

CT系统参数标定及成像

摘要

X射线计算机断层成像(Computed Tomography,CT)作为一种重要的内视技术手段,其系统的参数标定式工程领域得一项重要研究课题,本论文对其参数标定方法及数据成像算法进行了详细研究。

对于问题一,分析出标定模板中椭圆在探测器上投影长度存在的约束条件,根据附件2中的数据可以知道椭圆的最长投影和最短投影所占的探测器数量,结合椭圆的长轴和短轴数据用穷举法求得在约束条件下,符合数据精度的最优探测器单元长度。其次,利用求平行束旋转中心的重心法,在投影坐标轴上分析得到X射线初始入射角度、标定模板重心和CT系统旋转中心三者之间的定量数据关系,用附件2离散数据近似求得180组在不同射线角度下模板重心投影位置,把这些数据和重心法函数对比解出相关参数,由此计算得到标定模板重心与CT旋转中心的距离。接着对附件2数据作 *Radon* 逆变换得到的重建图像进行阈值变换,使其转化为二值图像,使用Matlab中 *edge* 函数和 *regionprops* 函数提取二值图像中的几何特征,由此得到初始入射角度,进而确定旋转中心坐标和180个角度。

对于问题二和问题三,首先研究反投影算法的数学原理,利用附件3数据在Matlab中编写代码,利用直接反投影算法进行图像重建。由于直接反投影重建算法产生星状伪迹无法精确判断未知介质形状,所以使用改进后的滤波反投影重建算法进行图像重建。对滤波反投影重建算法得到的精确图像,根据问题一计算出的标定参数进行图像变换,对附件1数据做 *Radon* 变换后再做 *Radon* 逆变换,对得到的图像同样利用问题一中的方法,提取几何特征得出椭圆长轴的像素个数,然后根据椭圆与托盘的比例计算出 *Radon* 逆变换输出的图像分辨率,令其转化为 256×256 ,使图像同比例变换从而保持模型与托盘的比例不变,根据已知模型的数据用最小二乘法求得转化为吸收率的比例,由此得到各点吸收率数值。问题二和问题三的区别在于,问题二的图像可以明显分辨出误差,而问题三的图像剔除误差相对困难。

对于问题四,分析问题一中标定参数的数学模型和算法,找到了影响数据计算精度的因素包括标定模板的几何形状、模型误差、计算误差、数据测量误差;之后对模型的稳定性和算法的稳定性分别验证。对于模型稳定性,通过利用附件3数据随机剔除一部分数据后,进行图像重建,和原数据重建图像进行对比。而对于重建算法的稳定性,通过归一化均方距离判据 d 和归一化绝对距离判据 r ,编写程序计算 d 和 r 的大小,由此来验证本文算法的稳定性。最后由得到的结论,构造新的标定模板为双椭圆模型。

在论文最后,用数据验证了分析过程中对旋转角度的判断,并给出了论文模型的优缺点评价和未来CT系统的发展方向。

关键字:重心法 图像阈值处理 Radon变换 滤波反投影重建算法 归一化距离判据

1 问题重述

X射线计算机断层成像(Computed Tomography,CT)作为一种重要的内视技术手段已广泛应用于国防和国民经济的多个领域,例如医疗、工业无损检测、安检等等。构建CT系统,首先要重建几何坐标系,进行参数标定,尤其是必须确定高精度测量投影旋转中心(Center of Rotation)的位置坐标,同时探测器的单元距离设置和X射线的方向设置也同时对构建CT系统举足轻重,否则其误差会引起CT图像中的伪影,导致CT图像降质。

题目已经给出了平行光束入射旋转CT系统的相关构造原理和数据,要求以此为背景建立相应的数学模型和算法,研究参数标定和样品成像,解决下列问题。

问题一 对于给定的两个均匀固体介质组成的标定模板的集合信息和在CT系统中的探测器接收信息,确定CT系统旋转中心的位置、探测器单元的距离以及CT系统的180个旋转方向。

问题二 利用问题一中得到的标定参数,结合某未知介质的接收信息,确定介质的位置、几何形状、吸收率以及十个点的吸收率等信息。

问题三 同样利用问题一中得到的标定参数,结合另一未知介质的接收信息,确定该介质的位置、几何形状、吸收率以及十个点的吸收率等信息。

问题四 分析问题一中参数标定的精度和稳定性,在此基础上自行设计新模板,建立对应的标定模型,以改进标定精度和稳定性,并说明理由。

2 问题分析

问题一

通过研究附件2的相关数据,结合CT旋转投影的数值问题,只分析椭圆的投影,可以计算椭圆投影在探测器上的数量,同时结合题目中附件1数据和图2中圆的椭圆长轴和短轴数据,得到关于探测器单元距离的一个约束条件,由此计算出探测器单元之间的距离。

平行光束扫描CT系统的投影旋转中心(COR)确定的方法有线模扫描法、对称投影相关法、图像配准法、重心法、迭代法等,所给 512×180 的投影数据中不包含对称投影,采用重心法^[1,2]比较合适。旋转中心在探测器上投影位置不发生改变,而物体中心的投影位置会随着射线入射角度的改变而呈周期性变化,通过建立相关的函数找到两者位置的关系,由标定模型的数据可以求得其重心位置,进而可以确定旋转中心的位置。

最后利用附件2数据和图像重建算法,通过阈值变换提取重建后的图像特征值和标定模板几何信息进行比对,可以计算出射线的初始入射方向。另外该CT系统转过180次,可以想到每次均匀旋转 1° ,总共旋转 180° 。否则旋转超过 180° 会导致旋转间隔角度变小,导致重建后的图像和原图像产生误差;不足 180° 则会导致接收信息不足,无法从投影重建完

整的图像；另外如果旋转角度不均匀则接受信息不够准确完整，并且从工程实现角度来说更有困难。并且，从相关论文^[3,4]举例中可以侧面印证这一思想。

问题二、问题三

问题二和问题三的求解问题几乎完全相同，附件3中数据点大致分为两类，像素值为0的点和像素值不为0的点，并且像素值不为0的这些点数据值距离0的差距较大，因此可以想到使用比较简单的图像重建算法可以实现附件3数据的处理。而附件5中数据分布比较密集，所以图像重建算法要进行优化。

建立以平移和旋转为基础的校正算法，在图像重建算法确定后，结合问题一的参数标定与校正算法，可以找到物体对应托盘中的位置。而像素值的计算可以通过图2中椭圆的数据、椭圆和托盘的比例关系以及像素与长度的对应关系，使其每部分和原题中图2每部分的比例完全相同，之后转化得到的图像进行分辨率为 256×256 ，使得校正后的图像分辨率大小符合附件1的规格。在最后，吸收率的计算要考虑以问题一中标定模板吸收率为单位吸收率，对重建后的图像利用最小二乘法计算单位吸收率和重建图像数据值的偏差比例，再用这个比例对问题二、三进行相同的计算，进而可以得到类似与附件1的 256×256 的吸收率像素矩阵，并从中提取所要求点的吸收率数值。

