

---

---

# NOTES DE COURS

---

---

PROF. ÉTIENNE MARCEAU

THÉORIE DE RISQUE ACT-3000

PRÉPARÉ PAR

AMEDEO ZITO

LE 08 NOVEMBRE 2018



UNIVERSITÉ  
**LAVAL**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
ÉCOLE D'ACTUARIAT  
UNIVERSITÉ LAVAL  
AUTOMNE 2018

# Table des matières

<b>Chaptire 1 - Rappel</b>	<b>1</b>
1.1 - Introduction . . . . .	1
1.2 - Modèle pour les coûts . . . . .	1
1.3 - Estimation des composantes du modèle de $X$ . . . . .	3
1.4 - Processus de Poisson . . . . .	6
1.5 - Processus de Poisson non-homogène . . . . .	10
1.6 - Processus de Poisson mixte . . . . .	16
1.7 - Processus de renouvellement . . . . .	17
1.8 - Processus agrégés . . . . .	20
<b>Chaptire 2 - Méthodes d'agrégation</b>	<b>20</b>
2.1 - Introduction . . . . .	20
2.2 - Méthodes de discrétisation . . . . .	21
2.3 - Algorithme de DePril . . . . .	23
2.4 - Algorithme de Panjer . . . . .	27
2.4.1 - Introduction . . . . .	27
2.4.2 - Famille (a,b,0) . . . . .	28
2.4.3 - L'algorithme . . . . .	29
2.4.4 - Démonstration de l'algorithme . . . . .	29
2.4.5 - Remarques sur l'algorithme de Panjer . . . . .	31
2.4.6 - Discrétisation et algorithme de Panjer . . . . .	31
2.5 - DePril, Panjer, Exponentielle et Erlang . . . . .	33
<b>Chaptire 3 - Modèle de dépendance</b>	<b>36</b>
3.1 - Motivation . . . . .	36
3.2 - Classe de Fréchet et bornes de Fréchet . . . . .	36
3.3 - Comonotonicité . . . . .	39
3.4 - Antimonotonicité . . . . .	45
3.5 - Lois paramétriques multivariées . . . . .	50
3.6 -Lois paramétriques discrètes . . . . .	50
3.6.1 -Lois Poisson bivariée de Teicher . . . . .	50
3.6.2 - Lois Poisson bivariée de Teicher composé . . . . .	52
3.7 - Lois paramétriques continues . . . . .	55
3.7.1 - Lois exponentielles bivariée EFGM . . . . .	55
<b>Chaptire 4 - Introduction à la théorie des copules</b>	<b>56</b>
4.1 - Introduction . . . . .	56
4.2 - Définitions . . . . .	56
4.3 - Théorème de Sklar . . . . .	58
4.4 - Premier exemples de copules . . . . .	60
4.4.1 - Copule EFGM . . . . .	60

# Chapitre 1 - Rappel

## 1.1 - Introduction

Le chapitre va porter sur les rappels sur des notions en lien avec les cours d'Intro 2, le processus de Poisson et les méthodes d'estimation.

## 1.2 - Modèle pour les coûts

Soit le v.a.  $X$  représentant les coûts pour un contrat, d'une ligne d'affaires sur une période fixe. Exemples de durées pour la période fixe : 1 semaine, 1 mois, 3 mois, 1 an etc.

Dans plusieurs contextes, la v.a.  $X$  peut prendre une valeur 0, avec une probabilité non négligeable. Le sacro-saint modèle utilisé en actuariat pour déduire la v.a.  $X$  est appelé le modèle fréquence-sévérité :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^N B_k & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

1.  $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$
2.  $\underline{B}$  = suite de v.a. identiquement distribuées avec la convention  $B_k \sim B, k \in \mathbb{N}^+$ .
3.  $\underline{B}$  et  $N$  sont indépendantes.

Interprétation :

1. On suppose l'indépendance des montants de sinistres.
2. On suppose que les montants de sinistres ont le même comportement aléatoire.
3. On suppose que le nombre de sinistres et les montants "ne s'influencent pas mutuellement".

Hypothèse :

1.  $B$  est une v.a. absolument continue et strictement positive.
2.  $N$  est une v.a. discrète, positive avec  $F_N(0) \geq 0$  appelée v.a. de fréquence ou de dénombrement.

Espérance :

1. Hypo. :  $E[N] < \infty$  et  $E[B] < \infty$ .
2. Avec les hypothèses du modèle, on obtient  $E[X] = E[N]E[B]$ .

Variance :

1. Hypo. :  $E[N^j] < \infty, j = 1, 2, \dots$  et  $E[B^j] < \infty, j = 1, 2, \dots$
2. Avec les hypothèses du modèle, on déduit :

$$VAR[X] = E[N]VAR[B] + VAR[N]E[B]^2$$

Transformation Laplace Stieltjes :

1. On sait que les transformations Laplace Stieltjes existent toujours pour les v.a. positives.

2. Avec les hypothèses du modèle, on a

$$\mathcal{L}_x(t) = E[e^{-tx}] = P_N(\mathcal{L}_B(t)),$$

où  $t > 0$  et  $P_N(t) = E[t^N]$ ,  $\text{abs}(t) \leq 1$  et  $\mathcal{L}_B(t) = E[e^{-tB}]$ ,  $\leq 1$  pour  $t \geq 0$  et les v.a. positives.

Fonction de répartition et fonction de densité de  $X$  :

1. La distribution de  $X$  est mixte avec une masse de probabilité à 0 et une portion absolument continue sur l'axe  $(0, \infty)$ .  
Note :  $B$  est une v.a. absolument continue et strictement  $> 0$ .
2.  $\Pr(X = 0) = \Pr(N = 0)$
3. Portion continue : l'expression de la fonction de densité est  $f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) f_{B_1+B_2+\dots+B_k}(x)$
4. Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} F_X(0) = F_N(0) = \Pr(N = 0) & , x = 0 \\ \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) F_{B_1+B_2+\dots+B_k}(x) & , x > 0 \end{cases}$$

Ensuite, à partir de  $F_X$ , on déduit les primes ou/et les mesures de risques.

Défis :

1. Comment identifier les paramètres du modèle pour la v.a.  $X$  selon les données fournies ?  
On a recours aux méthodes statistiques.
2. Comment évaluer  $F_X$  ?  
Méthode de simulation Monte Carlo ou méthodes numériques (Algo récursif (Panjer) et Transformé de Fourier Rapide)
3. On "combine" (1) et (2) -> Théorie de risque
4. Comment déduire l'évolution de  $X$  (coûts) dans le temps ?
5. On combine (1) , (2) et (4) -> Théorie de risque
6. Supposons  $B = C_1 + \dots + C_n$ .  
Comment modéliser la relation de dépendance entre les v.a.  $C_1, \dots, C_n$  ? Comment évaluer la distribution de  $B$  = somme de v.a. dépendantes ?
7. Un contrat est exposé à plusieurs périles.  
Doit-on les modéliser séparément ou conjointement ?
8. Supposons que les coûts d'un portefeuille sont définis par  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Doit-on modéliser  $X_1, \dots, X_n$  séparément ou conjointement ? Comment évaluer  $F_S$  ?
9. Est-il possible de poser un diagnostic sur un portefeuille en ayant recours à modèle dynamique (plusieurs périodes de risques) ? OUI

### 1.3 - Estimation des composantes du modèle de $X$

Il s'agit d'un rappel,  
 Voir la partie 2 du documents de référence.  
 Pour des fins d'estimation, on a recours à la méthode de Monte Carlo.  
 On considère 3 contextes pour les données :

1.  $\{(n_i, y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}), i = 1, 2, \dots, m\}$  où  $m$  = nombre de données de l'échantillon,  $n_i$  = nombre de sinistre pour la donnée  $i = 1, 2, \dots$  si  $n_i > 0$  et  $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}$  sont les montants de sinistres individuel pour la donnée  $i$ .  
 Si  $n_i = 0$ , alors le vecteur est simplement  $(n_i)$   
 Si  $n_i = 1$ , alors le vecteur est simplement  $(n_i, y_{i,1})$   
 Si  $n_i = 2$ , alors le vecteur est simplement  $(n_i, y_{i,1}, y_{i,2})$   
 Ainsi de suite
2.  $\{(n_i, x_i), i = 1, 2, \dots, m\}$  où  $n_i$  = nombre de sinistre et  $x_i$  = coûts totaux, si  $n_i = 0$ , alors  $x_i = 0$ .
3.  $\{(x_i), i = 1, 2, \dots, m\}$  où  $x_i$  = coûts totaux seulement

Cas #1 :

1. On dispose les informations complète sur le nombre de sinistres et sur les montants individuels des sinistres pour chaque contrat.
2. On dispose de ces informations pour  $m$  contrats.
3. Les coûts pour le contrat  $i$  sont définis par la v.a.  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .
4. Pour des fins d'estimation, on suppose que les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendants et identiquement distribués avec  $X_1 \sim X$ ,  $i = 1, \dots, m$
5. On modélise  $X$  par le modèle fréquence-sévérité.
6. La fonction de vraisemblance est définie par

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B) = \prod_{i=1}^m [\Pr(N_i = n_i; \underline{\theta}^N)] \prod_{l=1}^{n_i} [f_{B_i}(y_{i,l}; \underline{\theta}^B)]$$

où  $\prod_{l=1}^{n_i} 1 = 1$  (convention pour simplifier l'écriture) et  $\underline{\theta}^N$  = paramètre de la loi  $M$  et  $\underline{\theta}^B$  = paramètre de la loi  $B$  et  $n_i$  = nombre de sinistres pour contrat  $i$   
 Puisque  $M_i \sim M$  et  $B_i \sim B$ ,  $\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)$  devient

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B) = \prod_{i=1}^m [\Pr(N_i = n_i; \underline{\theta}^N)] \prod_{l=1}^{n_i} [f_B(y_{i,l}; \underline{\theta}^B)]$$

7. Le log de la fonction de vraisemblance est donné par

$$l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)) = \sum_{i=1}^m [\ln(\Pr(N_i = n_i; \underline{\theta}^N))] + \sum_{l=1}^{n_i} [\ln(f_B(y_{i,l}; \underline{\theta}^B))]$$

8. On réarrange  $l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B))$

$$l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)) = \sum_{i=1}^m [\ln(\Pr(N = n_i; \underline{\theta}^N))] + \sum_{i=1, n_i > 0}^m \sum_{l=1}^{n_i} [\ln(f_B(y_{i,l}; \underline{\theta}^B))]$$

9. Pour identifier  $\hat{\underline{\theta}}^N$  et  $\hat{\underline{\theta}}^B$  (les estimateurs de  $\underline{\theta}^N$  et  $\underline{\theta}^B$ ) selon la méthode du maximum de vraisemblance on dérive  $l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B))$  par rapport aux composantes de  $(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)$  et on reçoit le système d'équation.

En dérivant par rapport à une composante de  $\underline{\theta}^N$ , tous les termes en fonction  $\underline{\theta}^B$  disparaissent. Alors, l'estimation de la loi de fréquence peut uniquement se fonder sur les information relatives aux nombres de sinistres. Idem en dérivant  $l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B))$  par rapport à  $\underline{\theta}^B$ . Donc l'estimation de la loi du montant de sinistre peut se baser uniquement sur les données relative aux montants de sinistres.

10. L'expression de  $l((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B))$  découle de l'hypothèse d'indépendance entre le nombre de sinistre  $N$  et la suite de montants de sinistre  $B$  du modèle fréquence-sévérité.
11. Pour cette raison, on étudie séparément distribution de nombre de sinistre et du montant de sinistre  $B$ .

Cas #2 :

- Contexte : On possède uniquement le nombre de sinistres et le montant total des sinistres, s'il y a au moins 1 sinistre.
- La v.a.  $X$  correspond aux coûts du contrat  $i = 1, \dots, m$ .
- L'hypothèse pour l'estimation est que  $X_i, \dots, X_m$  sont des v.a. i.i.d. avec  $X_i \sim X, i = 1, \dots, m$ .
- La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\mathcal{L}((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)) = \prod_{i=1}^m [\Pr(N_i = 0; \underline{\theta}^N)]^{\mathbb{1}_{\{n_i=0\}}} [\Pr(N = n_i; \underline{\theta}^N) f_{B_1+\dots+B_{n_i}}(x_i; \underline{\theta}^B)]^{\mathbb{1}_{\{n_i>0\}}}$$

où  $\mathbb{1}_{\{n_i=0\}} = \begin{cases} 1 & , n_i = 0 \\ 0 & , n_i > 0 \end{cases}$  et  $\mathbb{1}_{\{n_i>0\}} = \begin{cases} 1 & , n_i > 0 \\ 0 & , n_i = 0 \end{cases}$   
et

$$\begin{aligned} \Pr(N = n_i, x_i < X < x_i + dx_i; (\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)) &= \overbrace{\Pr(N = n_i, \theta^N) \Pr(x_i < B_1 + \dots + B_{n_i} \leq x_i + dx_i; \theta^B)}^{\text{par indépendance entre } N \text{ et } B} \\ &\approx \Pr(N = n_i, \theta^N) \underbrace{f_{B_1+\dots+B_{n_i}}(x_i; \underline{\theta}^B) dx_i}_{\text{définition de la fonction de densité}} \end{aligned}$$

- Afin de poursuivre, il serait pratique de connaître la loi  $B_1 + \dots + B_i$ , i.e. d'avoir une jolie expression pour  $f_{B_1+\dots+B_{n_i}}$  où  $B_1 + \dots + B_{n_i}$  correspond aux sommes de v.a. i.i.d. positives.
- En raison de (5), on suppose que  $B \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ .  
Ainsi,  $\underline{\theta}^B = (\alpha, \beta)$
- L'expression de  $\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)$  devient

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B) = \prod_{i=1}^m [\Pr(N_i = 0; \underline{\theta}^N)]^{\mathbb{1}_{\{n_i=0\}}} [\Pr(N = n_i; \underline{\theta}^N) h(x_i; n_i \alpha; \beta)]^{1-\mathbb{1}_{\{n_i=0\}}}$$

8. Le log de  $\mathcal{L}((\underline{\theta}^N; \alpha, \beta))$  est

$$l((\underline{\theta}^N; \alpha, \beta)) = \overbrace{\sum_{i=1}^m \ln(\Pr(N = n_i; \underline{\theta}^N))}^{l_1(\underline{\theta}^N)} + \overbrace{\sum_{i=1}^m 1_{\{n_i > 0\}} \ln(h(x_i; n_i; \alpha; \beta))}^{l_2(\alpha, \beta)} = l_1(\underline{\theta}^N) + l_2(\alpha, \beta)$$

Où  $h$  est la fonction de densité de la loi gamma

9. En raison de l'expression de  $l((\underline{\theta}^N; \alpha, \beta))$  on identifie séparément la lois de  $N$  et la densité de  $B$ .

10. L'expression précédente découle de l'hypothèse d'indépendance entre  $N$  et  $B$ .

11. On peut reformuler les hypothèses précédentes en supposant que  $B$  obéit à une loi inverse gaussienne.

Cas#3.

1. Contexte : On dispose uniquement des coûts totaux pour chaque contrats, pas connaître le nombre de sinistre et le montant de chaque sinistre.

2. Exemple :  $m = 7$  contrats

Échantillon :

$\underline{i}$	$\underline{x}_i$
1	0
2	0
3	1241
4	0
5	575
6	0
7	1954

3. La fonction de vraisemblance est donnée par

$$\mathcal{L}((\underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)) = \prod_{i=1}^m [\Pr(N_i = 0; \underline{\theta}^N)]^{1_{\{n_i=0\}}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k; \underline{\theta}^N) f_{B_1 + \dots + B_k}(x_i; \underline{\theta}^B) \right]^{1 - 1_{\{n_i=0\}}}$$

4. L'expression précédente présente 2 défis :

- On doit choisir une loi de  $B$  fermée sous la convolution, i.e. que l'on connaît l'expression jolie de  $f_{B_1 + \dots + B_{n_i}}(x_i, \underline{\theta}^B)$ .
- $f(x_i; \underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B)$  = mélange avec un nombre fini de termes de fonction de densité.

5. Stratégie pour le premier problème : On fait l'hypothèse que  $B \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ .

6. Stratégie pour le deuxième problème : On évalue l'expression avec une somme fini de  $k$  termes  $f(x_i; \underline{\theta}^N, \underline{\theta}^B) = f(x_i; \underline{\theta}^N; \alpha; \beta) \approx \sum_{k=1}^{k_0} \Pr(N = k; \underline{\theta}^N) h(x_i; k\alpha; \beta)$

7. Le log de la fonction de vraisemblance est

$$l((\underline{\theta}^N; \alpha, \beta)) = \sum_{i=1}^m 1_{\{n_i=0\}} \ln(\Pr(N = n_i; \underline{\theta}^N)) + \sum_{i=1}^m 1_{\{n_i>0\}} \ln\left(\sum_{k=1}^{k_0} \Pr(N = k; \underline{\theta}^N) h(x_i; k\alpha; \beta)\right)$$

8. En raison de l'expression de  $l((\underline{\theta}^N; \alpha, \beta))$  dans (7), on doit identifier à la fois les paramètres de la loi de  $N$  et ceux de la loi  $B$ .  
Les autres notions dans la partie 2 sont à étudier par soi-même.

## 1.4 - Processus de Poisson

Motivation :

1. Selon le modèle fréquence-sévérité, la v.a.  $X$  est définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^N B_k & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

2. Selon

3. , les coûts sont définis sur une période fixe.

4. On désire examiner l'évolution des coûts des portefeuilles dans le temps.

5. La théorie des processus aléatoires me permet de construire des modèles dynamiques pour déduire l'évolution des coûts dans le temps.

Une modélisation basée sur le processus aléatoire permet une analyse plus fine et plus flexible des coûts et leur évolution.

A cette fin, on modélise l'évolution des coûts par le processus  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  où  $X(0) = 0$  et

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k & , N(t) > 0 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

On définit aussi le processus de dénombrements (de fréquence) des sinistres par  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  où  $N(0) = 0$  et  $N(t)$  = nombre de sinistre sur l'intervalle de temps  $(0, t]$ .

On précise que  $X(t)$  = coûts totaux sur l'intervalle  $(0, t]$ .

Soit  $\underline{X} = \{X(t), t \geq 0\}$  le processus des coûts totaux (pour un contrat, une ligne d'affaires, un portefeuille, etc.) où

$$X(0) = 0$$

et

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k & , N(t) > 0 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

Notations et hypothèses :

1.  $B_k$  = montant du sinistre  $k$
2.  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$
3. Hypothèse 1 :  $\underline{B} = \{B_k, k = 1, 2, \dots\}$  forme une suite de v.a. i.i.d. et  $B_k \sim B$
4. Hypothèse 2 :  $\underline{B}$  et  $\underline{N}$  sont indépendants

Selon le modèle classique de risque,  $\underline{N}$  est modélisé par un processus de Poisson homogène avec une intensité  $\lambda > 0$ .

On a aussi recours à des extensions tel que le processus de Poisson non-homogène, le processus de Poisson mixte ou le processus de renouvellement.

$\underline{X}$  est appelé le processus des coûts agrégés.

On présente les différents processus pour  $\underline{N}$  et on revient aux autres propriétés de  $\underline{X}$ .

On commence avec le processus de Poisson homogène  $\underline{N}$  avec une intensité  $\lambda > 0$ .

Propriétés :



1.  $N(0) = 0$
2. Les accroissements sur des intervalles de temps disjoints sont indépendants.  
Pour  $s_1 < s_2 < s_{n-1} < s_n$ ,  $N(s_1)$ ,  $N(s_2) - N(s_1)$ ,  $N(s_3) - N(s_2)$ ,  $N(s_n) - N(s_{n-1})$  sont des v.a. indépendantes
3. On a recours à la notation suivante :  
 $N(s_1, s_2] = N(s_2) - N(s_1)$  = accroissement de  $\underline{N}$  sur l'intervalle de temps  $(s_1, s_2]$  pour  $0 \leq s_1 < s_2 < \infty$
4.  $N(s) \sim Pois(\lambda s)$
5.  $N(s_2) - N(s_1) = N(s_1, s_2] \sim Pois(\lambda(s_2 - s_1))$
6. Soit  $t > 0$  tel que  $0 \leq s_1 < s_1 + t < s_2 < s_2 + t < \infty$

Alors,  $N(s_1, s_1 + t] \sim N(s_2, s_2 + t] \sim Pois(\lambda t)$

Cela signifie que le processus de Poisson a des accroissements stationnaires, i.e. les accroissements sur des intervalles de temps de longueurs identiques ont la même distribution.

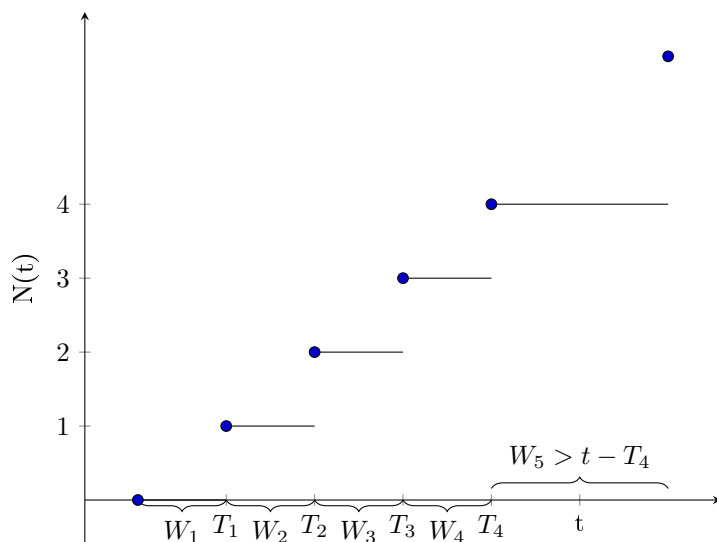
Soit  $\underline{N}$  un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$ .

