_{lower}$
0.95	72	73	74
0.995	215	216	217

## 20.3 Méthodes des rectangles

### 20.3.1 Description de la méthode

Soit le couple de v.a. positives continues  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition est  $F_{X_1, X_2}$ . On définit  $S = X_1 + X_2$ . Deux approximations de  $F_S(s)$ , que l'on appelle les méthodes *lower* et *upper* des rectangles, sont aussi construites en recouvrant la surface triangulaire par des rectangles.

Selon la méthode *lower* des rectangles, on additionne les masses de probabilité associées aux  $2^m - 1$  rectangles se trouvant en-dessous de la diagonale  $x_1 +$

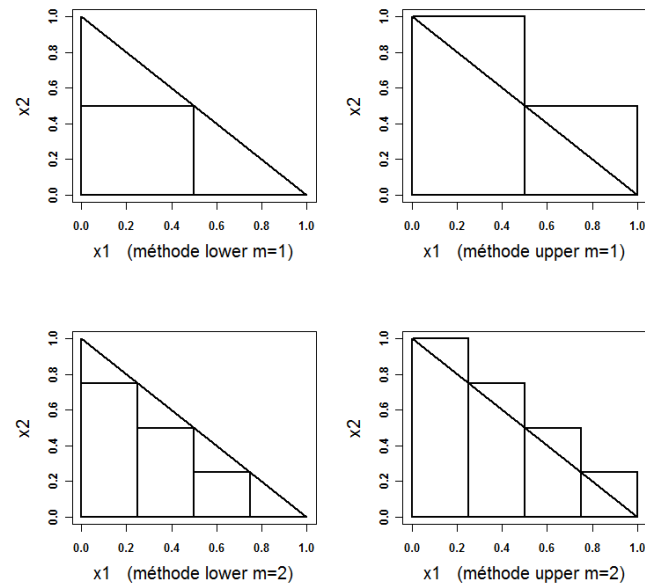


Fig. 14 – Illustration des méthodes *lower* et *upper* des rectangles pour  $m = 1$  et  $m = 2$ .

$x_2 = s$  et on produit l'approximation  $A_S^{(l,m)}(s)$  de  $F_S(s)$  donnée par

$$\begin{aligned} & A_S^{(l,m)}(s) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m-1} \left( F_{X_1, X_2} \left( \frac{i}{2^m} s, \frac{2^m - i}{2^m} s \right) - F_{X_1, X_2} \left( \frac{(i-1)}{2^m} s, \frac{2^m - i}{2^m} s \right) \right). \end{aligned}$$

De même, pour la méthode *upper* des rectangles, on fait la somme des masses de probabilité associées aux  $2^m$  rectangles se trouvant en-dessus de la diagonale  $x_1 + x_2 = s$  menant à l'approximation  $A_S^{(u,m)}(s)$  de  $F_S(s)$  qui est définie par

$$\begin{aligned} & A_S^{(u,m)}(s) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m} \left( F_{X_1, X_2} \left( \frac{i}{2^m} s, \frac{2^m + 1 - i}{2^m} s \right) - F_{X_1, X_2} \left( \frac{(i-1)}{2^m} s, \frac{2^m + 1 - i}{2^m} s \right) \right). \end{aligned}$$

Les méthodes *lower* et *upper* des rectangles sont illustrées à la figure 14 pour  $m = 1$  et  $m = 2$ . Clairement, on a

$$A_S^{(l,m)}(s) \leq A_S^{(l,m+k)}(s) \leq F_S(s) \leq A_S^{(u,m+k)}(s) \leq A_S^{(u,m)}(s), \quad (6)$$

pour  $s \geq 0$  et  $m, k \in \mathbb{N}^+$ .

De plus, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_S^{(l,m)}(s) \rightarrow F_S(s) \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} A_S^{(u,m)}(s) \rightarrow F_S(s).$$

Si on définit

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(l,m)}(S) = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(l,m)}(s) \geq \kappa \right\}$$

et

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(u,m)}(S) = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(u,m)}(s) \geq \kappa \right\},$$



alors l'inégalité

$$\widetilde{VaR}_{\kappa}^{(u,m)}(S) \leq VaR_{\kappa}(S) \leq \widetilde{VaR}_{\kappa}^{(l,m)}(S) \quad (7)$$

est satisfaite pour  $0 < \kappa < 1$ .

### 20.3.2 Exemple – Copule de Clayton et marginales de loi exponentielle

On considère le couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance  $\alpha = 4$  et les deux marginales de  $X_1$  et  $X_2$  où  $X_1 \sim \text{Exp}(0.1)$  et  $X_2 \sim \text{Exp}(0.2)$ .

Les valeurs obtenues pour les deux approximations (avec  $m = 20$ ) de  $F_S(s)$

où  $S = X_1 + X_2$  sont présentées dans le tableau suivant :

$s$	$A_S^{(l,m)}(s)$	$A_S^{(u,m)}(s)$
5	0.2713069	0.2713072
10	0.4656194	0.4656197
20	0.7184929	0.7184933
30	0.8632002	0.8632005
50	0.9753317	0.9753318
100	0.9998158	0.9998158

### 20.3.3 Exemple – Copule de Clayton et marginales de loi Pareto

On considère le couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance  $\alpha = 4$  et les deux marginales de  $X_1$  et  $X_2$  où  $X_1 \sim \text{Pareto}(0.9, 1)$  et  $X_2 \sim \text{Pareto}(1.8, 1)$ .

On reproduit dans le tableau suivant les valeurs des deux approximations (avec  $m = 20$ ) de  $F_S(s)$  où  $S = X_1 + X_2$  :

$s$	$A_S^{(l,m)}(s)$	$A_S^{(u,m)}(s)$
1	0.3158349	0.3158351
100	0.9836904	0.9836904
10000	0.9997487	0.9997487
1000000	0.9999960	0.9999960

Cet exemple est suggéré par [?].

Pour  $m$  et  $s$  fixés, la méthode des carrés et la méthode *lower* des rectangles produisent des valeurs identiques.

Les deux méthodes des rectangles sont très simples d'application.

Comme l'indiquent (6) et (7), ces méthodes permettent d'encadrer la valeur exacte de  $F_S(s)$  et  $VaR_\kappa(S)$ .

### 20.3.4 Commentaires supplémentaires

La méthode avec discrétisation permet d'évaluer toute fonction de  $(X_1, X_2)$  alors que, dans sa forme actuelle, la méthode des carrés sert à évaluer  $F_S$  et de déduire la  $VaR_\kappa(S)$ .

Pour les deux méthodes, il est possible de s'approcher de la valeur exacte avec un degré voulu de précision.

Dans [?], on présente la méthode AEP, une généralisation plus performante de la méthode des carrés, améliorant la vitesse de convergence de l'approximation.

Décrites dans [?], les deux méthodes des rectangles ont l'avantage d'approcher de la valeur exacte avec le degré voulu de précision tout en produisant des bornes inférieure et supérieure pour cette valeur.

On peut adapter les 2 méthodes des rectangles dans les cas où le nombre de risques est 3, 4 et 5.

En l'adaptant de façon appropriée, ces 2 méthodes sont aussi utilisées évaluer la fonction de répartition du produit et du quotient de v.a. (voir [?]).

## 21 Bornes inférieure et supérieure

### 21.1 Mise en contexte

**Objectif : Présenter une version allégée de la section "Bornes minimale et maximale pour la VaR".**

On considère un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition  $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ .

Bornes de Fréchet : On sait que

$$W(x_1, x_2) \leq F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq M(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

où

$$W(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$$

et

$$M(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1); F_2(x_2)).$$

On utilise les bornes de Fréchet pour le prochain corollaire.

**Corollaire 39** *Soit un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition  $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ . Alors, on a*

$$M^d(x_1, x_2) \leq \Pr(X_1 \leq x_1 \cup X_2 \leq x_2) \leq W^d(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

où

$$M^d(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1); F_2(x_2))$$

et

$$W^d(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1) + F_2(x_2); 1).$$

**Preuve.** On sait que

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 \leq x_1 \cup X_2 \leq x_2) &= \Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_2 \leq x_2) \\ &\quad - \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2). \end{aligned}$$

De (8), on a

$$\Pr(X_1 \leq x_1 \cup X_2 \leq x_2) \leq F_1(x_1) + F_2(x_2) - W(x_1, x_2)$$

et

$$\Pr(X_1 \leq x_1 \cup X_2 \leq x_2) \geq F_1(x_1) + F_2(x_2) - M(x_1, x_2).$$



Puis, on définit

$$\begin{aligned} M^d(x_1, x_2) &= F_1(x_1) + F_2(x_2) - M(x_1, x_2) \\ &= F_1(x_1) + F_2(x_2) - \min(F_1(x_1); F_2(x_2)) \\ &= \max(F_1(x_1); F_2(x_2)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W^d(x_1, x_2) &= F_1(x_1) + F_2(x_2) - W(x_1, x_2) \\ &= F_1(x_1) + F_2(x_2) - \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0) \\ &= \min(F_1(x_1) + F_2(x_2); 1). \end{aligned}$$

■

## 21.2 Énoncé du problème

Pour des fins pédagogiques, on considère un couple de v.a. continues positives  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition  $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ .

On définit  $S = X_1 + X_2$ , dont la fonction de répartition est  $F_S$ .

Pour le moment, on ne connaît pas la structure de dépendance entre les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ , mais on sait que leurs fonctions de répartition marginales sont  $F_1$  et  $F_2$ . On vise à identifier les bornes inférieure de  $F_S$ .

**Problème** : Développer les fonctions  $A$  et  $B$ , de telle sorte que

$$A(y) \leq F_S(y) \leq B(y), \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Le résultat est fournie dans la prochaine proposition.

**Proposition 40** *Soit un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$  dont la fonction de répartition  $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ . On définit  $S = X_1 + X_2$ , dont la fonction de répartition est  $F_S$ . Alors, on a*

$$A(y) \leq F_S(y) \leq B(y), \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

où

$$A(y) = \sup_{x \in [0, y]} \{\max(F_1(x) + F_2(y - x) - 1; 0)\}$$

et

$$B(y) = \inf_{x \in [0, y]} \{\min(F_1(x) + F_2(y - x); 1)\}.$$

**Preuve.** La preuve pour chaque borne se fait plusieurs étapes.

1. Borne inférieure :

(a) On sait que

$$\Pr(X_1 + X_2 \leq y)$$

correspond à la probabilité que  $(X_1, X_2)$  prenne une valeur dans le triangle dont les coins sont  $(0, 0)$ ,  $(y, 0)$ , et  $(0, y)$ .

[ Dessin ]

(b) On observe

$$\begin{aligned} F_S(y) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq y) \\ &\geq \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq y - x), \quad x \in [0, y], \end{aligned}$$

(voir le lien avec la méthode des rectangles)

[ Dessin ]

(c) On sait que

$$\Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq y - x)$$

est la probabilité que  $(X_1, X_2)$  prenne une valeur dans le rectangle dont les coins sont  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, y - x)$  et  $(x, y - x)$ , qui est inscrit dans le triangle.

(d) Avec (8), l'inégalité

$$\Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq y - x) \geq W(x, y - x),$$

est valide pour  $x \in [0, y]$ .

(e) Comme l'inégalité

$$F_S(y) \geq W(x, y - x),$$

est aussi valide pour  $x \in [0, y]$ , on a

$$F_S(y) \geq \sup_{x \in [0, y]} (W(x, y - x))$$

qui devient

$$F_S(y) \geq \sup_{x \in [0, y]} \{\max(F_1(x) + F_2(y - x) - 1; 0)\} = A(y).$$

- (f) Comme les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont continues, on définit  $x_0 \in [0, y]$  maximise  $F_1(x) + F_2(y - x) - 1$ , i.e.

$$x_0 = \arg \max_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x) - 1).$$

On obtient

$$A(y) = \max((F_1(x_0) + F_2(y - x_0) - 1); 0).$$

2. Borne supérieure :

(a) On a

$$\begin{aligned} F_S(y) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq y) \\ &\leq \Pr(X_1 \leq x \cup X_2 \leq y - x), \quad x \in [0, y], \end{aligned}$$

(lien : la méthode des rectangles).

