

Teoría de Redes o Grafos

Área de Estadística e Investigación Operativa
Licesio J. Rodríguez-Aragón

Abril 2011

Introducción	2
Introducción	3
Contenido	4
Conceptos y Definiciones	5
Definiciones Generales	6
Grafos Orientados	7
Tipos de Redes o Grafos	9
Grafos no Orientados	11
Otros Conceptos	12
Núcleo de una Red	13
Niveles en una Red	14
Niveles de una Red	15
Obtención de los Niveles de una Red	16
Ejemplo:	17
Árbol	18
Árbol.	19
Algoritmo de Kruskal	20
Algoritmo de Solin	21
Componentes Fuertemente Conexas	22
Componente Fuertemente Conexa	23
Fuertemente Conexa:	24
Circuitos Elementales	25
Búsqueda de Circuitos Elementales	26
Ejemplo:	27
Caminos Mínimos	30
Búsqueda de Caminos Mínimos	31
Algoritmo de Floyd	32
Ejemplo:	33
Algoritmo de Dijkstra	39
Ejemplo:	40
Caminos Hamiltonianos	41

El Problema del Viajante	42
Teorema de Existencia	43
Multipliación Latina	44
Ejemplo:	45
Ejemplo:	46
Caminos Hamiltonianos	47

Introducción

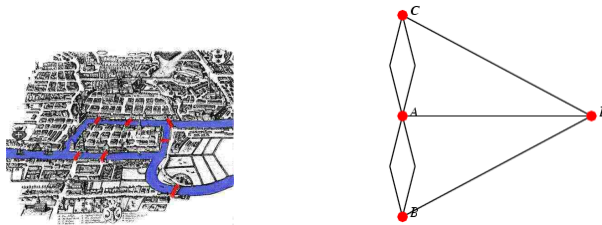
Los modelos basados en redes o grafos proporcionan soluciones a veces espectaculares a problemas de la más variada naturaleza.

Disciplinas como:

- ☐ Economía.
- ☐ Ingeniería.
- ☐ Sociología.
- ☐ Biología, etc.

La presentación de los resultados tienen la ventaja de ser perfectamente comprensible, incluso para una persona poco iniciada en las matemáticas.

Recordar el problema de los puentes de Königsberg resuelto por Euler.



Además, la teoría de grafos permite una presentación visual clara de muchos problemas que admiten también otro tipo de resoluciones.

Ejemplos de problemas interesantes que pueden resolverse mediante teoría de grafos son:

- ☐ Determinar el recorrido de longitud mínima que ha de realizar un brazo robótico en un proceso de soldado.
- ☐ Calcular el flujo máximo que puede circular por una red de comunicaciones.
- ☐ Estudio de la viabilidad de una red vial.
- ☐ Cálculo de rutas óptimas en procesos de distribución y recogida de mercancía.
- ☐ Control de los tiempos de las tareas en que se subdivide un proyecto.

Contenido

Nos limitaremos a presentar algunas de las técnicas de esta teoría.

Es importante resaltar que la aplicación a problemas reales de los algoritmos que vamos a explicar, requiere del uso de ordenadores. Debido a la gran dimensión de los grafos que representan problemas reales.

La notación y la nomenclatura varía en el uso de los modelos de redes o grafos.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 4 / 47

Definiciones Generales

1 Llamaremos **Vértices** o **Nodos** a un conjunto V con un número finito o numerable de elementos.

2 Llamaremos **Arcos**, $U(V)$, a un subconjunto de $V \times V$ que representará parejas ordenadas de nodos o vértices.

Designando mediante números los nodos, $1, 2, \dots, n$, un arco vendrá dado por una pareja ordenada de números (i, j) . El vértice i es el origen del arco y el vértice j es el extremo. También se dice que i es el predecesor de j y que j es el sucesor de i .

Ejemplo:

3 Matriz de Incidencia: Es otra forma de representación de un grafo V mediante una matriz, $n \times n$, con n el cardinal del grafo V y tal que si $(i, j) \in U(V)$ el elemento (i, j) de la matriz será un 1; en caso contrario será un 0.