On définit les v.a.  $T_1, T_2, \dots$  où  $T_i$  correspond au temps d'avènement (arrivé, occurrence) du sinistre  $\#i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Convention :  $T_0 = 0$

On définit les v.a.  $\underline{W} = \{W_i, i \in \mathbb{N}^+\}$  où  $w_i$  correspond au  $i$ -ième temps inter sinistre, i.e. le temps écoulé entre le sinistre  $(i-1)$  et  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

On a la relation  $W_i = T_i - T_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  et  $T_i = \sum_{j=1}^i W_j$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Parcours avec  $N(0, t] = N(t) = 4$ :



Autres propriétés du processus de Poisson homogène :

1.  $\underline{W}$  forme une suite de v.a. i.i.d.
2.  $W_i \sim W \sim Exp(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots$
3.  $T_i = \sum_{j=1}^i W_j$  = somme de v.a. i.i.d. de la loi  $Exp(\lambda)$ , donc  $T_i \sim Erlang(i, \lambda)$

Interprétation :

1. On fixe  $\lambda_1 < \lambda_2$ .  
 $N_1$  et  $N_2$  sont les processus de Poisson homogène avec les intensités  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
2.  $W_1$  et  $W_2$  sont les suites de temps inter sinistres où  ${}_1\underline{W} = \{{}_1W_i, i = 1, 2, \dots\}$  et  ${}_2\underline{W} = \{{}_2W_i, i = 1, 2, \dots\}$   
 ${}_1W_i \sim {}_1W$  et  ${}_2W_i \sim {}_2W$   
Comme  $\lambda_1 < \lambda_2$ , alors  $E[{}_1W] = \frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} = E[{}_2W]$

On déduit que la fréquence moyenne d'arrivée du processus  ${}_2\underline{N}$  est plus élevée que celle du processus  ${}_1\underline{N}$ .

On présente 2 algorithmes de simulation de parcours de  $\underline{N}$ .

Le premier est basé sur la définition de  $\underline{W}$

**Algorithme 1** *PP1 - Simulation des temps d'occurrences du parcours j de  $\underline{N}$  :*

1. On fixe  $T_0^{(j)} = 0$
2. On annule la réalisation j  $(w_1^{(j)}, \dots, w_n^{(j)})$  de  $(w_1, \dots, w_n)$  du vecteur de v.a. i.i.d.  $(W_1, \dots, W_n)$   
où  $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
3. On produit la réalisation j  $(T_1^{(j)}, \dots, T_n^{(j)})$  du vecteur de v.a.  $(T_1, \dots, T_n)$   
 $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + w_i = \sum_{k=1}^i w_k^{(j)}$ ,  $i = 1, \dots, n$

Remarques :

1.  $(T_1, \dots, T_n)$  est un vecteur de v.a. dépendantes ou  $(T_1, \dots, T_n) = (w_1, w_1 + w_2, \dots, w_1 + w_2 + \dots + w_n)$
2. La représentation en
3. met en évidence la dépendance entre les temps d'arrivées.
4. Pour cette raison, on ne peut pas simuler indépendamment les réalisations des v.a. (dépendantes)  
 $T_1, \dots, T_n$
5. Ne pas oublier : On vise à simuler un parcours de  $\underline{N}$

L'algorithme PP1 est simple d'appliquer. Toute fois, il n'est pas plus efficace.

On présente un 2ième algorithme PP2 qui vise un parcours (=réalisation) de  $\underline{N}$  sur l'horizon  $(0, t]$  Le 2e algorithme se fonde sur la distribution conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n | N(t) = n)$ .

Résultat à montrer  $(T_1, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$  où  $(Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$  est la version triée (ordonnée) du vecteur de v.a. i.i.d.  $(Y_1, \dots, Y_n)$  où  $Y_i \sim Y \sim \text{Unif}(0, t)$ .

Structure de la démonstration du résultat :

1. Lemme #1 : Fonction de densité de  $(Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$ .
2. Lemme #2 : Cas particulier du Lemme #1 quand  $Y \sim \text{Unif}(0, t)$ .
3. Identifier  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n)$
4. Faire la connection entre (2) et (3)

**Lemme 1** Soit le vecteur de  $n$  v.a. continues positives i.i.d.  $(Y_1, \dots, Y_n)$  où  $Y_i \sim Y$  et la fonction de densité de  $Y$  est  $f_Y$ .

On définit  $Y_{[1]} < Y_{[2]} < \dots < Y_{[n]}$  le vecteur des valeurs triées de  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  (aussi appelé le vecteur des statistiques d'ordre)

Alors, on a

$f_{Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]}}(s_1, \dots, s_n) = (n!)f_Y(s_1) \dots f_Y(s_n)$  pour  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n < \infty$  (note : fonction de densité est nulle en dehors du support)

**Lemme 2** Aux condition du Lemme 1, on ajoute que  $Y \sim \text{Uni}(0, t)$

Alors, on a

$f_{Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]}}(s_1, \dots, s_n) = (n!)(\frac{1}{t})^n$  pour  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t$

**Proposition 1** Soit le processus de Poisson homogène avec une intensité  $\lambda > 0$  et le vecteur de temps d'arrivées  $T_1, \dots, T_n$ .

Alors, on a

$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) = (n!)(\frac{1}{t})^n$ , pour  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t$

Réunis :

1. Soit des nombres très petits  $h_1, \dots, h_n$  tel que les intervalles  $(s_1, s_1 + h_1], (s_2, s_2 + h_2], \dots, (s_n, s_n + h_n]$  sont disjoint, i.e.  $0 < s_1 < s_1 + h_1 < s_2 < s_2 + h_2 < \dots < s_n < s_n + h_n \leq t$ .
2. On sait que

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) h_1 h_2 \dots h_n \simeq \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) = A$$

3. On developpe la probabilité  $A$  comme suite :

$$\begin{aligned} A &= \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ &= \frac{\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n], N(t) = n)}{\Pr(N(t) = n)} \end{aligned}$$

4. On applique les propriétés du processus de Poisson homogène (indépendance des accroissements sure des intervalles disjoints et lois des accroissements sur ces intervalles)

$$\begin{aligned} A &= \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ &= \Pr(N(0, s_1] = 0, N(s_1, s_1 + h_1] = 1, N(s_1 + h_1, s_2] = 0, N(s_2, s_2 + h_2] = 1 \\ &\quad \dots, N(s_n, s_n + h_n] = 1, N(s_n + h_n, t] = 0) \\ &\quad \frac{}{\Pr(N(t) = n)} \end{aligned}$$

par indépendance

$$\begin{aligned} A &= \Pr(N(0, s_1] = 0) \Pr(N(s_1, s_1 + h_1] = 1) \Pr(N(s_1 + h_1, s_2] = 0) \Pr(N(s_2, s_2 + h_2] = 1) \dots \\ &\quad \frac{\dots \Pr(N(s_n, s_n + h_n] = 1) \Pr(N(s_n + h_n, t] = 0)}{\Pr(N(t) = n)} \end{aligned}$$

par la lois des accroissements

$$A = \frac{(e^{-\lambda s_1})(\lambda h_1 e^{-\lambda h_1})(e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)})(\lambda h_2 e^{-\lambda h_2}) \dots (\lambda h_n e^{-\lambda h_n})(e^{-\lambda(t-s_n-h_n)})}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

5. On annule et on regroupe les termes

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n h_1 \dots h_n}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} = n! \frac{1}{t^n} h_1 h_2 \dots h_n \\ &= \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ &\approx f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) h_1 h_2 \dots h_n \end{aligned}$$

6. On définit  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = n! \left(\frac{1}{t}\right)^n$

**Proposition 2** On suppose les conditions de la proposition #1 et le Lemme #2. Alors, on a  $(T_1, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (Y_{[1]}, \dots, Y_{[n]})$

:

**Preuve 1** Il suffit de combiner le résultat de la proposition #1 <u>résultat du Lemme 1. Le prochain algorithme est construit à partir de la proposition 2.

**Algorithme 2** PP2 - Simulation du parcours (j) du processus de Poisson homogène sur l'intervalle de temps (0, t]

1. Simuler la réalisation  $N(t)^{(j)} > 0$ , on procède comme suite :

(a) Simuler la réalisation  $(U_1^{(j)}, \dots, U_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  du vecteur de v.a. i.i.d. de la lois uniforme standard (0,1) ,  $(U_1, \dots, U_{N(t)^{(j)}})$ .

(b) Trier  $(U_1^{(j)}, \dots, U_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  on obtient  $(U_{[1]}^{(j)}, \dots, U_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$ .

(c) Calculer la réalisation  $(Y_{[1]}^{(j)}, \dots, Y_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$  de  $(U_{[1]}, \dots, U_{[N(t)^{(j)}]})$  avec  $Y_{[i]}^{(j)} = tU_{[i]}^{(j)}$ .

(d) Calculer la réalisation  $(T_1^{(j)}, \dots, T_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  de  $(T_1, \dots, T_{N(t)})$  avec  $T_i^{(j)} = Y_{[i]}^{(j)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

2. Retourner à 1. pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

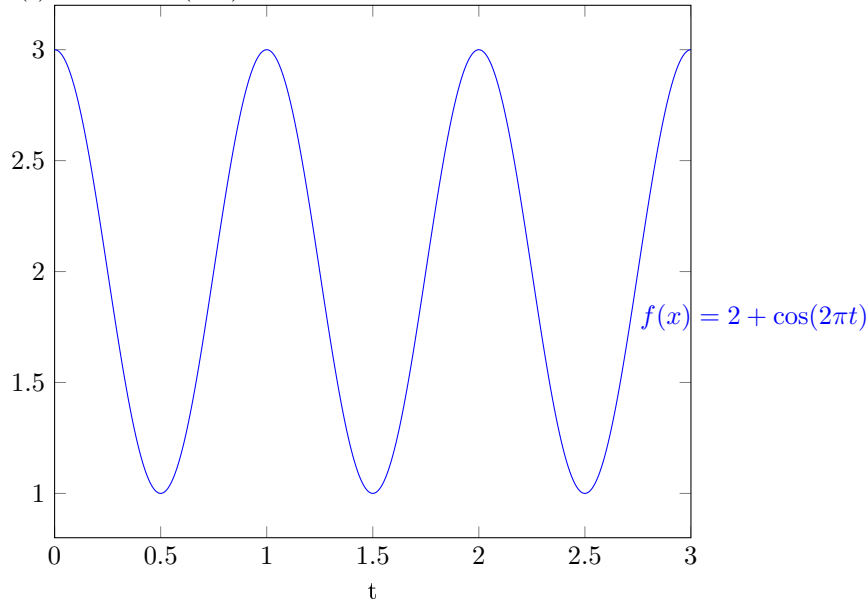
## 1.5 - Processus de Poisson non-homogène

Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  un processus de Poisson non-homogène avec une intensité  $\lambda(t) > 0$ ,  $t \geq 0$ . Le processus de Poisson non-homogène est appropriée pour modéliser de façon plus fine. Les occurrences de sinistres (ou autres activités) dont l'intensité varie de façon déterministe dans le temps. Exemples de fonction pour  $\lambda(t)$ .

1.  $\lambda(t) = a + bt$ ,  $a > 0$ ,  $b \geq 0$

2.  $\lambda(t) = \beta(\beta t)^{\tau-1}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau > 0$

3.  $\lambda(t) = a + b \cos(2\pi t)$ ,  $a > 0$ ,  $0 \leq b < a$  :



4.  $N(s_1, s_2] = N(s_2) - N(s_1)$  = accroissement du processus sur  $(s_1, s_2]$ .

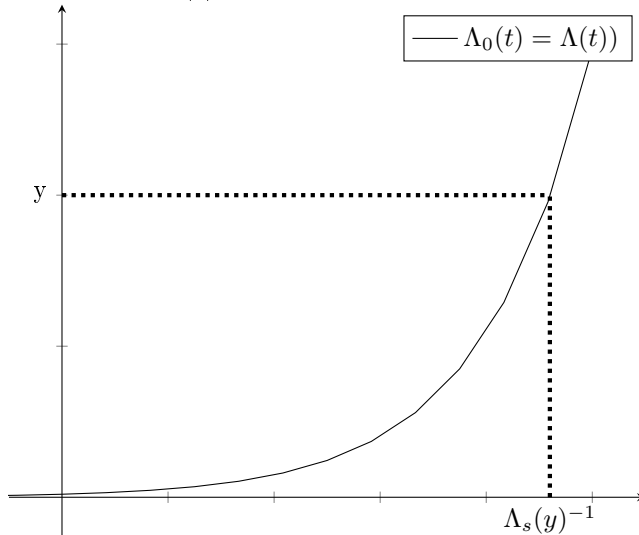
5.  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(w)dw$

6.  $\Lambda(s, s+t] = \Lambda_s(t) = \Lambda(s+t) - \Lambda(s) = \int_s^{s+t} \lambda(w)dw$

7.  $\Lambda_0(t) = \Lambda(t) = \Lambda(0, t]$

8. On fixe  $s \geq 0$ . On observe que  $\Lambda_s(t)$  est une fonction croissante de  $t > 0$ . On définit l'inverse de  $\Lambda_s(t)$  par  $\Lambda_s(y)^{-1}$  ou  $\Lambda_s(y)^{-1} = \inf \{t \geq 0, \text{ tel que } \Lambda_s(t) \geq y\}$ ,  $y > 0$ .

9. Illustration de (5) :



10.  $\Lambda(t)$  (ou  $\Lambda_s(t)$ ) représente l'intensité cumulée sur l'intervalle de temps  $(0, t]$  (ou  $(s, s+t]$ ). Dans Ross, on utilise la notation  $m(t)$  au lieu de  $\Lambda(t)$ . Elle est parfois appelée l'intensité moyenne.

Quelques propriétés du Processus de Poisson non-homogène  $\underline{N}$  :

1.  $N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$
2.  $N(s, s+t] = N(s+t) - N(s) = \text{accroissement sur } (s, s+t] \sim \text{Poisson}(\Lambda_s(t)), s \geq 0, t \geq 0.$
3.  $N(s_1, s_1+t_1]$  et  $N(s_2, s_2+t_2]$  sont des v.a. indépendants pour  $0 < s_1 < s_1+t_1 < s_2 < s_2+t_2$   
 Interprétation : Accroissements indépendants sur les intervalles de temps disjoints.  
 Problème : Les accroissements ne sont pas stationnaires.  
 On examine le comportement de  $W_1, W_2, \dots$   
 La fonction de répartition de  $W_1$  est donnée par  $F_w(t) = 1 - \bar{F}_W(t)$  où  $\bar{F}_{W_1}(t) = \Pr(N(t) = 0) = \Pr(N(0, t] = 0) = e^{-\Lambda(0, t]} = e^{-\Lambda_0(t)}$   
 Alors on a  
 $F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\Lambda_0(t)} = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$   
 Note : Si  $\lambda(t) = \lambda > 0$  (Poisson homogène), on observe  $F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} =$  Fonction de répartition d'une loi exponentielle.  
 On déduit la fonction quantile de  $W$  comme suit :

(a)  $F_{W_1}(t) = 1 - e^{-\Lambda_0(t)} = u$

(b)  $\Lambda_0(t) = -\ln(1 - u)$

(c) La solution  $= F_{W_1}^{-1}(u) = \Lambda_0^{-1}(-\ln(1 - u))$

Étapes pour calculer la valeur de  $F_{W_1}^{-1}(u)$  ( $u \in (0, 1)$ ) :

(a) Développer l'expression de  $\Lambda_0(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$

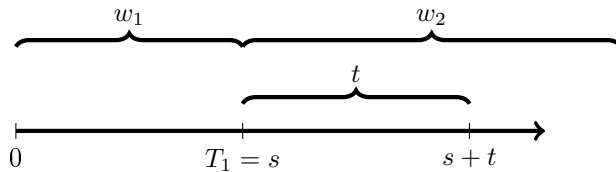
(b) Développer (si possible) l'expression de  $\Lambda^{-1}(w), w > 0$

(c) Calculer  $F_W^{-1}(u) = \Lambda_0^{-1}(-\ln(1 - u)), u \in (0, 1)$

On identifie l'expression de  $F_{W_2|T_1=s}(t)$  en procédant comme suit :

(a)  $F_{W_2|T_1=s}(t) = 1 - \bar{F}_{W_2|T_1=s}(t)$

(b) Illustration



4. Question : Quelle est la probabilité que le temps à écouler jusqu'à un prochain sinistre dépasse  $t$  sachant que le premier sinistre est survenu à  $T_1 = s$ ?
5. On observe l'équivalence des événements suivants :

$$\begin{aligned} \{W_2 > t | T_1 = s\} &= \{N(s, s+t] = 0 | T_1 = s\} \\ &= \{N(s, s+t] = 0\} \text{ accroissement indépendants du Processus de Poisson } N(t) \end{aligned}$$

6. De (4), on déduit

$$\begin{aligned} F_{W_2|T_1=s}(t) &= \Pr(W_2 > t | T_1 = s) \\ &= \Pr(N(s, s+t] = 0 | T_1 = s) \\ &= \Pr(N(s, s+t] = 0) = e^{-\Lambda(s, s+t]} = e^{-\Lambda_s(t)} \end{aligned}$$

7. Alors, on a

$$F_{W_2|T_1=s}(t) = 1 - e^{-\Lambda_s(t)} = 1 - e^{-\int_s^{s+t} \lambda(y) dy}$$

Fonction inverse de  $F_{W_2|T_1=s}(t)$  :

1. On cherche  $t$  tel que  $\Lambda_s(t) = -\ln(1-u)$

2. Donc la solution est  $F_{W_2|T_1=s}^{-1}(u) = \Lambda_s^{-1}(-\ln(1-u))$

En générale, on a

$$F_{W_{k+1}|T_k=s}(t) = 1 - e^{-\Lambda_s(t)} \text{ et } F_{W_{k+1}|T_k=s}^{-1}(u) = \Lambda_s^{-1}(-\ln(1-u))$$

Les infos sur les comportements aléatoires de  $W_1$  et  $(W_{k+1}|T_k = s)$  servent à construire l'algorithme suivant.

**Algorithme 3** *PPNH1 - Simulation du parcours (j) du processus de Poisson non-homogène pour n sinistre*

1. Simulation de la réalisation  $(U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)})$  du vecteur de v.a. i.i.d.  $(U_1, \dots, U_n)$  où  $U_1 \sim U \sim \text{Unif}(0, 1)$ .
2. Simulation de la réalisation  $W_1^{(j)}$  de  $W_1$  avec  $W_1^{(j)} = F_{W_1}^{-1}(U_1^{(j)})$
3.  $T_1^{(j)} = W_1^{(j)}$
4. Pour  $i = 2, 3, \dots, n$  on calcule :
  - (a) Simulation de  $W_i^{(j)}$  de  $W_i$  avec  $W_i^{(j)} = F_{W_i|T_{i-1}=T_{i-1}^{(j)}}(U_i^{(j)})$
  - (b)  $T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j)} + W_i^{(j)}$
5. On répète pour  $j = 1, 2, \dots, n$

On vise à proposer un 2ième algorithme pour simuler un parcours  $\underline{N}$  sur  $(0, t]$ , sachant que  $N(t) = N(0, t] = n$

L'algorithme ressemble à l'algorithme correspondant (PP2) pour un processus de Poisson homogène.

Tout d'abord, on veut identifier  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(t_1, \dots, t_n)$

Ensuite, on constate que  $(T_1, \dots, T_n | N(t) = n) \sim (V_{[1]}, \dots, V_{[n]})$  où  $(V_{[1]}, \dots, V_{[n]})$  est la version ordonnée du vecteur de v.a. indépendants  $(V_1, \dots, V_n)$

On doit identifier  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}$  afin de connaître des lois de  $V_1, \dots, V_n$ .

**Proposition 3** *Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  (avec  $N(0) = 0$ ) un processus de Poisson non-homogène avec la fonction d'intensité  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ . Alors, on a  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(t_1, \dots, t_n) = n! \frac{\lambda(t_1)}{\Lambda(t)} \dots \frac{\lambda(t_n)}{\Lambda(t)}$*

**Preuve 2** 1. On veut montrer que

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) = n! \frac{\lambda(s_1)}{\Lambda(t)} \dots \frac{\lambda(s_n)}{\Lambda(t)} \text{ avec } 0 < s_1 < \dots < s_n \leq t$$

2. On a recours à la même démarche que celle employée dans la preuve de proposition équivalente pour le processus de Poisson.

3. Pour  $h_1, \dots, h_n$  très petits

$$f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) h_1 h_2 \dots h_n \simeq \Pr(T_1 \in (s_1, s_1+h_1], T_2 \in (s_2, s_2+h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n+h_n] | N(t) = n)$$

4. On a

$$\begin{aligned}\Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) &= \Pr(A|B) \\ &= \frac{\Pr(A, B)}{\Pr(B)} \text{ où } \Pr(B) = \Pr(N(t) = n) = \frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!}\end{aligned}$$

5. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(A, B)}{\Pr(B)} &= \Pr(T_1 \in (s_1, s_1 + h_1], T_2 \in (s_2, s_2 + h_2], \dots, T_n \in (s_n, s_n + h_n] | N(t) = n) \\ &= \Pr(N(0, s_1] = 0, N(s_1, s_1 + h_1] = 1, N(s_1 + h_1, s_2] = 0, N(s_2, s_2 + h_2] = 1 \\ &\quad \dots, N(s_n, s_n + h_n] = 1, N(s_n + h_n, t] = 0) \\ &\quad \hline \Pr(N(t) = n)\end{aligned}$$

par indépendance des accroissements sur les intervalles de temps disjoints

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(A, B)}{\Pr(B)} &= \Pr(N(0, s_1] = 0) \Pr(N(s_1, s_1 + h_1] = 1) \Pr(N(s_1 + h_1, s_2] = 0) \Pr(N(s_2, s_2 + h_2] = 1) \dots \\ &\quad \dots \Pr(N(s_n, s_n + h_n] = 1) \Pr(N(s_n + h_n, t] = 0) \\ &\quad \hline \Pr(N(t) = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(A, B)}{\Pr(B)} &= \frac{e^{-\Lambda(s_1)} \Lambda(s_1, s_1 + h_1] e^{-\Lambda(s_1, s_1 + h_1]} \dots \Lambda(s_n, s_n + h_n] e^{-\Lambda(s_n, s_n + h_n]} e^{-\Lambda(s_n + h_n, t]}}{\frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!}} \\ &= \frac{e^{-\Lambda(s_1) - \Lambda(s_1, s_1 + h_1] - \Lambda(s_n, s_n + h_n] - \Lambda(s_n + h_n, t]}} \Lambda(s_1, s_1 + h_1] \dots \Lambda(s_n, s_n + h_n] \\ &\quad \hline \frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!} \\ &= \frac{e^{-\Lambda(t)} \Lambda(s_1, s_1 + h_1] \dots \Lambda(s_n, s_n + h_n]}}{\frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!}} \\ &= \frac{\Lambda(s_1, s_1 + h_1] \dots \Lambda(s_n, s_n + h_n]}}{\frac{\Lambda(t)^n}{n!}}\end{aligned}$$

6. Enfin on obtient

$$\begin{aligned}f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) &= \lim_{h_1, \dots, h_n \rightarrow 0} \frac{\Pr(A|B)}{h_1 \dots h_n} \\ &= \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \lim_{h_1, \dots, h_n \rightarrow 0} \frac{\Lambda(s_1, s_1 + h_1]}{h_1} \dots \frac{\Lambda(s_n, s_n + h_n]}{h_n} \\ &= \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \lambda(s_1) \dots \lambda(s_n) \text{ pour } 0 < s_1 < \dots < s_n < t\end{aligned}$$

Lemme : De la proposition et du Lemme sur la fonction de densité conjointe de  $(V_{[1]}, \dots, V[n])$  on déduit que



$$\begin{aligned}
f_{T_1, \dots, T_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) &= n! \frac{\lambda(s_1)}{\Lambda(t)} \dots \frac{\lambda(s_n)}{\Lambda(t)} \\
&= f_{V_{[1]}, \dots, V_{[n]}}(s_1, \dots, s_n) \\
&= n! f_{V_1}(s_1) \dots f_{V_n}(s_n) \text{ Lemme 1} \\
&= n! f_V(s_1) \dots f_V(s_n) \text{ où } V_1 \sim \dots \sim V_n \sim V
\end{aligned}$$

On observe que  $V$  est une v.a. continue définie sur l'intervalle  $[0, t]$  où

$$f_V(s) = \begin{cases} \frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)} & , 0 < s \leq t \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
F_V(s) &= \int_0^s f_V(y) dy \\
&= \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^s \lambda(y) dy \\
&= \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)} \text{ pour } 0 \leq s \leq t
\end{aligned}$$

On observe que  $F_V(t) = 1$  et  $F_V(s) = 0$ ,  $s > t$ .