[ Dessin ]

(b) Selon le Corollaire 39, l'inégalité

$$\Pr(X_1 \leq x \cup X_2 \leq y - x) \leq W^d(x, y - x),$$

est satisfaite pour  $x \in [0, y]$ .

(c) L'inégalité

$$F_S(y) \leq W^d(x, y - x),$$

est aussi valide pour  $x \in [0, y]$ , ce qui mène à

$$F_S(y) \leq \inf_{x \in [0, y]} (W^d(x, y - x))$$

qui devient

$$F_S(y) \leq \inf_{x \in [0, y]} (\min(F_1(x) + F_2(y - x); 1)) = B(y).$$

- (d) Puisque les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont continues, on identifie  $x_0 \in [0, y]$  qui minimise  $F_1(x) + F_2(y - x)$ , i.e.

$$x_0 = \arg \min_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x)).$$

Il en découle que

$$B(y) = \min((F_1(x_0) + F_2(y - x_0) - 1); 0).$$

■



**Remarque 41** *Concernant la Proposition 40, on mentionne les éléments suivants :*

1. *Ces bornes sont intéressantes, car elles permettent d'identifier la plus petite valeur et la plus grande valeur pouvant être prise par  $F_S(y)$ , pour toute valeur de  $y \geq 0$ .*
2. *Ces bornes sont "tight", i.e., il est possible de démontrer que ce sont les meilleures possibles. (Note : la démonstration de ce fait n'est pas matière au cours ACT-3000 A2017).*
3. *Il est possible d'écrire les bornes de la Proposition 40 par rapport à la VaR de la v.a.  $S$ .*
4. *Pour une valeur  $y$  fixée, il n'y a pas de structure de dépendance qui mène à l'une ou l'autre des bornes de la Proposition 40 qui mène uniformément à une ou l'autre des bornes.*

**Remarque 42** *Il est possible de démontrer que le résultat de la Proposition 40 est valide pour toutes marginales  $F_1$  et  $F_2$  (continues, discrètes, mixtes), peu importe le support (note : pour le cours, on se limite au contexte de la Proposition 40). (Note : ce n'est pas matière au cours ACT-3000 A2017).*

**Remarque 43** *Le calcul des bornes de la Proposition 40 représente des défis. On traite de quelques exemples dans les prochaines sections.*

## 21.3 Exemple

**Exemple 44** Soit  $X_1 \sim X_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

1. Calcul de

$$\begin{aligned} A(y) &= \sup_{x \in [0, y]} \{\max(F_1(x) + F_2(y - x) - 1; 0)\} \\ &= \max \left( \sup_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x) - 1); 0 \right), \end{aligned}$$

pour  $y \in [0, 2]$ .

On a

$$F_1(x) + F_2(y - x) - 1 = x + y - x - 1 = y - 1.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} A(y) &= \max(y - 1; 0) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ y - 1 & , \quad 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & , \quad y > 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

2. Calcul de

$$\begin{aligned} B(y) &= \inf_{x \in [0, y]} (\min(F_1(x) + F_2(y - x); 1)) \\ &= \min \left( \inf_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x)); 1 \right) . \end{aligned}$$

pour  $y \in [0, 2]$ .

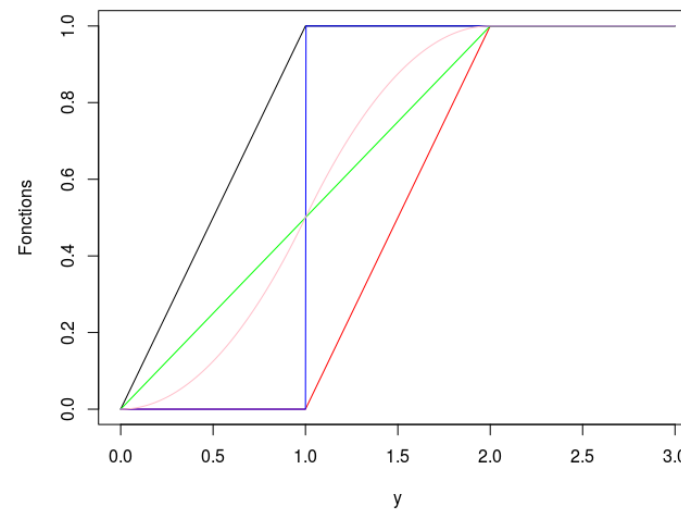
On a

$$F_1(x) + F_2(y - x) = x + y - x = y.$$

*Alors, on conclut*

$$\begin{aligned} B(y) &= \min(y; 1) \\ &= \begin{cases} y & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & , \quad y > 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

3. Courbes de  $A(y)$  (rouge),  $B(y)$  (noire),  $F_{X_1^+ + X_2^+}(y)$  (verte),  $F_{X_1^- + X_2^-}(y)$  (bleue),  $F_{X_1^\perp + X_2^\perp}(y)$  (rose) :  $\square$



## 21.4 Cas particulier

Soit un couple de v.a. continues positives  $(X_1, X_2)$  dont  $F_{X_1, X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ .

On formule les hypothèses additionnelles suivantes :

- $X_1 \sim X_2$ , avec  $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$  ;
- $F(x)$  est une fonction concave pour  $x \geq 0$  ;
- hypothèse équivalente :  $\overline{F}(x)$  est une fonction convexe pour  $x \geq 0$ .

On vise à identifier les expressions de  $A(y)$  et  $B(y)$ , pour  $y \geq 0$ .

Pour y parvenir, on rappelle les notions suivantes, en commençant avec la définition d'une fonction concave.

**Définition 45** Une fonction  $\varphi(u)$  définie pour  $u \in [a, b]$  est dite concave si

$$\varphi((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \geq (1-t) \times \varphi(u_1) + t \times \varphi(u_2) \quad (9)$$

pour  $t \in [0, 1]$  et  $a \leq u_1 < u_2 \leq b$ .

On a besoin du lemme qui suit.

**Lemme 46** Soit les fonctions concaves  $\varphi_1(u)$  et  $\varphi_2(u)$  définies pour  $u \in [a, b]$ . Alors, la fonction  $\zeta(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$  est concave pour  $u \in [a, b]$ .

**Preuve.** En effet, on a

$$\begin{aligned} \zeta((1-t) \times u_1 + t \times u_2) &= \varphi_1((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \quad (10) \\ &\quad + \varphi_2((1-t) \times u_1 + t \times u_2), \end{aligned}$$



pour  $t \in [0, 1]$  et  $a \leq u_1 < u_2 \leq b$ . Comme les fonction  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont concaves, on adapte (9) dans (10) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \zeta((1-t) \times u_1 + t \times u_2) &= \varphi_1((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \\
 &\quad + \varphi_2((1-t) \times u_1 + t \times u_2) \\
 &\geq (1-t) \times \varphi_1(u_1) + t \times \varphi_1(u_2) \\
 &\quad + (1-t) \times \varphi_2(u_1) + t \times \varphi_2(u_2) \\
 &= (1-t) \times (\varphi_1(u_1) + \varphi_2(u_1)) \\
 &\quad + t \times (\varphi_1(u_2) + \varphi_2(u_2)) \\
 &= (1-t) \times \zeta(u_1) + t \times \zeta(u_2),
 \end{aligned}$$

pour  $t \in [0, 1]$  et  $a \leq u_1 < u_2 \leq b$ , ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

■

Le prochain lemme a aussi utile.

**Lemme 47** Soit la fonction concave  $\varphi(u)$  définie pour  $u \in [a, b]$ , avec  $-\infty < a < b < \infty$ . Alors,  $\zeta(u) = \varphi(b - u)$  est concave pour  $u \in [a, b]$ .

**Preuve.** On définit  $u' = b - u$ . Puisque  $u' \in [a, b]$ , alors  $\zeta(u) = \varphi(u')$  est aussi concave. ■

Les expressions de

$$A(y) = \max \left( \sup_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x) - 1); 0 \right), \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

et

$$B(y) = \min \left( \inf_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x)); 1 \right), \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

sont fournies dans la proposition qui suit.

**Proposition 48** *Soit un couple de v.a. continues positives  $(X_1, X_2)$  où  $F_{X_1, X_2} \in CF(F_1, F_2)$  et*

- $X_1 \sim X_2$ , avec  $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$  ;
- $F(x)$  est une fonction concave pour  $x \geq 0$ .

*Alors, on a*

$$A(y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2\bar{F}\left(\frac{y}{2}\right) & , \quad y > y_0 \end{cases} , \quad (11)$$

*et*

$$B(y) = F(y) , \quad y \geq 0, \quad (12)$$

*avec*

$$y_0 = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) .$$

**Preuve.** Par hypothèse,  $F_1(x)$  est concave pour  $x \in [0, y]$ . Par le Lemme 47,  $F_2(y - x)$  est une fonction concave pour  $x \in [0, y]$ . Enfin, grâce au Lemme 46, la fonction

$$\varphi(x) = F_1(x) + F_2(y - x) = F(x) + F(y - x)$$

est concave pour  $x \in [0, y]$ . La fonction

$$\begin{aligned}\varphi^*(x) &= \varphi(x) - 1 = (1 - \overline{F}_1(x)) + (1 - \overline{F}_2(y - x)) - 1 \\ &= 1 - \overline{F}(x) - \overline{F}(y - x)\end{aligned}$$

est aussi concave.

Comme  $F_1 = F_2 = F$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\varphi^*$  sont symétriques. Pour cette raison, le maximum de la fonction  $\varphi$  (et de la fonction  $\varphi^*$ ) est atteint à  $x_0 = \frac{y}{2}$ . Aussi, le minimum de la fonction (et de la fonction  $\varphi^*$ ) est atteint aux extrémités de l'intervalle  $[0, y]$ .

Ainsi, on observe

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \in [0, y]} \{F_1(x) + F_2(y - x) - 1\} &= \sup_{x \in [0, y]} \{\varphi^*(x)\} \\
 &= \varphi^*\left(\frac{y}{2}\right) \\
 &= 1 - 2\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right)
 \end{aligned}$$

pour  $y \geq 0$ .

Alors, on obtient

$$A(y) = \max\left(1 - 2\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right); 0\right).$$

Soit  $y_0$  la solution de

$$1 - 2\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right) = 0.$$

On déduit

$$y_0 = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Finalement, on obtient

$$A(y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right) & , \quad y > y_0 \end{cases}.$$

Comme on l'a mentionné précédemment, le minimum de la fonction est atteint aux extrémités de l'intervalle  $[0, y]$ . Ainsi, on a

$$\inf_{x \in [0, y]} (F_1(x) + F_2(y - x)) = \inf_{x \in [0, y]} (\varphi(x)) = \varphi(0) = F(y), \quad y \geq 0.$$

Il en résulte que

$$B(y) = \min(F(y); 1) = F(y), \quad y \geq 0.$$

■

## 21.5 Exemples en lien avec le cas particulier.

Dans les prochains exemples, on présente des applications de la Proposition ??, où la fonction de répartition  $F$  est concave.