Ejemplo:

4 Red Valorada: En muchos casos cada arista o arco de un grafo tiene asociado un valor cuyo significado puede ser de distancia, tiempo, coste, capacidad, etc. La matriz de incidencia en ese caso sustituye el 1 por el valor que se asocie a cada arista.

Definiciones respecto a Grafos Orientados

5 Dado un vértice cualquiera i , el conjunto de arcos de la forma (h, i) se denominan **Arcos Incidentes Interiores**; $U(i-)$. El número de arcos incidentes interiores se denomina **Grado Interior del Vértice i** .

6 Dado un vértice cualquiera i , el conjunto de arcos de la forma (i, j) se denominan **Arcos Incidentes Exteriores**; $U(i+)$. El número de arcos incidentes exteriores se denomina **Grado Exterior del Vértice i** .

7 La suma del Grado Interior y el Grado Exterior es el número de arcos que inciden sobre un nodo y se denominan **Grado del Nodo**.

8 Grafo o Red Parcial: La obtenida del grafo o red inicial por supresión de al menos un arco de la misma.

9 Subred o Subgrafo: El obtenido por la eliminación de al menos un nodo de la red o grafo inicial.

Ejemplo:

10 Nodos Adyacentes: Aquellos que están unidos entre sí por al menos un arco.

11 Arcos Adyacentes: Dos arcos (i, j) , (h, k) se dice que son adyacentes si $j = h$ o $k = i$.

12 Camino: Sucesión de arcos adyacentes.

13 Dados dos vértices h y k diremos que están **Conectados** si al menos existe un camino desde h hasta k .

14 Diremos que un camino es **Simple** o **Sencillo** si no utiliza dos veces ninguno de los arcos que lo forman.

15 Diremos que un camino es **Compuesto** si utiliza al menos dos veces un mismo arco.

16 Diremos que un camino es **Elemental** si no pasa dos veces por ninguno de los vértices que lo forman.

Ejemplo:

Definiciones respecto a Grafos Orientados

17 Longitud de un camino: *es el número de arcos que lo componen.*

18 *Diremos que un camino finito (con un número finito de arcos y nodos) es un **Circuito** si los nodos inicial y final coinciden.*

19 Circuito Elemental: *Es un circuito que, con excepción del nodo inicial-final, no pasa dos veces por ningún otro nodo.*

20 Bucle o Lazo: *Es un circuito de longitud 1.*

21 Camino o Circuito Hamiltoniano: *Es aquel Camino o Circuito que pasa una sola vez por todos los Nodos del grafo. Es un Camino o Circuito Elemental que pasa por todos los vértices del grafo.*

22 Camino o Circuito Euleriano: *Es aquel Camino o Circuito que pasa una sola vez por todos los Arcos del grafo. Es un Camino o Circuito Simple que pasa por todos los arcos del grafo.*

Ejemplo:

Tipos de Redes o Grafos

23 Reflexiva: *Si cada Vértice tiene asociado un bucle.*

24 Simétrica: *Si existe el arco $(i, j) \Rightarrow \exists(j, i)$.*

25 Antisimétrica: *Si existe el arco $(i, j) \Rightarrow \nexists(j, i)$.*

26 Transitiva: *Si la existencia de los arcos (i, j) y (j, k) supone también la existencia del arco (i, k) .*

27 Completa: *Si para dos vértices cualesquiera existe al menos un arco que los une en al menos uno de los dos sentidos.*

28 Fuertemente Conexa: *Si para todo par de vértices i y j , con $i \neq j$, existe un camino desde i hasta j . Esta es una propiedad fundamental de cualquier red de comunicaciones bien organizada.*

Ejemplo:

Tipos de Redes o Grafos

29 Red Periódica: Es una red Fuertemente Conexa en la que la longitud de todos los circuitos es un múltiplo de un número mayor que 1. Este máximo común divisor es el período de la red.