问题四

问题四要求分析标定参数的精度和稳定性，则可以从问题一中的模型和算法入手，寻找影响参数标定的因素。对这些因素进行细致的分析，并进行相关的计算验证分析的正确性，由此可以提出标定模板的改进方案。

3 基本假设

为了能够在这个问题中尽可能的得到可操作性比较强且数据计算结果较可靠的值，做出以下假设：

- 假设X射线在空气中衰减为0，并且不考虑射线的硬化效应。
- 假设单位像素点中点的吸收率相同，为某一固定常数。
- 假设CT系统旋转180次间隔角度相同。
- 假设理论上投影变换的数据值和实际测量值相同。
- 忽略认为因素在实际操作过程中带来的误差影响。

4 名词解释和符号说明

4.1 名词解释

- 椭圆坐标系，以椭圆中心为原点，以托盘两个相互垂直的边缘方向为 $x - y$ 坐标轴的坐标系。
- 旋转中心坐标系，以CT系统旋转中心为原点，以与托盘边缘平行的两个方向为 $x' - y'$ 坐标轴的坐标系。但由于问题一中旋转中心坐标未知，所以旋转中心坐标系不是确定的。在问题一中假设旋转中心已经确定，用以建立旋转中心和物体中心的数学模型。
- 投影坐标系，以探测器一端为原点，以沿着探测器的方向为 t 轴，以与 t 轴垂直的方向为 P 轴建立的坐标系。

4.2 符号说明

表 1: 符号说明

符号	说明
d_1	椭圆长轴
d_2	椭圆短轴
l	探测器单元距离
n_{min}	标定模板中椭圆投影最小格数
n_{max}	标定模板中椭圆投影最大格数
θ	CT系统的射线入射角
$\theta_i (i = 1, 2, 3 \dots 180)$	CT系统的180个入射角
t	CT射线在投影坐标轴的横坐标
$t_j (j = 1, 2, 3 \dots 512)$	512条射线在投影坐标轴的横坐标
t_r	旋转中心在投影坐标轴的横坐标(定值)
(x_c, y_c)	物体重心在旋转坐标系中的垂直坐标
(r_c, ϕ_c)	物体重心在旋转坐标系中的极坐标
$t_c(\theta)$	物体重心在入射角 θ 投影坐标轴的横坐标
$\hat{t}_c(\theta)$	物体重心在入射角为 θ 投影坐标轴的横坐标近似值
$P(\theta, t)$	物体在入射角为 θ ，射线横坐标为 t 时的投影
$\hat{P}(\theta, t)$	物体在入射角为 θ ，射线横坐标为 t 时的投影近似值

5 模型的建立和求解

问题一模型的建立和求解

(1)探测器单元长度约束:

当X射线入射方向 θ_i 确定后, 如果只考虑椭圆, 在其投影坐标系中横坐标长度是确定的。不论X射线入射方向怎么变化, 椭圆的投影长度一定为在长轴和短轴长度的区间范围内。而投影长度计算公式为 $P(\theta, t) = ln$, n 表示椭圆投影在探测器上覆盖的探测器个数。由附件2计算出椭圆投影覆盖探测器个数的最大值 n_{max} 和最小值 n_{min} , 于是推出探测器长度 l 的约束条件:

$$n_{max}l \leq d_1 \quad (1)$$

$$n_{min}l \geq d_2 \quad (2)$$

由附件2, 可知 $n_{max} = 289, n_{min} = 109$ 。根据式(1)(2),通过Matlab利用枚举法思想以0.001为步长, 枚举求出符合精度的探测器单元之间的距离 $l = 0.2769 \text{ mm}$ 。

(2)重心法^[1,2]:

首先建立以椭圆为圆心, 以托盘相互垂直的边缘为坐标轴的 $x - y$ 椭圆坐标系(图); 其次建立以旋转中心为圆心、以托盘相互垂直的边缘为坐标轴的 $x' - y'$ 旋转中心坐标系(图); 最后建立以探测器一端为原点, 以沿着探测器的方向为 t 轴, 以与 t 轴垂直的方向为 P 轴建立的坐标系。

假设被检测物体属于连续空间 $f(x,y)$, 其投影定义为线积分:

$$P(\theta, t) = \int f(x, y) d\theta$$

其中 θ 是投影的方向。

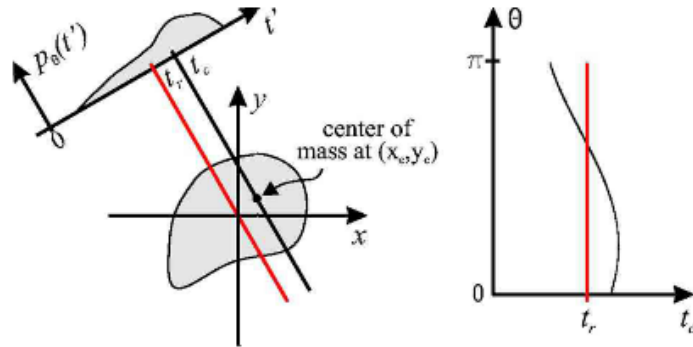


图 1: 旋转中心坐标系和投影坐标系示意图^[1]

二维函数 $f(x, y)$ 的质心公式为:

$$x_c = \frac{\iint x f(x, y) dx dy}{\iint f(x, y) dx dy} \quad (3)$$

$$y_c = \frac{\iint y f(x, y) dx dy}{\iint f(x, y) dx dy} \quad (4)$$

由此计算出的标定模板在椭圆坐标系下坐标为 $(1.1688, 0)$ 。

同样的, 投影函数的质心计算公式类似的表示为

$$t_c(\theta) = \frac{\int t P(\theta, t) dt}{\int P(\theta, t) dt} \quad (5)$$

假设CT系统的旋转中心已知, 则旋转坐标轴固定下来。若在旋转坐标轴中被测物体的质心坐标为 (x_c, y_c) , 其投影在 t 轴的坐标为 $t_c(\theta)$, 旋转中心在 t 轴的投影坐标为 t_r , 则由几何关系(图2)可以得到:

$$t_c(\theta) = x_c \cos(\theta) + y_c \sin(\theta) + t_r \quad (6)$$

由于被测物体重心坐标在旋转中心极坐标系下为 (r_c, ϕ_c) , 所以存在关系式 $r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$, (θ) X射线在旋转中心坐标轴下和 y' 轴的夹角), 利用三角变换则式(6)化为

$$t_c(\theta) = r_c \cos(\theta - \phi_c) + t_r \quad (7)$$

式(7)表明了, 在 t 轴上, 函数 $f(x, y)$ 投影的坐标和X射线入射角存在三角函数关系(图1), 其中 t_r 和 r_c 为参数, t_r 表示CT系统旋转中心点在探测器轴上的投影, r_c 表示旋转中心与物体重心的距离。分析CT系统旋转过程中可以得到旋转中心在探测器上的位置不发生变化, 即 t_r 为定值。而利用附件2数据离散的数据点计算出 $\hat{P}(\theta, t)$ 以代替原函数 $P(\theta, t)$, 由此估计出每个角度 θ_i 下的 $t_c(\theta_i)$ 的近似值 $\hat{t}_c(\theta_i)$ 。其计算公式为

$$\hat{t}_c(\theta_i) = \frac{\sum_{j=1}^{512} j \hat{P}_{\theta_i}(t_j)}{\sum_{j=1}^{512} \hat{P}_{\theta_i}(t_j)} \quad (8)$$