**Exemple 49** Soit  $X_1 \sim X_2 \sim \text{Exp}(\beta)$ , avec  $F_1(x) = F_2(x) = F(x) = 1 - \exp(-\beta x)$ ,  $x \geq 0$ . Clairement,  $F(x)$  est une fonction concave et

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \exp(-\beta x), \quad x \geq 0.$$

Alors, de la Proposition ??,

$$A(y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2 \exp\left(-\beta \frac{y}{2}\right) & , \quad y > y_0 \end{cases}.$$

et

$$B(y) = 1 - \exp(-\beta y), \quad y \geq 0$$

avec

$$y_0 = -\frac{2}{\beta} \ln \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\beta} \ln (2) .$$

Il est intéressant d'observer que

$$\begin{aligned} 1 - 2 \exp \left( -\beta \frac{y}{2} \right) &= 1 - \exp \left( -\frac{\beta}{2} y + \ln (2) \right) \\ &= 1 - \exp \left( -\frac{\beta}{2} \left( y - \frac{2}{\beta} \ln (2) \right) \right) \\ &= 1 - \exp -\frac{\beta}{2} (y - y_0) . \end{aligned}$$

Finalement, on conclut

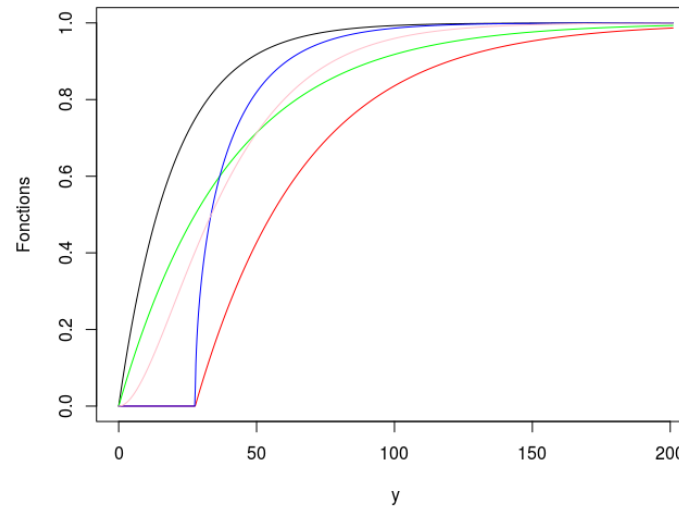
$$A(y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - \exp \left( -\frac{\beta}{2} (y - y_0) \right) & , \quad y > y_0 \end{cases} .$$



Soit la v.a.  $W \sim \text{Exp}(\beta_2)$  et  $W_a = W + a$ . Alors, on constate que

$$A(y) = F_{W_{y_0}}(y), \quad y > y_0.$$

Dans la prochaine illustration, on présente les Courbes de  $A(y)$  (rouge),  $B(y)$  (noire),  $F_{X_1^+ + X_2^+}(y)$  (verte),  $F_{X_1^- + X_2^-}(y)$  (bleue),  $F_{X_1^\perp + X_2^\perp}(y)$  (rose) :



**Exemple 50** Soit  $X_1 \sim X_2 \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ , avec  $F_1(x) = F_2(x) = F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$ ,  $x \geq 0$ . Comme la dérivée seconde de  $F(x)$  est négative, alors  $F(x)$  est une fonction concave. Alternativement, puisque De plus, on a

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha, \quad x \geq 0.$$

D'après la Proposition ??,

$$A(y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2 \left(\frac{\lambda}{\lambda+\frac{y}{2}}\right)^\alpha & , \quad y > y_0 \end{cases}$$

et

$$B(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^\alpha, \quad y \geq 0,$$

avec

$$\begin{aligned} y_0 &= 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\lambda \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1 \right) \\ &= 2\lambda \left( 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right). \end{aligned}$$

□

**Exemple 51** Soit  $X_1 \sim X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , avec  $\alpha \in (0, 1]$  et  $F_1(x) = F_2(x) = F(x) = H(x; \alpha, \beta)$ ,  $x \geq 0$ . La fonction de répartition  $F(x)$  est concave. En effet, on a

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \geq 0.$$

Ensuite, on a

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1) x^{\alpha-1} e^{-\beta x} + \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (-\beta) e^{-\beta x} \geq 0.$$

Comme  $(\alpha - 1) \leq 0$ , alors  $\frac{d^2}{dx^2}F(x) \leq 0$ , permettant de conclure que  $F(x)$  est concave.

Alors, de la Proposition ??,

$$\begin{aligned} A(y) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2\overline{H}\left(\frac{y}{2}; \alpha, \beta\right) & , \quad y > y_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq y \leq y_0 \\ 1 - 2\overline{H}\left(y; \alpha, \frac{\beta}{2}\right) & , \quad y > y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$B(y) = F(y) = H(x; \alpha, \beta), \quad y \geq 0$$

avec

$$y_0 = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2H^{-1}\left(\frac{1}{2}; \alpha, \beta\right).$$

□

## 21.6 Approximation des bornes

Dans l'algorithme suivant, on suggère la méthode suivante pour approximer les bornes de la Proposition 40.

**Algorithme 52** Soit  $m \in \mathbb{N}^+$ . Alors, on a

$$\tilde{A}^{(m)}(y) = \max \left( \sup_{k \in \{0,1,\dots,m\}} \left( F_1 \left( y \frac{k}{m} \right) + F_2 \left( y \left( 1 - \frac{k}{m} \right) \right) - 1 \right); 0 \right)$$

et

$$\tilde{B}^{(m)}(y) = \min \left( \inf_{k \in \{0,1,\dots,m\}} \left( F_1 \left( y \frac{k}{m} \right) + F_2 \left( y \left( 1 - \frac{k}{m} \right) \right) \right); 1 \right).$$

Clairement, pour  $y \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^{(m)}(y) = A(y) \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} B^{(m)}(y) = B(y).$$

## 21.7 Bornes sur la VaR de la somme de 2 v.a.

De la Proposition 40, il est possible de déduire des bornes pour  $VaR_\kappa(S)$ . En effet, on a

$$\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S)$$

où

$$\overline{VaR}_\kappa(S) = A^{-1}(\kappa)$$

et

$$\underline{VaR}_\kappa(S) = B^{-1}(\kappa)$$

pour  $\kappa \in (0, 1)$ .



Il est possible de déduire le résultat général suivant :

$$\begin{aligned}
 \underline{VaR}_\kappa(S) &= VaR_\kappa^{\min}(S) \\
 &= \sup_{W(u_1, u_2) = \kappa} \left\{ F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2) \right\} \\
 &= \sup_{\max(u_1 + u_2 - 1; 0) = \kappa} \left\{ F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2) \right\} \\
 &= \sup_{u \in [0, \kappa]} \left\{ F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(\kappa - u) \right\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{VaR}_\kappa(S) &= VaR_\kappa^{\max}(S) \\
&= \inf_{W^d(u_1, u_2) = \kappa} \left\{ F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2) \right\} \\
&= \inf_{\min(u_1 + u_2; 1) = \kappa} \left\{ F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2) \right\} \\
&= \inf_{u \in [\kappa, 1]} \left\{ F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(1 - (\kappa - u)) \right\} \\
&= \inf_{u \in [\kappa, 1]} \left\{ F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(\kappa - u + 1) \right\}.
\end{aligned}$$

Dans le contexte particulier de la Proposition 48, on peut identifier directement où

$$\overline{VaR}_\kappa(S) = A^{-1}(\kappa)$$

et

$$\underline{VaR}_\kappa(S) = B^{-1}(\kappa)$$

de (11) et (12).

**Corollaire 53** *Soit le contexte spécifique de la Proposition 48. Alors, on a*

$$\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S)$$

où

$$\overline{VaR}_\kappa(S) = F^{-1}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)$$

et

$$\underline{VaR}_\kappa(S) = F^{-1}(\kappa),$$

pour  $\kappa \in [0, 1)$ .

**Preuve.** On a

$$1 - 2\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right) = \kappa$$

qui devient

$$\frac{1 - \kappa}{2} = 1 - F\left(\frac{y}{2}\right)$$

ou

$$F\left(\frac{y}{2}\right) = 1 - \frac{1 - \kappa}{2} = \frac{1 + \kappa}{2}.$$

On déduit

$$\overline{VaR}_\kappa(S) = A^{-1}(\kappa) = 2F^{-1}\left(\frac{1 + \kappa}{2}\right),$$

pour  $\kappa \in [0, 1)$ .



**Remarque 54** *Soit le contexte spécifique de la Proposition 48 (et du Corollaire 53). Du Corollaire 53, on a*

$$\overline{VaR}_\kappa(S) = 2F^{-1}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)$$

et

$$\underline{VaR}_\kappa(S) = F^{-1}(\kappa),$$

pour  $\kappa \in [0, 1)$ . Au chapitre précédent, on a montré que

$$VaR_\kappa(X_1^+ + X_2^+) = 2F^{-1}(\kappa) = 2VaR_\kappa(X)$$

et

$$VaR_\kappa(X_1^- + X_2^-) = VaR_{\frac{1-\kappa}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+\kappa}{2}}(X)$$

pour  $\kappa \in [0, 1)$ .

On observe

$$\overline{VaR}_0(S) = 2F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2VaR_{\frac{1}{2}}(X)$$

et

$$VaR_0(X_1^- + X_2^-) = VaR_{\frac{1-0}{2}}(X) + VaR_{\frac{1+0}{2}}(X) = 2VaR_{\frac{1}{2}}(X).$$

De plus, on observe

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} \overline{VaR}_\kappa(S) = \lim_{\kappa \rightarrow 1} 2F^{-1}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)$$

s'approche de

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} VaR_\kappa(X_1^+ + X_2^+) = \lim_{\kappa \rightarrow 1} 2F^{-1}(\kappa).$$

## 21.8 Explorer

Pour les personnes intéressées, il est possible de poursuivre l'exploration à propos du contenu de ce document sur le site suivant (notamment) :

<https://sites.google.com/site/rearrangementalgorithm/>

Voir aussi l'article suivant :

[https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2476807](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2476807)

L'un des auteurs de cet article travaille dans une banque.

## 22 Mesures de dépendance

### 22.1 Mise en place

Un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  sont dépendantes si

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \neq F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2).$$

Il existe différentes mesures pour quantifier la relation de la dépendance ou l'association entre deux v.a.  $X_1$  et  $X_2$ .

Dans cette section, on présente brièvement la mesure de corrélation linéaire, deux mesures de corrélation de rangs et deux mesures de dépendance de queue.



## 22.2 Propriétés désirables pour un mesure de dépendance

On débute en indiquant les propriétés souhaitables pour une mesure de dépendance.

**Axiom 55** *Les propriétés désirables pour une mesure de dépendance  $\pi(X_1, X_2)$  sont les suivantes :*

1. *Symétrie :*

$$\pi(X_1, X_2) = \pi(X_2, X_1) ;$$

2. *Normalisation :*

$$-1 \leq \pi(X_1, X_2) \leq 1 ;$$

### 3. Comonotonicité :

$$\pi(X_1, X_2) = 1$$

*si et seulement si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones ;*

### 4. Antimonotonicité :

$$\pi(X_1, X_2) = -1$$

*si et seulement si  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones ;*

### 5. Invariance : pour toute fonction strictement monotone $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\pi(\phi(X_1), X_2) = \begin{cases} \pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est croissante} \\ -\pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est décroissante} \end{cases} .$$

## 23 Coefficient de corrélation de Pearson

### 23.1 Définition

Soit un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont les espérances et les variances existent.

La définition du coefficient de corrélation de Pearson est

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}}.$$

## 23.2 Est-ce que le coefficient de corrélation de Pearson satisfait les propriétés désirables pour un mesure de dépendance

Le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfait pas à toutes les propriétés désirables.

- Symétrie : Le coefficient  $\rho_P$  est symétrique i.e.

$$\rho_P(X_1, X_2) = \rho_P(X_2, X_1).$$

- Normalisation : Le coefficient  $\rho_P$  prend des valeurs entre -1 et 1 i.e.

$$-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1.$$

Mais, il n'est pas assuré d'atteindre les valeurs -1 et 1.

- Comonotonicité : Si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones, cela n'implique pas

$$\pi(X_1, X_2) = 1.$$

- Antimonotonicité : Si  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones, cela n'implique pas

$$\pi(X_1, X_2) = -1.$$

- Invariance : Le coefficient n'est pas invariant pour toute transformation strictement monotone  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\pi(\phi(X_1), X_2) = \begin{cases} \pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est croissante} \\ -\pi(X_1, X_2), & \text{si } \phi \text{ est décroissante} \end{cases}.$$

## 23.3 Mesure de relation de dépendance linéaire

Le coefficient de corrélation de Pearson mesure la relation de dépendance linéaire entre les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ .

- (Cas particulier d'un couple de v.a. comonotones = relation linéaire avec pente positive).

Si  $X_2 = a + bX_1$  et  $b > 0$ , alors

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1, X_2) &= \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}} \\ &= \frac{b\text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) b^2 \text{Var}(X_1)}} = 1.\end{aligned}$$

- (Cas particulier d'un couple de v.a. antimonotones = relation linéaire avec pente négative).

Si l'on suppose que  $X_2 = a + bX_1$  avec  $b = -c$  où  $c > 0$ , il en résulte que

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}} = \frac{-c\text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) c^2 \text{Var}(X_1)}} = -1.$$

## 23.4 Invariance aux transformations linéaires

Le coefficient de corrélation de Pearson est invariant par rapport aux transformations linéaires.

Soient deux scalaires  $b_1, b_2 > 0$ .

Soit le couple de v.a.  $(Y_1, Y_2)$  définies par

$$Y_1 = a_1 + b_1 X_1$$

et

$$Y_2 = a_2 + b_2 X_2.$$

Alors, on a



$$\begin{aligned}\rho_P(Y_1, Y_2) &= \rho_P(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) \\ &= \rho_P(X_1, X_2) .\end{aligned}$$

## 23.5 Problèmes

Comme il ne satisfait pas aux 5 propriétés désirables, le coefficient de corrélation de Pearson ne permet pas de mesurer adéquatement la concordance (ou l'association) entre deux v.a.

Il existe des mesures qui satisfont aux 5 propriétés, dont les deux plus populaires sont le tau de Kendall et le rho de Spearman.

### 23.5.1 Problèmes de perception

Il y a des problèmes de perception liés au coefficient de corrélation de Pearson.

- **Problème #1. Coefficient de corrélation de Pearson et marginales.**
  - Il est faux de croire que les marginales et le coefficient de corrélation linéaire pour un couple de v.a. déterminent leur distribution conjointe.
  - Il est possible de construire différentes distributions pour le couple  $(X_1, X_2)$  à partir des mêmes marginales  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  et de différentes copules.
  - De plus, il est important de souligner que la valeur du coefficient de corrélation de Pearson dépend des marginales.
- **Problème #2. Coefficient de corrélation de Pearson et valeurs atteignables (-1 et 1).**
  - Il est aussi erroné de croire que, pour toutes marginales  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  et pour tout coefficient de corrélation  $\rho_P(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ , il est toujours possible de construire une fonction de répartition conjointe dont les marginales sont  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$  et la corrélation  $\rho_P(X_1, X_2)$ .
- **Problème #3.** Le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfait pas aux propriétés désirables suivantes pour une mesure de dépendance :

- comonotonicité (voir exemples plus loin)
- antimonotonicité (voir exemples plus loin)
- invariance pour toute transformation monotones

Bref, le coefficient de corrélation de Pearson satisfait uniquement à la propriété de symétrie.

### 23.5.2 Valeurs minimale et maximale du coefficient de corrélation de Pearson

**Proposition 56** *Soit un couple de v.a.  $(X_1, X_2)$  dont les marginales ont des espérances et des variances finies ainsi qu'une fonction de répartition non spécifiée. Alors, on a*

1. *les valeurs atteignables de  $\rho_P(X_1, X_2)$  sont comprises dans l'intervalle*

$$\left[ \rho_P^{\min}, \rho_P^{\max} \right] \subseteq [-1, 1] ;$$

2. *la valeur  $\rho_P^{\min}$  est atteinte si et seulement si les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones ;*
3. *la valeur  $\rho_P^{\max}$  est atteinte si et seulement si les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones.*

**Preuve.** À faire en classe. ■

Pour simplifier l'exposé, on effectue la preuve en supposant que les v.a. sont continues.

Les inégalités sont valides peu importe si les distributions marginales sont continues ou non.

Soit une paire de v.a. continues positives  $\underline{X} = (X_1, X_2)$  où  $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$ , la classe de Fréchet générée par les marginales  $F_{X_1}$  et  $F_{X_2}$ .

Soit  $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \mathcal{CF}(F_{X_1}, F_{X_2})$  et où

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2) = \min \left( F_{X_1}(x), F_{X_2}(x_n) \right)$$

et

$$F_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) = \max \left( F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x_n) - 1; 0 \right).$$

Alors, on a

$$\text{Cov} \left( X_1^{\min}, X_2^{\min} \right) \leq \text{Cov} (X_1, X_2) \leq \text{Cov} (X_1^{\max}, X_2^{\max})$$

et

$$-1 \leq \rho_P \left( X_1^{\min}, X_2^{\min} \right) \leq \rho_P (X_1, X_2) \leq \rho_P (X_1^{\max}, X_2^{\max}) \leq 1.$$

Pour valider ces deux inégalités, on a recours aux ingrédients suivants :

– Ingrédient #1 :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2].$$

– Ingrédient #2 :

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 f_{\underline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

– Ingrédient #3 :

$$\overline{F}_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2)$$

En effet, on a

$$\overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{\underline{X}}(x_1, x_2).$$



- On combine les 3 ingrédients, on laisse reposer 30 min, on enfourne 15 min et on obtient

$$\begin{aligned}
 E[X_1 X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\max}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= E[X_1^{\max} X_2^{\max}]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 E[X_1 X_2] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{X}^{\min}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= E[X_1^{\min} X_2^{\min}]
 \end{aligned}$$

qui mène aux résultats désirés.

### 23.5.3 Exemples – valeurs minimale et maximale

L'exemple suivant fournit une illustration d'un cas où  $\rho_P(X_1, X_2)$  est strictement inférieur à 1 bien que  $X_1$  et  $X_2$  soient comonotones.

**Exemple 57** Marginales exponentielle et uniforme.

- Soit le couple de v.a. comonotones  $(X_1, X_2)$  où  $X_1 \sim \text{Exp}(1)$  et  $X_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .
- On a  $X_1 = -\ln(1 - U)$  et  $X_2 = U = 1 - \exp(-X_1)$ .
- Tout d'abord, on déduit

$$E[X_1 X_2] = E[X_1 (1 - \exp(-X_1))] = E[X_1] - E[X_1 \exp(-X_1)],$$

où

$$E[X_1 \exp(-X_1)] = \int_0^\infty x \exp(-x) \exp(-x) dx = \frac{1}{4}.$$

- Il en résulte que  $E[X_1 X_2] = \frac{3}{4}$ .

– Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

– Alors, on obtient

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{1}{4} \sqrt{12} = 0.866.$$

– Soit le couple de v.a. antimonotones  $(X_1, X_2)$  où  $X_1 \sim \text{Exp}(1)$  et  $X_2 \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

– On a  $X_1 = -\ln(U)$  et  $X_2 = U = \exp(-X_1)$ .

– Tout d'abord, on déduit

$$E[X_1 X_2] = E[X_1 \exp(-X_1)] = E[X_1 \exp(-X_1)],$$

où

$$E[X_1 \exp(-X_1)] = \int_0^\infty x \exp(-x) \exp(-x) dx = \frac{1}{4}.$$

- Il en résulte que  $E[X_1 X_2] = \frac{1}{4}$ .
- Ensuite, on déduit

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

- Enfin, on conclut

$$\rho_P(X_1, X_2) = -\frac{1}{4}\sqrt{12} = -0.866.$$

□

### Exemple 58 Marginales lognormales.

- Soient les v.a.  $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$  pour  $i = 1, 2$ .
- Si  $(X_1, X_2)$  forme un couple de v.a. comonotones, on déduit que

$$\rho_P^+(X_1, X_2) = \frac{(e^{\sigma_1 \sigma_2} - 1)}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1)(e^{\sigma_2^2} - 1)}}.$$

- On définit

$$X_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)$$

et

$$X_2 = \exp(\mu_2 + \sigma_2 Z)$$

où

$$Z \sim Norm(0, 1).$$

*On y va*

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[\exp(\mu_1 + \sigma_1 Z) \exp(\mu_2 + \sigma_2 Z)] \\ &= E[\exp(\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) Z)] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

– *Ensuite, on a*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2}\right) - \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \times \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

– Puis, on a

$$\begin{aligned}
 \rho_P(X_1, X_2) &= \frac{e^{\mu_1 + \mu_2} e^{\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - e^{\mu_1 + \mu_2} e^{\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}\right)}}{\sqrt{e^{2\mu_1 + \sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) e^{2\mu_2 + \sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1)}} \\
 &= \frac{e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} (e^{\sigma_1\sigma_2} - 1)}{e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} \sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)}} \\
 &= \frac{e^{\sigma_1\sigma_2} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)}}.
 \end{aligned}$$



– Si  $(X_1, X_2)$  forme un couple de v.a. antimonotones, on déduit que

$$\rho_P^-(X_1, X_2) = \frac{(e^{-\sigma_1\sigma_2} - 1)}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1)(e^{\sigma_2^2} - 1)}}.$$

– On définit

$$X_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1 Z)$$

et

$$X_2 = \exp(\mu_2 - \sigma_2 Z)$$

où

$$Z \sim \text{Norm}(0, 1).$$

*On y va*

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[\exp(\mu_1 + \sigma_1 Z) \exp(\mu_2 - \sigma_2 Z)] \\ &= E[\exp(\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z)] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

– *Ensuite, on a*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= \exp\left((\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}\right) - \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \times \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

– Puis, on a

$$\begin{aligned}
 \rho_P(X_1, X_2) &= \frac{e^{\mu_1 + \mu_2} e^{\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - e^{\mu_1 + \mu_2} e^{\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}\right)}}{\sqrt{e^{2\mu_1 + \sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) e^{2\mu_2 + \sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1)}} \\
 &= \frac{e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} (e^{-\sigma_1\sigma_2} - 1)}{e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} \sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)}} \\
 &= \frac{e^{-\sigma_1\sigma_2} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)}}.
 \end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_1 = 2$  et  $\sigma_2 = 3$ , on obtient  $\rho_P^+(X_1, X_2) = 0.6107$  et  $\rho_P^-(X_1, X_2) = -0.0015$ .

– Pour  $\sigma_1 = 0.2$  et  $\sigma_2 = 0.3$ , on obtient

$$\begin{aligned}\rho_P^+(X_1, X_2) &= \frac{e^{0.2 \times 0.3} - 1}{\sqrt{(e^{0.2^2} - 1)(e^{0.3^2} - 1)}} \\ &= 0.997\,45\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_P^-(X_1, X_2) &= \frac{e^{-0.2 \times 0.3} - 1}{\sqrt{(e^{0.2^2} - 1)(e^{0.3^2} - 1)}} \\ &= -0.93936\end{aligned}$$

□

### Exemple 59 Marginales exponentielles.

- Soient les v.a.  $X_i \sim \text{Exp}(1)$  pour  $i = 1, 2$ .
- Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de v.a. comonotones
- On a

$$X_1 = X$$

et

$$X_2 = X,$$

où

$$X \sim \text{Exp}(1).$$

- On déduit que

$$E[X_1 X_2] = E[X^2] = 2.$$

– On calcule que

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = 1.$$

– On obtient

$$\rho_P^+(X_1, X_2) = 1.$$

– Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de v.a. antimonotones.

– Soit une v.a.  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ .

– On a

$$X_1 = -\ln(1 - U)$$

et

$$X_2 = -\ln(U).$$

– Selon les tables d'intégration (à préciser), on déduit que

$$E[X_1 X_2] = \int_0^1 \ln(u) \ln(1 - u) du = 2 - \frac{1}{6}\pi^2.$$

– On calcule que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= 2 - \frac{1}{6}\pi^2 - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{6}\pi^2. \end{aligned}$$

– On obtient

$$\rho_P^-(X_1, X_2) = 1 - \frac{1}{6}\pi^2 = -0.64493.$$

□

### 23.5.4 Corrélacion linéaire nulle et indépendance

Si les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes,  $\rho_P(X_1, X_2) = 0$  i.e. elles ne sont pas corrélées linéairement (elles sont non-corrélées linéairement).

