Estimation des paramètres d'une copule pour un modèle de risque collectif

Sous la supervision de
Étienne Marceau

Rapport des travaux réalisés

Préparé par

Alexandre Lepage,
Diamilatou N'diaye,
Amedeo Zito

le 06 juin 2019

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat
Université Laval
Automone 2018

Table des matières

Liste des illustrations

Liste des tableaux

1 Introduction

Le présent projet consiste à estimer les paramètres d'un modèle collectif du risque incorporant une structure de dépendance entre la variable aléatoire de dénombrement (fréquence) et les variables aléatoires représentant les montants individuels de sinistre.

Tout d'abord, la section sur les notions préliminaires expose le modèle de risque avec dépendance, puis introduit la notion d'estimation de paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. Par la suite, on présente les copules archimédiennes hiérarchiques. Finalement, la dernière section expose les résultats d'estimations sur des données simulées.

2 Notions préliminaires

2.1 Modèle collectif du risque

Dans [Cossette et al., 2019b], on propose un modèle collectif du risque dont les composantes sont dépendants entre elles. Ce modèle s'exprime comme suit :

Soient N, la v.a. du nombre de sinistres, tel que $N \in \mathbb{N}$, et la suite de v.a. $\{X_i, i \in \mathbb{N}_+\}$ représentant les montants de sinistres tel que $X_i \sim X \in \mathbb{R}_+$. On a

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times \mathbb{1}_{\{N \geq i\}}, \tag{1}$$

où N est dépendant de $\underline{X}$ et les X_i sont dépendants entre eux.

Maintenant, on cherche à estimer les paramètres afférents à un tel modèle. Pour y arriver, [Cossette et al., 2019a] propose une approche de calcul de la vraisemblance par décomposition hiérarchique et une autre méthode, dite plus classique, qui prend l'ensemble du modèle. Dans le cas présent, compte tenu que la variable dénombrante est discrète et que les variables de sinistres sont continues, il est plus simple d'utiliser la méthode de vraisemblance complète. Le présent rapport présente donc les résultats d'une telle approche.

2.2 Fonction du maximum de vraisemblance

Soit une copule de Clayton multivariée dénotée C et représentée par

$$C(u_0, \ldots, u_n; \alpha) = (u_0^{-\alpha} + \cdots + u_n^{-\alpha} - n)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{2}$$

Avec le modèle posé dans la section 2.1, on peut trouver la fonction de densité de la copule C de la manière décrite comme suit.

Soient λ et β les paramètres des lois de fréquence et de sévérité respectivement, ainsi que α, le paramètre de la copule de Clayton, alors la densité conjointe des v.a. N et $(X_1, \ldots X_N)$ est donnée par

$$\begin{aligned} f_{N,X_1,\ldots,X_n}(n, x_1, \ldots, x_n; \lambda, \beta, \alpha) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} C(F_N(n;\lambda), F_{X_1}(x_1;\beta), \ldots, F_{X_n}(x_n;\beta); \alpha) \\ &\quad - \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} C(F_N(n-1;\lambda), F_{X_1}(x_1;\beta), \ldots, F_{X_n}(x_n;\beta); \alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

Puisque la dérivation en chaîne nécessaire pour trouver (3) est excessivement longue à calculer, on peut utiliser `R` à l'aide de la fonction `Deriv` [1] du package du même nom pour y arriver. Cependant, il est important de noter que, même avec cet outil, si la loi de fréquence admet des valeurs supérieures à 5, le temps de calcul peut grimper très rapidement.