En plus, l'expression de  $F_v^{-1}(u)$  est obtenue comme suite :

1. On cherche  $s$  tel que  $F_V(s) = u = \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}$
2. On cherche  $s$  tel que  $\Lambda(s) = u\Lambda(t)$
3. On obtient la solution suivante

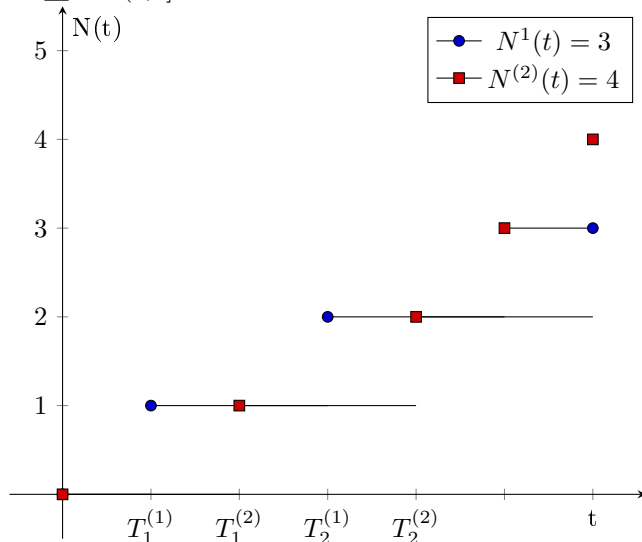
$$F_v^{-1}(u) = \Lambda^{-1}(u\Lambda(t)) , 0 < u < 1$$

4. Note :  $\lim_{u \rightarrow 1} F_v^{-1}(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \Lambda^{-1}(u\Lambda(t)) = \Lambda^{-1}(\Lambda(t)) = t$

**Algorithme 4** *PPNH2 - Simulation du parcours (j) de  $N$  sur  $(0, t]$*

1. Simuler la réalisation  $N^{(j)}(t)$  et  $N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$
2. Si  $N^{(j)}(t) > 0$ , procédé comme suit.
  - (a) Simuler la réalisation  $(U_1^{(j)}, \dots, U_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  du vecteur de v.a. i.i.d.  $(U_1, \dots, U_{N(t)^{(j)}})$  où  $U_i \sim U \sim \text{Unif}(0, 1)$ .
  - (b) Simuler la réalisation  $(V_1^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  de  $(V_1, \dots, V_{N(t)^{(j)}})$  où  $V_i^{(j)} = F_v^{-1}(U_i^{(j)}) = \Lambda^{-1}(U_i^{(j)}\Lambda(t))$ .
  - (c) Trier  $(V_1^{(j)}, \dots, V_{N(t)^{(j)}}^{(j)})$  on obtient  $(V_{[1]}^{(j)}, \dots, V_{[N(t)^{(j)}]}^{(j)})$ .
  - (d) Calculer la réalisation  $(T_1^{(j)}, \dots, T_{N(t)^{(j)}}^{(j)} | N(t) = N(t)^{(j)})$  avec  $(T_i^{(j)} | N(t) = N(t)^{(j)}) = V_{[i]}^{(j)}$ , pour  $i = 1, \dots, N(t)^{(j)}$ .
3. Répéter (1) et (2) pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Remarque : Le processus s'accroît de l'occurrence d'un sinistre au temps  $T_i$ . Illustration de 2 parcours de  $\underline{N}$  sur  $(s, t]$  :



## 1.6 - Processus de Poisson mixte

Le processus de Poisson mixte est un processus de dénombrement (ou comptage).

Il est une extension du processus de Poisson.

Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec  $N(0) = 0$ .

Soit une v.a.  $\Theta$  de mélange strictement positive et un paramètre  $\lambda > 0$ .

Alors  $(N(t)|\Theta = \theta) \sim \text{Poisson}(\lambda t \theta)$  et  $(N(s, s+t)|\Theta = \theta) \sim \text{Poisson}(\lambda t \theta)$ .

Note : La loi de la v.a. strictement positive  $\Theta$  est définie de la sorte que  $E[\Theta] = 1$ .

Propriété :

1. Les accroissements  $N(s_1, s_1 + t]$  et  $N(s_2, s_2 + t]$  ont la même distribution, i.e. accroissements stationnaires.
2. Soit  $0 < s_1 < s_1 + t_1 < s_2 < s_2 + t_2$  de telle sorte que les intervalles  $(s_1, s_1 + t_1]$  et  $(s_2, s_2 + t_2]$  sont disjoints, alors  $N(s_1, s_1 + t_1]$  et  $N(s_2, s_2 + t_2]$  ne sont pas indépendants.

Interprétation importante :

1. Selon la définition des processus de Poisson mixte, un parcours de  $\underline{N}$  comporte la réalisation de  $\Theta$  et cette réalisation est maintenue partout  $t > 0$ .
2. Toutefois, on ne connaît pas la valeur  $\theta$  prise pour la v.a.  $\Theta$  lorsque l'on a des données sous-les-yeux.

Propriété :

- 1.

$$\begin{aligned} \Pr(N(s, s+t] = k) &= E_{\Theta}[\Pr(N(s, s+t] = k)|\Theta = \theta] \\ &= \int_0^{\infty} \Pr(N(s, s+t] = k|\Theta = \theta) dF_{\Theta}(\theta) \end{aligned}$$

2. Pour  $0 < s_1 < s_1 + t_1 < s_2 < s_2 + t_2$

$$\begin{aligned}\Pr(N(s_1, s_1 + t_1] = k_1, N(s_2, s_2 + t_2] = k_2) &= \int_0^\infty \Pr(N(s_1, s_1 + t_1] = k_1, N(s_2, s_2 + t_2] = k_2 | \Theta = \theta) dF_\Theta(\theta) \\ &\quad (\text{paraccroissementsdisjointsindependants}) \\ &= \int_0^\infty \Pr(N(s_1, s_1 + t_1] = k_1 | \Theta = \theta) \Pr(N(s_2, s_2 + t_2] = k_2 | \Theta = \theta) dF_\Theta(\theta)\end{aligned}$$

## 1.7 - Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement  $\underline{N}$  est un processus de dénombrement.  
Il est aussi vue comme une extension du processus de Poisson.

Comment ?

1. Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec  $N(0) = 0$  un processus de renouvellement.
2. Le processus de renouvellement est défini en fonction de la suite de v.a. i.i.d. d'inter-sinistre  $\underline{W} = \{W_k, k = 1, 2, \dots\}$  où  $W_k \sim W$  est une v.a. strictement positive.
3. On définit les v.a. d'occurrence des sinistres par  $T_1, T_2, \dots$  où  $T_i$  = temps d'occurrence du  $i$ -ième sinistre, avec  $T_1 = W_1$ ,  $T_2 = W_1 + W_2$  et donc  $T_i = \sum_{l=1}^i W_l$ . Par convention,  $T_0 = 0$
4. On définit  $N(t)$  sur  $N(t) = \sum_{i=1}^\infty 1_{\{T_i \leq t\}} = N(0, t]$
5. On a le relation fondamentale suivante :

$$\{N(t) \geq k\} \Leftrightarrow \{T_k \leq t\}$$

i.e. le nombre d'occurrence sur  $(0, t]$  excède  $k$  est équivalent à ce que  $k$ -ième évènement survienne dans l'intervalle de temps  $(0, t]$

6. Pourquoi les processus de renouvellement ?  
On veut tenir compte de l'impacte du temps écoulé depuis le dernier sinistre sur le comportement de l'avènement du prochain sinistre, i.e. sur le temps jusqu'au prochain sinistre.

On vise à identifier le fonction de masse de probabilité de  $N(t) = N(0, t]$ .

On utilise la relation précédente pour identifier la probabilité suivante :

$$\Pr(N(t) \geq k) = \Pr(T_k \leq t) \text{ où } k = 0, 1, 2, \dots$$

On utilise cette relation pour identifier la fonction de masse de probabilité de  $N(t) = N(0, t]$ .

$$\Pr(N(t) = k) = \Pr(N(t) \geq k) - \Pr(N(t) \geq k + 1) \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

Puis on a,

$$\Pr(N(t) = k) = \Pr(T_k \leq t) - \Pr(T_{k+1} \leq t) \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

On rappelle la convention  $T_0 = 0$ . En particulier,

$$\begin{aligned}\Pr(N(t) = 0) &= \Pr(T_0 \leq t) - \Pr(T_1 \leq t) \\ &= 1 - \Pr(T_1 \leq t) \\ &= \Pr(T_1 > t) \\ &= \bar{F}_{T_1}(t) \\ &= \bar{F}_{W_1}(t) \text{ puisque } T_1 = W_1\end{aligned}$$

Évaluation de  $\Pr(N(t) = k)$  :

1. On sait que  $T_k = W_1 + \dots + W_k$  est une somme de v.a. aléatoire i.i.d..
2. Pour calculer la valeur exacte de  $Pr(N(t) = k)$  on doit être connaître la valeur exacte  $F_{T_k}(t)$  pour  $k = 2, 3, \dots$
3. Pour quelque lois de  $W$  (temps inter-sinistre on connaît le loi de  $T_k = W_1 + \dots + W_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$
4. Exemples :  $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ,  $W \sim \text{InvGauss}(\mu, \beta)$  etc.
5. Toutefois, pour d'autres loi (comme la  $W \sim \text{Weibull}(\tau, \beta)$ ) on ne connaît pas la loi de  $T_k$ .
6. Dans le cas (5), on peut reconrre à des méthodes numériques (algo de DePril ou FFT).

Exemple avec la loi Gamma :

Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  un processus de renouvellement avec  $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  et  $F_W(t) = H(t, \alpha, \beta)$ . Alors,  $T_k \sim \text{Gamma}(k\alpha, \beta)$  pour  $k = 1, 2, \dots$

Puis, on obtient

$$Pr(N(t) = k) = \begin{cases} 1 - H(t, \alpha, \beta) & , k = 0 \\ H(t, k\alpha, \beta) - H(t, (k+1)\alpha, \beta) & , k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

L'espérance de  $N(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= E\left[\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{T_i \leq t\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E[1_{\{T_i \leq t\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Pr(T_i \leq t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} F_{T_i}(t) \end{aligned}$$

Dans le contexte des processus de renouvellement, l'espérance de  $N(t)$  est appelé la fonction de renouvellement i.e.

$$E[N(t)] = m(t)$$

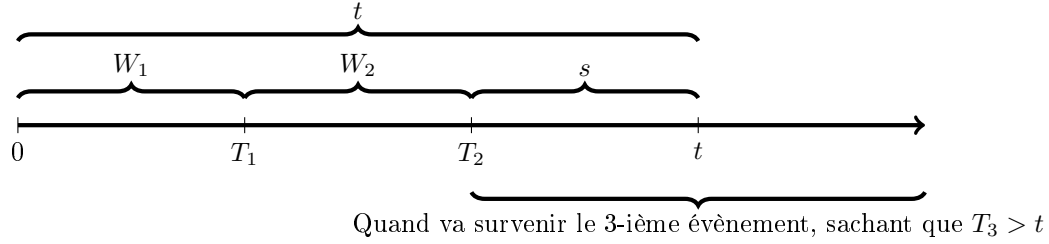
où  $m(t)$  = fonction de renouvellement

Évaluation de  $E[N(t)] = m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{T_i}(t)$  : On approxime  $E[N(t)] = m(t)$  par  $\hat{m}(t) = \sum_{i=1}^{i_0} F_{T_i}(t)$  pour un grand  $i_0$

Pourquoi les processus de renouvellement ?

1. Ces processus sot notamment utilisés pour modéliser la survenance de catastrophes naturelles, pour la survenance de dommages pour les biens sous garantie, pour la survenance d'accidents etc.
2. La modélisation d'u processus de renouvellement de tenir compte du temps écoulé depuis l'occurrence du dernier événement.
3. En actuariat, en statistique ou en économétrie, ils sont aussi appelé des modèles avec duration.

1. Illustration :



2. Question :

$$\bar{F}_{W_3|W_3>s}(s+u) = Pr(W_3 > s+u | W_3 > s) = ?$$

3. Motivation de (2) :

Une catastrophe s'est produite à  $t$  en 2009, on se trouve en 2019. Quelle est la probabilité que la prochaine catastrophe survienne en 2020.

On a

$$\begin{aligned} Pr(W_k > s+u | W_k > s) &= \frac{Pr(W_k > s+u)}{Pr(W_k > s)} \\ &= \frac{\bar{F}_{W_k}(s+u)}{\bar{F}_{W_k}(s)} \\ &= \frac{\bar{F}_W(s+u)}{\bar{F}_W(s)} \end{aligned}$$

Pour un processus de poisson :

$$\frac{\bar{F}_W(s+u)}{\bar{F}_W(s)} = \frac{e^{-\lambda(s+u)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda u}$$

Définition :

$(W_k - s | W_k > s)$  pour  $k = 1, 2, \dots$  est le temps restant à écouler jusqu'au prochain événement sachant que  $s$  unité de temps s'est déjà écoulé.

En générale, on a

$$\frac{\bar{F}_W(s+u)}{\bar{F}_W(s)} = \frac{e^{-\int_0^{s+u} h_W(y) dy}}{e^{-\int_0^s h_W(y) dy}} = e^{-\int_s^{s+u} h_W(y) dy}$$

où  $h_W(y)$  est l'intensité ou le taux instantané d'échec ou de défaillance.

On sait que  $h_W(y) = \frac{f_W(y)}{\bar{F}_W(y)}$ .

Propriété de  $h_W(y)$  :

1. Constant :  $h_W(y) = \lambda$  pour  $\lambda > 0$ , on a un processus de poisson homogène. Le processus de poisson est le seul processus de renouvellement avec cette propriété.
2. Croissante :  $h_W(t)$  augmente si  $t$  augmente. La probabilité de survénance augmente avec  $s$  (avec  $u$  fixe). Utilisé pour modéliser des catastrophes naturelles, comme des tremblements de terre. Exemple :  $W \sim Weibull(\tau, \beta)$  ou  $W \sim Gamma(\alpha, \beta)$  pour  $\tau > 1$  et  $\alpha > 1$ .
3. Décroissante :  $h_W(t)$  diminue si  $t$  augmente. La probabilité de survénance diminue avec  $s$  (avec  $u$  fixe). Exemple :  $W \sim Weibull(\tau, \beta)$  ou  $W \sim Gamma(\alpha, \beta)$  pour  $\tau \in (0, 1)$  et  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 1.8 - Processus agrégés

Soit  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec  $N(0) = 0$  un processus de comptage (dénombrement).  
Soit une suite de v.a. i.i.d.  $\underline{B} = \{B_k, k = 1, 2, \dots\}$  avec  $B_k \sim B$  où  $F_B$  est la fonction de répartition et  $\mathcal{L}_B$  est la transformation Laplace Stieltjes de  $B$ .

Supposons  $\underline{N}$  et  $\underline{B}$  sont indépendant.

On définit le processus agrégé par  $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$  avec  $S(0) = 0$  et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k & , N(t) > 0 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

Puisque  $S(t)$  est définie par une somme aléatoire, on utilise les notions appris pour identifier les caractéristiques d'une v.a. définie par une somme aléatoire pour déterminer les caractéristiques de  $S(t) = S(0, t]$ ,  $t > 0$ .

Fonction de répartition :

$$F_{S(t)}(x) = \Pr(N(t) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(N(t) = j) F_{B_1 + \dots + B_j}(x)$$

Transformation Laplace Stieltjes :

$$\mathcal{L}_{S(t)}(u) = E[e^{-uS(t)}] = P_{N(t)}(\mathcal{L}_B(u))$$

et

$$P_{N(t)}(s) = E[s^{N(t)}] \text{ La fonction génératrice de probabilité}$$

Supposons que  $E[N(t)] < \infty$  et  $E[B] < \infty$ , alors  $E[S(t)] = E[N(t)]E[B]$ .

Supposons aussi que  $E[N(t)^2] < \infty$  et  $E[B^2] < \infty$ , alors  $Var[S(t)] = E[N(t)]Var[B] + Var[N(t)]E[B]^2$ .

ON peut aussi s'intéresser à l'accroissement de la somme sur  $(s, s+t]$  :

$$S(s, s+t] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(s, s+t]} B_k & , N(s, s+t] > 0 \\ 0 & , N(s, s+t] = 0 \end{cases}$$

où  $k$  désigne le  $k$ -ième sinistre sur  $(s, s+t]$ .

Notation :

1.  $\underline{N}$  est une processus de poisson homogène, alors  $\underline{S}$  est une processus de poisson composé homogène.
2.  $\underline{N}$  est une processus de poisson non homogène, alors  $\underline{S}$  est une processus de poisson composé non homogène.
3.  $\underline{N}$  est une processus de renouvellement, alors  $\underline{S}$  est une processus renouvellement composé.
4.  $\underline{N}$  est une processus de poisson mixte, alors  $\underline{S}$  est une processus de poisson mixte composé.

Enjeu numérique : Évaluation de  $F_{S(t)}$  quand on ne connaît pas  $F_{B_1 + \dots + B_k}$ . Comment peut-on procéder ?

Méthodes #1 : Simulation Monte Carlo

Méthodes #2 : méthodes d'agrégation du prochain chapitre (FFT, DePril, Panjer)

## Chaptire 2 - Méthodes d'agrégation

### 2.1 - Introduction

Motivation :

1. Les actuaires sont intéressés par le comportement d'une somme finie ou aléatoire de v.a.
2. Le mécanisme d'assurance est basé sur l'agrégation de risques.
3. Plusieurs modèles actuariels font intervenir des sommes finies ou aléatoires de v.a.
4. Pour les fin de gestion saine et pour la tarification de certains produits, il est essentiel d'avoir une connaissance fine de la densité d'une somme finie ou aléatoire de v.a.
5. C'est pour cette raison que les actuaires ont développé une expertise profonde pour la densité de la somme de v.a.  
On va étudier des méthodes de Panjer, FFT et DePril.

## 2.2 - Méthodes de discrétisation

Les méthodes d'agrégation s'appliquent pour des v.a. discrètes définies sur un support arithmétique  $\{0, 1h, 2h, \dots\}$ .

Les modèles actuariels sont très souvent définies avec des v.a. continues.

Exemples :

$S = X_1 + \dots + X_n$  et

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^N B_k & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

où  $X_1, \dots, X_n \sim B$  sont des v.a. continues. Quoi faire ?

1. On approxime les v.a. continues  $X_1, \dots, X_n$  et  $B$  par des v.a. discrètes définies sur un support arithmétique  $A_h = \{0, 1h, 2h, \dots\}$ .
2. Ces v.a. sont notés  $\tilde{X}_1^{(h)}, \dots, \tilde{X}_n^{(h)}$  et  $\tilde{B}^{(h)}$  où  $h$  est le pas de discrétisation.
3. Les méthodes pour définir les v.a. discrètes  $\tilde{X}_1^{(h)}, \dots, \tilde{X}_n^{(h)}$  et  $\tilde{B}^{(h)}$  à partir des v.a. continues  $X_1, \dots, X_n$  et  $B$  sont appelées des méthodes de discrétisation.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation :

1. "upper"
2. "lower"
3. dispersion avec la présentation de la masse
4. arrondissement

En classe, on présente les méthodes (1) et (2).

Illustration des méthodes "upper" et "lower" :

1. Graphique :

FAIRE UN GRAPHIQUE

2. Soit la v.a. positive  $Y$  avec la fonction de répartition  $F_Y$  ( $Y \sim \text{Pareto, LN, Weibull, Gamme etc.}$ )

3. On définit les v.a. discrètes  $\tilde{Y}^{(u,h)}$  et  $\tilde{Y}^{(l,h)}$  définies sur  $A_h = \{0, 1h, 2h, \dots\}$  où

$$f_{\tilde{Y}^{(u,h)}}(kh) = F_Y((k+1)h) - F_Y(kh), \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

et

$$f_{\tilde{Y}^{(l,h)}}(kh) = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ F_Y(kh) - F_Y((k-1)h) & , k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Relation :

1.  $F_{\tilde{Y}^{(l,h)}}(x)$  est une fonction croissante en escalier avec des sauts à  $1h, 2h, 3h, \dots$
2.  $F_{\tilde{Y}^{(u,h)}}(x)$  est une fonction croissante en escalier avec des sauts à  $0h, 1h, 2h, 3h, \dots$
3. Par construction, on a

$$F_{\tilde{Y}^{(l,h)}}(x) \leq F_Y(x) \leq F_{\tilde{Y}^{(u,h)}}(x), x \geq 0$$

On améliore l'approximation en diminuant la valeur du pas de discrétisation  $h$

$$F_{\tilde{Y}^{(l,h')}}(x) \leq F_{\tilde{Y}^{(l,h)}}(x) \leq F_Y(x) \leq F_{\tilde{Y}^{(u,h)}}(x) \leq F_{\tilde{Y}^{(u,h')}}(x), x \geq 0 \text{ et pour } h < h'$$

Par conséquent :

Soit

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^N B_k & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

et

$$\tilde{S}^{(u \text{ ou } l, h)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \tilde{B}_k^{(u \text{ ou } l, h)} & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

1.  $VaR_k(\tilde{S}^{(u,h)}) \leq VaR_k(S) \leq VaR_k(\tilde{S}^{(l,h)})$  for  $k \in (0, 1)$
2.  $E[\tilde{S}^{(u,h)}] \leq E[S] \leq E[\tilde{S}^{(l,h)}]$
3. Idem pour les TVaR.
4. Par contre, on n'a pas ces relations pour la variance.