Ejemplo:

30 Clase Final: Dada una red $A, U(A)$ y siendo $B, U(B)$ una subred, diremos que $B, U(B)$ es una Clase Final si:

- ☐ Existe al menos un vértice $i \notin B$ tal que tiene un sucesor directo en B .
- ☐ $B, U(B)$ es fuertemente conexa.

Una Clase final con un sólo elemento recibe el nombre de vórtice.

Los Nodos de B que son sucesores directos de nodos no pertenecientes a B reciben el nombre de sumideros.

Una red fuertemente conexa sólo tiene una clase final, ella misma.

Ejemplo:

Conceptos respecto a Grafos no orientados

31 Diremos en un Grafo no Orientado, V , que dos vértices están ligados entre sí, si $(i, j) \in U(V)$ o $(j, i) \in U(V)$, o ambas condiciones a la vez.

32 Cadena: Es una sucesión de Aristas, cada una de ellas unida a la anterior y a la siguiente por cada una de sus extremidades.

33 Cadena Sencilla: Si todas las Aristas son distintas.

34 Cadena Compuesta: En caso en que las Aristas que forman la cadena, se repitan.

35 Componente Conexa: Conjunto de Vértices que pueden unirse entre si por medio de una cadena.

36 Longitud de una Cadena: Número de Aristas que forman una cadena.

37 Ciclo: Una cadena finita cuyos Vértices inicial y final coinciden.

38 Ciclo Elemental: Si pasa una sola vez por los vértices que lo componen, salvo el vértice inicial y final.

39 Red Conexa: Es aquella red tal que para todas las parejas de vértices cualesquiera, están unidos por una cadena.

40 Subconjunto de Articulación: Un subconjunto de Nodos $B \subset A$ es de Articulación si la subred $A - B$ no es conexa.

Si el Subconjunto de Articulación está formado por un único nodo entonces se llama punto de corte.

41 Puente o Istmo: Una Arista cuya supresión incrementa el número de componentes conexas. Una red conexa posee una única componente conexa, ella misma.

42 Red Plana: Es toda red que pueda representarse en un plano sin que se corten sus aristas.

Ejemplo:

Otros Conceptos

43 Distancia entre dos Vértices: En una red conexa, la distancia entre 2 vértices i y j es la menor de las longitudes de las cadenas que los unen.

44 Diámetro de una Red: La mayor de una de las distancias de una red.

45 Desviación entre i y j : Dados dos vértices i y j de una red, la desviación $d(i, j)$ es la longitud del camino más corto que va de i a j . Puede ocurrir que $d(i, j) \neq d(j, i)$. $d(i, i) = 0$; Si $d(i, j) = \infty \Rightarrow (i, j) \notin U(A)$.

46 Separación de un vértice: $S(i) = \max_{j \in V} d(i, j)$.

47 Conjunto Interiormente Estable: Sea una red $(A, U(A))$, diremos que el subconjunto I de A es Interiormente Estable si 2 nodos cualesquiera de I no son adyacentes.

48 Conjunto Exteriormente Estable: Sea una red $(A, U(A))$, diremos que el subconjunto E de A es Exteriormente Estable si todo nodo del complementario de E es origen de al menos un arco cuyo extremo es uno de los vértices de E .

49 Número de Estabilidad Interna/Externa: Número máximo de vértices capaces de formar un subconjunto Interiormente/Exteriormente Estable.

Ejemplo:

Núcleo de una Red

50 Núcleo: Subconjunto N que es interiormente y exteriormente estable a la vez.

Para obtener los núcleos de un grafo trabajaremos con su matriz de incidencia.

- ☐ Subconjunto interiormente estable: tales que su submatriz de incidencia correspondiente es nula.
- ☐ Una vez encontrados los subconjuntos interiormente estables, verificamos si son exteriormente estables: sumamos las columnas correspondientes a los vertices del subconjunto como si fueran vectores.
- ☐ Si todas las componentes de la suma, excepto las de los vértices considerados, son distintas de cero, el subconjunto es núcleo.