通过 *Matlab* 按式(8)计算出 180 组物体重心在探测器轴上的投影坐标 $t_c(\theta_i)$, 并绘制重心投影坐标 $t_c(\theta_i)$ 和 θ_i 的函数图像(图2, 以 θ_0 为0度), 发现函数图像确实符合三角函数曲线, 印证了式(6)和重心法的正确性。

通过寻找附件2中标定模板重心最低点所在的列数和式(6)的函数周期, 可以从最低点向前倒推0.25个周期, 得到函数(6)的中心值 $t_r = 256.2$, 表明旋转中心在探测器上的投影

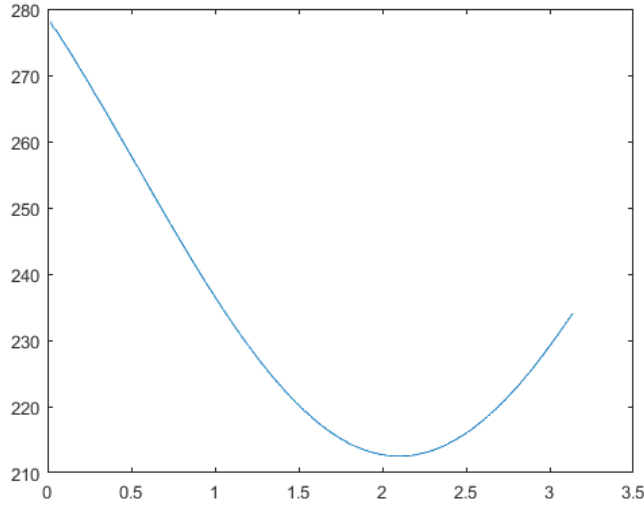


图 2: 180组标定模板重心坐标和射线入射角函数关系

几乎处于探测器中心。再通过函数(6)的平衡点和最低点的插值，计算得到 $r_c = 45.5234$ ，表明CT旋转中心和标定模板重心的距离为 $r_{cl} = 12.0516 \text{ mm}$ 。

(3)入射方向的计算：

求解X射线入射初始角度，对附件2中数据利用 *Matlab* 的 *iradon* 函数进行图像重建得到灰度图(图3)，接着依据阈值变换法使用 *im2bw* 函数把灰度图转化为二值图，使用 *edge* 函数对得到的二值图像提取图像的边缘算子，再使用 *regionprops* 函数对提取的边缘数据度量图像区域属性，得到图像中标定模板的特征值，可以计算得到附件2重建的图像与 y 轴的倾斜角度，由此计算得到X射线初始方向与 x 轴的夹角为31.4482度。

再次分析式(6)，因为函数关系已经给出，X射线初始方向角 θ 已经计算得到，所以由函数中两个角度的平移关系求出重心极坐标 $\phi = -0.4482^\circ$ 。结合已经得到的 r_c ，求出标定模板重心在旋转重心坐标系的准确位置。由于两个点的位置相互确定，而重心坐标在椭圆坐标系中为 $(1.1688, 0)$ ，所以旋转中心在椭圆坐标系的坐标也确定下来，求解结果为 $(-10.8824, 0.0493)$ 。

表 2: 问题一模型求解数据

旋转中心坐标	探测器单元距离	初始入射角	入射角间隔
$(-10.8824, 0.0943)$	0.2769mm	31.4482°	1°

考虑X射线的其他入射方向，从实际情况出发，我们认为该CT系统每次旋转角度间隔都为 1° ，总的旋转角度恰好为 180° 。旋转角度小于 180° 时，探测器接收信息不完善，

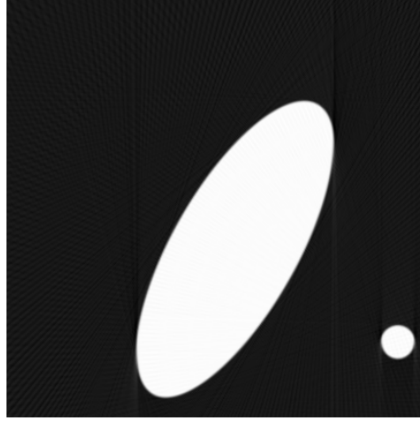


图 3: 附件2灰度图

使得重建图像过程中会导致图像数据丢失，并且每次均匀的旋转使得探测物体的整体数据得到充分收集，使得重建图像能够比较完整的反映原始图形信息。其次在相关论文^[3,4,5]同样有相应的佐证，也侧面证实了理论的合理性和准确性。

问题二、问题三模型的建立和求解

(1) 图像校正算法：

由于旋转中心和椭圆中心坐标的偏差，以及X射线入射方向的不同，如果直接对附件3进行图像重建，会得到图3类似的倾斜的图像。因此需要设计校正算法，把附件中的数据与托盘的位置进行调整校正。由问题一中的求解结果，在反投影重建时先旋转重建图像，之后把重建图像进行平移，得到恰好对应于托盘位置的重建图像。

(2) 图像重建算法：

在图像的重建过程中，断层平面某一点的密度值可看作这一平面内所有经过该点射线投影之和，整幅重建图像可看作所有方向下的投影累加而成。用某一视角下的投影数据 $p_{\lambda 1}(\lambda 2)$ 沿 $\lambda 1$ 方向的整个空间扫描一次，得到二维分布 $g(\lambda 1, \lambda 1)$ ，并赋以密度量纲，即为反投影。

由于旋转中心 (x_0, y_0) 在探测器上的投影位置不变，过该点的直线 l 的表达式可以表示为 $y = \tan\theta(x - x_0) + y_0$ 。如图4，对任意点 (x, y) ，当射线角度为 θ 时，这个点在探测器上的投影与旋转中心在探测器上的投影点的距离，等于点 (x, y) 到直线 l 的距离。由附件2依次求出 θ_i 角下 (x, y) 的投影值，进而对180个角度下投影值加和求其平均值即为 (x, y) 的反投影变换数值。