Si les v.a.  $(X_1, X_2)$  sont non corrélées linéairement i.e.  $\rho_P(X_1, X_2) = 0$ , cela n'implique pas qu'elles soient indépendantes.

Dans l'exemple suivant, on considère des lois conjointes où la corrélation est nulle et on les compare à la loi conjointe avec indépendance.



**Exemple 60 Couples de v.a. non-corrélées.**

- Soit une couple de v.a.  $(U_1, U_2)$  où  $U_i \sim U(0, 1)$  ( $i = 1, 2$ ) et avec  $Cov(U_1, U_2) = 0$ .
- On définit  $S = U_1 + U_2$ .
- Quatre hypothèses considérées pour la loi conjointe de  $(U_1, U_2)$  :
  - hypothèse 1 (copule de Fréchet) :

$$F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \max(u_1 + u_2 - 1; 0) + \frac{1}{2} \min(u_1; u_2) ;$$

- hypothèse 2 (indépendance) :

$$F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = u_1 u_2 ;$$

- hypothèse 3 :

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = |2U - 1|$$

où  $U \sim U(0, 1)$  ;

– hypothèse 4 :

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = 1 - |2U - 1|$$

où  $U \sim U(0, 1)$ .

- Pour les 4 hypothèses, la valeur de  $\rho_P(U_1, U_2)$  est nulle.
- Les expressions de  $F_S$  pour chaque hypothèse sont les suivantes (à faire en exercice) :

$$\text{– hypothèse 1 : } F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ;$$

- hypothèse 2 :  $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ;$
- hypothèse 3 :  $F_S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}(2x - 1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{x+1}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ;$
- hypothèse 4 :  $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(4x - 3), & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases} .$
- Bien que les v.a.  $U_1$  et  $U_2$  soient non-corrélées pour les 4 hypothèses, on constate dans la figure 15 que les valeurs de  $F_S$  diffèrent clairement.  $\square$

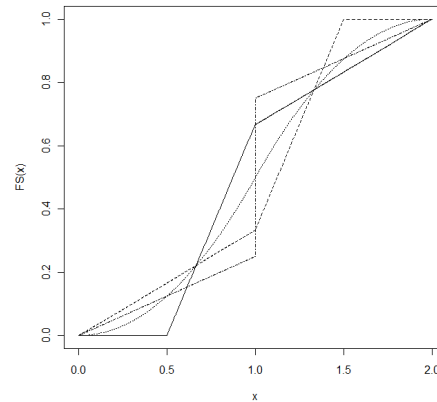


Fig. 15 – Courbes de  $F_S(s)$  (hypothèse 1 = ligne avec traits et points ; hypothèse 2 = ligne pointillée ; hypothèse 3 = ligne continue ; hypothèse 4 = ligne avec traits).

## 24 Mesures de corrélation des rangs et concordance

On considère une paire de v.a. continues  $(X_1, X_2)$ .

Les deux principales mesures de corrélation des rangs sont le rho de Spearman et le tau de Kendall.

Le traitement de mesures de rang pour les v.a. discrètes n'est pas considérées dans le présent chapitre.

Comme  $(X_1, X_2)$  est une paire de v.a. continue, il existe une unique copule telle que

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

Selon Nelsen (2006), il est convenu d'utiliser le terme "mesure de corrélation" pour le coefficient de corrélation (linéaire) de Pearson et le terme (plus moderne selon Nelsen (2006) "mesure d'association" pour le rho de Spearman et le tau de Kendall.

## 25 Rho de Spearman

### 25.1 Définition

Le rho de Spearman est une mesure de rang.

Il est possible d'établir un lien entre rho de Spearman et le coefficient de corrélation linéaire de Pearson.

(Note historique : Charles Spearman était un collègue de Karl Pearson.)

**Définition 61** *Le rho de Spearman associé au couple  $(X_1, X_2)$  est défini par*

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)).$$

Le rho de Spearman correspond au coefficient de corrélation linéaire entre les fonctions de répartition des v.a.  $X_1$  et  $X_2$ .

Comme

$$\begin{aligned} U_1 &= F_{X_1}(X_1) \\ U_2 &= F_{X_2}(X_2), \end{aligned}$$

le rho de Spearman est aussi représenté sous la forme

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{E[U_1 U_2] - E[U_1] E[U_2]}{\sqrt{\text{Var}(U_1) \text{Var}(U_2)}} \\ &= 12 \left( E[U_1 U_2] - \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (14)$$



car

$$\sqrt{\text{Var}(U_1) \text{Var}(U_2)} = \frac{1}{12}$$

et

$$E[U_1] E[U_2] = \frac{1}{4}.$$

On mentionne que

$$\begin{aligned} E[U_1 U_2] &= E[F_{X_1}(X_1) F_{X_2}(X_2)] \\ &= \int \int F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

## 25.2 Rho de Spearman et propriétés désirables

Le rho de Spearman satisfait aux 5 propriétés désirables.

- Symétrie
- Normalisation
- Comonotonicité
- Antimonotonicité
- Invariance

## 25.3 Rho de Spearman et valeurs possibles

Les valeurs possibles du rho de Spearman sont  $-1 \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq 1$ .

Voir les détails dans les 2 sous-sections qui suivent.

## 25.4 Rho de Spearman et comonotonicité

**Remarque 62** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones, cela implique que  $\rho_S(X_1, X_2) = 1$ .

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones, alors les v.a. correspondantes  $U_1$  et  $U_2$  sont définies par

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = U$$

Il en résulte que

$$E[U_1 U_2] = E[U^2] = \frac{1}{3}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 1.$$

## 25.5 Rho de Spearman et antimonotonie

**Remarque 63** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont anti-monotones, cela implique que  $\rho_S(X_1, X_2) = -1$  (.).

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones, alors les v.a. correspondantes  $U_1$  et  $U_2$  sont définies par

$$U_1 = U$$

et

$$U_2 = 1 - U$$

Il en résulte que

$$E[U_1 U_2] = E[U] - E[U^2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) = -1.$$

## 25.6 Rho de Spearman et indépendance

**Remarque 64** Dans le cas où les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, cela implique que  $\rho_S(X_1, X_2) = 0$ .

Si les v.a.  $(X_1, X_2)$  sont indépendantes, alors

$$E[U_1 U_2] = E[U_1] E[U_2] = \frac{1}{4}$$

et

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$



## 25.7 Rho de Spearman et représentation alternative

On mentionne que (14) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \rho_S(X_1, X_2) \\ = & 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

La transformation en (13) permet de tenir compte des rangs en éliminant l'effet des marginales.

- Si la v.a.  $X_1$  a tendance à augmenter quand  $X_2$  augmente, alors le rho de Spearman prendra une valeur positive.
- Si la v.a.  $X_1$  a tendance à décroître quand  $X_2$  augmente, alors le rho de Spearman prendra une valeur négative.

Recall that

$$\begin{aligned} E[U_1 U_2] &= E[F_{X_1}(X_1) F_{X_2}(X_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Integration by part leads to

$$\begin{aligned} E[U_1 U_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Then, we have the following alternative representation for  $\rho_S(X_1, X_2)$  :

$$\begin{aligned}
 \rho_S(X_1, X_2) &= 12 \left( E \left[ F_{X_1}(X_1) F_{X_2}(X_2) \right] - E \left[ F_{X_1}(X_1) \right] E \left[ F_{X_2}(X_2) \right] \right) \\
 &= 12 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \right. \\
 &\quad \left. - \left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_2}(x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \right) \right) \\
 &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

Frechet's upper and lower bounds :

- Let  $(X_1^+, X_2^+)$  be a pair of continuous comonotonic rvs with  $X_1^+ \sim X_1$  and  $X_2^+ \sim X_2$  i.e.

$$F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2) = \min \left( F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2) \right)$$

- Let  $(X_1^-, X_2^-)$  be a pair of continuous countermonotonic rvs with  $X_1^- \sim X_1$  and  $X_2^- \sim X_2$  i.e.

$$F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2) = \max(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0)$$

- We know that

$$F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2) \leq F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2)$$

for all  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ .

- Then, we have

$$\begin{aligned} \rho_S(X_1, X_2) &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &\leq 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \rho_S(X_1^+, X_2^+) = 1 \end{aligned}$$

– Also, we have

$$\begin{aligned}
 \rho_S(X_1, X_2) &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
 &\geq 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \rho_S(X_1^-, X_2^-) = -1.
 \end{aligned}$$

– We conclude

$$-1 = \rho_S(X_1^-, X_2^-) \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \rho_S(X_1^+, X_2^+) = 1,$$

for all  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ .

The transformation in (13) allows to take into account the ranks by eliminating the effect of the marginals (marginal cdfs).

– If the  $X_1$  tends to increase when the rv  $X_2$  increases, then Spearman's rho will take a positive value.

- If the  $X_1$  tends to decrease when the rv  $X_2$  increases, then Spearman's rho will take a negative value.

## 26 Tau de Kendall

### 26.1 Définition

Le tau de Kendall est mesure la concordance entre les v.a.  $(X_1, X_2)$ .

**Définition 65** *Le tau de Kendall associé au couple  $(X_1, X_2)$  est défini par*

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) = & \Pr\left(\left(X_1 - X'_1\right)\left(X_2 - X'_2\right) > 0\right) \\ & - \Pr\left(\left(X_1 - X'_1\right)\left(X_2 - X'_2\right) < 0\right), \end{aligned} \quad (15)$$

où  $(X'_1, X'_2)$  est indépendant de  $(X_1, X_2)$  et possède les mêmes marginales que  $(X_1, X_2)$ .

L'interprétation de (15) est donnée par

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr(\text{concordance}) - \Pr(\text{discordance}).$$



## 26.2 Propriétés du tau de Kendall

Les valeurs possibles du tau de Kendall sont  $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$ .

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones (antimonotones), cela implique que  $\tau(X_1, X_2) = 1$  ( $-1$ ).

De plus, si les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, cela implique que  $\tau(X_1, X_2) = 0$ .

La valeur du tau de Kendall ne dépend pas des marginales du couple  $(X_1, X_2)$ .

Le premier (deuxième) terme mesure la probabilité d'observer des valeurs concordantes (discordantes).

Ainsi, plus la relation de dépendance entre  $(X_1, X_2)$  est positive (négative) plus la valeur s'approchera de 1 ( $-1$ ).

## 27 Remarques sur le rho de Spearman et tau de Kendall

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont invariants aux transformations monotones.

- Si  $\phi_1, \phi_2$  sont deux fonctions croissantes, alors

$$\tau(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \tau(X_1, X_2)$$

et

$$\rho_S(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2).$$

- Si  $\phi_1, \phi_2$  sont deux fonctions décroissantes, alors

$$\tau(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \tau(X_1, X_2)$$

et

$$\rho_S(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2).$$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman satisfont les 5 propriétés désirables d'une mesure de dépendance.

Cela signifie que le tau de Kendall et le rho de Spearman sont des mesures de concordance.

- Les v.a.  $X$  et  $Y$  sont concordantes si les valeurs élevées de l'une tendent à être associées aux valeurs élevées de l'autre et si les valeurs petites de l'une tendent à être associées aux valeurs petites de l'autre.

- Les v.a.  $X$  et  $Y$  sont discordantes si les valeurs élevées de l'une tendent à être associées aux valeurs petites de l'autre et si les valeurs petites de l'une tendent à être associées aux valeurs élevées de l'autre.

## 28 Relation entre le rho de Spearman et tau de Kendall

Il existe une relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 66** *Soit un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$ .*

1. *Pour  $0 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$ , on a*

$$\frac{3\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{1 + 2\tau(X_1, X_2) - \tau(X_1, X_2)^2}{2}.$$

2. *Pour  $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 0$ , on a*

$$\frac{\tau(X_1, X_2)^2 + 2\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{3\tau(X_1, X_2) + 1}{2}.$$

## 29 Mesures de corrélation des rangs (mesures d'association) et copule

Soit une paire de v.a. continues  $(X_1, X_2)$ .