Soient n_k, le nombre d'observations où $N = k$, et $x_{i,k}$ représente le k-ième sinistre de la i-ième observation, la fonction de vraisemblance du modèle énoncé dans la section 2.1 est donné par

1. https ://cran.r-project.org/web/packages/Deriv/Deriv.pdf

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda, \beta, \alpha) = {} & (\Pr(N=0;\lambda))^{n_0} \\
& \times \prod_{i=1}^{n_1} f_{N,X_1}(1, x_{i,1}; \lambda, \beta, \alpha) \\
& \times \prod_{i=1}^{n_2} f_{N,X_1,X_2}(2, x_{i,1}, x_{i,2}; \lambda, \beta, \alpha) \\
& \dots \\
& \times \prod_{i=1}^{n_k} f_{N,X_1,\ldots,X_k}(k, x_{i,1}, \ldots, x_{i,k}; \lambda, \beta, \alpha).
\end{aligned}
$$

Par la suite, afin d'estimer les paramètres, il faut avoir recours à une méthode d'optimisation numérique. Cela implique de trouver le minimum d'une fonction strictement décroissante. Pour cette raison, il faut minimiser la log-vraisemblance négative.

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
\ell(\lambda, \beta, \alpha) = {} & -n_0 \times \ln\left(\Pr(N=0;\lambda)\right) \\
& - \sum_{i=1}^{n_1} \ln\left(f_{N,X_1}(1, x_{i,1}; \lambda, \beta, \alpha)\right) \\
& - \sum_{i=1}^{n_2} \ln\left(f_{N,X_1,X_2}(2, x_{i,1}, x_{i,2}; \lambda, \beta, \alpha)\right) \\
& \dots \\
& - \sum_{i=1}^{n_k} \ln\left(f_{N,X_1,\ldots,X_k}(k, x_{i,1}, \ldots, x_{i,k}; \lambda, \beta, \alpha)\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Finalement, on trouve les paramètres avec `R` en utilisant la fonction `constrOptim`[2].

2.3 Copule archimédienne hiérarchique

Comme les copules archimédiennes hiérarchiques offrent une bonne flexibilité dans la modélisation de la dépendance, la présente section se penchera sur ce sujet d'intérêt.

Les copules archimédiennes hiérarchiques avec des distributions multivariées composées sont décrites dans [Cossette et al., 2017].
La représentation graphique du modèle collectif du risque tel que décrit dans la section 2.1 et expliquée dans [Cossette et al., 2019b] est présentée dans l'illustration 1.

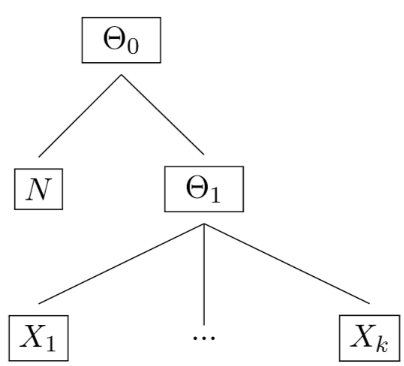


Illustration 1 – Arbre hiérarchique à un niveau.

2. https ://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/constrOptim.html

Ici, Θ_0 représente une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}_+$ qui sert à créer un lien de dépendance entre la variable N et les $\{X_i, i = 1, \ldots, k\}$. Ensuite, on a $\theta_1 = \sum_{i=1}^{\theta_0} B_i$ qui sert à créer un lien de dépendance entre les X_i. Les B_i sont i.i.d. et indépendants de θ_0. B_i peut appartenir à R_+ comme à N_+.

Sous cette représentation, on obtient une copule archimédienne hiérarchique s'exprimant comme

$$C(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \mathscr{L}_{\theta_0}\left(\mathscr{L}_{\theta_0}^{-1}(u_0) - \ln\left(\mathscr{L}_B\left(\sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}_B^{-1}\left(\exp\left(-\mathscr{L}_{\theta_0}^{-1}(u_i)\right)\right)\right)\right)\right), \tag{5}$$

où $\mathscr{L}$ correspond à la transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

À ce point-ci, afin de trouver les paramètres d'une telle copule, il suffit d'appliquer (3) et (4).

3 Résultats

La présente section explique les scénarios testés ainsi que les résultats obtenus avec la méthodologie expliquée dans la section 2.2.

Pour les fins du présent travail, les estimations sont faites sur des données simulées. Pour faire ces simulations, le module `R` nommé `copula`[3] offre une fonction `rCopula` avec laquelle, il est possible de simuler différentes copules connues, dont la copule de Clayton.