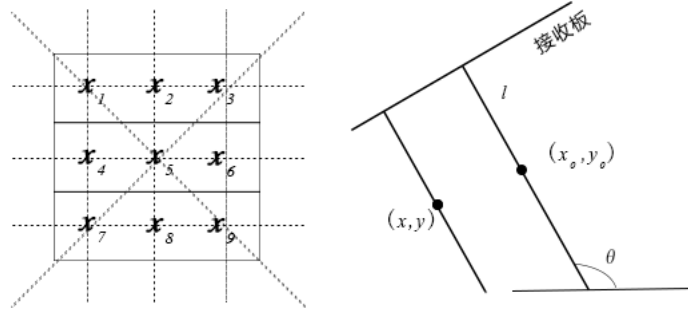


图 4: 反投影原理示意图

使用这种原理计算重建图像的算法称为直接反投影算法^[5]。反投影重建原理计算式为

$$x_k = \frac{1}{n_q} \sum_{q=1}^{n_q} p_{k,q}$$

其中 x_k 表示像素为 k 的值, $p_{k,q}$ 表示经过像素 k 的第 q 条射线, n_q 表示图像内的射线条数。

通过分析发现, 反投重建算法重建后的图像, 在原图中像素值不为零的点反投影重建后仍较为冲突, 像素值为0的点经过反投影后不再为0, 产生了伪迹(图5)。但当点之间的像素值相差较大时, 通过反投影重建算法虽然会产生偏差, 但是对于图像的判断仍然能够比较好的识别图形特征。

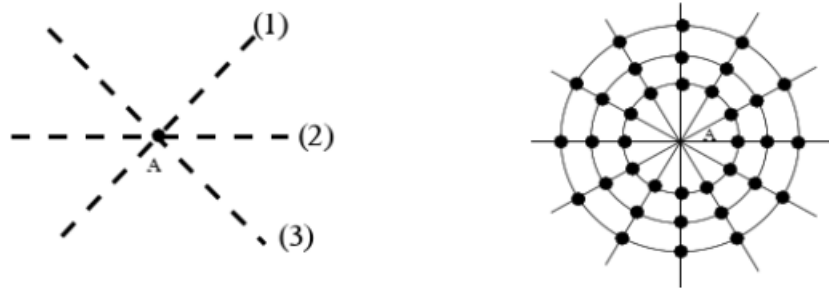


图 5: 星状伪迹示意图^[5]

利用Matlab编写直接反投影算法, 利用附件3数据进行图像重建, 得到图6。

重建后图像虽然可以大致判断形状, 但图像看起来模糊不清, 这一点验证了反投影重建算法理论的弊端, 即产生了星状伪迹使得重建图像失真; 所以需要考虑改进投影重建算法。

为了去除星状伪迹, 可以让重建后的图像经过一个二维滤波器进行滤波, 但二维滤波器实现较为麻烦, 可以在反投影重建以前把投影数据进行滤波, 再把修正后的投影数据

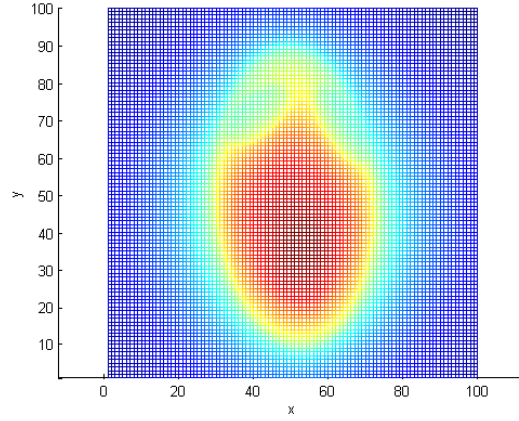


图 6: 直接反投影算法校正后二维图像

进行反投影运算求出五伪迹的图像且运算简单。在进行滤波后图像的重建不产生数据的丢失，需要以 *Radon* 变换、*Fourier* 变换和中心极限定理为基础。

Radon 变换表示为：

$$Rf(x, y) = P(\theta, t) = \iint f(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - t) dx dy$$

它建立了投影函数 $P(\theta, t)$ 与原始目标截面函数 $f(x, y)$ 的联系， $\delta(x)$ 为 *Dirac* 函数。

Radon变换与Radon反变换

根据中心切片定理^[6]，重建图像 $f(x)$ 的基本过程如下：

$$P(\theta, t) \Rightarrow \tilde{P}(\theta, \sigma) \Rightarrow \tilde{f}(\sigma\theta) \Rightarrow f(x)$$

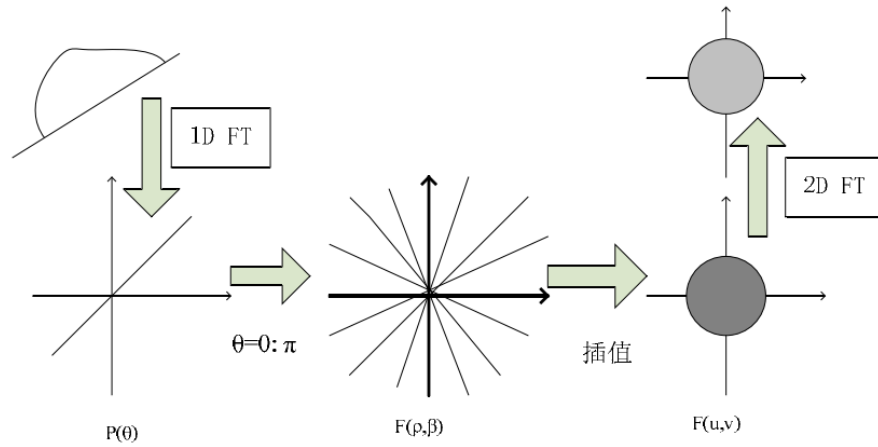


图 7: 滤波反投影重建算法原理^[7]

图7给出了利用中心切片定理、*Fourier* 变换和 *Radon* 变换重建图像的流程图。由足够多的不同投影角下得到的一维 *Fourier* 变换函数可以在频率域中构成完整的二维 *Fourier* 变换函数，将此二维变换函数做一次 *Fourier* 逆变换，就得到了所要求的空间域的密度函数，即得到了重建图像，这种方法叫做滤波反投影算法^[1]。

Matlab 中 *radon* 函数和 *iradon* 函数是利用滤波反投影算法进行图像重建。*Radon* 函数用来实现图像的 *Radon* 变换，得到正弦直方图；*iradon* 函数根据正弦直方图数据利用滤波反投影算法重建图像。因此可以直接使用 *iradon* 函数得到图8，滤波反投影算法的三维数据图(图10)。图9给出了 *radon* 函数和 *iradon* 函数的程序流程图。



图 8: 问题二灰度图

对附件3数据利用 *iradon* 函数进行 *Radon* 逆变换，并把图像校正算法写入程序中，得到图8.通过对比图6和图8，可以验证滤波反投影算法通过滤波，去掉了重建图像中的伪迹，能够得到较为精确重建图像。因此在求解问题二和问题三时通通应用 *radon* 函数和 *iradon* 函数来计算较为精确的数据。

(3)像素处理算法:

对附件1数据进行 *Radon* 变换得到与附件2同类型的数据，再对所得的数据进行 *Radon* 逆变换，得到每个像素点的数据，用 *Matlab* 还原图像后，可以求得椭圆长轴为285个像素点，由于图像和像素大小是不变的，结合图二中的比例可以生成分辨率为 357×357 的图像，所得图像与图二吻合，最后将所得图像的分辨率调整为 256×256 ，使整个图像按比例缩小，得到每个像素点的数据。