## 29.1 Rho de Spearman

En appliquant (14), l'expression du rho de Spearman peut aussi s'écrire en fonction de la copule associée

$$\begin{aligned}\rho_S(X_1, X_2) &= 12 \left( \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \, du_1 du_2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 E[C(U_1, U_2)] - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 \, dC(u_1, u_2) - 3.\end{aligned}$$

## 29.2 Rho de Spearman et copule EFGM

Let  $(U_1, U_2) \sim C_\alpha$  where

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

with

$$c(u_1, u_2) = 1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2).$$



Then

$$\begin{aligned}
 E[U_1 U_2] &= \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 c(u_1, u_2) \, du_1 du_2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 (1 + \alpha (1 - 2u_1)(1 - 2u_2)) \, du_1 du_2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 (1 + \alpha) \, du_1 du_2 \\
 &\quad - \alpha \int_0^1 \int_0^1 2u_1^2 u_2 \, du_1 du_2 \\
 &\quad - \alpha \int_0^1 \int_0^1 u_1 2u_2^2 \, du_1 du_2 \\
 &\quad + \alpha \int_0^1 \int_0^1 2u_1^2 2u_2^2 \, du_1 du_2 \\
 &= (1 + \alpha) \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) - \alpha \left( \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right) + \alpha \left( \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

Finally, we get

$$\begin{aligned} E[U_1 U_2] &= \frac{1}{4} + \alpha \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \alpha \left( \frac{1}{36} \right). \end{aligned}$$

We conclude that

$$\begin{aligned} \rho_S(U_1, U_2) &= 12 \left( \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 c(u_1, u_2) du_1 du_2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 \left( \frac{1}{4} + \alpha \frac{1}{36} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\alpha}{3}. \end{aligned}$$

Then, for this copula, we observe

$$-\frac{1}{3} \leq \rho_S(U_1, U_2) \leq \frac{1}{3}.$$

Let  $(X_1, X_2)$  be a pair of continuous rvs with

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

where  $C$  is the EFGM copula.

Then, for any marginals distribution for  $X_1$  and  $X_2$ ,

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{\alpha}{3}$$

and

$$-\frac{1}{3} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{1}{3}.$$

## 29.3 Tau de Kendall

L'expression en (15) du tau de Kendall devient

$$\tau(X_1, X_2) = 2 \Pr\left(\left(X_1 - X'_1\right)\left(X_2 - X'_2\right) > 0\right) - 1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left(X_1 - X'_1\right)\left(X_2 - X'_2\right) > 0\right) &= \Pr\left(X_1 > X'_1, X_2 > X'_2\right) \\ &\quad + \Pr\left(X_1 \leq X'_1, X_2 \leq X'_2\right). \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\Pr\left(X_1 > X'_1, X_2 > X'_2\right) = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2)$$

et

$$\Pr(X_1 \leq X'_1, X_2 \leq X'_2) = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2)$$

Il en résulte que l'on peut s'exprimer le tau de Kendall en fonction de la copule associée à leur distribution conjointe

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1 \\ &= 4E[C(U_1, U_2)] - 1. \end{aligned}$$

## 29.4 Quelques expressions

On indique dans le tableau ci-dessous les expressions du tau de Kendall et du rho de Spearman associées à certaines copules :

Copule	$\tau(X_1, X_2)$	$\rho_S(X_1, X_2)$
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	—
Normale	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\alpha)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin(\alpha)$
Gumbel	$\frac{\alpha-1}{\alpha}$	—
Fréchet	$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$	$(\alpha - \beta)$
EFGM	$\frac{2\alpha}{9}$	$\frac{\alpha}{3}$
Marshall-Olkin	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$	$\frac{3\alpha\beta}{2\alpha+\beta-2\alpha\beta}$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman pour une copule donnée sont identiques à ceux de la copule de survie qui lui est associée.

## 29.5 Mesures d'association et paramètres des copules

### Copules gaussiennes

$$\begin{aligned} - \rho(X_1, X_2) &= \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\alpha}{2} \\ - \tau(X_1, X_2) &= \frac{2}{\pi} \arcsin \alpha \end{aligned}$$

Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs des deux mesures d'associations dans le cas de la copule de normale (gaussienne).

alpha	tau(X1,X2)	rhoS(X1,X2)
-1	-1	-1
-0,9	-0,71286741	-0,89145613
-0,8	-0,59033447	-0,78593928
-0,7	-0,49363338	-0,6829105
-0,6	-0,40966553	-0,5819201
-0,5	-0,33333333	-0,48258374
-0,4	-0,26197976	-0,3845653
-0,3	-0,19397337	-0,28756422
-0,2	-0,12818843	-0,19130568
-0,1	-0,06376856	-0,0955328
0	0	0
0,1	0,06376856	0,0955328
0,2	0,12818843	0,19130568
0,3	0,19397337	0,28756422
0,4	0,26197976	0,3845653
0,5	0,33333333	0,48258374
0,6	0,40966553	0,5819201
0,7	0,49363338	0,6829105
0,8	0,59033447	0,78593928
0,9	0,71286741	0,89145613
1	1	1

En observant le tableau des valeurs, on constate que  $\rho_S(X_1, X_2) \simeq \alpha$ .



## Autres exemples – Rho de Spearman

- Copule de Clayton. Forme compliquée.
- Copule de Frank. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = 1 + \frac{12}{\alpha} (D_2(\alpha) - D_1(\alpha))$$

où  $D_k(x)$  est la fonction dite Debye

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

- Copule de Gumbel. Forme non explicite.
- Copule Normale. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \alpha$$

– Copule de Fréchet. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \alpha - \beta$$

– Copule de FGM. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{\alpha}{3}$$

– Copule de Marshall-Olkin. On a

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}$$

## Autres exemples – Tau de Kendall

– Copule de Clayton. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

– Copule de Frank. On a

$$\tau(X_1, X_2) = 1 + \frac{4}{\alpha} (D_1(\alpha) - 1)$$

où  $D_k(x)$  est la fonction dite Debye

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

– Copule de Gumbel. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

– Copule de Fréchet. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2)}{3}$$

– Copule de FGM. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{2\alpha}{9}$$

– Copule de Marshall-Olkin. On a

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}$$

## 30 Estimation du rho de Spearman et du tau de Kendall

### 30.1 Mise en place

On dispose d'une suite de  $n$  vecteurs d'observations

$$\left\{ \left( x_{1,j}, x_{2,j} \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

de la suite de vecteurs aléatoires (dimension 2) i.i.d.

$$\left\{ \left( X_{1,j}, X_{2,j} \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

On note

$$\begin{aligned}\underline{x}_j &= (x_{1,j}, x_{2,j}) \\ \underline{X}_j &= (X_{1,j}, X_{2,j})\end{aligned}$$

## 30.2 Rho de Spearman

On considère la suite de  $n$  vecteurs d'observations

$$\left\{ \left( x_{1,j}, x_{2,j} \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Le rang d'une observation  $x_{i,j}$ , noté  $rank(x_{i,j})$ , correspond à la position ("rang") dans les observations  $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,n}\}$  pour  $i = 1, 2$ .

Pour la composante  $j$  de la suite, on calcule la valeur de la fonction de répartition empirique

$$\left\{ \left( F_{1,n}(x_{1,j}), F_{1,n}(x_{2,j}) \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

où

$$F_{1,n}(x_{1,j}) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n 1_{\{x_{1,j} \leq x_{1,l}\}} = \frac{\text{rank}(x_{1,j})}{n+1}$$

et

$$F_{2,n}(x_{2,j}) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n 1_{\{x_{2,j} \leq x_{2,l}\}} = \frac{\text{rank}(x_{2,j})}{n+1}.$$

Pour  $i = 1, 2$ , les moyennes empiriques sont

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F_{1,n}(x_{1,l}) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} (1 + \dots + n) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \frac{(n \times (n+1))}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F_{2,n}(x_{2,j}) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \frac{(n \times (n+1))}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'estimateur empirique du rho de Spearman est l'estimateur empirique du co-

efficient de corrélation de Pearson

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_S(X_1, X_2) &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( F_{1,n}(x_{1,j}) - \tilde{F}_1 \right) \left( F_{2,n}(x_{2,j}) - \tilde{F}_2 \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( F_{1,n}(x_{1,j}) - \tilde{F}_1 \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( F_{2,n}(x_{2,j}) - \tilde{F}_2 \right)^2}} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n \left( F_{1,n}(x_{1,j}) - \frac{1}{2} \right) \left( F_{2,n}(x_{2,j}) - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( F_{1,n}(x_{1,j}) - \frac{1}{2} \right)^2 \sum_{j=1}^n \left( F_{2,n}(x_{2,j}) - \frac{1}{2} \right)^2}} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\text{rank}(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)^2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)^2}}
 \end{aligned}$$

En retravaillant les termes, on obtient

$$\hat{\rho}_S(X_i, X_{i'}) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{j=1}^n \left( \text{rank}(x_{i,j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left( \text{rank}(x_{i',j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right)$$

ou

$$\hat{\rho}_S(X_1, X_2) = \frac{12}{n(n+1) \times (n-1)} \times \sum_{j=1}^n \text{rank}(x_{1,j}) \text{rank}(x_{2,j}) - 3 \frac{n+1}{n-1}.$$

**[Note : la preuve doit être complétée]**

## 30.3 Tau de Kendall

On compare les  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  paires de vecteurs d'observations au sein de la suite de  $n$  vecteurs d'observations

$$\left\{ (x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Soit la paire d'observations  $(x_{1,j}, x_{2,j})$  et  $(x_{1,k}, x_{2,k})$ .

– La paire est concordante si

$$x_{1,j} > x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} > x_{2,k}$$

ou

$$x_{1,j} < x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} < x_{2,k}.$$

- La paire est discordante si

$$x_{1,j} > x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} < x_{2,k}$$

ou

$$x_{1,j} < x_{1,k} \text{ et } x_{2,j} > x_{2,k}.$$

On définit les quantités suivantes :

- $c_n$  = nombre de paires concordantes ;
- $d_n$  = nombre de paires discordantes.

L'estimateur empirique du tau de Kendall correspond

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(X_1, X_2) &= \frac{\text{nb de paires concordantes} - \text{nb de paires discordantes}}{\text{nb total de combinaison de paires}} \\ &= \frac{c_n - d_n}{\binom{n}{2}}.\end{aligned}$$

Si toutes les paires sont concordantes, alors

$$c_n = \binom{n}{2}$$

et

$$d_n = 0$$

ce qui mène à

$$\hat{\tau}(X_1, X_2) = 1.$$

Si toutes les paires sont discordantes, alors

$$c_n = 0$$

et

$$d_n = \binom{n}{2}$$

ce qui mène à

$$\hat{\tau}(X_1, X_2) = -1.$$

On utilise aussi la représentation suivante :

$$\hat{\tau}(X_1, X_2) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \text{sign} \left( (x_{1,j} - x_{1,k}) (x_{2,j} - x_{2,k}) \right)}{\binom{n}{2}},$$

où

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} -1 & , a < 0 \\ 1 & , a > 0 \end{cases}.$$

## 31 Mesures de dépendance et indépendance

Si les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, on a  $\rho_P(X_1, X_2) = 0$ ,  $\tau(X_1, X_2) = 0$  et  $\rho_S(X_1, X_2) = 0$ .

Toutefois,  $\rho_P(X_1, X_2) = 0$ ,  $\tau(X_1, X_2) = 0$  ou  $\rho_S(X_1, X_2) = 0$ , n'implique pas l'indépendance.



## 32 Coefficients de dépendance de queue

### 32.1 Définitions

Afin d'examiner la dépendance de queue d'un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$ , on a recours aux coefficients de dépendance de queue.