Pour les copules archimédiennes hiérarchique, le module `nCopula`[4] offre une fonction nommée `rcompcop`.

3.1 Copule de Clayton

Binomial : Pour débuter gentiment, prenons un modèle binomial-exponentiel avec une copule de Clayton dont la représentation est exprimée en (2). Soient $N \sim Binom(n, q)$ et $X_i \sim X \sim Exp(\beta)$, un sommaire des données simulées aux fins de l'estimation sont présentées dans le tableau 1.

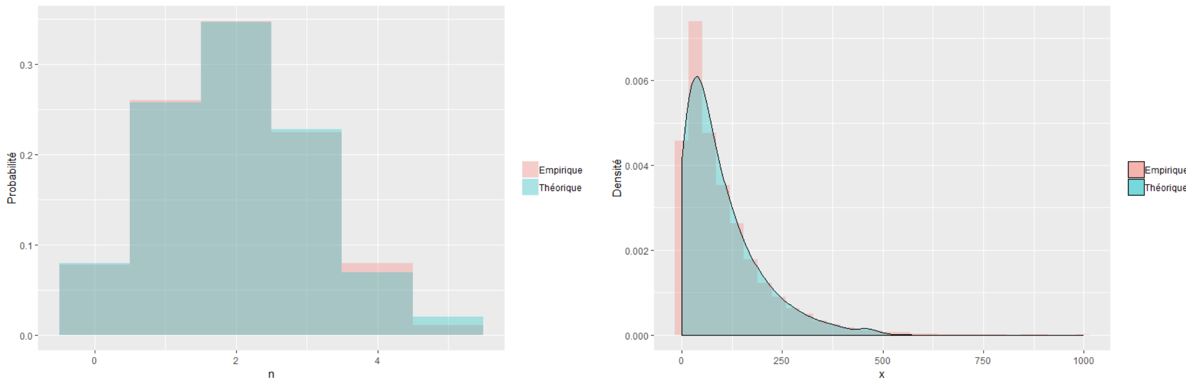
N	X_1	X_2
Min. :0.000	Min. : 0.0046	Min. : 0.0035
1st Qu. :1.000	1st Qu. : 28.5104	1st Qu. : 28.2379
Median :2.000	Median : 68.3689	Median : 68.8120
Mean :2.001	Mean :100.8227	Mean : 100.1348
3rd Qu. :3.000	3rd Qu. :139.9337	3rd Qu. : 136.6506
Max. :5.000	Max. :997.1353	Max. :1186.4911
X_3	X_4	X_5
Min. : 0.0032	Min. : 0.0035	Min. : 0.0028
1st Qu. : 28.5687	1st Qu. : 28.2418	1st Qu. : 28.7874
Median : 68.7141	Median : 68.1072	Median : 68.0692
Mean : 99.0552	Mean : 100.5849	Mean :100.6532
3rd Qu. :136.9080	3rd Qu. : 138.4138	3rd Qu. :139.0188
Max. :857.5771	Max. :1026.7730	Max. :952.8392

Tableau 1 – Sommaire des données simulées pour la copule de Clayton avec $N \sim Bin(5, 2/5)$, $X \sim Exp(1/100)$.

Du tableau 1, on voit que la moyenne du nombre de sinistres est de 2 et que la moyenne des x_i est très proche de 100 ; ce qui correspond aux attentes. De plus, les quantiles des X_i sont très proches l'un de l'autre ; ce qui signifie que l'adéquation des variables simulées est bonne.

Visuellement parlant, l'illustration 2 présente l'adéquation des données empiriques avec les lois théoriques.

3. https ://cran.r-project.org/web/packages/copula/copula.pdf
4. https ://cran.r-project.org/web/packages/nCopula/nCopula.pdf



(a) Fréquence (b) Sévérité

Illustration 2 – Comparaisons de la distribution des données simulées avec les distributions théoriques.

On voit donc que les variables simulées ont un comportement très similaire à la distribution marginale théorique des variables.