(4)吸收率处理算法:

因为附件2的投影数据和附件1的吸收率对应，我们以它们的对应数据关系为标准来计算问题二和问题三的吸收率数据。首先对附件1数据进行 *Radon* 变换再进行 *Radon* 逆变换，得到的数据图理论上应该和附件一对应，除去滤波产生的特殊因素外，发现数据值

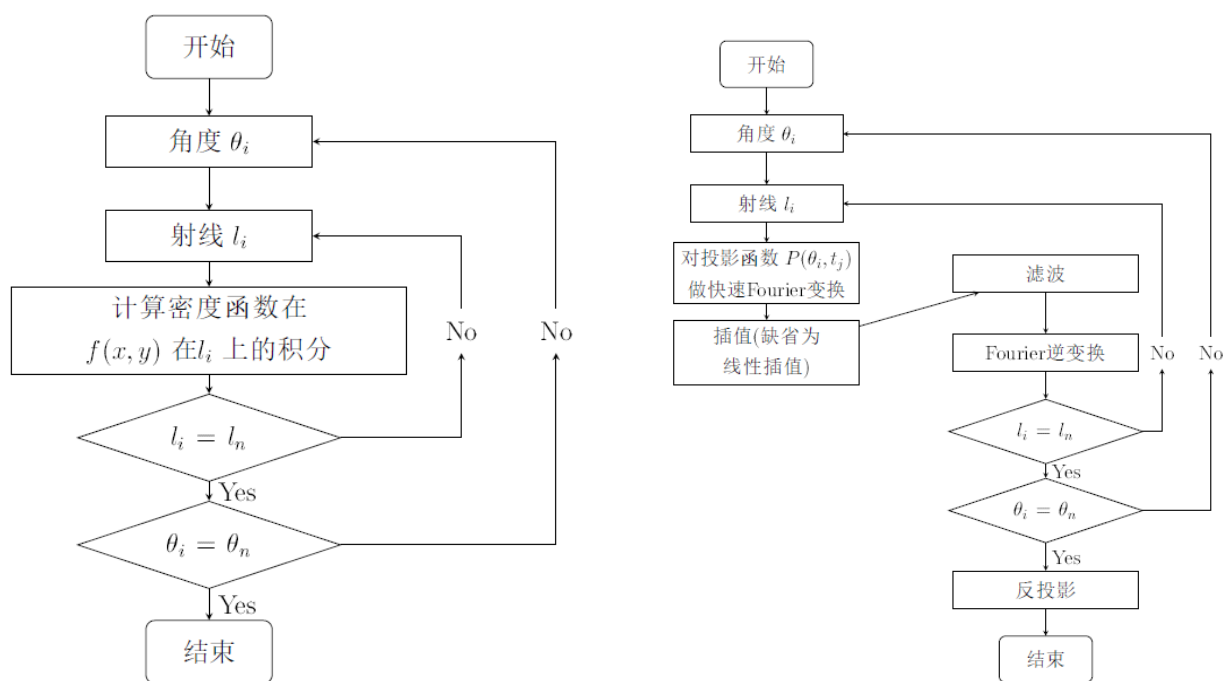


图 9: Matlab中radon函数和iradon函数程序流程图^[7]

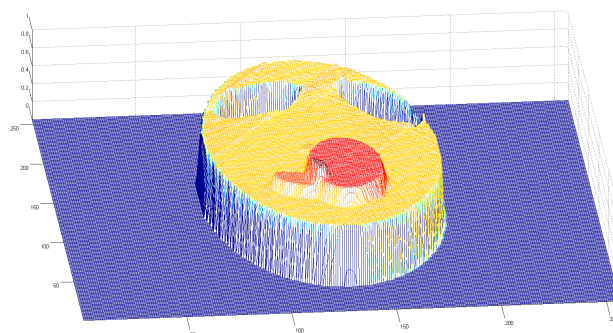
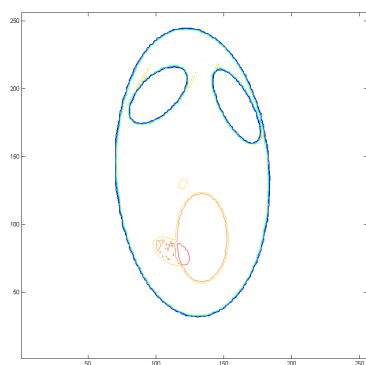


图 10: 问题二滤波反投影算法校正后的二维、三维图像

的大小纯在一定偏差。偏差比例为一个定值，然后利用最小二乘法把附件1的数据和经过 *Radon* 逆变换后的数据进行计算，得到偏差比例为0.5110。然后对附件3数据进行 *Radon* 逆变换，除掉偏差比例，就得到了以问题一标定模板介质吸收率为单位的吸收率。

表 3: 问题二求得的吸收率数值	
坐标	吸收率
(10.0000, 18.0000)	0
(34.5000, 25.0000)	0
(43.5000, 33.0000)	0.9511
(45.0000, 75.5000)	0.9706
(48.5000, 55.5000)	1.2483
(50.0000, 75.5000)	1.2523
(56.0000, 76.5000)	1.0733
(65.5000, 37.0000)	0
(79.5000, 18.0000)	0
(98.5000, 43.5000)	0

结合图像校正算法、像素处理算法和吸收率处理算法，通过 *Matlab* 中的 *radon* 函数和 *iradon* 函数得到题目要求的 256×256 的像素矩阵(problem2.xls)，同时给出了题目要求十个点的吸收率数值(表3)。