**Définition 67** *Le coefficient de dépendance de queue supérieure est défini par*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \rightarrow 1^-} \Pr \left( X_1 > F_{X_1}^{-1}(\kappa) \mid X_2 > F_{X_2}^{-1}(\kappa) \right),$$

*si cette limite existe.*

**Définition 68** *Le coefficient de dépendance de queue inférieure est défini par*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \Pr \left( X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(\kappa) \mid X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa) \right),$$

*si cette limite existe.*

## 32.2 Remarques

Les coefficients de dépendance de queue sont des mesures locales alors que le tau de Kendall et le rho de Spearman mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution conjointe de la paire  $(X_1, X_2)$ .

Les coefficients de dépendance de queue sont intéressants pour analyser l'avènement simultané de valeurs très élevées ou très faibles de  $(X_1, X_2)$ .

- Si  $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$ , on dit que les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution.
- Si  $\lambda_U(X_1, X_2) = 0$ , les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution.

De même, si  $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$ , les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont asymptotiquement dépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution.

Si  $\lambda_L(X_1, X_2) = 0$ , les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution.

## 32.3 Contexte de l'assurance

Dans le contexte de l'assurance, le concept de dépendance de queue supérieure se révèle important.

Soit un portefeuille avec deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  avec  $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$ .

Si un sinistre d'un montant élevé survient dans une ligne d'affaires alors la probabilité est non nulle qu'un sinistre avec un montant élevé survienne dans l'autre ligne d'affaires.

## 32.4 Contexte de la finance quantitative

Le concept de dépendance de queue inférieure est aussi important dans le contexte des risques financiers où les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  correspondent aux rendements des titres 1 et 2.

Si le titre 1 obtient un rendement fortement négatif au cours d'une période et si  $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$ , alors la probabilité est non négligeable que le titre 2 enregistre aussi un rendement fortement négatif au cours de la même période.

## 32.5 Copules

En fait, pour un couple de v.a. continues  $(X_1, X_2)$ , les coefficients de dépendance de queue dépendent uniquement de la copule  $C$  associée à leur distribution conjointe.

Ainsi, on a

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u},$$

et

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u},$$

si les limites existent.

Pour les principales copules archimédiennes, les expressions des coefficients de dépendance de queue sont :

Famille	$\lambda_L$	$\lambda_U$
Clayton	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
Frank	0	0
Gumbel	0	$2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$
Ali-Mikhail-Haq	0	0

Pour la copule de survie associée à la copule  $C$ , les valeurs des coefficients de dépendance de queue  $\lambda_L$  et  $\lambda_U$  sont interchangées.

Ainsi, pour la copule de survie associée à la copule de Clayton, le coefficient de dépendance de queue inférieure est nul et le coefficient de dépendance de queue supérieure est  $2^{-\frac{1}{\alpha}}$ .

Pour la copule normale avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , les coefficients de dépendance de queue sont nuls, i.e.  $\lambda_L = \lambda_U = 0$ .



En revanche, pour la copule de Student de paramètres  $\nu$  et  $\alpha$ , on a

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{\nu+1} \left( -\frac{\sqrt{1+\nu}\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \right).$$

Pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , on observe que  $\lambda_L = \lambda_U$  tend vers 0 lorsque  $\nu$  tend vers  $\infty$ .

## 33 Estimation et lois multivariées continues

### 33.1 Mise en place

On dispose d'une suite de  $n$  vecteurs d'observations  $\left\{ \left( x_{1,j}, \dots, x_{d,j} \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}$  de la suite de vecteurs de v.a. continues (dimension du vecteur  $d$ ).i.i.d.  $\left\{ \left( X_{1,j}, \dots, X_{d,j} \right) \right\}$

On note

$$\begin{aligned}\underline{x}_j &= \left( x_{1,j}, \dots, x_{d,j} \right) \\ \underline{X}_j &= \left( X_{1,j}, \dots, X_{d,j} \right) .\end{aligned}$$

Notation : on a

$$\underline{X}_j \sim \underline{X} = (X_1, \dots, X_d),$$

pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

La distribution commune de  $\underline{X}$  est

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_d) = F_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d)$$

et  $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$  sont les marginales.

Les paramètres de  $F_{\underline{X}}$  sont représentés par  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ , où  $m$  est le nombre de paramètres.

Exemples :

- Pour la loi exponentielle bivariée EFGM, il y a  $m = 3$  paramètres.
- Pour la loi normales bivariée, il y a  $m = 5$  paramètres.

## 33.2 Méthode du maximum de vraisemblance

On définit la fonction de vraisemblance par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, \dots, X_d}(x_{1,i}, \dots, x_{d,i}; \underline{\theta})$$

où

$$f_{X_1, \dots, X_d}(x_{1,i}, \dots, x_{d,i}; \underline{\theta})$$

est la fonction de densité conjointe de

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$$

avec les paramètres  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ .

Par la suite, on applique les étapes habituelles pour estimer les paramètres  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ .

Dès que le nombre  $m$  devient élevé, l'estimation des paramètres peut devenir ardu.

Comme on le verra, la représentation sous la forme de copule permet de décomposer l'estimation en deux étapes.

## 34 Estimation et copules

### 34.1 Données et objectif

On dispose d'une suite de  $n$  vecteurs d'observations  $\left\{ \left( x_{1,j}, \dots, x_{d,j} \right), j = 1, 2, \dots, n \right\}$  de la suite de vecteurs de v.a. continues (dimension du vecteur  $d$ ).i.i.d.  $\left\{ \left( X_{1,j}, \dots, X_{d,j} \right) \right\}$

On note

$$\begin{aligned}\underline{x}_j &= \left( x_{1,j}, \dots, x_{d,j} \right) \\ \underline{X}_j &= \left( X_{1,j}, \dots, X_{d,j} \right) .\end{aligned}$$

Notation : on a

$$\underline{X}_j \sim \underline{X} = (X_1, \dots, X_d),$$

pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

La fonction de répartition de  $\underline{X}$  est

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_d) &= F_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) \\ &= C\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right), \end{aligned}$$

où  $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$  sont les marginales.

La fonction de densité de  $\underline{X}$  est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_d}(x_d) c\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right)$$

Les paramètres de  $F_{\underline{X}}$  sont représentés par  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ , où  $m$  est le nombre de paramètres.

L'objectif est à la fois d'estimer les paramètres de la copule et des marginales.

Exemple :

- Copule bivariée de Clayton, marginale gamma et marginale lognormale  $\Rightarrow$  5 paramètres



## 34.2 Méthode des moments avec corrélation par les rangs

La méthode des moments requiert de calculer les statistiques de rang (rho de Spearman et tau de Kendall) et d'identifier les paramètres de la copule à partir de ces structures.

### 34.2.1 Matrice des rho de Spearman

On utilise cette information sur le rang pour déterminer l'estimateur non-paramétrique du rho de Spearman

$$\hat{\rho}_S(X_i, X_{i'}) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{j=1}^n \left( \text{rank}(x_{i,j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left( \text{rank}(x_{i',j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du rho de Spearman pour toutes les paires possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\underline{\Sigma}}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(X_1, X_2) & \dots & \hat{\rho}(X_1, X_d) \\ \hat{\rho}(X_2, X_1) & 1 & & \hat{\rho}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}(X_d, X_1) & \hat{\rho}(X_d, X_2) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du rho de Spearman proviennent du même échantillon, alors la matrice  $\widehat{\underline{\underline{\Sigma}}}(\rho)$  est semi-définie positive.

### 34.2.2 Matrice des tau de Kendall

L'estimateur non-paramétrique du tau de Kendall est donné par

$$\hat{\tau}(X_i, X_{i'}) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{sign} \left( (x_{i,j} - x_{i,k}) (x_{i',j} - x_{i',k}) \right)$$

On peut construire une matrice comportant tous les estimés du tau de Kendall pour toutes les paires possibles du vecteur aléatoire.

$$\widehat{\underline{\underline{\Sigma}}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}(X_1, X_2) & \dots & \hat{\tau}(X_1, X_d) \\ \hat{\tau}(X_2, X_1) & 1 & & \hat{\tau}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\tau}(X_d, X_1) & \hat{\tau}(X_d, X_2) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si les estimés du tau de Kendall proviennent du même échantillon, alors la matrice  $\widehat{\underline{\underline{\Sigma}}}(\tau)$  est semi-définie positive.

**Remarque :** On traite du cas où les estimés du rho de Spearman ne sont établis à partir du même échantillon.

## 34.3 Méthodes moments

On considère différents exemples.

### 34.3.1 Exemple – Cas bivarié

À partir d'un échantillon, on estime  $\hat{\tau}(X_1, X_2)$ .

On veut estimer le paramètre de dépendance  $\alpha$  d'une copule  $C_\alpha$ .

On sait que la mesure d'association  $\tau(X_1, X_2) = g(\alpha)$ , où  $g(\alpha)$  est une fonction de  $\alpha$ .

L'estimateur  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  est la solution de  $\hat{\tau}(X_1, X_2) = g(\alpha)$ . Cela est assez aisé à produire.

### 34.3.2 Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & \dots & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$\rho(X_i, X_j) \simeq \alpha_{i,j}$$

pour tous les couples  $(X_i, X_j)$ ,  $i \neq j$ .

Supposons que l'on a construit la matrice  $\widehat{\underline{\Sigma}}(\rho)$ .

Alors, on a l'estimateur  $\hat{\alpha}_{i,j}$  de  $\alpha_{i,j}$  qui est

$$\hat{\alpha}_{i,j} = \hat{\rho}(X_i, X_j)$$

La mesure  $\rho(X_i, X_j)$  n'a pas de forme explicite pour la copule de Student.

On ne peut pas recourir à l'approximation mentionnée ci-dessus.



### 34.3.3 Exemple – Cas multivarié.

On suppose la copule normale avec sa matrice de paramètres de dépendance

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & 1 & \dots & \alpha_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on a construit la matrice  $\widehat{\underline{\Sigma}}(\tau)$ .

Alors, on a l'estimateur  $\widehat{\alpha}_{i,j}$  de  $\alpha_{i,j}$  est la solution de la relation

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \alpha_{i,j} = \widehat{\tau}(X_i, X_j)$$

Il arrive que la matrice de  $\hat{\alpha}_{i,j}$  ne soit pas semi-définie positive.

On peut utiliser la procédure expliquée plus loin pour la modifier afin de la rendre semi-définie positive.

Comme la mesure  $\tau(X_i, X_j)$  a une forme explicite pour la copule de Student  $\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \alpha_{i,j}$ .

Il reste à estimer le paramètre  $\tau$  par la méthode du maximum de vraisemblance.  
 $\square$

## 34.4 Copule non-paramétrique

On considère un échantillon de  $n$  observations multivariées d'un vecteur de v.a. de longueur  $d$ , noté  $\left\{ (x_{1,j}, \dots, x_{d,j}), j = 1, 2, \dots, n \right\}$  d'un vecteur.

Pour  $d = 2$ , la copule non-paramétrique est définie par

$$C_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\text{rang}(x_{1,j})}{n+1} \leq u_1, \frac{\text{rang}(x_{2,j})}{n+1} \leq u_2 \right\}}$$

L'expression générale de la copule non-paramétrique est

$$C_n(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\text{rang}(x_{1,j})}{n+1} \leq u_1, \dots, \frac{\text{rang}(x_{d,j})}{n+1} \leq u_d \right\}}$$

## 34.5 Maximum de vraisemblance

### 34.5.1 Mise en place

La fonction de répartition de  $\underline{X}$  est

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_d) = F_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d)$$

où  $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$  sont les marginales.

En raison du théorème de Sklar, on a la représentation unique suivante

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_d) &= F_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) \\ &= C\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right), \end{aligned}$$

La fonction de densité de  $\underline{X}$  est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_d}(x_d) c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d))$$

On examine trois variantes de méthode du maximum de vraisemblance dans l'estimation des paramètres de la copule et des marginales.

### 34.5.2 Méthode exacte

On établit la fonction de densité de  $f(\underline{x})$  à partir de la copule où

$$f(\underline{x}) = f_1(x_1) \dots f_d(x_d) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_d))$$

Le vecteur des paramètres  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  est constitué des paramètres des marginales et des paramètres de la copule, pour un total de  $m$  paramètres.