Niveles en una Red

51 Descendiente: Diremos que el vértice j es un descendiente de i si hay un camino con origen en i y extremo en j .

52 Ascendiente: Diremos que el vértice i es un ascendiente o antecesor de j si hay un camino con origen en i y extremo en j .

53 Clausura de un vértice: Llamaremos clausura de un vértice i , $\mathcal{K}(i)$, al conjunto formado por todos los descendientes de i .

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 14 / 47

Niveles de una Red

15 / 47

Obtención de los Niveles de una Red

Con frecuencia es necesario en procesos de fabricación o de gestión, secuenciales, clasificar el conjunto de tareas en niveles.

Diremos que una red estará clasificada en niveles, cuando se han definido sobre ella una partición en subconjuntos interiormente estables, que llamaremos niveles, entre los que se ha definido una relación de orden:

- ☐ Los elementos del último nivel no poseen ascendientes.
- ☐ Los nodos de un nivel dado tienen sus antecesores en los niveles superiores.

Procedimiento para establecer los niveles:

- ☐ Consideremos la matriz de incidencia asociada al grafo, cada 1 en la posición (i, j) representa un arco con origen en el vértice i y destino en el j .
- ☐ Añadimos columnas por la derecha de la matriz. s_1, s_2, \dots
- ☐ s_1 será la suma de las columnas de la matriz de incidencia.
- ☐ Los componentes nulos, de s_1 son los vértices de primer nivel que carecen de descendiente.
- ☐ $s_2 = s_1 - c_1$ donde c_1 son las columnas de los vértices de primer nivel. Los componentes nulos de s_2 son los vértices de segundo nivel.
- ☐ $s_i = s_{i-1} - c_{i-1}$.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 16 / 47

Ejemplo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1			1	1											
2				1	1										
3						1									
4						1			1						
5							1								
6								1							
7									1						
8										1					
9										1					
10															

Árbol

54 *Un árbol es toda red finita, conexa y sin ciclos.*

- ☐ *El vértice 0 representa la raíz del árbol.*
- ☐ *Los nodos finales reciben el nombre de hojas.*
- ☐ *Los demás nodos, nodos de ramificación.*
- ☐ *Si un árbol tiene n nodos, tendrá $n - 1$ aristas.*
- ☐ *Excluida la raíz, los demás vértices forman subconjuntos disjuntos, cada uno de ellos árbol.*
- ☐ *Todo par de vértices están unidos por una única cadena.*

Ejemplo:

55 *Un árbol generador de una red conexa y sin bucles es una red parcial de la inicial que tiene estructura de árbol.*

56 *Si la red está valorada, llamaremos árbol generador mínimo/máximo a aquél árbol generador cuya suma de los arcos seleccionados sea mínima/máxima.*

Ejemplo:

Algoritmo de Kruskal

1. Seleccionamos el arco de valor mínimo/máximo.
2. Seleccionamos un arco, de entre los que no estén seleccionados, que tenga un extremo en común con éstos y de forma que no se genere un ciclo, de todos los posibles arcos elegimos el mínimo/máximo.
3. Repetir el paso anterior hasta haber conectado todos los nodos.

Ejemplo:

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 20 / 47

Algoritmo de Solin

1. Construir la matriz de incidencia.
2. Seleccionar el mínimo/máximo elemento de la matriz y marcarlo. Si hay varios se escoge uno al azar.
3. Eliminamos la columna del elemento marcado y seleccionamos la fila correspondiente a la columna eliminada.
4. De entre los elementos de las filas seleccionadas, que no hayan sido eliminados, tomamos aquél mínimo/máximo y repetimos el proceso del paso anterior hasta que no se puedan seleccionar más valores.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} & 10 & 50 & 70 & 90 & \\ 10 & & 60 & 40 & 30 & \\ 50 & 60 & & 50 & & 10 \\ 70 & 40 & 50 & & 80 & 30 \\ 90 & 30 & & 80 & & \\ & & 10 & 30 & & \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 21 / 47