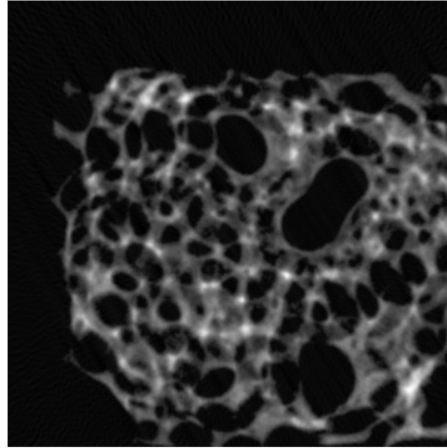


图 11: 问题三灰度图

同样应用问题二中的模型求解方法，利用 *Matlab* 中 *iradon* 函数进行重建图像(图11)，

校正后取等直线图得到图12，并利用像素处理算法得到 256×256 的像素矩阵(problem3.xls)，并计算得到相应十个点的吸收率(表4)。

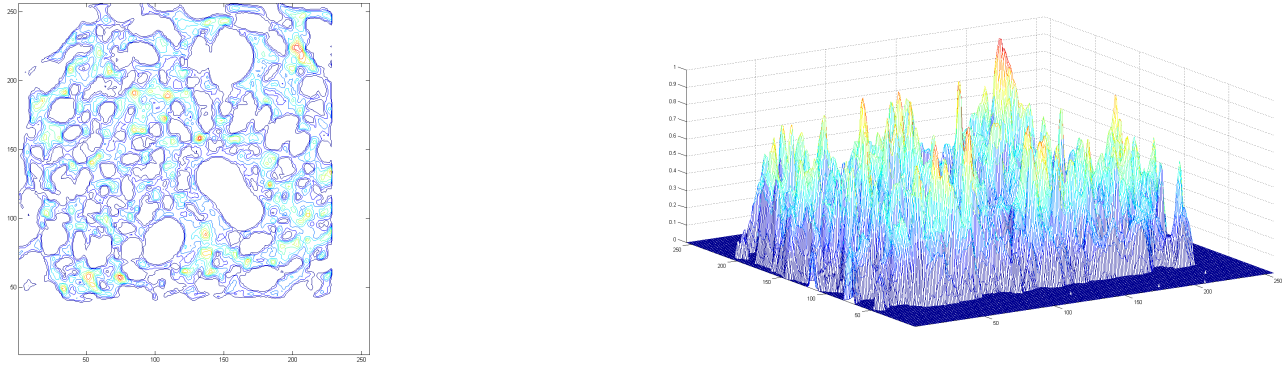


图 12: 问题三滤波反投影算法校正后的二维、三维图像

表 4: 问题三求得的吸收率数值

坐标	吸收率
(10.0000, 18.0000)	0
(34.5000, 25.0000)	3.6467
(43.5000, 33.0000)	1.9446
(45.0000, 75.5000)	0
(48.5000, 55.5000)	1.8203
(50.0000, 75.5000)	3.9724
(56.0000, 76.5000)	4.7401
(65.5000, 37.0000)	2.0123
(79.5000, 18.0000)	2.8859
(98.5000, 43.5000)	0

问题四模型的建立和求解

(1) 算法稳定性评价参数:

图像重建算法的研究通常借助于模型作为原始图像，对原始图像进行扫描，求出投影值，再根据这些投影，以待研究的算法进行重建，得到重建后的图像评价。重建后图像与原始图像差异的客观表现可以采用下面两个评价参数^[5]:

(a)归一化均方距离判据 d :

$$d = \left[\frac{\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^M [\alpha_{u,v} - \beta_{u,v}]^2}{\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^M [\alpha_{u,v} - \alpha_0]^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\alpha_{u,v}$, $\beta_{u,v}$ 分别表示测试模型和重建后图像中第 u 行、 v 列的像素密度。 α_0 为测试模型密度的平均值；图像的像素为 $M \times M$ 个。 $d = 0$ 表示重建后的图像忠实的再现测试模型图像。 d 值越大表示两者偏差越大。

(b)归一化平均绝对距离判据 r

$$r = \frac{\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^M |\alpha_{u,v} - \beta_{u,v}|}{\sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^M |\alpha_{u,v}|}$$

$r = 0$ 说明没有误差。 r 增大，说明误差增大。

d 能够较敏感地反映某几点产生较大误差的情况， r 能够较敏感的反映许多点均有一些小误差的情况。

(2)精度分析:

而针对问题一中标定参数的数学模型和算法，投影约束条件中的数据影响影响探测器单元距离 l ，阈值变换法提取特征数据时标定模板的几何信息和分辨率会影响初始入射角的计算精度，重心法中旋转数据的数量会影响到物体重心的计算，进而会影响到 r_c 和 ϕ_c 的计算精度。因此如果要提高标定参数的精度，可以从以下方向入手给出新的标定模板：标定模板的几何形状、模型误差、计算误差、数据测量误差等等。

(3)稳定性分析:

稳定性反映的是数学模型和算法对问题和数据计算的准确性。其中模型的稳定性可以通过改变原始数据的数量进行验证，对附件3中数据进行部分提取，然后进行图像重建，和完整数据下的重建图像进行对比。通过前后两者的差异验证模型的稳定性。算法的稳定性通过图像评价指标归一化均方判据 d 归一化平均绝对距离判据 r 进行验证。

对于模型的稳定性分析，从附件3中随机剔除一系列数，按照问题二的处理方法进行图像重建，获得 256×256 的像素矩阵。利用问题二求得的像素矩阵和这种方法计算后的像素矩阵对应元素利用最小二乘法求平方和。不断增大剔除数据剔除数量，得到不同的数值，对数值的变化规律进行观察。发现剔除数据越多，求得的平方和不断增大，且增大的速度在不断加快。对于算法稳定性的分析，在 *Matlab* 中编写程序计算得到归一化均方距离判据 $d = 0.0905$ 和归一化平均绝对距离判据 $r = 0.0468$ 。

通过这两种方法充分说明了问题一模型和算法的稳定性。

由于在问题一的计算过程中发现题目中标定模板在某些角度下投影值的数据变化差别非常小，圆对投影接收信息的数据贡献并不大。原因在于相近的旋转角度中，圆的投影被椭圆覆盖，在其他区域边界由于椭圆本身的一些几何性质，使得这些响铃的角度产生较大变化时，对应的投影变化非常小。这样的相近数据点回拉低整体数据的精确值，使得重建图像在这些角度上得到的图像的分辨率不高。

除此之外，优化问题一中标定参数的数学计算模型也算法，也可以得到精度更高、稳定性更好的标定参数；提高数据本身的测量精度，减小数据误差也能得到精度更高的标定参数。

基于以上分析，我们构造出双椭圆的标定模板作为新的标定模型(图13)。这样能够提高标定参数的原因在于两个椭圆的这样的摆放位置会避开很对拉低整体数据计算精度的投影值，进而能得到更准确的重建图像。

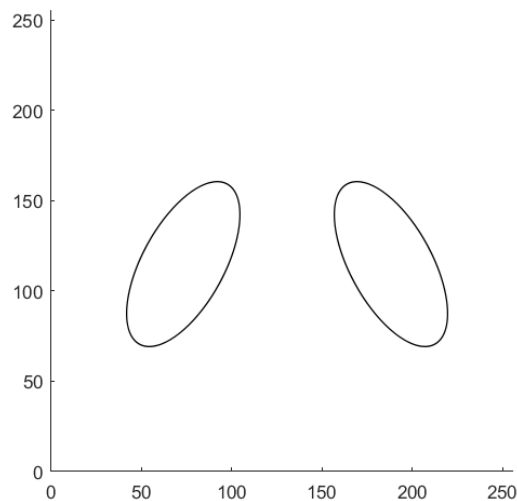


图 13: 新的标定模板

6 结果分析与检验

问题一模型的模型分析

问题一重心法的计算方式虽然比巧妙的利用了标定模板几何关系和CT系统的几何关系分析得到一个准确的函数，但实际计算过程中用离散的数据计算得到的重心近似替代准确重心，用替代后的重心来求解原问题中的参数会产生偏差。

问题一旋转角度的检验

在问题一中由于X射线旋转角度的判断是基于大致判断和论文中的例子给出的数据，不具有说服力。我们以附件3为样本数据，分别取了前90列数据和均匀取了60列数据进行图像重建(图14)。