Soit

$$\begin{aligned} S &= X_1 + \dots + X_N \\ \tilde{S}^{(u,h)} &= \tilde{X}_1^{(u,h)} + \dots + \tilde{X}_N^{(u,h)} \\ \tilde{S}^{(l,h)} &= \tilde{X}_1^{(l,h)} + \dots + \tilde{X}_N^{(l,h)} \end{aligned}$$

Alors, il est montré dans le prochain chapitre que

$$F_{\tilde{S}^{(l,h)}}(x) \leq F_S(x) \leq F_{\tilde{S}^{(u,h)}}(x), x \geq 0$$



Exemple pour  $n = 2$  :  
Il suit que

$$\begin{aligned} f_{\tilde{S}^{(u \text{ ou } l, h)}}(kh) &= f_{\tilde{X}_1^{(u \text{ ou } l, h)} + \tilde{X}_2^{(u \text{ ou } l, h)}}(kh) \\ &= \Pr(\tilde{X}_1^{(u \text{ ou } l, h)} + \tilde{X}_2^{(u \text{ ou } l, h)} = kh) \\ &= \sum_{j=0}^k f_{\tilde{X}_1^{(u \text{ ou } l, h)}}(jk) f_{\tilde{X}_2^{(u \text{ ou } l, h)}}((k-j)h) \end{aligned}$$

Pour  $n > 2$  (idem pour  $u$ , "upper") :  
On définit

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(l, h)} &= \tilde{X}_1^{(l, h)} + \dots + \tilde{X}_{n-1}^{(l, h)} + \tilde{X}_n^{(l, h)} \\ &= \tilde{S}_{n-1}^{(l, h)} + \tilde{X}_n^{(l, h)} \end{aligned}$$

On procède récursivement pour calculer  $f_{\tilde{S}_n^{(l, h)}}(kh)$  avec la relation :

$$f_{\tilde{S}_n^{(l, h)}}(kh) = \sum_{j=0}^k f_{\tilde{S}_{n-1}^{(l, h)}}(jk) f_{\tilde{X}_n^{(l, h)}}((k-j)h)$$

pour  $n = 2, 3, \dots$

Soit  $n = 10$ . Pour calculer  $f_{\tilde{S}_1^{(l, h)}_0}(kh)$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$  on calcule successivement les valeurs de  $f_{\tilde{S}_m^{(l, h)}}(kh)$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, k_0 h$  et  $m = 2, 3, \dots, 10$ .

Finalement, soit

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^N B_k & , N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases}$$

où  $B_k \sim B$  et  $N = N(t)$  ou  $N = N(s, s+t]$ .  
Alors on a

$$\begin{aligned} f_{\tilde{S}}(0h) &= \Pr(N = 0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k) f_{\tilde{B}_1 + \dots + \tilde{B}_k}(0h) \\ &= \Pr(N = 0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k) f_{\tilde{B}}(0)^k \\ &= P_n(f_{\tilde{B}}(0)) \end{aligned}$$

de plus :

$$f_{\tilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(N = j) f_{\tilde{B}_1 + \dots + \tilde{B}_j}(kh)$$

pour  $k = 1, 2, 3, \dots$

### 2.3 - Algorithme de DePril

Contexte :

1. On considère un portefeuille de  $n$  risques dont les coûts sont définis par les v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .

2. Hypothèse #1 :  $X_1, \dots, X_n$  sont les v.a. positives indépendantes et identiquement distribuées avec  $X_i \sim X$  et  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
 Hypothèse #2 :  $X = \{0, 1h, 2h, \dots\}$  avec  $f_X(kh) = \Pr(X = kh)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .  
 On suppose que la v.a. est déjà discrétisée. On laisse tomber le " $\sim$ " simplement pour éviter d'alourdir l'écriture.  
 On utilise la notation seulement quand on veut comparer  $X$  et  $\tilde{X}$  et les résultats qui en découlent.

3. On définit  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  où  $f_X(kh) = \Pr(X = kh)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

On suit :

- 1.

$$\begin{aligned} f_{S_n}(kh) &= f_{X_1 + \dots + X_n}(kh) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f_X(jh) f_{S_{n-1}}((k-j)h) \\ &= f_X * f_{S_{n-1}}(kh) \text{ (produit de convolution)} \end{aligned}$$

2. Comme  $f_{X_i}(jh) = f_X(j)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note

$$f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh)$$

où  $f^{*n}$  désigne le produit de convolution  $f_X$   $n$ -fois avec elle-même.

3. La fonction génératrice de probabilité de  $S_n$  est  $P_{S_n}(t) = (P_X(t))^n$ .

Pour la suite, on pose  $h = 1$ . Il sera simple de réintroduire par la suite.

En effet, soit  $S_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  et  $S'_n \in \{0, 1h, 2h, 3h, \dots\}$

Alors, on a  $f_{S'_n}(kh) = f_{S_n}(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Motivations :

1. Par définition,

$$P_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k$$

et

$$P_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k$$

il s'agit de série de puissance qui converge si  $0 \leq t \leq 1$ .

2. Comme  $P_{S_n}(t) = (P_X(t))^n$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(k) t^k &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) t^k \right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \end{aligned}$$

aussi une série de puissance où  $f_{S_n}(k) = c_k = ?$

3. Enjeu : Trouver une approche récursive pour calculer  $c_0, c_1, \dots \Leftrightarrow f_{S_n}(0), f_{S_n}(1), \dots$

La relation récursive est fournie par l'algorithme de DePril.

L'algorithme de DePril :

Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a. i.i.d. avec  $X_i \sim X$  dont la fonction de masse de probabilité est  $f_X(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors, on a

Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a. i.i.d. avec  $X_i \sim X$  dont la fonction de masse de probabilité est  $f_X(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors, on a

$$f_{S_n}(0) = \left(f_X(0)\right)^n$$

qui est le point de départ et

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^n \left( (n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j) f_{S_n}(k-j)$$

Application :

Étape #1 : on calcule  $f_{S_n}(0) = \left(f_X(0)\right)^n$

Étape #2 : On calcule  $f_{S_n}(1) = \frac{1}{f_X(0)} \left( (n+1) \frac{1}{1} - 1 \right) f_X(1) f_{S_n}(0)$

Étape #3 :  $f_{S_n}(2) = \frac{1}{f_X(0)} \left[ \left( (n+1) \frac{1}{2} - 1 \right) f_X(1) f_{S_n}(1) + \left( (n+1) \frac{2}{2} - 1 \right) f_X(2) f_{S_n}(0) \right]$

= Une fonction de  $(f_X(0), f_X(1), f_X(2), f_{S_n}(0), f_{S_n}(1))$

Étape #(k+1) :  $f_{S_n}(k+1) =$  Une fonction de  $(f_X(0), \dots, f_X(k), f_{S_n}(0), \dots, f_{S_n}(k-1))$

Interprétation de la preuve :

1. On a  $P_{S_n}(t) = \left(P_X(t)\right)^n$

2. On sait que

$$\begin{aligned} f_{S_n}(0) &= P_{S_n}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \left(P_X(t)\right)^n \Big|_{t=0} \\ &= \left(f_X(0)\right)^n \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\begin{aligned} f_{S_n}(1) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} P_{S_n}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{1!} P'_{S_n}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} (P_X(t))^n \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( n P'_X(t) (P_X(t))^{n-1} \right) \Big|_{t=0} \\ &= n f_X(1) f_{S_{n-1}}(0) \end{aligned}$$

**Preuve 3** 1. On utilise les fgp à nouveau, mais on y ajoutent un petit twist.

2. On a

$$\begin{aligned} f_{S_n}(0) &= P_{S_n}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \left( P_X(t) \right)^n \Big|_{t=0} \\ &= \left( f_X(0) \right)^n \end{aligned}$$

3. On dérive par rapport à  $t$  :

$$P'_{S_n}(t) = nP'_X(t)(P_X(t))^{n-1}$$

4. On multiplie les termes en (3) par  $tP_X(t)$  :

$$\underbrace{tP_X(t)P'_{S_n}(t)}_{\text{série de puissance}} = \underbrace{ntP'_X(t)(P_X(t))^n}_{\text{série de puissance}}$$

Mais on ne connaît pas les coefficients.

5. Partie gauche de (4) :

$$\begin{aligned} tP_X(t)P'_{S_n}(t) &= \left( \overset{\curvearrowright}{\underset{\circlearrowleft}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)t^k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} k \overset{\circlearrowleft}{\underset{\circlearrowright}{t}}^{k-1} f_{S_n}(k) \right) \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_X(k_1)t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=\overset{\circlearrowleft}{1}}^{\infty} k_2 t^{k_2} f_{S_n}(k_2) \right) \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_X(k_1)t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=\overset{\circlearrowright}{0}}^{\infty} k_2 t^{k_2} f_{S_n}(k_2) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k a_k \end{aligned}$$

$$\text{où } a_k = \sum_{j=0}^k f_X(j)(k-j)f_{S_n}(k-j)$$

6. Partie droite de (4) :

$$\begin{aligned} ntP'_X(t)(P_X(t))^n &= ntP'_X(t)P_{S_n}(t) \\ &= n \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} k_1 t^{k_1} f_X(k_1) \right) \left( \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} f_{S_n}(k_2) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k b_k \end{aligned}$$

$$\text{où } b_k = \sum_{j=0}^k njf_X(j)f_{S_n}(k-j)$$

7. De (4), puisqu'on a des série de puissance on a  $a_k = b_k$ , pour  $k = 1, 2, \dots$  i.e. pour  $k$  fixé, le coefficient de  $t^k$  dans la série de puissance de gauche est égal au coefficient de  $t^k$  dans la série de puissance de droite.

8. Dans la relation  $a_k = b_k$  on isole  $f_{S_n}(k)$  :

On a

$$a_k = f_X(0)kf_{S_n}(k) + \sum_{j=1}^{k-1} f_X(j)(k-j)f_{S_n}(k-j)$$

et

$$b_k = n(0)f_X(0)kf_{S_n}(k) + \sum_{j=1}^k njf_X(j)f_{S_n}(k-j)$$

On isole  $f_{S_n}(k)$

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{kf_X(0)} \left( \sum_{j=1}^k njf_X(j)f_{S_n}(k-j) - \sum_{j=1}^{k-1} f_X(j)(k-j)f_{S_n}(k-j) \right)$$

Finalement on a :

$$f_{S_n}(k) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^n \left( (n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_X(j)f_{S_n}(k-j)$$

Remarques :

Comment vérifier si on a fait les calculs correctement. Quelques outils de vérification rapides :

1.

$$\sum_{k=0}^{k_0} f_S(kh) = 1$$

2. Souvent, on a  $E[X] < \infty$ .

Si on connaît la valeur de  $E[X]$  on peut déduire  $E[S_n] = nE[X]$ . Alors :

$$\sum_{k=0}^{k_0} khf_S(kh) = E[S_n]$$

3. Il est aussi pertinent de vérifier que  $f_S(kh) \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

4. Supposons que l'on connaisse  $Var(X) < \infty$ . Alors, on sait que  $Var(S_n) = nVar(X)$  et  $E[S_n^2] = Var(S_n) + E[S_n]^2$ . Ainsi on vérifie que

$$\sum_{k=0}^{k_0} (kh)^2 f_S(kh) = E[S_n^2]$$

## 2.4 - Algorithme de Panjer

### 2.4.1 - Introduction

Panjer vient du Professeur Harry Panjer de l'Université de Waterloo. L'algorithme a été proposé dans un article paru dans AST Bulletin (1981). Il est antérieur à l'algorithme de DePril. Il s'applique dans un contexte d'une classe particulière de distribution pour les sommes aléatoires.

Soit une v.a.  $X$  où

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

1.  $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}\}$  forme une suite de v.a. i.i.d. où  $B_k \sim B, k = 1, 2, \dots$
2. La v.a.  $B$  est déjà discrétisé sur le support  $A_k = \{0, 1h, 2h, \dots\}$  avec  $f_B(kh) = \Pr(B = kh), k = 1, 2, 3, \dots$
3.  $\underline{B}$  et  $M$  sont indépendantes.  
L'hypothèse additionnelle pour appliquer l'algorithme de Panjer :  
La distribution de  $M$  doit faire partie de la famille (a,b,0).

### 2.4.2 - Famille (a,b,0)

Examinons la fonction de masse de probabilité de la loi de Poisson :

1.  $k = 0$  alors  $f_M(0) = e^{-\lambda}$
2.  $k = 1, 2, \dots$  alors  $f_M(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k} f_M(k-1)$
3. Il existe une relation recursive entre  $f_M(k)$  et  $f_M(k-1)$  pour  $k = 1, 2, 3, \dots$  et le point de départ  $f_M(0) = e^{-\lambda}$
4. Question :  
Est-ce qu'il y a d'autres lois de fréquence pour lesquelles la fonction de masse de probabilité satisfait une relation récursive semblable?  
Oui, la famille (a,b,0)

La relation récursive :

$$f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)$$

pour  $k = 1, 2, 3, \dots$  et le point de départ  $f_M(0)$

2.  $(a, b)$  sont des paramètres d'une distribution de cette famille.
3. Qui sont membre de cette famille?  
3.1. Poisson :  $a = 0$  et  $b = \lambda$   
3.2. Binomiale négative :  $a = 1 - q$  et  $b = (1 - q)(r - 1)$   
3.3. Binomiale :  $a = \frac{-q}{1-q}$  et  $b = (n + 1) \frac{q}{1-q}$
4. Est-ce que d'autres lois satisfont cette propriété?  
NON

Sans cette relation récursive, il n'y a pas d'algorithme de Panjer.

Lien entre  $M$  et l'accroissement d'un processus :

1. Processus de Poisson homogène :  
 $M = N(s, s + t]$ , où  $\underline{N}$  est un processus de Poisson, donc  $M \sim Pois(\lambda t)$
2. Processus de Poisson non-homogène :  
 $M = N(s, s + t]$ , où  $\underline{N}$  est un processus de Poisson non-homogène avec une intensité  $\lambda(u), u \geq 0$ .  
Alors,  $M \sim Pois(\Lambda(s, s + t])$  où  $\Lambda(s, s + t] = \Lambda_s(t) = \int_s^{s+t} \lambda(u) du$ .
3. Processus de Poisson mixte :  
 $M = N(s, s + t]$ , où  $\underline{N}$  est un processus de Poisson mixte où la v.a. mélange est  $\Theta \sim Gamma(\alpha, \alpha)$  et  $N(s, s + t] | \Theta = \theta \sim Pois(\lambda t \theta), t > 0$ . Alors,  $M \sim BiNeg(r, q)$  où  $r$  et  $q$  sont définis en fonction de  $\lambda, t$  et  $\alpha$ .

### 2.4.3 - L'algorithme

L'objectif de l'algorithme est de calculer récursivement  $f_X(hk)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  dans le cas où la distribution de  $M$  appartient à la famille  $(a, b, 0)$ .

**Algorithme 5** *Algorithme de Panjer*

1. Point de départ :  $f_X(0) = P_M(f_B(0))$
2. Relation récursive :

$$f_X(kh) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^k \left(a + b \frac{j}{k}\right) f_B(jh) f_X((k-j)h)$$

pour  $k = 1, 2, \dots$

Application :

1. On calcule  $f_X(0) = P_M(f_B(0))$
2. Ensuite, on calcule

$$f_X(1h) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \left(a + b \frac{1}{1}\right) f_B(1h) f_X(0h)$$

3. On calcule

$$f_X(hk) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \left( \left(a + b \frac{1}{2}\right) f_B(1h) f_X(1h) + \left(a + b \frac{2}{2}\right) f_B(2h) f_X(0h) \right)$$

4. On observe

$$f_X(kh) = \text{fonction de } (a, b, f_B(0), f_B(1h), \dots, f_B(kh), f_X(0h), \dots, f_X((k-1)h))$$

Remarque :

1. Les valeurs produites par l'algorithme de Panjer sont exactes (pour les valeurs données de  $f_B$ ).
2. Les valeurs calculées avec l'algorithme de DePril sont aussi exactes.
3. L'approximation est introduite lorsque l'on discrétise.

### 2.4.4 - Démonstration de l'algorithme

On a recours à la fonction génératrice de probabilité (fgp).

Pour la démonstration, on suppose  $h = 1$ , comme on l'a fait pour la démonstration de l'algorithme de DePril.

On a recours aussi à la relation

$$f_X(k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(t) \Big|_{t=0}$$

En fait, on affectue de la dérivé une seule fois et on essaie d'identifier les coefficient de " $t^k$ " dans la série de puissance.

On utilise aussi le Lemme suivant :

**Lemme 3** *Soit la v.a.  $M$  dont la densité appartient à la famille  $(a, b, 0)$  dont la fgp est  $P_M(t)$ . Alors, on a*

$$P_M'(t) = atP_M'(t) + (a + b)P_M(t)$$

**Preuve 4** *Démonstration du Lemme 3*

1. On a

$$P_M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) t^k$$

2. Puis, on dérive

$$P'_M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) k t^{k-1}$$

3. Or, on sait que

$$f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)$$

4. On remplace 3. dans 2.

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1) k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a f_M(k-1) k t^{k-1} + b \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) t^{k-1} \\ &= a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) k t^{k-1} + b P_M(t) \end{aligned}$$

5. Puis, il faut s'occuper du premier terme :

$$\begin{aligned} a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) k t^{k-1} &= a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) (k-1+1) t^{k-1} \\ &= a t \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) (k-1) t^{k-2} + a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) t^{k-1} \\ &= a t P'_M(t) + a P_M(t) \end{aligned}$$

6. Donc,

$$P'_M(t) = a t P'_M(t) + (a+b) P_M(t)$$

Maintenant on passe à l'algorithme de Panjer.

#### **Preuve 5** Algorithme de Panjer

1. On a

$$P_X(t) = P_M(P_B(t))$$

2. Ensuite, on dérive  $P_X(t)$  par rapport à  $t$  :

$$P'_X(t) = P'_M(P_B(t)) P'_B(t)$$

3. On utilise le Lemme 3. On remplace  $P'_M(t) = a t P'_M(t) + (a+b) P_M(t)$  dans 2. et on obtient

$$P'_X(t) = a P_B(t) \underbrace{P'_M(P_B(t)) P'_B(t)}_{P'_X(t)} + (a+b) \underbrace{P_M(P_B(t))}_{P_X(t)} P'_B(t)$$

4. De 3. on déduit

$$P'_X(t) = a P_B(t) P'_X(t) + (a+b) P_X(t) P'_B(t)$$

5. Le résultat de 4. est valide uniquement pour les distribution de  $M$  appartenant à la famille  $(a, b, 0)$

6. Les prochaines étapes de la démonstration sont similaire à celles de la preuve de l'algorithme de DePril.

On remplace  $P'_X$ ,  $P_X$ ,  $P'_B$  et  $P_B$  par les séries de puissances, on réarrange les termes et on identifie les coefficients de  $t^k$ .



7. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) k t^{k-1} = a \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_B(k_1) t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=1}^{\infty} f_X(k_2) k_2 t^{k_2-1} \right) + (a+b) \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_X(k_1) t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=1}^{\infty} f_B(k_2) k_2 t^{k_2-1} \right)$$

8. Ensuite, on multiplie 7. par  $t$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) k t^k &= a \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_B(k_1) t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=1}^{\infty} f_X(k_2) k_2 t^{k_2} \right) + (a+b) \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} f_X(k_1) t^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=1}^{\infty} f_B(k_2) k_2 t^{k_2} \right) \\ &= a \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left( \sum_{j=0}^k f_B(j)(k-j) f_X(k-j) \right) \right) + (a+b) \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left( \sum_{j=0}^k j f_B(j) f_X(k-j) \right) \right) \end{aligned}$$

9. Dans 8., on identifie les coefficients de  $t^k$  :

$$\begin{aligned} k f_X(k) &= a \sum_{j=0}^k f_B(j)(k-j) f_X(k-j) + \sum_{j=0}^k j f_B(j) f_X(k-j) \\ &= a k f_B(0) f_X(k) + \sum_{j=1}^k f_B(j) (a(k-j) + (a+b)j) f_X(k-j) \end{aligned}$$

10. Finalement, avec  $a(k-j) + (a+b)j = ak + bj$  et 9. :

$$f_X(k) = \frac{1}{1 - a f_B(0)} \sum_{j=1}^k \left( a + b \frac{j}{k} \right) f_B(j) f_X(k-j)$$

### 2.4.5 - Remarques sur l'algorithme de Panjer

L'objectif de l'algorithme de Panjer est de calculer les..

Remarques de "calculs" :

1. On doit calculer les valeurs de  $f_X(kh)$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, k_0$ .
2. On doit choisir une valeur suffisamment élevée pour que  $\sum_{k=1}^{k_0} f_X(kh) = 1$  (tout près de 1)  
On fixe  $\varepsilon$  (ex. :  $\varepsilon = 10^{-10}$ ) tel que  $1 - \sum_{k=1}^{k_0} f_X(kh) \leq \varepsilon$
3. Le choix de  $\varepsilon$  dépend de l'objectif des calculs, du temps de calculs et de la capacité de calculer de l'ordinateur.

### 2.4.6 - Discrétisation et algorithme de Panjer

1. Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

où  $M$  est une v.a. de comptage dont la loi appartient à la famille (a,b,0)

2.  $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$  = suite de v.a. i.i.d. continues positives.
3.  $B_k \sim B$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ , où  $F_B$  est la fonction de répartition de  $B$ .
4. On approxime les v.a.  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$  par des v.a.  $\tilde{B}_k^{(meth,h)}$ , où  $meth = lower$  ou  $upper$ .
5. On approxime la v.a.  $X$  par les v.a.  $\tilde{X}^{(meth,h)}$  où

$$\tilde{X}^{(meth,h)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^M \tilde{B}_k^{(meth,h)} & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

6. On sait que  $\tilde{B}_k^{(meth,h)}$  et  $\tilde{X}^{(meth,h)} \in A_h = \{0, 1h, 2h, \dots\}$ .
7. On utilise l'algorithme de Panjer pour évaluer  $f_{\tilde{X}^{(meth,h)}}(kh)$ , pour  $k = 0, 1, 2, \dots, k_0$

8. On observe

$$F_{\tilde{X}(lower,h)'} \leq F_{\tilde{X}(lower,h)} \leq F_X \leq F_{\tilde{X}(upper,h)} \leq F_{\tilde{X}(upper,h)'}$$

pour  $x \geq 0$  et  $h \leq h'$

Soit une v.a.  $M$  où  $f_M = \sum_{l=1}^m \alpha_l f_{K_l}(k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  où les lois de  $K_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$  appartiennent à la famille (a,b,0). De plus,  $\sum_{l=1}^m \alpha_l = 1$ .