Componente Fuertemente Conexa

57 *Una componente fuertemente conexa de una red orientada, es una subred fuertemente conexa tal que no existe otra subred que la contenga y que sea fuertemente conexa.*

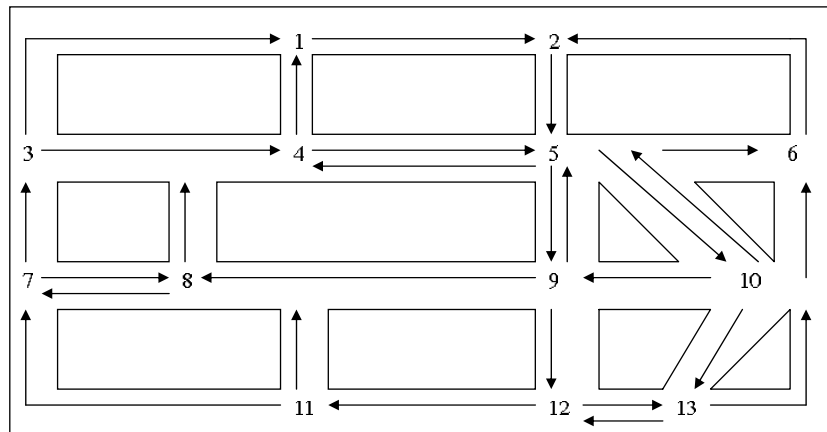
Algoritmo del + y del –:

1. Elegir un vértice al azar y marcarlo con + y –.
2. Marcar con – los predecesores inmediatos y con + los sucesores inmediatos de dicho vértice.
3. Marcar con – los predecesores de los nodos marcados con – y con + a los sucesores de los nodos marcados con +.
4. Repetir el proceso anterior mientras sea posible. Los nodos marcados con + y – forman una componente fuertemente conexa.
5. Eliminamos la componente fuertemente conexa obtenida y repetimos desde el principio.

Ejemplo:

Fuertemente Conexa:

Comprobar si la siguiente distribución de direcciones en un barrio es correcta:



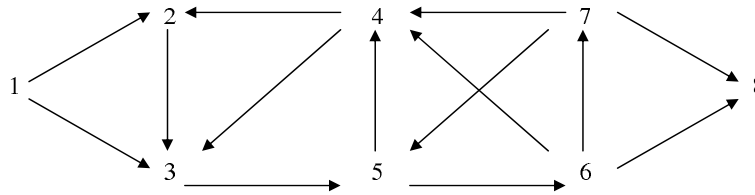
Búsqueda de Circuitos Elementales

Circuito Elemental: Un camino finito en el que coincidan los vértices inicial y final. Además al ser elemental implica que no pasa dos veces por ninguno de los nodos que lo forman, salvo por el nodo inicial.