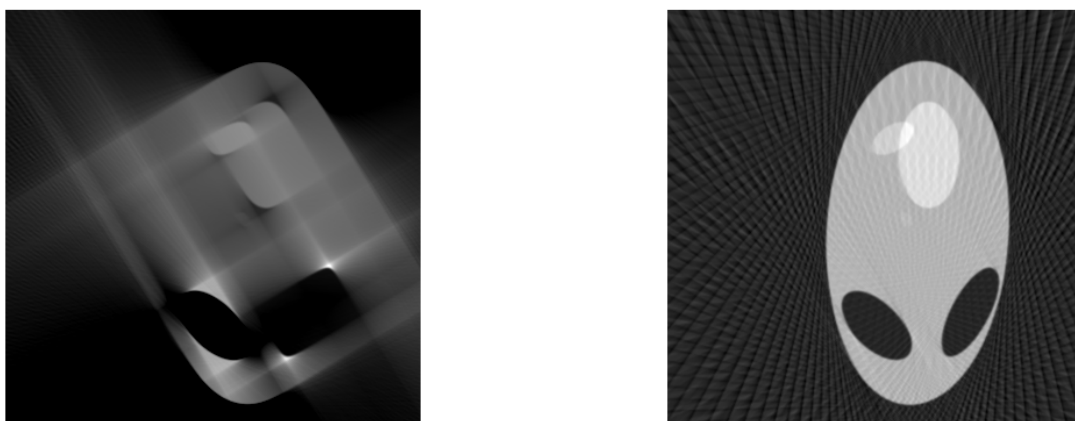


图 14: 改变数据重建后的图像

图14中左图旋转角数据不足180度，右图以3度为旋转角间隔。由这两组试验中可以说明如果旋转角度不足180度，则重建图像失真；若旋转角度间隔增大，则重建图像相对于原图像差别越大。由此可以验证问题一中对旋转角度判断的合理性。

问题二、问题三的图像分析

在问题二图片的处理过程中，重建后的图像与实际图像重合度非常接近，但是产生了小部分偏差。图6中椭圆外数据由于和椭圆内数据偏差过大，可以基本判断是图像重建带来的误差，由此可以剔除掉这些点来获得更加精确的重建图，所以得到的结果基本可以认为是未知介质的信息。但是在问题三的图像重建过程中，由于数据的复杂性，不能进行人为的判断来剔除掉重建过程中带来的误差，所以获得的图像和实际未知介质的信息会由一定偏差。

7 模型的评价与展望

模型的评价

在本篇论文中数学建模和算法有以下优点：

- 巧妙利用标定模板的几何性质，寻找旋转中心和物体重心的函数关系，由此求出旋转中心。

- 研究了投影算法的本质和数学处理过程，分别用算法实现了直接反投影和滤波反投影两种图像重建方式，并研究了算法的弊端。

- 经过评价指标归一化均方判据 d 和归一化平均绝对距离判据 r ，检验出算法的精确性较高，重建图像和现实图像能够较好吻合。

- 用实际数据验证了假设和问题一中CT射线旋转角度对重建图像的影响。

当然模型也存在以下缺点：

- 标定参数非常依赖于重心法中的数据计算的准确性。

- 对于复杂的数据，由于图像重建过程中产生的偏差，很难进行剔除。问题三的求解过程已经体现了这个缺点。

模型的展望

在问题的解决过程和文献查阅过程中，了解到实际上在现实应用领域中平行光束CT系统由于X射线辐射较强，在实际工程实践中已经很少被采用，散束扫描与锥束扫描是目前工程实践领域C系统T主流的扫描方式。本文模型和算法仅提供一种理论的思考和借鉴，不具有工程实践意义。如果需要探求在实际工程中的CT图像质量的提高，还需要进一步挖掘和探求更深入的实际问题。

另外，目前CT 图像质量与以前相比，通过硬件的提高和校准的模型与算法已经有了明显改善，但是还要看到CT在发展中还存在一个重要的现象——图像质量的提高是以增大X线的能量为代价。除了工业和其他领域的应用外，在医学发展上既要获取高质量的图像，又要使患者尽量地减少X 射线辐射，这应是下一步 CT 改革的重点之一——追求绿色 CT。CT探测器发展的方向之一是要继续提高灵敏度，在不增加甚至减少辐射剂量的前提下，提高图像质量^[8]。

其次，如果CT 的空间分辨率能再提高1到2个数量级，达到微米或近微米($10\ \mu\text{m}$) 水平，即可清晰显示细胞和组织的结构，多层螺旋CT 的图像质量虽然有了很大提高，但还不能达到这个水平；而且目前探测器的材料、工艺和设计限制了分辨率进一步提高，相关科研和工程技术难题有待突破和提高。

但CT探测技术在未来的应用前景将十分巨大，在推动人类生活前进的道路上将发挥巨大作用。

文献参考：

- [1] DONATH T,BECKMANN F,SCHREYER A. Automated determination of the center of the rotation in tomography data[J]. J. Opt. Soc. Am 2006, A23:1048-1057.
- [2] OLANDER B. Center of rotation determination using projection data in x-ray micro computed tomography, Linkoping Univesity, Sweden, 1994.
- [3] 李保蕾, 傅健, 魏东波等. 工业计算机断层成像系统转台旋转中心的确定[J].航空动力学报, 2009, 24(7):155-158.
- [4] 刘文杰. 基于光栅成像的螺旋CT算法研究. 硕士学位论文. 大连: 大连理工大学. 2009.12.
- [5] 庄天戈. CT原理与算法. 上海: 上海交通大学出版社, 1992.31
- [6] 张铁, 李建东, 李长军等.CT成像的改进Fourier算法及其实验[J]. CT理论与应用研究, 2000, 9(4): 7-11.
- [7] 余浩. PET/CT中CT探测器中心定位不准的图像校正研究. 硕士学位论文. 武汉: 华中科技大学. 2012.8.8.
- [8] 卫小乐, 蒋宁等.CT探测器的设计与最新技术[J]. 核电子学与探测技术, 2003, 23(5): 476-480.

程序附录

得到附件二灰度图

```
R1=xlsread('2.xls');
theta = 0:1:179;
r1_show = flipud(R1');
imshow(r1_show, []);
axis xy;
axis on;
xlabel('\rho');
ylabel('\theta');
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming',357);
figure;imshow(f1, []);
```

求初始入射角

```
I = imread('angle.png');
%反相%
I=imcomplement(I);
%转化为二值图%
bw = im2bw(I);
bw=edge(bw);
[L,Num]=bwlabel(bw);
ore=regionprops(L, 'Orientation');
for i=1:Num
    ori(i)=ore(i).Orientation;
end
%椭圆长轴与x轴夹角%
angle_1=ori(1)
```

重心法求参数

```
A=xlsread('2.xls');
a=zeros(1,180);
b=zeros(1,512);
for i=1:180
    for j=1:512
        b(j)=j*A(j,i);
    end
    b1=sum(b); a1=sum(A(:,i));
    a(i)=b1/a1;
```

```

end
%画出图像%
plot(pi/180:pi/180:pi,a)
%找出最低点%
a_min=find(a==min(a));
%旋转中心投影%
cor=a(a_min-90);
%旋转中心与重心的距离%
rho=cor-a(a_min);
length=0.2769*rho;