1. Alors, la fdp de  $M$  est

$$P_M(r) = \sum_{l=1}^m \alpha_l P_{K_l}(r)$$

2. Soit  $X$  définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèse habituelles.

3. La TLS  $X$  est

$$\mathcal{L}_X(t) = P_M(\mathcal{L}_B(t))$$

note :  $t \geq 0$  et  $\mathcal{L}_B(t) \in (0, 1)$ , i.e. elle prennent des valeurs du support  $[0, 1]$  de la fgp  $P_M(r)$

4. On représente la TLS de  $X$  sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= P_M(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= \sum_{l=1}^m \alpha_l P_{K_l}(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= \sum_{l=1}^m \alpha_l \mathcal{L}_{Y_l}(t) \end{aligned}$$

5. Alors, on a

$$F_X(x) = \sum_{l=1}^m \alpha_l F_{Y_l}(x)$$

La loi de  $X$  est donc un mélange des lois  $Y_1, \dots, Y_m$ .

6. Supposons la v.a.  $B$  est déjà discrétisée, i.e.  $B$  est une v.a. discrète définie sur les support  $A_h = \{0, 1h, 2h, \dots\}$ .

7. Alors, pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$f_X(kh) = \sum_{l=1}^m \alpha_l f_{Y_l}(kh)$$

où les valeurs de  $f_{Y_l}(kh)$  sont calculer avec l'algorithme de Panjer pour chaque  $l$  et pour  $k = 0, 1, \dots, k_0$

Soit la v.a. comptage  $M$  où

$$f_M(k) = \begin{cases} (1 - \alpha) + \alpha f_{M'}(0) & , k = 0 \\ \alpha f_{M'}(k) & , k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

où la loi de  $M$  appartient à la famille (a,b,0)

1. Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses habituelles.

2. Alors,  $\mathcal{L}_X(t) = P_M(\mathcal{L}_B(t))$  où  $P_M(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) t^k$

3. La fgp de  $M$  est

$$\begin{aligned} P_M(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)r^k \\ &= (1 - \alpha) + \alpha f_{M'}(0)r^k + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_{M'}(k)r^k \\ &= (1 - \alpha) + \alpha P_{M'}(r) \end{aligned}$$

4. La TLS de  $X$  devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= P_M(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= 1 - \alpha + \alpha P_{M'}(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= 1 - \alpha + \alpha \mathcal{L}_{Y'}(t) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_{Y'}(t) = P_{M'}(\mathcal{L}_B(t))$  est la TLS de la v.a.  $X'$ .

5. D'après  $\mathcal{L}_{X'}(t)$  en 4. on déduit  $F_X(x) = 1 - \alpha + \alpha F_{X'}(x)$ ,  $x \geq 0$

6. Soit  $B \in \{0, 1h, 2h, \dots\}$ , i.e.  $B$  est déjà discrétisée.

Alors,  $X \in A_h = \{0, 1h, 2h, \dots\}$  avec

$$f_X(k) = \begin{cases} (1 - \alpha) + \alpha f_{X'}(0) & , k = 0 \\ \alpha f_{X'}(kh) & , k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

Puisque la loi de  $M'$  appartient à la famille (a,b,0) on utilise l'algorithme de Panjer, pour calculer les valeurs de  $f_{X'}(kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Soit les v.a. i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  où  $X_i$  obéit à une loi composé pour  $i = 1, 2, \dots, n$

1. On définit

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k} & , M_i > 0 \\ 0 & , M_i = 0 \end{cases}$$

avec  $\mathcal{L}_X(t) = P_{M_i}(\mathcal{L}_{B_i}(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

2. Puisque les v.a. sont i.i.d., on a  $P_{M_i}(r) = P_M(r)$  et  $\mathcal{L}_{B_i}(t) = \mathcal{L}_B(t)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ce qui implique que  $\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{L}_X(t)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$

3. Supposons que la loi de  $M$  appartient à la famille (a,b,0) et que  $B \in A_n = \{0, 1h, 2h, \dots\}$  implicitement la v.a. déjà discrétisé.

4. La TLS de  $S = X_1 + \dots + X_n$  est  $\mathcal{L}_S(t) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(t) = (\mathcal{L}_X(t))^n$

5. On veut évaluer  $f_S(kh)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, k_0$ .

On propose la stratégie suivante :

(a) On utilise l'algorithme de Panjer pour calculer  $f_X(kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

(b) On utilise l'algorithme de DePril pour calculer les valeurs de  $f_S(kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , avec les valeurs de  $f_X(kh)$ .

## 2.5 - DePril, Panjer, Exponentielle et Erlang

On Commence avec une exemple :

1. Soit un portefeuille de  $n$  contrats d'assurance IARD.

2. Les coûts pour le contrat sont définis par la v.a.  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

3. La TLS de  $X_i$  est  $\mathcal{L}_{X_i}(t) = e^{\lambda_i \left( \left( \frac{\beta}{\beta+i} \right)^i - 1 \right)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , i.e. on observe que  $X \sim \text{PoissonCompose}(\lambda_i; F_{B_i})$  où  $B_i \sim \text{Erlang}(i, B)$ .

4. On va démontrer que

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta)$$

et utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer les  $\gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Attention, il n'y a pas de discrétisation !

5. Le TLS de  $S$  est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n P_{M_i}(\mathcal{L}_{B_i}(t)) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_{B_i}(t)-1)}\end{aligned}$$

6. On définit  $\lambda_N = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$  et  $S$  devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= e^{\lambda_N \left( \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_N} \mathcal{L}_{B_i}(t) - 1 \right)} \\ &= e^{\lambda_N (\mathcal{L}_C(t) - 1)}\end{aligned}$$

avec  $\mathcal{L}_C(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_N} \mathcal{L}_{B_i}(t)$

7. Selon la représentation en 6.  $S \sim \text{PoisComp}(\lambda_N, F_C)$

8. Examinons  $\mathcal{L}_C(t)$ .

On définit  $\eta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_N}$  et  $\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$ .

On introduit une v.a. discrète  $K$  où  $\Pr(K = i) = \eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

9. Alors, le TLS de  $C$  devient  $\mathcal{L}_C(t) = P_K\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)$  où  $P_K$  est la fgp de la v.a.  $K$  i.e.  $P_K(r) = \sum_{i=1}^n \eta_i r^i$  pour  $r \in [0, 1]$ .

En effet  $\mathcal{L}_C(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^i = P_K\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)$ .

10. Interprétation de la représentation de TLS de  $C = \sum_{i=1}^K D_i$  où  $\underline{D} = \{D_i, i = 1, 2, \dots\}$  est une suite de v.a. i.i.d..  $D_i \sim D \sim \text{Exp}(\beta)$  avec  $\mathcal{L}_D\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)$  qui est indépendant de  $K$

11. On introduit la nouvelle représentation dans de  $\mathcal{L}_C$  dans l'expression de  $\mathcal{L}_S$ .

$$\mathcal{L}_S(t) = e^{\lambda_N (\mathcal{L}_C(t) - 1)} = e^{\lambda_N (P_K(\frac{\beta}{\beta+t}) - 1)} = P_N(\mathcal{L}_C(t))$$

où  $P_N(t) = e^{\lambda_N(t-1)}$  On introduit la v.a. discrète  $L$  dont la fgp est  $P_L(r) = P_N(P_K(r)) = e^{\lambda_N(P_K(r)-1)}$

On note la fonction de masse de probabilité de la v.a.  $L$  comme suit :

$$\Pr(L = k) = \gamma_k$$

Ainsi

$$P_L(r) = e^{\lambda_N(P_K(r)-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k \text{ une série de puissance}$$

12. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(t) &= \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(t) \\ &= P_N(\mathcal{L}_C(t)) \\ &= P_L\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^k\end{aligned}$$

13. De la dernière expression pour  $\mathcal{L}(t)$ , on déduit

$$F_S(x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta)$$

et les valeurs de  $\gamma_k$  sont calculer avec l'algorithme de Panjer pour une Poisson composée.

14. Application de l'algorithme :

- (a)  $\gamma_0 = P_N(\eta_0) = P_N(0) = \Pr(N = 0)$
- (b)  $\gamma_1 = \lambda_N \eta_2 \gamma_0 \frac{1}{1}$
- (c)  $\gamma_2 = \lambda_N (\eta_1 \gamma_1 \frac{1}{2} + \eta_2 \gamma_0 \frac{2}{2})$
- (d) etc.

15. On calcule  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k_0}$  tel que  $1 - \sum_{k=0}^{k_0} \gamma_k \leq \varepsilon = 10^{-10}$

Ensuite :

$$F_S(x) \approx \gamma_0 + \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k H(x; k, \beta)$$

Pour la prochaine étape, on voudrait pouvoir manipuler un problème semblable avec paramètres  $\beta$  différents.

**Lemme 4** Soit la TLS d'une v.a.  $Y \sim \text{Exp}(\beta_i)$

On fixe  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ . Alors, on a

$$\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + t} = \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} q \frac{1}{1 - (1 - q) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}} = P_K \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right)$$

avec  $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$  et où

$$\begin{aligned} P_K(r) &= \frac{rq}{1 - (1 - q)r} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} rq(1 - q)^{k-1} r^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q(1 - q)^{k-1} r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_K(k) r^k \end{aligned}$$

Du lemme on déduit que  $f_K(0) = 0$  et  $f_K(k) = q(1 - q)^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ , ce qui correspond à la fonction de masse de probabilité de la loi géométrique définie sur  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$

Soit un portefeuille de  $n$  contrats d'assurance IARD.

- 1. Coûts pour contrat  $i = X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- 2.  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d. et  $X_i \sim X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- 3.  $X \sim$  mélange de 2 exponentielle. Donc

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \alpha F_{Y_1}(x) + (1 - \alpha) F_{Y_2}(x) \\ &= \alpha(1 - e^{-\beta_1 x}) + (1 - \alpha)(1 - e^{-\beta_2 x}) \end{aligned}$$

avec  $x \geq 0$ ,  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  et

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha \frac{\beta_1}{\beta_1 + t} + (1 - \alpha) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$$

4. Démontrer que

$$F_S(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2)$$

et proposer une approche ( en se basant sur l'algorithme de DePril) pour calculer  $\gamma_k$ ,  $k \in \{n, n + 1, \dots\}$

5. Selon le Lemme, on a

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha P_K \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right) + (1 - \alpha) \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$$

6. On introduit la v.a.  $M$  dont la fgp est

$$P_M(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)r^k = \alpha P_K(r) + (1-\alpha)r$$

où

$$f_M(k) = \begin{cases} \alpha f_K(1) + (1-\alpha) & , k = 1 \\ \alpha f_K(k) & , k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

7. Puisque les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d., on a  $\mathcal{L}_S(t) = (\mathcal{L}_X(t))^n$

8. En combinant 6. et 7., l'expression de  $\mathcal{L}_S(t)$  devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(t) &= \left( P_M \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right) \right)^n \\ &= \text{fgp d'une v.a. discrète à la puissance } n \\ &= P_N \left( \frac{\beta_2}{\beta_2 + t} \right) \end{aligned}$$

où on introduit  $P_N(r) = (P_M(r))^n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k$  avec  $\gamma_k = 0$ , pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . On observe que  $\gamma_k = 0$ , pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

$(P_M(r))^n = \prod_{i=1}^n P_{M_i}(r)$  où  $M_1, \dots, M_n$  sont des v.a. i.i.d. et  $M_i \sim M \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Puisque  $P_N(r) = (P_M(r))^n$  on représente  $N$  comme suit  $N = M_1 + \dots + M_n$  et  $N \in \{n, n+1, \dots\}$ .

Alors,  $\Pr(N = k) = \gamma_k = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

9. De la représentation de  $\mathcal{L}_S$  déduit

$$F_S(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k H(x; k, \beta_2)$$

10. Les valeur de  $\gamma_k > 0$ , sont calculé à l'aide de l'algorithme de DePril, en faisant une translation.

## Chaptire 3 - Modèle de dépendance

### 3.1 - Motivation

La modélisation de la dépendance est devenu un enjeux crucial à la fin des années 90

Pouquoi? Il ne devenait plus possible d'ignorer les relations de dépendances entre les risques d'un portefeuille, entre les lignes d'affaires, etc.

Dans le chapitre, on introduit de nouvelles notions de dépendances :

Comonotonicité

Antimonotonicité

des lois multivariées continues, discrètes et les copules.

### 3.2 - Classe de Fréchet et bornes de Fréchet

Soit les marginales (i.e. fonction de répartition marginales) univariées  $F_1, \dots, F_n$ .

L'ensemble de toutes les fonction de répartition conjointes de dimension  $n$  est appelé la classe de Fréchet générée par  $F_1, \dots, F_n$ .

**Définition 1** *Classe de Fréchet* Soit un vecteur de v.a.  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Alors,  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(F_1, \dots, F_n) = \text{classe de Fréchet générée par } F_1, \dots, F_n$ .

**Définition 2** *Bornes de Fréchet* Pour tout élément  $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$  et  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ , la relation suivante est satisfaite :

$$W(X_1, \dots, X_n) \leq F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \leq M(X_1, \dots, X_n)$$

où

1.

$$\begin{aligned} W(x_1, \dots, x_n) &= \max(F_1(x_1) + \dots + F_n(x_n) - (n-1); 0) \\ &= \text{Borne inférieure de Fréchet} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} M(x_1, \dots, x_n) &= \min(F_1(x_1); \dots; F_n(x_n)) \\ &= \text{Borne supérieure de Fréchet} \end{aligned}$$

Remarques :

1. On suppose que  $F_1, \dots, F_n$  sont fixés (connues).
2. Il existe une infinité de lois multivariées dont la fonction de répartition conjointes possède les marginales  $F_1, \dots, F_n$ .
3. Un élément très connu de la classe de Fréchet est :  
 $F_{\underline{X}^\perp}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$  où  $F_{\underline{X}^\perp}$  correspond à la fonction de répartition du vecteur de v.a.  $\underline{X}^\perp = (X_1^\perp, \dots, X_n^\perp)$  et  $X_i^\perp \sim F_i$ .
4.  $M(x_1, \dots, x_n)$  = fonction de répartition dont les marginales univariées sont  $F_1, \dots, F_n$ , donc  $M \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ .  
 Question :  $W = F_{\underline{X}}$ , quelle est la relation de dépendance entre les composantes de  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ .
5.  $W(x_1, x_2)$  = fonction de répartition dont les marginales univariées sont  $F_1, \dots, F_n$ . Pour  $n = 2$ ,  $W \in \Gamma(F_1, F_2)$
6. Pour  $n > 2$ ,  $W$  n'est pas une fonction de répartition (en général)
7. Précision : L'infinité de fonctions de répartition  $F_{\underline{X}}$  dont les marginales sont  $F_1, \dots, F_n$  constitue la classe de Fréchet générée par  $F_1, \dots, F_n$

**Preuve 6** *Borne supérieur de Fréchet*

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\}) \leq \Pr(\{X_i \leq x_i\}) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

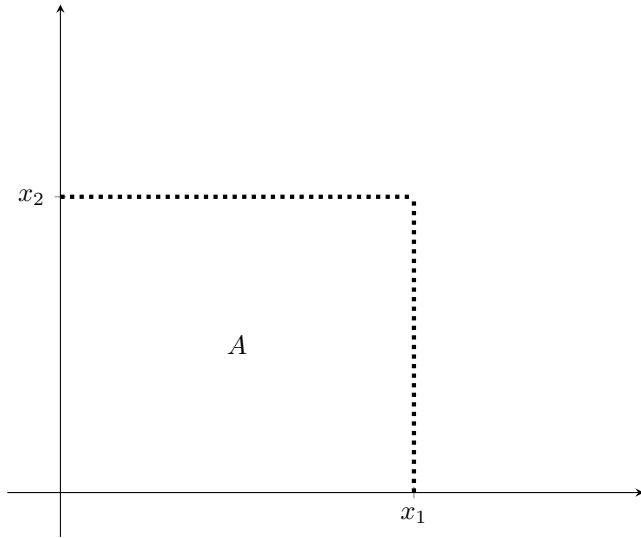
Alors,

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &\leq \min(\Pr(X_1 \leq x_1); \dots; \Pr(X_n \leq x_n)) \\ &= \min(F_1(x_1); \dots; F_n(x_n)) \end{aligned}$$

**Preuve 7** *Borne inférieur de Fréchet*

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\}\right) \end{aligned}$$

Prenons  $n = 2$ ,  $x_1 \leq 0$  et  $x_2 \leq 0$  :



On a  $A = (0, x_1] * (0, x_2]$ , par la suite

$$\begin{aligned}
 \Pr(\underline{X} \in A) &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^2 \{X_i \leq x_i\}\right) \\
 &= \Pr(\underline{X} \in (0, x_1] * (0, x_2]) &= 1 - \Pr(\underline{X} \in A^c) \text{ or } \\
 &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^2 \{X_i \geq x_i\}\right) \\
 &= 1 - \Pr(\{X_1 \geq x_1\} \cup \{X_2 \geq x_2\}) \\
 &= 1 - (\Pr(X_1 > x_1) + \Pr(X_2 > x_2) - \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2)) \\
 &= 1 - \left((1 - \Pr(X_1 \leq x_1)) + (1 - \Pr(X_2 \leq x_2)) - (1 - \Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cup \{X_2 \leq x_2\}))\right) \\
 &= \Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_2 \leq x_2) - \Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cup \{X_2 \leq x_2\}) \\
 &\geq \Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_2 \leq x_2) - 1
 \end{aligned}$$

Or  $\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$  doit être  $\geq 0$ .

Alors on a :

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \geq \max\left(\Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_2 \leq x_2) - 1\right)$$

Donc,  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq \max(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0)$

Prenons le cas général pour  $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
 &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \geq x_i\}\right) \\
 &\geq 1 - \sum_{i=1}^n \Pr(X_i \geq x_i) \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^n (1 - \Pr(X_i \leq x_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x_i) - n + 1 \\
 &= C
 \end{aligned}$$

Or  $C$  peut prendre des valeurs négatives comme  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$  est une probabilité, on a



$$\begin{aligned}
F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
&\geq \max \left( \sum_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x_i) - (n-1); 0 \right) \\
&= \max \left( \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n-1); 0 \right) \\
&= W(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

### 3.3 - Comonotonicité

Soit la v.a.  $U \sim Unif(0, 1)$

**Définition 3** Les composantes du vecteur de v.a.  $X = (X_1, \dots, X_n)$  sont dites comonotones s'il existe une v.a.  $Z$  et des fonctions croissantes  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  tel que  $X_1 = \varphi_1(Z), \dots, X_n = \varphi_n(Z)$

Interprétation :

Le comportement aléatoire des v.a.  $X_1, \dots, X_n$  est expliqué via les transformations croissantes d'une seule v.a.  $Z$ .

Cas particulier :

Soit  $Z = U \sim Unif(0, 1)$  et  $\varphi_i(u) = F_{X_i}^{-1}(u)$ ,  $u \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

On définit  $X_i = F_{X_i}^{-1}(U)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Alors,  $X_1, \dots, X_n$  sont comonotones.

La représentation d'un vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  donnée par  $X_1 = F_{X_1}^{-1}(u), \dots, X_n = F_{X_n}^{-1}(u)$  est très pratique.

Première application :

Identifier la fonction de répartition de  $X =$  vecteur de v.a. comonotones.

Fonction de répartition d'une v.a. comonotones :

1. Soit  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de v.a. comonotones avec  $F_{X_i} = F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. On a  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$
3. On utilise la représentation  $X_i = F_i^{-1}(U)$ , où  $U \sim Unif(0, 1)$  et  $F_U(u) = u$ ,  $0 \leq u \leq 1$  :

$$\begin{aligned}
F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(F_1^{-1}(U) \leq x_1, \dots, F_n^{-1}(U) \leq x_n) \\
&= \Pr(U \leq F_{X_1}(x_1), \dots, U \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= \Pr(U \leq \min(F_{X_1}(x_1); \dots; F_{X_n}(x_n))) \\
&= \min(F_{X_1}(x_1); \dots; F_{X_n}(x_n)) \\
&= \text{Borne supérieure de Fréchet}
\end{aligned}$$

En résumé, la borne de Fréchet correspond à la fonction de répartition d'un vecteur de v.a. comonotones.

Pourquoi la comonotité :

1. Elle représente la dépendance parfaite entre des v.a.
2. Cette notion est utilisée pour identifier des valeurs maximales sur certaines quantités (TVaR, prime)

Voir plus de détails sur la fonction quantile et ses propriétés dans les diapos.

Soit un vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  définis sur la classe de Fréchet  $M = (F_1, \dots, F_n)$

On a

1.  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = M(x_1, \dots, x_n) = \min(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) =$  Borne supérieur de Fréchet
2. Représentation : Soit une v.a.  $U \sim Unif(0, 1)$   
Alors,  $X_1 = F_1^{-1}(U), \dots, X_n = F_n^{-1}(U)$ .

Il s'agit de la représentation pour un vecteur de v.a. comonotones. Elles se base aussi sur le Théorème de fonction quantile.