On rappelle que

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n).$$

La fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(\underline{x}_i; \underline{\theta})$$

Le log de la fonction de vraisemblance correspond à

$$\ln(L(\underline{\Theta})) = \sum_{i=1}^n \ln(f(\underline{x}_i; \underline{\Theta})).$$

On applique la procédure habituelle pour estimer les paramètres  $\underline{\theta}$

**Exemple.** On suppose que

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1, u_2) &= \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \\ X_1 &\sim \text{Exp}(\beta_1) \\ X_2 &\sim \text{Exp}(\beta_2) \end{aligned}$$

avec

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1 + \alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}$$

On sait que

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \left(\left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}}$$



Il en résulte

$$\begin{aligned}
 & f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\
 = & f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \frac{1 + \alpha}{\left(F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)\right)^{\alpha+1}} \left(F_{X_1}(x_1)^{-\alpha} + F_{X_2}(x_2)^{-\alpha} - 1\right)^{-1} \\
 = & \beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} \frac{1 + \alpha}{\left((1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2})\right)^{\alpha+1}} \left(\left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{-\alpha} + \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{-\alpha} - 1\right)^{-1}
 \end{aligned}$$

□

### 34.5.3 Méthode IFM (Joe)

Notation. IFM = Inference functions for margins

Idée. On estime séparément les paramètres des marginales et les paramètres de la copule.

Procédure.

- On estime les paramètres  $\theta_1, \dots, \theta_d$  des marginales  $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$ .
- On remplace les observations

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}, \dots, x_{1,d} \end{pmatrix} \\ \dots \\ \begin{pmatrix} x_{n,1}, \dots, x_{n,d} \end{pmatrix}$$

par

$$\begin{aligned} & \left( F_{X_1} (x_{1,1}; \theta_1) , \dots , F_{X_d} (x_{1,d}; \theta_d) \right) \\ & \dots \\ & \left( F_{X_1} (x_{n,1}; \theta_1) , \dots , F_{X_d} (x_{n,d}; \theta_d) \right) \end{aligned}$$

– On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1} = F_{X_1} (x_{i,1}; \theta_1) , \dots , u_{i,d} = F_{X_d} (x_{i,d}; \theta_d)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$

– On estime le(s) paramètre(s)  $\alpha$  de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n c(u_{i,1}, \dots, u_{i,d}; \alpha)$$

– Log de la fonction de vraisemblance

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^n \ln \left( c(u_{i,1}, \dots, u_{i,d}; \alpha) \right)$$

### 34.5.4 Méthode semi-paramétrique (Genest-Rivest)

Appelée aussi méthode de la pseudo-vraisemblance.

Idée. Méthode semblable à la méthode IFM à l'exception que l'on remplace les marginales paramétriques par les marginales non-paramétriques.

Raison : Éviter que les marginales affectent (influencent) la structure de dépendance.

Procédure.

- On estime les paramètres  $\theta_1, \dots, \theta_d$  de la marginales  $F_1, \dots, F_d$

– On remplace les observations

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}, \dots, x_{1,d} \\ \dots \\ x_{n,1}, \dots, x_{n,d} \end{pmatrix}$$

par

$$\begin{pmatrix} F_{n,1}(x_{1,1}), \dots, F_{n,d}(x_{1,d}) \\ \dots \\ F_{n,1}(x_{n,1}), \dots, F_{n,d}(x_{n,d}) \end{pmatrix}$$

avec

$$F_{n,j}(y) = \frac{1}{1+n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, y]}(x_{i,j})$$

où

$$1_{(-\infty, x]}(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & x_{i,j} \leq y \\ 0 & x_{i,j} > y \end{cases}.$$

- On définit les pseudo-observations

$$u_{i,1} = F_{n,1}(x_{i,1}), \dots, u_{i,d} = F_{n,d}(x_{i,d})$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$

- On estime les paramètres  $\alpha$  de la copule selon la méthode du maximum de vraisemblance avec

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n c(u_{i,1}, \dots, u_{i,d}; \alpha)$$

- Log de la fonction de vraisemblance

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^n \ln(c(u_{i,1}, \dots, u_{i,d}; \alpha))$$

## 35 Indépendance ?

On considère une famille de copules trivariée.

Soit un vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$  avec

$$F_{\underline{U}}(u_1, u_2, u_3) = C(u_1, u_2, u_3),$$

pour  $(u_1, u_2, u_3) \in [0, 1]^3$ .

La copule  $C$  est construite comme un cas limite d'une suite de vecteurs (à 3 dimensions) de v.a..



Ces v.a. sont définies à partir d'une somme de vecteurs (à 3 dimensions) i.i.d. de v.a. qui se comporte comme le vecteur de v.a.  $\underline{I} = (I_1, I_2, I_2)$  avec

$$\begin{aligned}\Pr(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0) &= \frac{1}{4} \\ \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1, I_3 = 0) &= \frac{1}{4} \\ \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 1) &= \frac{1}{4} \\ \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On observe :

- les composantes de  $(I_1, I_2)$  sont indépendantes ;
- les composantes de  $(I_1, I_3)$  sont indépendantes ;
- les composantes de  $(I_2, I_3)$  sont indépendantes ;

– les composantes de  $(I_1, I_2, I_3)$  ne sont pas mutuellement indépendantes.

On définit une suite de vecteurs v.a.

$$\mathbf{I} = \{\underline{I}_j, j \in \mathbb{N}^+\}$$

où

$$\underline{I}_j \sim \underline{I}$$

pour  $i \in \mathbb{N}^+$ .

Soit le vecteur de v.a.

$$\underline{V}_n = (V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n}),$$

où

$$V_{i,n} = \sum_{j=1}^n I_{i,j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}.$$

On observe :

- les composantes de  $(V_{1,n}, V_{2,n})$  sont indépendantes ;
- les composantes de  $(V_{1,n}, V_{3,n})$  sont indépendantes ;
- les composantes de  $(V_{2,n}, V_{3,n})$  sont indépendantes ;
- les composantes de  $(V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n})$  ne sont pas mutuellement indépendantes.

On démontre :

- $V_{1,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_1 ;$
- $V_{2,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_2 ;$
- $V_{3,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} U_3 .$

Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on a

$$\begin{aligned}
 L_{V_{i,n}}(t) &= E \left[ e^{-tV_{i,n}} \right] \\
 &= E \left[ e^{-t \sum_{j=1}^n I_{i,j} \left( \frac{1}{2} \right)^{j \times I_{i,j}}} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^n E \left[ e^{-t I_{i,j} \left( \frac{1}{2} \right)^{j \times I_{i,j}}} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t \left( \frac{1}{2} \right)^j} \right).
 \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{V_{i,n}}(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} \quad (t \geq 0)$$

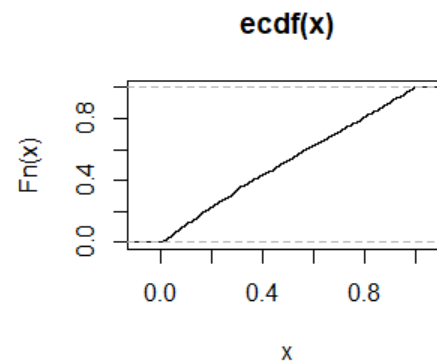
qui correspond à la TLS de la v.a.  $U_j \sim Unif(0, 1)$ .

Ensuite, on déduit

$$\begin{aligned}
 L_{V_{i,n}, V_{i',n}}(t_i, t_{i'}) &= E \left[ e^{-t_i V_{i,n}} e^{-t_{i'} V_{i',n}} \right] \\
 &= E \left[ e^{-t_i \sum_{j=1}^n I_{i,j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}} e^{-t_{i'} \sum_{j'=1}^n I_{i',j'} \left(\frac{1}{2}\right)^{j' \times I_{i',j'}}} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^n \prod_{j'=1}^n E \left[ e^{-t_i I_{i,j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}} e^{-t_{i'} I_{i',j'} \left(\frac{1}{2}\right)^{j' \times I_{i',j'}}} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^n E \left[ e^{-t_i I_{i,j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j \times I_{i,j}}} \right] \times \prod_{j'=1}^n E \left[ e^{-t_{i'} I_{i',j'} \left(\frac{1}{2}\right)^{j' \times I_{i',j'}}} \right] \\
 &= \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t \left(\frac{1}{2}\right)^j} \right) \times \prod_{j'=1}^n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t \left(\frac{1}{2}\right)^{j'}} \right).
 \end{aligned}$$

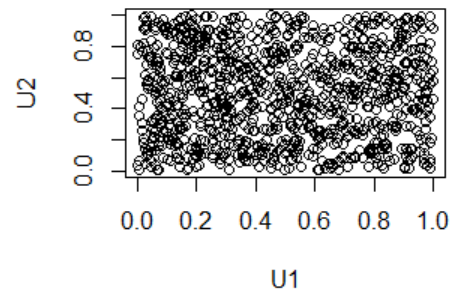
## Illustration

Fonction de répartition empirique univariée de  $U_1$  (ou  $U_2$ , ou  $U_3$ )



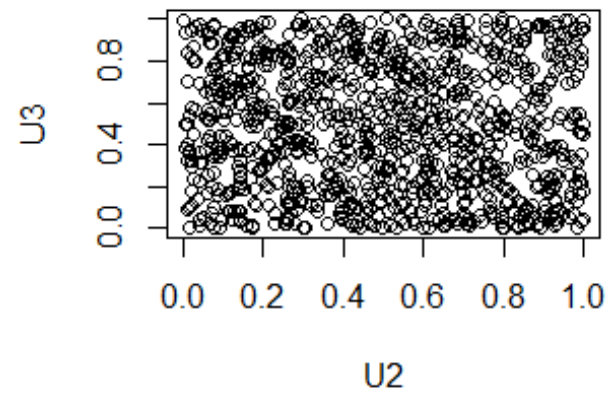
## Illustration

Fonction de répartition empirique bivariable de  $(U_1, U_2)$



## Illustration

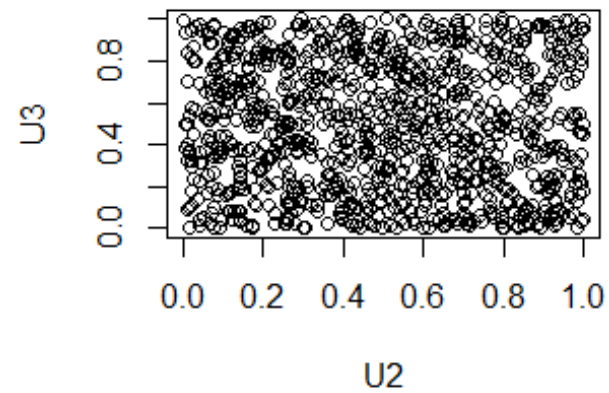
Fonction de répartition empirique bivariée de  $(U_1, U_3)$





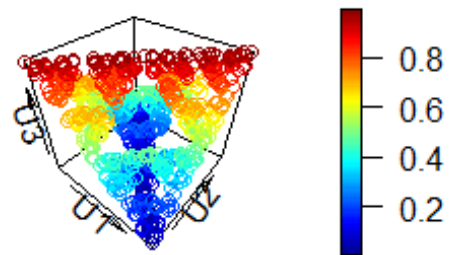
## Illustration

Fonction de répartition empirique bivariée de  $(U_2, U_3)$



## Illustration

Fonction de répartition empirique trivariée de  $(U_1, U_2, U_3)$



## 36 Compléments sur l'estimation avec les copules

Dans les pages précédentes, faute de temps, on n'a pas abordé les tests d'adéquation, la sélection de modèles, la construction d'intervalles de confiance, et autres outils d'analyse de statistique.

Pour des informations additionnelles avec les copules, on peut consulter notamment les références suivantes (et les références) :

- Genest, C., Favre, A.-C. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of hydrologic engineering*, 12, 347–3

- Kim, G., Silvapulle, M. J., and Silvapulle, P. 2007 . “Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas.” *Comp. Stat. Data Anal.*, 51 6 , 2836–2850.
- Etc.