Pour ce qui est du comportement entre les variables, l'illustration 3 présente les nuages de points des variables simulées afin de voir les corrélations.

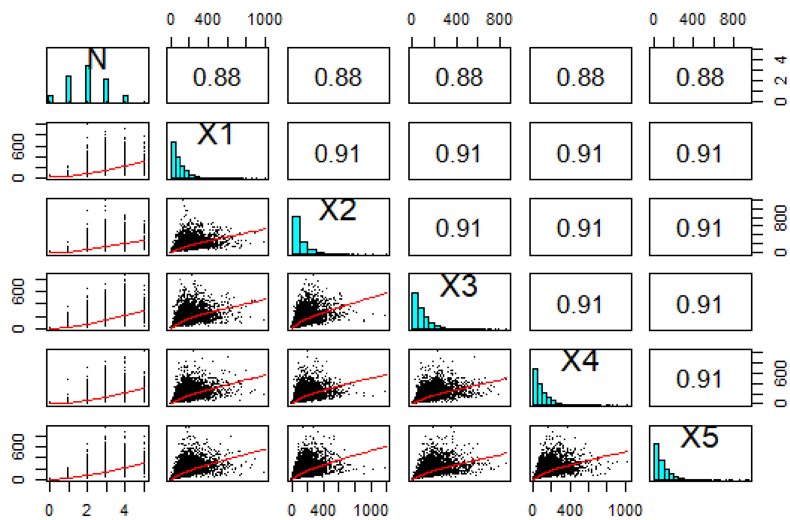


Illustration 3 – Nuage de points avec copule de Clayton, $N \sim Pois(1)$ et $X \sim Exp(1/100)$:
En bas de la diagonale se trouve les nuages de points illustrant la corrélation des différentes variables. En haut, se trouve les coefficients de corrélation de Spearman.

Avec ces résultats, on voit que ...

Avec les données simulées, on désire maintenant estimer les paramètres. les résultats obtenus pour ce scénario sont affichées dans le tableau 2.

	q	beta	alpha
Estimateurs	0.4024	0.0099	5.9543
Vrais paramètres	0.4000	0.0100	6.0000

temps de dérivation	4.22
temps d'estimation	174.25

Tableau 2 – Résultats de l'estimation des paramètres avec une copule de Clayton, $N \sim Binom(n, q)$ et $X \sim Exp(\beta)$ suite à 10 000 simulations.

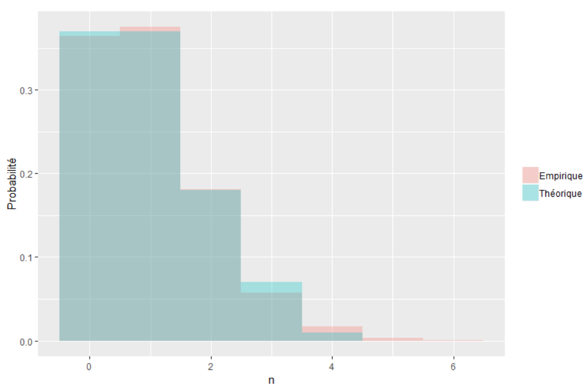
Poisson : Suite aux résultats concluants du premier exemple, un modèle avec $N \sim Pois(\lambda)$ peut ajouter un défi en terme de temps de calcul puisque cette loi a un support pouvant atteindre de grands nombres. Soient $N \sim Pois(\lambda)$ et $X_i \sim X \sim Exp(\beta)$, un sommaire des données simulées aux fins de l'estimation sont présentées dans le tableau 3.