Comparons les vecteurs de v.a. indépendants et comonotones définis sur la même classe de Fléchet  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$

1. Soit  $\underline{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+)$  le vecteur de v.a. comonotones défini sur  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$ .
2. Soit  $\underline{X}^\perp = (X_1^\perp, \dots, X_n^\perp)$  le vecteur de v.a. comonotones défini sur  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$ .
3. Que signifie "i" défini sur la même classe de Fréchet ?

$$X_1^+ \sim X_1^\perp \sim F_1$$

$$X_2^+ \sim X_2^\perp \sim F_2$$

...

$$X_n^+ \sim X_n^\perp \sim F_n$$

Par contre,  $X_1$  n'as pas nécessairement la même densité que  $X_n$ . Pour "i" fixé, la composante "i" de  $\underline{X}^+$  a la même densité marginale que celle de la composante "i" de  $\underline{X}^\perp$ . ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

4. Par contre,  $F_{\underline{X}^+} \neq F_{\underline{X}^\perp}$ , i.e. la de  $\underline{X}^+$  n'est pas la même que celle de  $\underline{X}^\perp$ .
5. La structure de dépendance de  $\underline{X}^+$  diffère de la structure de dépendance  $\underline{X}^\perp$ .
6. Par "structure de dépendance", on entend le "réseau" de relations de dépendance entre les composantes d'un vecteur de v.a.
7. Soit les v.a. i.i.d.  $V, U_1, \dots, U_n$  où  $V \sim U_1 \sim \dots \sim U_n \sim Unif(0, 1)$

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow & X_1^+ = F_1^{-1}(V) \\
 V & \longrightarrow & X_2^+ = F_2^{-1}(V) \\
 & \searrow & \dots = \dots \\
 & \searrow & X_n^+ = F_n^{-1}(V)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U_1 & \longrightarrow & X_1^\perp = F_1^{-1}(U_1) \\
 U_2 & \longrightarrow & X_2^\perp = F_2^{-1}(U_2) \\
 \dots & & \dots = \dots \\
 U_n & \longrightarrow & X_n^\perp = F_n^{-1}(U_n)
 \end{array}$$

On observe que pour  $\underline{X}^+$  on a besoins seulement une simulation, celle de  $V$ . Pour  $\underline{X}^\perp$  on a besoins  $n$  simulations.

**Algorithme 6** Simulation d'une réalisation  $\underline{X}^{+(j)}$  de  $\underline{X}^+$

1. Simuler la réalisation  $V^{(j)}$  de  $V \sim Unif(0, 1)$
2. Simuler la réalisation  $X^{+(j)}$  de  $X^+$  avec

$$X_1^{+(j)} = F_1^{-1}(V^{(j)})$$

...

$$X_n^{+(j)} = F_n^{-1}(V^{(j)})$$

Soit une v.a. continue  $Z$  avec une fonction de répartition  $F_Z$  :

Alors, un vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  possède des composantes comonotones s'il existe des fonctions croissantes  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  tel que la représentation suivante est satisfaite :

$$X_1 = \varphi_1(Z), \dots, X_n = \varphi_n(Z)$$

En effet, en utilisant le Théorème de la fonction quantile, on a  $X_1 = F_1^{-1}(U), \dots, X_n = F_n^{-1}(U)$  où  $U \sim Unif(0, 1)$ .

D'après le Théorème " Probability transform Integral", on sait que  $F_Z(Z) \sim U \sim Unif(0, 1)$ .  
Alors, on déduit que

$$X_1 = F_1^{-1}(F_Z(z)), \dots, X_n = F_n^{-1}(F_Z(z))$$

En posant

$$\varphi_1(x) = F_1^{-1}(F_Z(x)), \dots, \varphi_n(x) = F_n^{-1}(F_Z(x))$$

on déduit,

$$X_1 = \varphi_1(Z), \dots, X_n = \varphi_n(Z)$$

Par la suite, on présente un résultat fondamental en lien avec la VaR d'une somme de v.a. comonotones.

**Proposition 4** *Soit le vecteur de v.a.  $\underline{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+)$  défini sur  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$ . On définit  $S^+ = X_1^+ + \dots + X_n^+$ .*

*Alors, on a*

1.  $VaR(S^+) = \sum_{i=1}^n VaR(X_i^+) = \sum_{i=1}^n VaR(X_i)$
2.  $TVaR(S^+) = \sum_{i=1}^n TVaR(X_i^+) = \sum_{i=1}^n TVaR(X_i)$

**Preuve 8 de 1.**

a) *On a recours à la représentation de  $\underline{X}^+$  via la v.a.  $U \sim Unif(0, 1)$ .*

b) *On a*

$$\begin{aligned} S^+ &= X_1^+ + \dots + X_n^+ \\ &= F_1^{-1}(U) + \dots + F_n^{-1}(U) \\ &= \varphi(U) \end{aligned}$$

c) *On observe que  $\varphi(u)$  est une fonction croissante de  $u \in (0, 1)$ .*

d) *Ensuite, on utilise la propriété d'une fonction quantile appliquée à une fonction croissante d'une v.a. comme suit :*

$$VaR_\kappa(S^+) = F_{S^+}^{-1}(\kappa) = F_{\varphi(U)}^{-1}(\kappa) = \varphi(F_U^{-1}(\kappa))$$

e) *Or,  $\varphi(u) = F_1^{-1}(u) + \dots + F_n^{-1}(u)$ .*

f) *On combine d) et e) :*

$$VaR_\kappa(S^+) = \varphi(F_U^{-1}(\kappa)) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(F_U^{-1}(\kappa))$$

g) *Comme  $F_U^{-1}(\kappa) = \kappa$  (car  $U \sim Unif(0, 1)$ ), on a*

$$VaR_\kappa(S^+) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(F_U^{-1}(\kappa)) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(\kappa) = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i^+) = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i)$$

**Preuve 9 de 2.**

a) *On utilise la définition de la TVaR*

b) *On a*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S^+) &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(S^+) du \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 \sum_{i=1}^n VaR_u(X_i^+) du \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X_i^+) du \\ &= \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i^+) \end{aligned}$$

Interprétation de la proposition 4 dans le contexte de l'actuariat et de la gestion quantitative des risques :

1. Soit un portefeuille d'une compagnie d'Assurance ( ou une institution financière quelconque) constitué de  $n$  risques d'affaires.

L'actuaire responsable de la gestion des risques décide de calculer le capital de la compagnie d'assurance (avec la TVaR) en utilisant la relation suivante :

$$TVaR_{\kappa}(S) = \sum_{i=1}^n TVaR_{\kappa}(X_i)$$

où  $X_i$  = coûts pour la ligne d'affaires  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) et  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  = coûts pour le portefeuille de l'assureur.

Les montants  $TVaR_{\kappa}(X_i)$  est calculé par l'actuaire en charge de la ligne d'affaire  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

2. En procédant de la sorte, l'actuaire se "simplifie" la vie et il assume (possiblement à son insu) que les coûts des lignes d'affaires sont comonotones, i.e. il "suppose" une relation de dépendance parfaite entre les coûts des lignes d'affaires ce qui est peu plausible.

Bénéfice à mutualiser des risques comonotones :

1. Soit un portefeuille de  $n$  risques  $X_1^+, \dots, X_n^+$ .
2. On suppose que les v.a.  $X_1^+, \dots, X_n^+$  sont comonotones.
3. On définit  $S^+ = \sum_{i=1}^n X_i^+$  = coûts pour le portefeuille.
4. On choisit une mesure de risque sous additive, comme par exemple la TVaR.
5. Le bénéfice de mutualisation est défini par

$$BM_{\kappa}(X) = \sum_{i=1}^n \rho_{\kappa}(X_i) - \rho_{\kappa}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

6. Comme la mesure est sous additive, on sait que  $BM_{\kappa}(X) \geq 0$ .
7. Or, si  $\underline{X} = \underline{X}^+$  et  $\rho = TVaR$ , on a

$$\begin{aligned} BM_{\kappa}(\underline{X}^+) &= \sum_{i=1}^n TVaR_{\kappa}(X_i^+) - TVaR_{\kappa}(S^+) \\ &= \sum_{i=1}^n TVaR_{\kappa}(X_i^+) - \sum_{i=1}^n TVaR_{\kappa}(X_i^+) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Soit  $\underline{X}$  et  $\underline{X}^+$  où  $F_X, F_{X^+} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ .

On définit  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  et  $S^+ = \sum_{i=1}^n X_i^+$ . On utilise la mesure TVaR pour calculer le capital et identifier le bénéfice de mutualisation. Alors,

$$BM_{\kappa}^{TVaR}(\underline{X}) \geq BM_{\kappa}^{TVaR}(\underline{X}^+) = 0$$

La proposition est valide peu importe le choix des densité (continues, discrètes) pour  $X_1, \dots, X_n$ .

Selon le résultat de la proposition (VaR de somme de v.a. comonotones), on peut déduire l'expression de fonction de répartition de  $S^+$

Pour certains, on identifie la loi de  $S^+$  et donc sa fonction de répartition ( $F_{S^+}$ ).

Autrement, on utilise les méthodes d'optimisation numérique.

Exemple : Soit le vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+)$  défini sur  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$  où  $F_i(x) = 1 - e^{-\beta_i x}$ ,  $x \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$

Questions :

1. Quelle est l'expression de  $F_{\underline{X}^+}$  ?

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}^+}(X_1, \dots, X_n) &= \min(F_1(x_1); \dots; F_n(x_n)) \\ &= \min(1 - e^{-\beta_1 x_1}; \dots; 1 - e^{-\beta_n x_n}) \end{aligned}$$

2. Développer l'expression de  $VaR_\kappa(S^+)$   
Avec le proposition, on a  $VaR_\kappa(S^+) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\beta_i} \ln(1 - \kappa)$
3. Quelle est l'expression de  $F_{S^+}$  ?  
On a

$$\begin{aligned} F_{S^+}(x) &= \Pr(S^+ \leq x) \\ &= \Pr(\varphi(U) \leq x) \\ &= \Pr(U \leq \varphi^{-1}(x)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u) \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\beta_i} \ln(1 - u) \\ &= \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} \right)}_{\text{somme des espérances}} * (-\ln(1 - u)) \\ &= -\frac{1}{\beta_S} \ln(1 - u) \end{aligned}$$

Alors, on cherche la solution  $u$  de  $\varphi(u) = x$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\frac{1}{\beta_S} \ln(1 - u) &= x \\ \Leftrightarrow \ln(1 - u) &= -\beta_S x \\ \Leftrightarrow u &= 1 - e^{-\beta_S x} \\ \Leftrightarrow u &= \varphi^{-1}(x) \end{aligned}$$

Par conséquence, on déduit

$$\begin{aligned} F_{S^+}(x) &= \Pr(U \leq \varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi^{-1}(x) \\ &= 1 - e^{-\beta_S x} \end{aligned}$$

Il suit que  $S^+ \sim \text{Exp}(\beta_S)$  avec  $\beta_S = \frac{1}{\frac{1}{\beta_1} + \dots + \frac{1}{\beta_n}}$

Exemple : Soit le vecteur de v.a. comonotones  $\underline{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+)$  défini sur  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$  où  $F_1(x) = 1 - e^{-\beta x}$ ,  $F_2(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha$  et  $F_3(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$  (la loi lognormal)  $x \geq 0$  et  $i = 1, \dots, n$   
Questions :

1. Quelle est la loi de  $F_{\underline{X}^+}$  ?

$$F_{\underline{X}^+} = \min\left(1 - e^{-\beta x}; 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha; \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

2. Quelle est l'expression de  $VaR_\kappa(S^+)$  :

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S^+) &= \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i^+) \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \kappa) + \lambda \left( \frac{1}{(1 - \kappa)^\alpha} - 1 \right) + e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(\kappa)} \end{aligned}$$

3. Examinons le calcul de  $F_{S^+}(x)$ ,  $x \geq 0$

On a

$$\begin{aligned} F_{S^+}(x) &= \Pr(S^+ \leq x) \\ &= \Pr(\varphi(U) \leq x) \\ &= \Pr(U \leq \varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } \varphi(u) = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - u) + \lambda \left( \frac{1}{(1 - u)^\alpha} - 1 \right) + e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)}$$

Il est impossible d'identifier les solutions fermée de  $\varphi(u) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Alors, on fixe  $x \geq 0$ . Puis on utilise un algorithme d'optimisation numérique pour calculer  $\varphi^{-1}(x)$ , i.e. pour trouver (numériquement) la solution de  $\varphi(u) = x$

Remarques à propos de la classe de Fréchet :

1. Soit  $\underline{X}$  et  $\underline{X}'$  où  $F_{\underline{X}}, F_{\underline{X}'} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ .
2. Supposons que les espérances associées à  $F_1, \dots, F_n$  sont finies.
3. Alors, d'après 1., on sait que  $X_1 \sim X'_1 \sim F_1, \dots, X_n \sim X'_n \sim F_n$ .
4. En combinant 2. et 3., on a

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[X'_1] \\ &\dots \\ E[X_n] &= E[X'_n] \end{aligned}$$

5. On définit  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  et  $S' = \sum_{i=1}^n X'_i$
6. En combinant 4. et 5., on déduit

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n E[X'_i] = E[S']$$

7. Conclusion : La structure de dépendance d'un vecteur de v.a. n'a pas d'impact sur l'espérance de la somme de ces v.a.

Par contre,  $F_S$  et  $F_{S^+}$  sont différentes en général.

On peut créer une loi conjointe pour  $\underline{X}$  à partir de  $F_{\underline{X}^\perp}$  et  $F_{\underline{X}^+}$ .

1. Soit  $\underline{X}$  et  $\underline{X}^+$  avec  $F_{\underline{X}}, F_{\underline{X}^+} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$
2. On définit  $\underline{X}^\theta$  avec  $\theta \in [0, 1]$  tel que

$$F_{\underline{X}^\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta F_{\underline{X}^+}(x_1, \dots, x_n) + (1 - \theta) F_{\underline{X}^\perp}(x_1, \dots, x_n)$$

Exemple : Soit  $\underline{X}^+, \underline{X}^\perp, \underline{X}^\theta \in \text{Gamma}(F_1, F_2)$  où  $F_1 = F_2 = F$  et  $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$

On définit

$$\begin{aligned} S^\theta &= X_1^\theta + X_2^\theta \\ S^\perp &= X_1^\perp + X_2^\perp \\ S^+ &= X_1^+ + X_2^+ \end{aligned}$$

Alors,

$$F_{X_1^\theta, X_2^\theta}(x_1, x_2) = \theta \min(1 - e^{-\beta x_1}; 1 - e^{-\beta x_2}) + (1 - \theta)(1 - e^{-\beta x_1})(1 - e^{-\beta x_2}) =$$

combinaison convexe de la fonction de répartition pour un couple de v.a. comonotone et la fonction pour une paire de v.a. indépendant

Pour identifier  $F_{S^\theta}$ , on introduit la v.a. discrète  $J$  où  $\Pr(J = j_1) = \theta \Rightarrow$  comonotone et  $\Pr(J = j_2) = 1 - \theta \Rightarrow$  indépendant.

Alors,

$$F_{\underline{X}^\theta}(x_1, x_2) = \Pr(J = j_1)F_{\underline{X}^\theta|J=j_1}(x_1, x_2) + \Pr(J = j_2)F_{\underline{X}^\theta|J=j_2}(x_1, x_2)$$

Si  $J = j_1$ , alors  $(S^{(\theta)}|J = j_1) =$  somme de v.a. comonotones et  $F_{S^\theta|J=j_1}(x) = 1 - e^{\frac{\beta}{2}x}$

Si  $J = j_2$ , alors  $(S^{(\theta)}|J = j_2) =$  somme de v.a. indépendantes et  $F_{S^\theta|J=j_2}(x) = H(x; 2, \beta)$

Enfin,

$$\begin{aligned} F_{S^\theta}(x) &= \Pr(J = j_1)F_{S^\theta|J=j_1}(x) + \Pr(J = j_2)F_{S^\theta|J=j_2}(x) \\ &= \theta(1 - e^{\frac{\beta}{2}x}) + (1 - \theta)H(x; 2, \beta) \end{aligned}$$

On déduit  $Var_\kappa(S^{(\theta)})$  par optimisation numérique.

Exemple : Soit  $\underline{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+) \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$  et  $F_i(x) = \Phi(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i})\sigma_i \geq 0$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}$  et  $i = 1, \dots, n$

On définit  $S^+ = X_1^+ + X_2^+$

Selon la représentation avec  $U \sim Unif(0, 1)$  on a

$$\begin{aligned} S^+ &= F_1^{-1}(U) + \dots + F_n^{-1}(U) \\ &= (\mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(U)) + \dots + (\mu_n + \sigma_n \Phi^{-1}(U)) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i \Phi^{-1}(U) \\ &= \varphi(U) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_{S^+}(x) &= \Pr(\varphi(U) \leq x) \\ &= \Pr(U \leq \varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi^{-1}(x) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu_S}{\sigma_S}\right) \end{aligned}$$

avec  $\mu_S = \sum_{i=1}^n \mu_i$  et  $\sigma_S = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ .

Aussi, soit  $Z = \Phi^{-1}(U) \sim N(0, 1)$

Alors,  $X_1^+ = \mu_1 + \sigma_1 Z, \dots, X_n^+ = \mu_n + \sigma_n Z$ .

Donc,  $S^+ = (\mu_1 + \dots + \mu_n) + (\sigma_1 + \dots + \sigma_n)Z$

Par conséquence  $S^+ \sim N(\mu_S, \sigma_S)$

Voir diapos fonction quantile pour plus de détails..

### 3.4 - Antimonotonicité

On introduit une autre notion de dépendance.

Cette notion, appelée "Antimonotonicité", s'applique dans le contexte de 2 v.a.,  $X_1$  et  $X_2$ .

**Définition 4** Soit le couple de 2 v.a.  $(X_1, X_2)$  où  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_1, F_2)$ . Les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones si on a la représentation suivante :

$$X_1 = F_1^{-1}(U) \text{ et } X_2 = F_2^{-1}(1 - U)$$

où  $U \sim Unif(0, 1)$

Interprétation :

1. On sait que  $F_1^{-1}(u)$  et  $F_2^{-1}(u)$  sont des fonction croissante de  $u \in (0, 1)$ .
2. On déduit que  $F_2^{-1}(1 - u)$  est une fonction décroissante de  $u \in (0, 1)$ .
3. Alors, quand  $u$  augmente, on observe que  $F_1^{-1}(u)$  augmente et que  $F_2^{-1}(1 - u)$  diminue.
4. Bref, l'antimonotonie correspond à la dépendance extrême négative

Quelle est la fonction de répartition de  $F_{X_1, X_2} \in \Gamma(F_1, F_2)$  où  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones ? Le couple de v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont antimonotones si et seulement si :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$$

= borne inférieure de Fréchet

**Preuve 10** 1. On débute avec  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$  et la représentation suivante :

$$X_1 = F_1^{-1}(U) \text{ et } X_2 = F_2^{-1}(1 - U)$$

2. L'expression de  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  est donnée par :

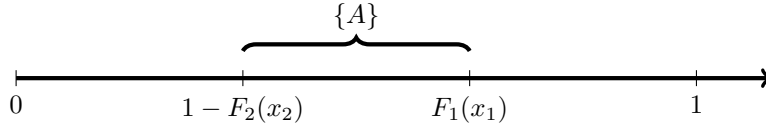
$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(U) \leq x_1, F_2^{-1}(1 - U) \leq x_2) \\ &= \Pr(U \leq F_1(x_1), 1 - U \leq F_2(x_2)) \end{aligned}$$

3. On a  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \Pr(U \leq F_1(x_1), U > 1 - F_2(x_2)) = \Pr(\{A\})$  où  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

4. On doit calculer  $\Pr(\{A\})$

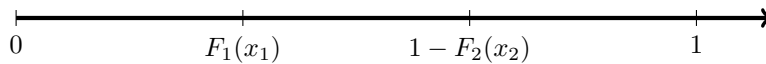
5. Il y a 2 cas possible pour  $\{A\}$

6. Cas # 1 :  $F_1(x_1) > 1 - F_2(x_2)$



$$\begin{aligned} \Pr(\{A\}) &= \Pr(U \in (1 - F_2(x_2), F_1(x_1)]) \\ &= F_1(x_1) - (1 - F_2(x_2)) \\ &= F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Cas # 2 :  $F_1(x_1) < 1 - F_2(x_2)$



$$\begin{aligned} \Pr(\{A\}) &= \Pr(\{U \in (0, F_1(x_1)] \cap \{U \in (1 - F_2(x_2), 1]\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

8. De 6. et 7., on obtient :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \Pr(\{A\}) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0)$$

**Algorithme 7** 1. On simule  $U^{(j)}$  de  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$

2. On simule  $(X_1^{(j)}, X_2^{(j)})$  de  $(X_1, X_2)$  avec

$$X_1^{(j)} = F_1^{-1}(U^{(j)}) \text{ et } X_2^{(j)} = F_2^{-1}(1 - U^{(j)})$$



Notation : Soit la classe de Fréchet  $\Gamma(F_1, F_2)$

1.  $(X_1^+, X_2^+) =$  le couple de v.a. comonotones avec  $F_{X_1^+, X_2^+} \in \Gamma(F_1, F_2)$ .
2.  $(X_1^-, X_2^-) =$  le couple de v.a. antimonotones avec  $F_{X_1^-, X_2^-} \in \Gamma(F_1, F_2)$ .
3.  $(X_1^\perp, X_2^\perp) =$  le couple de v.a. indépendantes avec  $F_{X_1^\perp, X_2^\perp} \in \Gamma(F_1, F_2)$ .

Soit  $(X_1^-, X_2^-)$  où  $F_{X_1^-, X_2^-} \in \Gamma(F_1, F_2)$  et on définit  $S = X_1^- + X_2^-$ .

Il n'y a pas d'expression générale pour  $Var_\kappa(S^-)$  et la  $TVaR_\kappa(S^-)$  comme pour les  $Var_\kappa(S^+)$  et  $TVaR_\kappa(S^+)$ .

Il faut procéder au cas par cas.

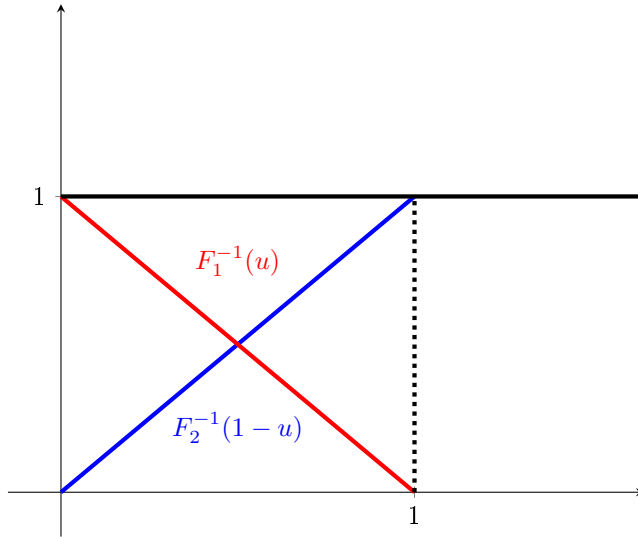
La dépendance négative extrême (et la dépendance négative générale) n'est pas autant bien compris (et étudié) que la dépendance extrême positive (et la dépendance positive générale).