```

直接反投影

```

clf;A=xlsread('3.xls');
P=zeros(1,180);Q=zeros(100);t=zeros(1,180);
for x=1:100
    for y=1:100
        for i=1:180
            t(1,i)=(tan((i-150)*pi/180)*(x-45)-1*tan((i-150)*pi/180)-y-4+45)*cos((i-150)*pi/180)
%求点(x,y)点在接收器上投影到旋转中心的距离%
            l=256+floor(t(1,i));%求出点(x,y)在接收器上的数值%
            if l>512
                l=512;
            elseif l<1
                l=1;
            else
            end
            P(1,i)=A(l,i);%条件语句保证投影点不会超出接收器%
        end
    end
    Q(x,y)=sum(P)/180;
end
end
hold on
mesh(Q);%画出反投影变幻的图像%
axis equal
xlabel('x');ylabel('y');
hold off

```

数据拟合求吸收率比例

```

g1=xlsread('1.xls');
theta = 31.4482:1:210.4482;

```

```

%执行Radon变换%
[R1, xp1] = radon(g1, theta, 512);
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming', 357);
%将图像等比例缩小%
f2=f1(1:357/256:end, 1:357/256:end);
f2(f2 <= 0.3)=0;
a=f2(f2 >= 0.4);
x=0.4:0.0001:0.6;
a1=zeros(1, 2001);
for i=1:length(a)
    a1=a1+(x-a(i)).^2;
end
b=find(a1==min(a1));
x(b)

```

问题2求解

```

R1=xlsread('3.xls');
%根据初始入射角确定角度向量%
theta = 31.4482:1:210.4482;
%显示正弦图%
r1_show = flipud(R1'); xp1=(-255:1:256)';
imshow(r1_show, []);
axis xy;
axis on;
xlabel('\rho');
ylabel('\theta');
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming', 357);
figure; imshow(f1, []);
%将图像等比例缩小为256*256%
f2=f1(1:357/256:end, 1:357/256:end);
f2(f2 <= 0.3)=0;
f2=f2./0.5110;
%根据旋转中心位置进行平移%
for i=1:256
    if i <= 228
        f2(:, i)=f2(:, i+28);
    else
        f2(:, i)=zeros(256, 1);
    end
end

```

```

end
position_m=[10.0000      18.0000
34.5000      25.0000
43.5000      33.0000
45.0000      75.5000
48.5000      55.5000
50.0000      75.5000
56.0000      76.5000
65.5000      37.0000
79.5000      18.0000
98.5000      43.5000
];
%确定坐标对应的像素点%
position=round(position_m/0.3906);
%求对应点的值%
d=zeros(10,1);
for j=1:10
    d(j)=f2(257-position(j,2),position(j,1));
end

```

问题3求解

```

R1=xlsread('5.xls');
%根据初始入射角确定角度向量%
theta = 31.4482:1:210.4482;
%显示正弦图%
r1_show = flipud(R1'); xpl=(-255:1:256)';
imshow(r1_show, []);
axis xy;
axis on;
xlabel('\rho');
ylabel('\theta');
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming',357);
figure; imshow(f1, []);
%将图像等比例缩小为256*256%
f2=f1(1:357/256:end,1:357/256:end);
f2(f2<=0.3)=0;
f2=f2./0.5110;
%根据旋转中心位置进行平移%
for i=1:256
    if i<=228

```

```

f2 (: , i)=f2 (: , i+28);
else
f2 (: , i)=zeros (256 ,1);
end
end
position_m=[10.0000      18.0000
34.5000      25.0000
43.5000      33.0000
45.0000      75.5000
48.5000      55.5000
50.0000      75.5000
56.0000      76.5000
65.5000      37.0000
79.5000      18.0000
98.5000      43.5000
];
%确定坐标对应的像素点%
position=round(position_m / 0.3906);
%求对应点的值%
d=zeros (10 ,1);
for j =1:10
d(j)=f2 (257-position (j ,2) , position (j ,1));
end

```

求归一化均方距离判距

```

g1=xlsread ( '1.xls' );
theta = 31.4482:1:210.4482;
%执行Radon变换%
[R1, xp1] = radon(g1, theta ,512);
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta , 'Hamming' ,357);
%将图像等比例缩小为256*256%
f2=f1 (1:357/256:end ,1:357/256:end);
f2 (f2 <=0.3)=0;
a=f2 (f2 >=0.4);
x=0.4:0.0001:0.6;
a1=zeros (1 ,2001);
for i =1:length(a)
a1=a1+(x-a(i)).^2;
end
b=find (a1==min(a1));

```



```

f2=f2./x(b);
%归一化均方距离%
t=(g1-f2).^2;
r=(g1-1).^2;b=0;c=0;
for u=1:256
    b(u)=sum(t(u,:));
end
t_s=sum(b);
for v=1:256
    c(v)=sum(r(v,:));
end
r_s=sum(c);
d=sqrt(t_s/r_s)

```

求归一化绝对距离判距

```

g1=xlsread('1.xls');
theta = 31.4482:1:210.4482;
%执行Radon变换%
[R1, xp1] = radon(g1, theta, 512);
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming', 357);
%将图像等比例缩小为256*256%
f2=f1(1:357/256:end,1:357/256:end);
f2(f2<=0.3)=0;
a=f2(f2>=0.4);
x=0.4:0.0001:0.6;
a1=zeros(1,2001);
for i=1:length(a)
    a1=a1+(x-a(i)).^2;
end
b=find(a1==min(a1));
f2=f2./x(b);
%归一化平均绝对距离%
t=abs((g1-f2));
r1=abs(g1);b=0;c=0;
for u=1:256
    b(u)=sum(t(u,:));
end
t_s=sum(b);
for v=1:256
    c(v)=sum(r1(v,:));

```

```

end
r_s=sum(c);
r=t_s / r_s

```

求每次转3度的图像

```

A=xlsread('3.xls');
R1=zeros(512,60);
for i=1:60
R1(:,i)=A(:,3*i-2);
end
theta = 31.4482:3:210.4482;
%显示正弦图%
r1_show = flipud(R1');xp1=(-255:1:256)';
imshow(r1_show, []);
axis xy;
axis on;
xlabel('\rho');
ylabel('\theta');
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming',357);
figure;imshow(f1, []);
%将图像等比例缩小%
f2=f1(1:357/256:end,1:357/256:end);
f2(f2<=0.3)=0;
f2=f2./0.5110;
%根据旋转中心位置进行平移%
for i=1:256
if i<=228
f2(:,i)=f2(:,i+28);
else
f2(:,i)=zeros(256,1);
end
end
end

```

求旋转90度的图像

```

R=xlsread('3.xls');
R1=R(:,1:90)
theta = 31.4482:1:120.4482;
%从正弦图得到反投影图%
f1 = iradon(R1, theta, 'Hamming',357);imshow(f1)

```