N	X_1	X_2	X_3	X_4
Min. :0.0000	Min. : 0.0093	Min. : 0.012	Min. : 0.0129	Min. : 0.0172
1st Qu. :0.0000	1st Qu. : 29.7317	1st Qu. : 29.593	1st Qu. : 29.4194	1st Qu. : 29.5410
Median :1.0000	Median : 70.2592	Median : 70.060	Median : 70.3962	Median : 70.1612
Mean :0.9989	Mean : 101.2211	Mean :101.325	Mean :100.4977	Mean : 101.1802
3rd Qu. :2.0000	3rd Qu. : 140.8462	3rd Qu. :141.488	3rd Qu. :136.6166	3rd Qu. : 139.6666
Max. :6.0000	Max. :1003.4804	Max. :884.530	Max. :875.3387	Max. :1071.0681

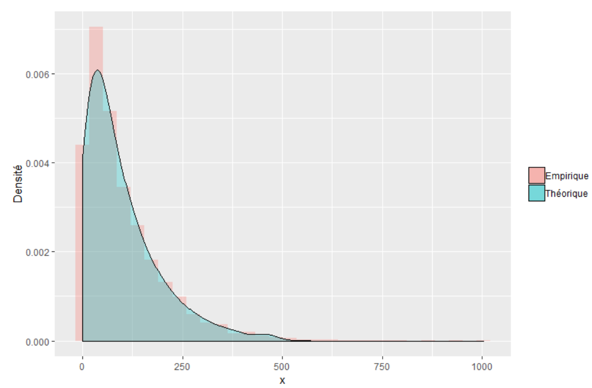
X_5	X_6	X_7	X_8
Min. : 0.0121	Min. : 0.0118	Min. : 0.01	Min. : 0.0105
1st Qu. : 29.3078	1st Qu. : 29.7289	1st Qu. : 29.23	1st Qu. : 29.6958
Median : 70.1336	Median : 70.0210	Median : 70.47	Median : 70.2837
Mean : 100.2858	Mean :100.6869	Mean :100.69	Mean : 100.3833
3rd Qu. : 137.5781	3rd Qu. :138.3483	3rd Qu. :136.65	3rd Qu. : 138.1448
Max. :1089.6821	Max. :952.6193	Max. :810.01	Max. :1029.2935

Tableau 3 – Sommaire des données simulées pour la copule de Clayton avec $N \sim Pois(1)$, $X \sim Exp(1/100)$.

L'illustrations 4 compare la distribution des données simulées avec celle des lois théorique.



(a) Fréquence



(b) Sévérité

Illustration 4 – Comparaisons de la distribution des données simulées avec les distributions théoriques.

L'illustration 5 présente les nuages de points des variables simulées afin de voir les corrélations.

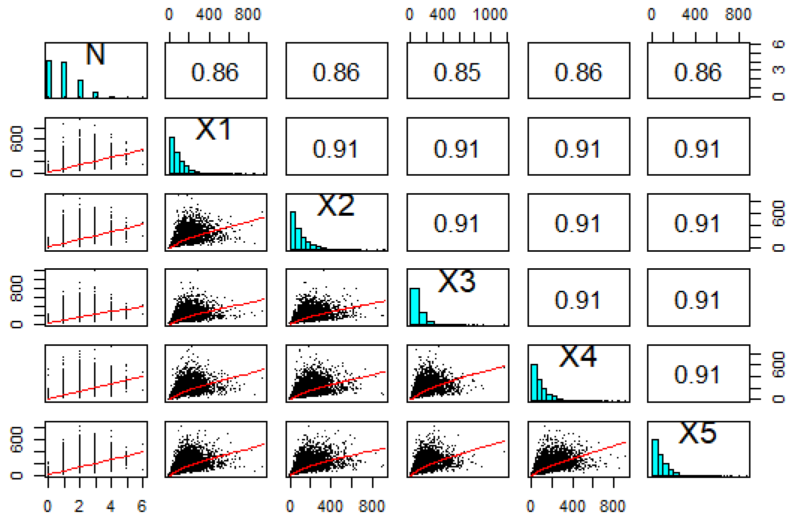


Illustration 5 – Nuage de points avec copule de Clayton, $N \sim Pois(1)$ et $X \sim Exp(1/100)$:
En bas de la diagonale se trouve les nuages de points illustrant la corrélation des différentes variables. En haut, se trouve les coefficients de corrélation de Spearman.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.

	lambda	beta	alpha		
Estimateurs	1.0006	0.0099	5.9160	temps de dérivation	13.29
Vrais paramètres	1.0000	0.0100	6.0000	temps d'estimation	86.24

Tableau 4 – Résultats de l'estimation des paramètres avec une copule de Clayton, $N \sim Pois(\lambda)$ et $X \sim Exp(\beta)$ suite à 10 000 simulations.