Exemple # 1 :

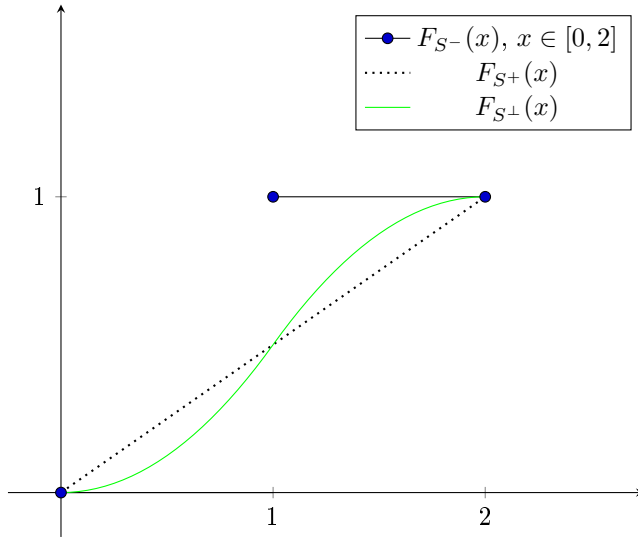
Soit les v.a.  $X_1^-$  et  $X_2^-$  où  $X_1^- \sim X_2^- \sim Unif(0, 1)$ . On définit  $S^- = X_1^- + X_2^-$

- a) Espérance :  $E[S^-] = E[X_1^- + X_2^-] = E[X_1^-] + E[X_2^-] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- b) Quelle est la loi de  $S^-$  ?  
 On sait que :  $S^- = X_1^- + X_2^- = F_1^-(U) + F_2^-(1 - U)$  où  $U \sim Unif(0, 1)$   
 On développe :  $S^- = U + 1 - U = 1$   
 On déduit que :  $\Pr(S^- = 1) = 1$

c) Illustration :



- d) Interprétation : Puisque les v.a.  $X_1^-$  et  $X_2^-$  sont identiquement distribuées et que leur densités sont symétriques, la première compense le comportement de la deuxième.
- e) Trace  $F_{S^+}$ ,  $F_{S^-}$  et  $F_{S^\perp}$  :



On note que  $E[S^\perp] = E[S^-] = E[S^+] = 1$

Exemple # 2 :

Soit le couple de v.a.  $(X_1^-, X_2^-)$  avec  $F_{X_1^-, X_2^-} \in \Gamma(F_1, F_2)$  et  $X_1^- \sim Unif(0, 10)$  et  $X_2^- \sim Unif(0, 6)$ .

On définit  $S^- = X_1^- + X_2^-$ .

a)  $E[S^-] = E[X_1^- + X_2^-] = E[X_1^-] + E[X_2^-] = 5 + 3 = 8$

b) Quelle est la loi de  $S^-$  ?

On a  $S^- = \varphi^-(U)$  où  $\varphi^-(U) = ?$  et  $U \sim Unif(0, 1)$ .

On déduit que

$$\begin{aligned} S^- &= F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(1 - U) \\ &= 10U - 6(1 - U) \\ &= 4U + 6 \\ &= \varphi^-(U) \end{aligned}$$

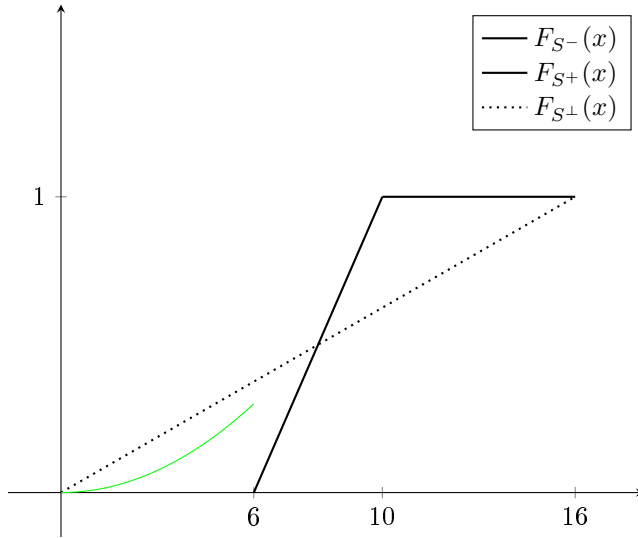
On observe que  $\varphi^-(u)$  est une fonction de  $u$ ,  $u \in (0, 1)$ .

On déduit directement de  $S^- = 4U + 6$  que  $S^- \sim Unif(6, 10)$

Aussi, on peut procéder comme suite :

$$\begin{aligned} F_{S^-}(x) &= \Pr(S^- \leq x) \\ &= \Pr(4U + 6 \leq x) \\ &= \Pr(U \leq \frac{x-6}{4}) \\ &= \Pr(U \leq \frac{x-6}{10-6}) \end{aligned}$$

c) Illustration :



Exemple # 3 :

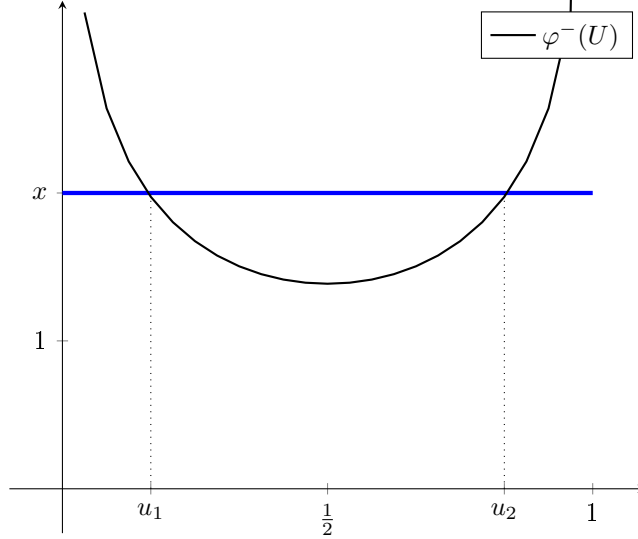
Soit le couple de v.a.  $(X_1^-, X_2^-)$  avec  $F_{X_1^-, X_2^-} \in \Gamma(F_1, F_2)$  et  $X_1^- \sim X_2^- \sim \text{Exp}(1)$ . On définit  $S^- = X_1^- + X_2^-$ .

1.  $E[S^-] = E[X_1^- + X_2^-] = E[X_1^-] + E[X_2^-] = 1 + 1 = 2$
2. Quelle est la loi de  $S^-$  ?

(a) On examine la représentation de  $S^-$  en fonction de  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$  :

$$S^- = -\ln(1 - U) - \ln(U) = \varphi^-(U)$$

(b) illustration de  $\varphi^-(U)$



La fonction de  $\varphi^-(u)$  est convexe et le minimum de la fonction est atteinte à  $u = \frac{1}{2}$ . La valeur minimale peut être prise par  $S^-$  et  $\varphi^-(\frac{1}{2})$  où  $\varphi^-(\frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) - \ln(\frac{1}{2}) = 2\ln(2) = 1.386$

Ainsi,  $F_{S^-}(x_0) = 0$

Note :  $S^+ \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$  et  $S^\perp \sim \text{Erlang}(2, 1)$

$$F_{S^-}(x) = \Pr(S^- \leq x) = \Pr(\varphi^-(u) \leq x) = \Pr(u_1 \leq \varphi^{-1}(x) \leq u_2) = u_2 - u_1$$

où  $0 < u_1 < \frac{1}{2} < u_2 < 1$  sont les 2 solutions de  $\varphi^-(u) = x$

Or  $u_1 = \frac{1}{2} - w$  et  $u_2 = \frac{1}{2} + w$  donc

$$F_{S^-}(x) = F_{\varphi^-(U)}(x) = 2w$$

Examinons la  $Var_\kappa(S^-)$

En effet,  $Var(S^-)$  correspond à la solution de  $F_{S^-}(x) = \kappa$ .

Or  $F_{S^-}(x) = 2w = \kappa$ . On convient que la  $Var_\kappa(S^-)$  sera égal à  $\varphi^-(u_1)$  ou  $\varphi^-(u_2)$ .i.e,

$$Var_\kappa(S^-) = \varphi^-(u_1) = \varphi^-(u_2)$$

Aussi

$$\begin{aligned} Var_\kappa(S^-) &= \varphi^-\left(\frac{1}{2} - w\right) = \varphi^-\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) \text{ (car } w = \frac{\kappa}{2}) \\ &= F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(1 - u_1) \\ &= F_1^{-1}\left(\frac{1}{2} - w\right) + F_2^{-1}\left(1 - \left(\frac{1}{2} - w\right)\right) \\ &= F^{-1}\left(\frac{1}{2} - w\right) + F^{-1}\left(1 - \left(\frac{1}{2} - w\right)\right) \text{ car } F_1^{-1} = F_2^{-1} = F^{-1} \\ &= F^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}\right)\right) \\ &= F^{-1}\left(\frac{1 - \kappa}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1 + \kappa}{2}\right) \end{aligned}$$

On déduit que

$$Var_\kappa(S^-) = Var_{\frac{1-\kappa}{2}}(X_1^-) + Var_{\frac{1+\kappa}{2}}(X_2^-)$$

Puisque  $X_1^- \sim X_2^- \sim X \sim Exp(1)$ , on a

$$Var_\kappa(S^-) = -\ln\left(\frac{1 + \kappa}{2}\right) - \ln\left(\frac{1 - \kappa}{2}\right)$$

### 3.5 - Lois paramétriques multivariées

Il existe plusieurs versions multivariées de lois univariées paramétriques que l'on connaît.

On en présente quelques unes leurs caractéristiques et le calcul de  $f_S(x)$  avec  $S = X_1 + \dots + X_n$

### 3.6 -Lois paramétriques discrètes

#### 3.6.1 -Lois Poisson bivariée de Teicher

Basée sur la méthode de choc commun. Soit le couple de v.a.  $(M_1, M_2)$  où  $M_1 \sim Pois(\lambda)$  et  $M_2 \sim Pois(\lambda_2)$

Selon cette approche, on définit les v.a. dépendantes  $K_0 \sim Pois(\gamma_0)$ ,  $K_1 \sim Pois(\gamma_1)$  et  $K_2 \sim Pois(\gamma_2)$ , où  $0 < \gamma_0 < \min(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $\gamma_1 = \lambda_1 - \gamma_0$  et  $\gamma_2 = \lambda_2 - \gamma_0$

On prend la convention suivante : Pour une v.a.  $K \sim Pois(0)$ , on convient que  $K = 0$ . On définit  $M_1$  et  $M_2$  par

$$M_1 = K_1 + K_0$$

$$M_2 = K_2 + K_0$$

avec  $K_1$  et  $K_2$  sont des chocs spécifiques et  $K_0$  est le choc commun.

Exemple dans un contrat d'assurance :

$M_1$  = nombre de sinistres dans la ligne #1 = source spécifique à la ligne + source commun aux 2 lignes

$M_2$  = nombre de sinistres dans la ligne #2 = source spécifique à la ligne + source commun aux 2 lignes  
l'événement génère des sinistres dans les deux lignes

Propriété # 1 :

On vérifie que  $M_i \sim Pois(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

En effet,

$$Pr_{M_i}(r) = E[r^{M_i}] = E[e^{K_i + K_0}] = E[e^{K_i}]E[e^{K_0}] = e^{\gamma_i(r-1)}e^{\gamma_0(r-1)} = e^{(\gamma_i + \gamma_0)(r-1)}$$

Donc  $M_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$  Covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(M_1, M_2) &= \text{Cov}(K_1 + K_0, K_2 + K_0) \\ \text{par ind.} &= \text{Cov}(K_1, K_2) + \text{Cov}(K_1, K_0) + \text{Cov}(K_0, K_2) + \text{Cov}(K_0, K_0) \end{aligned}$$

On observe que  $\text{Cov}(M_1, M_2) \geq 0$

Le coefficient de corrélation (linéaire) de Poisson :

$$\rho_P(M_1, M_2) = \frac{\text{Cov}(M_1, M_2)}{\sqrt{\text{Var}(M_1)\text{Var}(M_2)}} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$$

Puisque  $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$  on observe

$$0 \leq \rho_P(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1, \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \leq 1$$

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , alors

$$0 \leq \rho_P(M_1, M_2) \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}} = 1$$

Cette méthode de contruction induit une relation de dépendance positive.

Le fgp bivariée de  $(M_1, M_2)$  :

On a

$$\begin{aligned} P_{M_1, M_2}(r_1, r_2) &= E[r_1^{M_1} r_2^{M_2}] \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} r_1^{m_1} r_2^{m_2} f_{M_1, M_2}(m_1, m_2) \end{aligned}$$

où  $f_{M_1, M_2}(m_1, m_2) = \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$  = la fonction de masse de probabilité conjointe de  $(M_1, M_2)$ .

À partir de la représentation de  $(M_1, M_2)$ , on a

$$\begin{aligned} E[r_1^{M_1} r_2^{M_2}] &= E[r_1^{K_1+K_0} r_2^{K_2+K_0}] \\ &= E[r_1^{K_1} r_2^{K_2} (r_1 r_2)^{K_0}] \\ \text{indép.} &= E[r_1^{K_1}] E[r_2^{K_2}] E[(r_1 r_2)^{K_0}] \\ &= e^{\gamma_1(r_1-1)} e^{\gamma_2(r_2-1)} e^{\gamma_0(r_1 r_2 - 1)} \\ &= e^{(\lambda_1 - \gamma_0)(r_1 - 1)} e^{(\lambda_2 - \gamma_0)(r_2 - 1)} e^{\gamma_0(r_1 r_2 - 1)} \end{aligned}$$

où  $\gamma_0$  = paramètre de dépendance.

Important :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des paramètres fixés.

On note :

$(M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}) \sim \text{PoisBivTeicher}(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0)$  avec une fonction de répartition conjointe  $F_{M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}}$ , dont les marginales sont  $F_1$  et  $F_2$  où  $F_N$  = la fonction de répartition d'une lois de Poisson  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Ainsi,  $F_{M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}} \in \Gamma(F_1, F_2)$  pour  $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)$

De plus

$$W(m_1, m_2) \leq F_{M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}} \leq M(m_1, m_2)$$

où  $W(m_1, m_2) = \max(F_1(m_1) + F_2(m_2) - 1, 0)$  et  $M(m_1, m_2) = \min(F_1(m_1), F_2(m_2))$

Enfin, quand  $\gamma_0 = 0$ , on obtient,

$$F_{M_1^{(0)}, M_2^{(0)}} = F_{M_1^\perp, M_2^\perp} = \text{fonction de répartition des deux v.a. indépendantes}$$

Fonction de masse de probabilité conjoint de  $(M_1, M_2)$

1.  $m_1 = m_2 = 0$

$$\begin{aligned} P_{M_1, M_2}(0, 0) &= \Pr(M_1 = 0, M_2 = 0) \\ &= \Pr(K_1 + K_0 = 0, K_2 + K_0 = 0) \\ &= \Pr(K_1 = 0, K_2 = 0, K_0 = 0) \\ &= \Pr(K_1 = 0) \Pr(K_2 = 0) \Pr(K_0 = 0) \text{ par indép.} \end{aligned}$$

2.  $m_1 = 0, m_2 \in \{1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 = 0, M_2 = m_2) &= \Pr(K_1 + K_0 = 0, K_2 + K_0 = m_2) \\ &= \Pr(K_1 = 0, K_2 = m_2, K_0 = 0) \\ &= \Pr(K_1 = 0) \Pr(K_2 = m_2) \Pr(K_0 = 0) \text{ par indép.}\end{aligned}$$

3.  $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

On conditionne sur la v.a.  $K_0$  :

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2) &= \Pr(K_1 + K_0 = m_1, K_2 + K_0 = m_2) \\ &= \sum_{j=0}^{\min(m_1, m_2)} \Pr(K_0 = j) \Pr(K_1 + K_0 = m_1, K_2 + K_0 = m_2 \mid K_0 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\min(m_1, m_2)} \Pr(K_0 = j) \Pr(K_1 = m_1 - j) \Pr(K_2 = m_2 - j) \text{ par indép.}\end{aligned}$$

Estimation selon la méthode du MV

1. Échantillon :  $\{(m_1^{(l)}, m_2^{(l)}), l = 1, 2, \dots\}$

2.  $\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0) = \prod_{l=1}^n f_{M_1, M_2}(m_1^{(l)}, m_2^{(l)}; \lambda_1, \lambda_2, \gamma_0)$  où

$$f_{M_1, M_2}(m_1^{(l)}, m_2^{(l)}; \lambda_1, \lambda_2, \gamma_0) = \sum_{j=0}^{\min(m_1, m_2)} \frac{e^{-\gamma_0} \gamma_0^j}{j!} e^{-(\lambda_1 - \gamma_0)} \frac{(\lambda_1 - \gamma_0)^{m_1 - j}}{(m_1 - j)!} e^{-(\lambda_2 - \gamma_0)} \frac{(\lambda_2 - \gamma_0)^{m_2 - j}}{(m_2 - j)!}$$

EN exercice

Soit la v.a.  $N = M_1 + M_2$ . Quelle est la loi de  $N$ ?

La fgp de  $N$  :

$$\begin{aligned}P_N(r) &= E[r^N] = E[r^{M_1 + M_2}] = E[r^{M_1} r^{M_2}] = P_{M_1, M_2}(r, r) \\ &= e^{(\lambda_1 - \gamma_0)(r-1)} e^{(\lambda_2 - \gamma_0)(r-1)} e^{\gamma_0(r^2 - 1)} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\gamma_0)r + \gamma_0 r^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0)}\end{aligned}$$

On fixe  $\lambda_N = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0$ . On introduit une v.a. discrète  $C$  où  $f_C(1) = \Pr(C = 1) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\gamma_0}{\lambda_N}$  et  $f_C(2) = \Pr(C = 2) = \frac{\gamma_0}{\lambda_N}$

Alors  $P_N(r)$  devient

$$P_N(r) = e^{\lambda_N(f_C(1)r + f_C(2)r^2 - 1)} = e^{\lambda_N(P_C(r) - 1)}$$

où  $P_C(r)$  est la fgp de  $C$ .

De  $P_N(r)$ , on déduit que

$$N \sim \text{PoissonComp}(\lambda_N, F_C)$$

On peut utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer  $f_N(k), k = 0, 1, 2, \dots$

Cette loi est utilisée en actuariat, en gestion quantitative des risques et dans l'analyse des résultats de match de soccer etc.

On peut généraliser facilement l'approche avec choc commun avec autres loi et ...

### 3.6.2 - Lois Poisson bivariée de Teicher composé

Soit le couple de v.a. positives  $(X_1, X_2)$  où

$$X_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k} & , M_1 > 0 \\ 0 & , M_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$X_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k} & , M_2 > 0 \\ 0 & , M_2 = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

1.  $(M_1, M_2) \sim \text{PoisBivTeicher}(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0)$
2.  $\underline{B}_1 \{B_{1,m_i}, m_i \in \mathbb{N}^+\} =$  suite de v.a. i.i.d avec  $B_{1,m_i} \sim B_1, m_i \in \mathbb{N}^+$ .
3.  $\underline{B}_2 \{B_{2,m_i}, m_i \in \mathbb{N}^+\} =$  suite de v.a. i.i.d avec  $B_{2,m_i} \sim B_2, m_i \in \mathbb{N}^+$ .
4.  $B_1, B_2$  et  $(M_1, M_2)$  sont indépendantes.

Interpretation : La dépendance entre  $X_1$  et  $X_2$  est induit via le couple  $(M_1, M_2)$ .

Covariance entre  $X_1$  et  $X_2$  :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E_{M_1, M_2}[\text{Cov}(X_1, X_2 \mid M_1, M_2)] + \text{Cov}_{M_1, M_2}(E[X_1 \mid M_1, M_2], E[X_2 \mid M_1, M_2])$$

qui correspond à la formule de covariance total. On observe  $\text{Cov}(X_1, X_2 \mid M_1, M_2) = 0$  car  $B_1$  et  $B_2$  sont indépendantes par hypothèse.

$E[X_1 \mid M_1, M_2] = E[X_1 \mid M_1]$  car  $X_1$  est défini en fonction de  $M_1$ .

Ensuite, on sait que  $E[X_1 \mid M_1] = M_1 E[B_1]$ . De même, on déduit  $E[X_2 \mid M_1, M_2] = M_2 E[B_2]$

On rassemble les éléments et on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= 0 + \text{Cov}_{M_1, M_2}(M_1 E[B_1], M_2 E[B_2]) \\ &= E[B_1] E[B_2] \text{Cov}(M_1, M_2) \\ &= \gamma_0 E[B_1] E[B_2] \end{aligned}$$

Remarques :

1. On note  $(X_1^{(\gamma_0)}, X_2^{(\gamma_0)})$  les couples de v.a. obéissant à la loi Poisson bivariée Teicher composée  $(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0, F_{B_1}, F_{B_2})$  où  $\gamma_0 \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$  est le paramètre de dépendance.
2. Les marginales sont notées  $F_{X_1^{(\gamma_0)}} = F_1$  et  $F_{X_2^{(\gamma_0)}} = F_2$  pour tout  $\gamma_0 \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$
3.  $F_{X_1^{(\gamma_0)}, X_2^{(\gamma_0)}} \in \Gamma(F_1, F_2)$  avec

$$W(m_1, m_2) \leq F_{M_1^{(\gamma_0)}, M_2^{(\gamma_0)}} \leq M(m_1, m_2)$$

4.  $F_{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}} = F_{X_1^\perp, X_2^\perp}$

Exercice : démontrer que  $\mathcal{L}_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = P_{M_1, M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t_1), \mathcal{L}_{B_2}(t_2))$  On conditionne sur  $(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1, X_2}(t_1, t_2) &= E[e^{-t_1 X_1} e^{-t_2 X_2}] \\ &= E_{M_1, M_2} [E[e^{-t_1 X_1} e^{-t_2 X_2} \mid M_1, M_2]] \\ &= E_{M_1, M_2} [E[e^{-t_1 (B_{1,1} + \dots + B_{1,m_1}) - t_2 (B_{2,1} + \dots + B_{2,m_2})}]] \\ &= E_{M_1, M_2} [E[e^{-t_1 B_1}]^{m_1} E[e^{-t_2 B_2}]^{m_2}] \quad \underline{B}_i \text{ suite iid} \\ &= E_{M_1, M_2} [\mathcal{L}_{B_1}(t_1)^{m_1} \mathcal{L}_{B_2}(t_2)^{m_2}] \\ &= P_{M_1, M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t_1), \mathcal{L}_{B_2}(t_2)) \end{aligned}$$

Fonction de répartition conjointe de  $(X_1, X_2)$

1. Idée : on conditionne sur  $(M_1, M_2)$

2.

$$\begin{aligned}
F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2) \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid M_1 = m_1, M_2 = m_2) \\
&= \Pr(M_1 = 0, M_2 = 0) \\
&\quad + \sum_{m_1=0}^{\infty} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = 0) \Pr(B_{1,1} + \dots + B_{1,m_1} \leq x_1) \\
&\quad + \sum_{m_2=0}^{\infty} \Pr(M_1 = 0, M_2 = m_2) \Pr(B_{2,1} + \dots + B_{2,m_2} \leq x_2) \\
&\quad + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2) \Pr(B_{1,1} + \dots + B_{1,m_1} \leq x_1) \Pr(B_{2,1} + \dots + B_{2,m_2} \leq x_2)
\end{aligned}$$

3. Cette relation est intéressante si les lois  $B_1$  et  $B_2$  sont fermées à la convolution (ex. loi Gamma)

On définit  $S = X_1 + X_2$ . Quelle est la loi de  $S$  ?

1. On a recours à la TLS de  $S$ , donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= E[e^{-tS}] \\
&= E[e^{-t(X_1+X_2)}] \\
&= E[e^{-tX_1} e^{-tX_2}] \\
&= \mathcal{L}_{X_1, X_2}(t, t)
\end{aligned}$$

2. Dans le cas présent,  $\mathcal{L}_S(t)$  devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= P_{M_1, M_2}(\mathcal{L}_{B_1}(t), \mathcal{L}_{B_2}(t)) \\
&= e^{(\lambda_1 - \gamma_0)(\mathcal{L}_{B_1}(t) - 1)} e^{(\lambda_2 - \gamma_0)(\mathcal{L}_{B_2}(t) - 1)} e^{\gamma_0(\mathcal{L}_{B_1}(t)\mathcal{L}_{B_2}(t) - 1)}
\end{aligned}$$

3. On introduit une v.a.  $C$  où

$$\mathcal{L}_C(t) = \frac{\lambda_1 - \gamma_0}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2 - \gamma_0}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_2}(t) + \frac{\gamma_0}{\lambda_S} \mathcal{L}_{B_1}(t) \mathcal{L}_{B_2}(t)$$

avec  $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0$

4. De  $\mathcal{L}_C(r)$ , on déduit

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1 - \gamma_0}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2 - \gamma_0}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \frac{\gamma_0}{\lambda_S} F_{B_1+B_2}(x)$$

5. On remplace 3. dans 2.

$$\mathcal{L}_S(t) e^{\lambda_S(\mathcal{L}_C(t) - 1)}$$

6. De 5., on déduit que

$$S \sim \text{PoisComp}(\lambda_S, F_C)$$

où  $F_C$  est donnée en 4.

Si  $B_1$  et  $B_2$  sont des lois discrète sur  $\{0, 1h, 2h, \dots\}$  on peut utiliser l'algo de Panjer pour évaluer  $f_S(kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Exemple d'application

1. Contrat d'assurance IARD auto en Ontario
2.  $X_1$  = coûts dommages matériels
3.  $X_2$  = coûts dommages à autrui

Il est possible de généraliser à  $n = 3, 4$  v.a.

Il est possible d'introduire une relation de dépendance entre  $B_1$  et  $B_2$ .

Autre application risque de crédit, risque catastrophique comme source commun = tempête, ouragan etc.



## 3.7 - Lois paramétriques continues

### 3.7.1 - Lois exponentielles bivariée EFGM

1. E = Eyrant
2. F = Farlie
3. G = Gumbel
4. M = Morgenstern

Expression de  $F_{X_1, X_2}$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \alpha(1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2})e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}$$

où  $\alpha$  = paramètre de dépendance  $\in [-1, 1]$

Remarques :

1.  $F_{X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}} \in \Gamma(F_1, F_2)$  où

$$F_{X_i^{(\alpha)}} = F_i(x) = 1 - e^{-\beta_i x}$$

où

$$W(x_1, x_2) \leq F_{X_1^{(\alpha)}, X_2^{(\alpha)}} \leq M(x_1, x_2)$$

avec

$$W(x_1, x_2) = \max(1 - e^{-\beta_1 x_1} + 1 - e^{-\beta_2 x_2} - 1, 0) = F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2)$$

et

$$M(x_1, x_2) = \min(1 - e^{-\beta_1 x_1}, 1 - e^{-\beta_2 x_2}) = F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2)$$

2.  $F_{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}} = F_{X_1^+, X_2^+}$
3.  $F_{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}} \neq F_{X_1^+, X_2^+}$
4.  $F_{X_1^{(-1)}, X_2^{(-1)}} \neq F_{X_1^-, X_2^-}$
5. De 3. et 4., on déduit que la loi exponentielle bivariée EFGM m'inclut pas les bornes de Fréchet comme cas particulier.
6. La loi EFGM introduit une relation de dépendance modérer entre  $(X_1, X_2)$  positive ou négative

Récrivons  $F_{X_1, X_2}$  :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1 - e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_2} + e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2} + \alpha(e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}) - e^{-2\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2} - e^{-\beta_1 x_1}e^{-2\beta_2 x_2} + e^{-2\beta_1 x_1}e^{-2\beta_2 x_2}$$

Fonction de densité conjointe de  $(X_1, X_2)$  :

On dérive  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  par rapport à  $X_1$  et  $X_2$

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{d^2}{dx_1 dx_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ &= (1 + \alpha)\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} - \alpha 2\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} - \alpha \beta_1 e^{-\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} + \alpha 2\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} \\ &= (1 + \alpha)g(x_1, \beta_1)g(x_2, \beta_2) - \alpha g(x_1, 2\beta_1)g(x_2, \beta_2) - \alpha g(x_1, \beta_1)g(x_2, 2\beta_2) + \alpha g(x_1, 2\beta_1)g(x_2, 2\beta_2) \end{aligned}$$

où  $g(x, \beta) = \beta e^{-\beta x}$  est la fonction de densité d'une loi exponentielle  $\beta$ .

FGM de  $(X_1, X_2)$  :

1. On observe  $f_{X_1, X_2}$  est une combinaison linéaire de 4 termes où chaque est le produit de 2 fonction de densité de la loi exponentielle.
2. On sait que

$$\begin{aligned} M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) &= E[e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2}] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t_1 x_1} e^{t_2 x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (1 + \alpha)g(x_1, \beta_1)g(x_2, \beta_2) - \alpha g(x_1, 2\beta_1)g(x_2, \beta_2) - \alpha g(x_1, \beta_1)g(x_2, 2\beta_2) + \alpha g(x_1, 2\beta_1)g(x_2, 2\beta_2) \\ &= (1 + \alpha) \frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} - \alpha \frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \frac{\beta_2}{\beta_2 - t_2} - \alpha \frac{\beta_1}{\beta_1 - t_1} \frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} + \alpha \frac{2\beta_1}{2\beta_1 - t_1} \frac{2\beta_2}{2\beta_2 - t_2} \end{aligned}$$

TLS conjointe de  $(X_1, X_2)$  :

$$\mathcal{L}_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1, X_2}(-t_1, -t_2), t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$$

On définit  $S = X_1 + X_2$ . On veut identifier  $F_S$ . On peut procéder selon 2 approches :

1.  $f_S(x) = \int_0^x f_{X_1, X_2}(y, x-y)dy$
2.  $\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1, X_2}(t, t)$

On introduit la notion suivante :

$$h(x; \gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma x} \gamma^2 x}{\Gamma(2)} & , \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_1 e^{-\gamma_1 x} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \gamma_2 e^{-\gamma_2 x} & , \gamma_1 \neq \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Selon l'approche 1. ou l'approche 2., on déduit

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1, X_2}(y, x-y)dy \\ &= \int_0^x (1 + \alpha)g(y, \beta_1)g(x-y, \beta_2)dy - \alpha \int_0^x g(y, 2\beta_1)g(x-y, \beta_2)dy \\ &\quad - \alpha \int_0^x g(y, \beta_1)g(x-y, 2\beta_2)dy + \alpha \int_0^x g(y, 2\beta_1)g(x-y, 2\beta_2)dy \\ &= (1 + \alpha)h(x; \beta_1, \beta_2) - \alpha h(x; 2\beta_1, \beta_2) - \alpha h(x; \beta_1, 2\beta_2) + \alpha h(x; 2\beta_1, 2\beta_2) \end{aligned}$$

## Chapitre 4 - Introduction à la théorie des copules

### 4.1 - Introduction

La théorie des copules est approche novatrice pour étudier les structures de dépendance entre les v.a.. Elle est récente et elle est un cours de développement.

Elle est appliquée en actuariat, notamment en assurance dommages, dans l'analyse des risques d'un portefeuille d'une assurance (dans une perspective de gestion des risques incendie, etc.). Deux utilités :

1. Construction de modèle de dépendance
2. Estimation de lois multivariées

On va aussi examiner 2 autres approches pour mesurer (quantifier) la relation de dépendance entre les v.a.. Tau de Kendall et Rho de Spearman.

### 4.2 - Définitions

Une copule  $C$  correspond à la fonction de répartition conjointe d'un vecteur de v.a.  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$ , i.e.

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$$

pour  $\underline{U} \in [0, 1]^n$

**Définition 5** Une fonction  $C$  de  $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , i.e. une fonction multivariée de  $(u_1, \dots, u_n)$  avec support  $[0, 1]^n$  et qui prend une valeur dans  $[0, 1]$  est une copule si elle satisfait les propriétés suivantes :

1.  $C(u_1, \dots, u_n)$  croissant en  $u_1, \dots, u_n$
2.  $C(u_1, \dots, u_n) = 0$  si 1 ou plusieurs des arguments prend ou prennent la valeur 0
3.  $C(1, \dots, 1) = 1$
4.  $C(u_1, \dots, u_n) = u$  si  $u_j = 1$ , pour  $j \neq i$

5.  $n = 2$

$$\Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) \geq 0$$

pour  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$  et  $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1$

Pour tout  $n$  :

$$\Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \cdots \Delta_{a_n, b_n} C(u_1, \dots, u_n) \geq 0$$

pour  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1, \dots, 0 \leq a_n \leq b_n \leq 1$

Note :

Si  $C$  est une copule, cela signifie qu'il existe une copule de v.a.  $\underline{U} = (U_1, U_2)$  tel que  $F_{[\underline{U}]}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$ ,  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ .

La propriété 5. signifie que

$$\begin{aligned} C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) &= \Pr(\underline{U} \in (a_1, b_1] * (a_2, b_2]) \\ &= \Pr(a_1 \leq U_1 \leq b_1, a_2 \leq U_2 \leq b_2) \end{aligned}$$

C'est pour cette raison que la condition 5. est requise. C'est pour être certain que la fonction produise une valeur positive (une probabilité) sur tout rectangle  $(a_1, b_1] * (a_2, b_2] \subseteq [0, 1] * [0, 1]$ .

Si  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \Delta_{a_3, b_3} C(u_1, u_2, u_3) &= C(b_1, b_2, b_3) - C(a_1, b_2, b_3) - C(b_1, a_2, b_3) - C(b_1, b_2, a_3) + C(a_1, a_2, b_3) \\ &\quad + C(a_1, b_2, a_3) + C(b_1, a_2, a_3) - C(a_1, a_2, a_3) \geq 0 \end{aligned}$$

pour  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1, 0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1, 0 \leq a_3 \leq b_3 \leq 1$

Bornes de Féchet

Pour toute copule  $C$  de dimension  $n$ , on a

$$W(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M(u_1, \dots, u_n)$$

où

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n) = \text{Borne supérieur de Fréchet}$$

et

$$W(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - (n - 1); 0) = \text{Borne inférieur de Fréchet}$$

Pour  $n = 2, 3, \dots$ ,  $M(u_1, \dots, u_n)$  = copule de borne supérieur de Fréchet.

Pour  $n = 2$ ,  $W(u_1, u_2)$  = copule borne inférieur de Fréchet.

Pour  $n = 2, 3, \dots$   $W(u_1, \dots, u_n)$  n'est pas une copule, car elle ne satisfait pas la propriété 5. pour  $n = 3, 4, \dots$

On peut trouver une exemple tel que

$$\Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \Delta_{a_3, b_3} C(u_1, u_2, u_3) < 0$$

Remarque :

1. Un contr exemple pour indiquer que  $W(u_1, u_2, u_3)$  ne satisfait pas la condition 5. :  
Testez avec  $a_1 = 0.7, b_1 = 0.8, a_2 = 0.6, b_2 = 0.7, a_3 = 0.8, b_3 = 0.9$ , on obtient  $\Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} \Delta_{a_3, b_3} C(u_1, u_2, u_3) = -0.8$
2.  $W(u_1, u_2, 1) = W(u_1, u_2)$  = copule borne inférieur  
 $W(1, u_2, u_3) = W(u_2, u_3)$   
 $W(u_1, 1, u_3) = W(u_1, u_3)$

**Algorithme 8** Copule Borne supérieur de Fréchet

On veut simuler des réalisations  $\underline{U}^{(j)} = (U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)})$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  où  $F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = M(u_1, \dots, u_n) = C^+(u_1, \dots, u_n)$

1. Simuler  $V^{(j)}$  de  $V \sim \text{Unif}(0, 1)$

2. Simuler  $\underline{U}^{(j)}$  avec  $U_i^{(j)} = V^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Algorithme 9** Copule Borne inférieure de Fréchet

On veut simuler des réalisations  $\underline{U}^{(j)} = (U_1^{(j)}, \dots, U_n^{(j)})$  de  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  où  $F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = W(u_1, \dots, u_n) = C^-(u_1, \dots, u_n)$

1. Simuler  $V^{(j)}$  de  $V \sim \text{Unif}(0, 1)$
2. Simuler  $\underline{U}^{(j)}$  avec  $U_1^{(j)} = V^{(j)}$  et  $U_2^{(j)} = 1 - V^{(j)}$

Illustrations...

..

On peut générer des copules à l'aide de combinaisons convexes de  $C^+$ ,  $C^\perp$ ,  $C^-$  (seulement si  $n = 2$ ).  
Copule de Fréchet :

$$C_{\alpha, \beta}(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + \beta C^-(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp(u_1, u_2)$$

où  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\beta \in [0, 1]$  et  $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$

### 4.3 - Théorème de Sklar

**Proposition 5** Le Théorème de Sklar comporte 2 parties :

1. Soit  $F \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ , alors il existe une copule  $C$  tel que

$$F_{X_1, \dots, X_n} = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

avec  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  Si fonction est continue, alors la copule  $C$  est unique

2. Soit  $F_1, \dots, F_n$  des marginales univariées (continues ou discrètes). Soit une copule  $C$ , alors la fonction multivariée

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

est une fonction de répartition  $F \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ , i.e. on peut définir une fonction de répartition  $F$  à partir des marginales  $F_1, \dots, F_n$  et une copule  $C$  avec

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Interpretation :

1. On peut construire (extraire) une copule à partir de la fonction de répartition conjointe d'une loi continue multivariée. De plus, cette copule est unique.
2. On peut construire une loi multivariée (avec des marginales) discrète ou continues (de différentes loi univariées) et d'une copule  $C$ . Cette approche permet beaucoup de souplesse dans la construction de modèles multivariés.

**Preuve 11** de la Partie 2. du théorème Sklar.

Soit une copule  $C$  et des marginales univariées  $F_1, \dots, F_n$  et un vecteur de v.a.  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  où  $X_i = F_i^{-1}(U_i)$  où  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  et  $F_{\underline{U}} = C$ .

Par le théorème de la Fonction quantile, on sait que  $F_{X_i} = F_i$

On veut montrer  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ , avec  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_n^{-1}(U_n) \leq x_n) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= F_{\underline{U}}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \end{aligned}$$

La démonstration de la Partie 2. fournit un algorithme de simulation de réalisation  $\underline{X}^{(j)}$  de  $\underline{X}$  quand  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$

**Algorithme 10** *Simulation de  $X$  :*

1. Simuler  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U}$  où  $F_{\underline{U}} = C$
2. Simuler  $\underline{X}^{(j)}$  de  $\underline{X}$  avec  $X_i^{(j)} = F_i^{-1}(U_i^{(j)})$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$

Remarque :

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $C = C^\perp$ . Cela implique que les v.a.  $U_1, \dots, U_n$  sont indépendants.

Dans ce chapitre, on présente un algorithme de simulation des réalisations  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U}$  pour chaque copule  $C$ .

**Preuve 12** *de la 1. Partie.*

1. On fait la preuve en supposant que  $F$  est continue
2. Objectif : Soit  $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$  i.e.  $F_{X_i} = F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$   
On vise à démontrer qu'il existe une copule  $C$  tel que  $F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$
3. Pour cette démonstration, on utilise le Théorème de la Transformation de Probabilité Intégrale.  
Soit une v.a. continue  $Y$  avec une fonction de répartition  $F_Y$ . Alors,  $F_Y(y) \sim \text{Unif}(0, 1)$ , i.e. si on définit une v.a.  $V$  tel que  $V = F_Y(y)$  alors cette v.a.  $V$  obéit à  $\text{Unif}(0, 1)$
4. On a

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

On applique le théorème de la transformation  $F_{X_i}(x_i)$  de part et d'autre de chaque " $\leq$ "

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), \dots, U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \end{aligned}$$

pour  $\underline{x} \in (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

La relation est valide pour tout  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ .

On a défini une fonction multivariée  $C$  sur  $[0, 1]$ . Puisqu'elle est définie à partir de  $F_{\underline{X}}$ , elle satisfait aux propriétés pour être une copule.

L'argument pour l'unicité de  $C$  est heuristique.

Remarque # 1 :

Soit  $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$ . On définit  $\underline{U} = (U_1, \dots, U_n)$  avec  $U_i = F_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alors,

$$F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$$

où  $C$  est extrait de  $F_{\underline{X}}$ .

En effet,

$$\begin{aligned} F_{\underline{U}}(u_1, \dots, u_n) &= \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \\ &= \Pr(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_n(X_n) \leq u_n) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(F_1(x_1)) \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(F_n(x_n)) \leq F_n^{-1}(u_n)) \\ &= \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \\ &= F_{\underline{X}}(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \end{aligned}$$

Cette démarche fournit une méthode pour construire une copule. Elle est appelé la méthode de construction par inversion. Bref,

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{\underline{X}}(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Cette opération est appelée "extraction" de la copule  $C$  de  $F_{\underline{X}}$  (continue). Elle permet d'identifier la structure de dépendance de la loi  $\underline{X}$ , associée à  $F_{\underline{X}}$ .

Remarque #2 :

Soit une copule  $C$  extrait de  $F_{\underline{X}}$ . On veut simuler des réalisations  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U}$  où  $F_{\underline{U}} = C$ .

**Algorithme 11 de Simulation :**

1. Simuler  $\underline{X}^{(j)}$  de  $\underline{X}$
2. Simuler  $\underline{U}^{(j)}$  de  $\underline{U}$  avec  $U_i^{(j)} = F_{X_i}(X_i^{(j)})$

## 4.4 - Premier exemples de copules

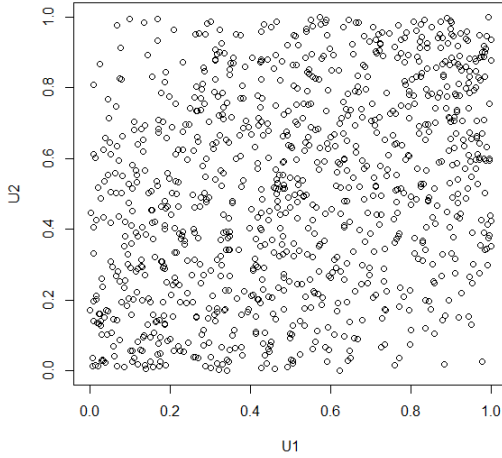
### 4.4.1 - Copule EFGM

Soit  $\underline{X} \sim$  Loi Exponentielle Bivariée EFGM  $(\beta_1, \beta_2)$ . On vise à extraire la copule  $C$ .  
On sait que  $X_i = F_i^{-1}(u_i) = -\frac{1}{\beta_i} \ln(1 - u_i)$ ,  $i = 1, 2$  et  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$   
Alors,

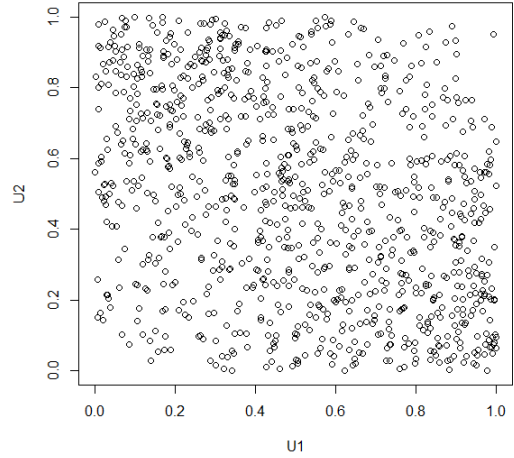
$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F_{\underline{X}}(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= (1 - e^{-\beta_1(-\frac{1}{\beta_1} \ln(1-u_1))})(1 - e^{-\beta_2(-\frac{1}{\beta_2} \ln(1-u_2))}) \\ &\quad + \alpha(1 - e^{-\beta_1(-\frac{1}{\beta_1} \ln(1-u_1))})(1 - e^{-\beta_2(-\frac{1}{\beta_2} \ln(1-u_2))})e^{-\beta_1(-\frac{1}{\beta_1} \ln(1-u_1))}e^{-\beta_2(-\frac{1}{\beta_2} \ln(1-u_2))} \\ &= \underbrace{u_1 u_2}_{C^\perp(u_1, u_2)} + \alpha u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \end{aligned}$$

avec  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$  et  $-1 \leq \alpha \leq 1$ .

On vient d'extraire la copule EFGM. Cette copule introduit une relation de dépendance positive ( $\alpha > 0$ ) ou négative ( $\alpha < 0$ )



(a)  $\alpha = 1$



(b)  $\alpha = -1$

Illustration 1 – 1000 Simulations de la copule EFGM

Exercice :

Soit  $(M_1, M_2)$  où  $F_n \in \Gamma(F_1, F_2)$  où  $M_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ ,  $M_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$  et  $F_{M_1, M_2}(k_1, k_2) = C_\alpha(F_1(k_1), F_2(k_2))$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in [-1, 1]$  et  $C_\alpha =$  copule EFGM. On définit  $N = M_1 + M_2$   
Calculer les valeurs exactes  $f_N(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et la  $\text{Cov}(M_1, M_2)$ , pour  $\alpha = -1$  et  $\alpha = 1$ .