Lorsque $N \sim Poisson(2)$, le temps de calcul dépasse trente minutes puisque le 99,9999 percentile de cette loi est de 12. Ainsi la méthode du maximum de vraisemblance nécessite de générer une liste de douze fonctions qui sont dérivées jusqu'à douze fois. Même avec la fonction `Deriv` de `R`, ce processus est extrêmement long.

Ce que l'on peut observer avec ces deux résultats, c'est, d'une part, qu'avec 10 000 simulations, on obtient des résultats très adéquats. Cependant, il faut soulever que les valeurs de départ pour l'optimisation de la fonction de vraisemblance sont les véritables valeurs ; ce qui peut faire en sorte que les valeurs sont plus précises qu'elles ne l'auraient été si les valeurs de départ avaient été autre. D'autre part, on peut observer que le temps de calcul augmente significativement si N peut prendre des valeurs supérieures à 5 et si le nombre de paramètres à estimer est grand.

3.2 Copule archimédienne hiérarchique

Désormais, prenons la copule qui nous intéresse vraiment : la copule archimédienne hiérarchique. Avec $\theta_0 \sim logarithmique\,(\gamma = 1 - \exp(-\alpha_0))$, $B \sim Gamma(1/\alpha_1, 1)$, $N \sim Binom(5, q)$ et $X_i \sim X \sim Exp(\beta)$ on obtient les résultats présentés dans le tableau 5.

		α_0	α_1	β	q
Estimateurs		0.50	5.17	0.01	0.40
Vrais Paramètres		0.50	5.00	0.01	0.40
Temps de calcul	821.4 sec.				

Tableau 5 – Résultats de l'estimation des paramètres avec une copule archimédienne hiérarchique, $N \sim Binomiale(5, q)$ et $X \sim Exp(\beta)$ suite à 10 000 simulations.

Dans cet exemple, on note que le temps de calcul est significativement supérieur à celui présenté dans le tableau 2. Ce phénomène est explicable du fait qu'il y a plus de paramètres à estimer et que la copule contient plusieurs fonctions imbriquées qui nécessitent plus d'étapes dans le processus de dérivation en chaîne.

4 Conclusion

Pour conclure, le modèle collectif du risque présenté dans [Cossette et al., 2019b] présente un défi dans l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance tel que présentée dans la section 2.2 puisque la dérivation en chaîne sur un grand nombre de variables pose un problème de temps de calcul.

À cet effet, une solution envisageable pourrait être d'utiliser la vraisemblance par décomposition hiérarchique proposé dans [Cossette et al., 2019a] afin de trouver le paramètre de dépendance entre N et X_1, puis de se limiter à un nombre restreint de X_i (disons 5) afin d'estimer le paramètre de dépendance entre les X_i. Cependant, avec cette méthode le fait de travailler avec des variables continues et discrètes peut causer un problème. Pour ce qui est de trouver les paramètres des lois de N et X, la méthode du maximum de vraisemblance classique (de façon univariée) pourrait être envisagée.

Références

[Cossette et al., 2017] Cossette, H., Gadoury, S.-P., Marceau, E., and Mtalai, I. (2017). Hiearchical archimedean copulas trough multivariate compound distributions. *Insurance : Mathematics and Economics*, 76.

[Cossette et al., 2019a] Cossette, H., Gadoury, S.-P., Marceau, E., and Robert, C. Y. (2019a). Composite likelyhood estimation method for hierarchical archimedean copulas defined with multivariate compound distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 172.

[Cossette et al., 2019b] Cossette, H., Marceau, E., and Mtalai, I. (2019b). Collective risk models with dependance.