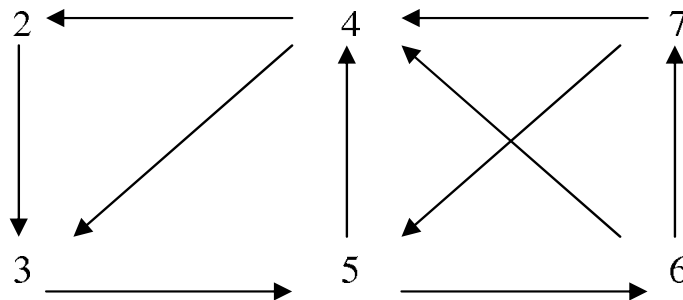
1. Eliminar los nodos que únicamente posean sucesores o predecesores.
2. Elegir un vértice al azar y marcarlo, \star .
3. Elegir un arco saliente, no marcado, del último vértice marcado; asignarle una marca, $+$.
4. Dependiendo del tipo de marca que posea el vértice de llegada del último arco elegido:
 - (a) Si el vértice de llegada de dicho arco no está marcado, seleccionamos un arco que salga de él. Marcamos el vértice, $-$, y el arco, $+$.
 - (b) Si el vértice al que accede el último arco está marcado con un signo diferente a, \star , entonces hemos obtenido un circuito al que no pertenece el vértice inicial. Entonces marcamos con una nueva señal, $\#$, el último arco considerado y liberamos el último vértice marcado. Buscaremos si es posible otro arco saliente que en caso de encontrarlo marcaremos con, $+$, y el vértice con $-$. Sino, marcaremos dicho arco, $\#$ y repetiremos la operación.
 - (c) Si el nodo al que accede el último arco tiene la marca, \star , entonces hemos definido un circuito elemental formado por los arcos adyacentes marcados con $+$.
5. Una vez obtenido el circuito, añadimos una nueva marca a su último arco, \square , no doblemente marcado y probamos con otro arco saliente del último nodo marcado.
6. Una vez marcados doblemente todos los arcos salientes de un nodo, marcaremos con \square el arco que nos dio acceso a dicho nodo y liberamos los nodos inicial y final de dicho arco. Continuamos el proceso a partir del vértice origen liberado y lo repetimos hasta liberar el vértice originariamente marcado, \star .
7. Habremos encontrado todos los circuitos elementales que pasan por el vértice, \star . Una vez hecho esto eliminamos dicho vértice y todas las marcas y repetimos el proceso.

Ejemplo:

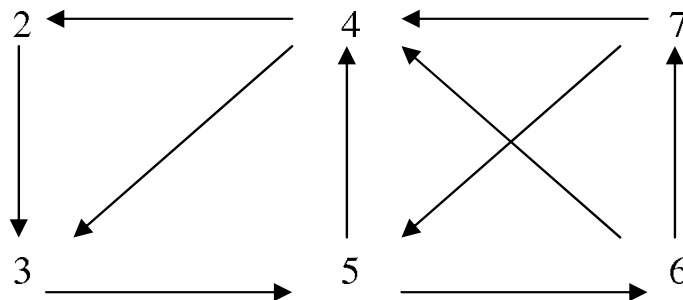
Búsqueda de circuitos elementales:



Eliminamos los nodos 1 y 8, vértices sin sucesores o predecesores, de ellos no se puede entrar o salir.



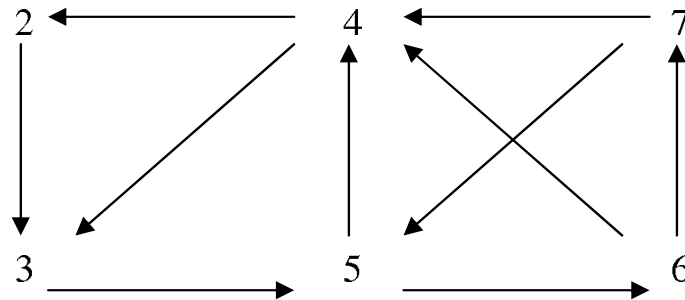
Seleccionamos un vértice al azar, 2 (*), buscaremos los circuitos elementales que pasan por él. Seleccionamos un arco saliente no marcado, del último vértice marcado (2), (2 – 3) y lo marcamos (+).



Marcamos el vértice no marcado, (3), con (–) y un arco que salga de él con (+), (3 – 5).

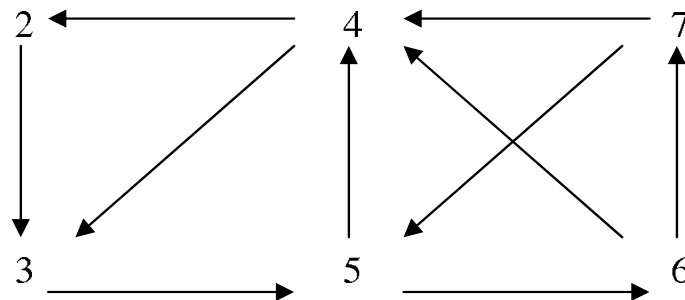
Ejemplo:

Marcamos el vértice no marcado (5), con $(-)$ y un arco que salga de él con $(+)$, $(5 - 4)$.



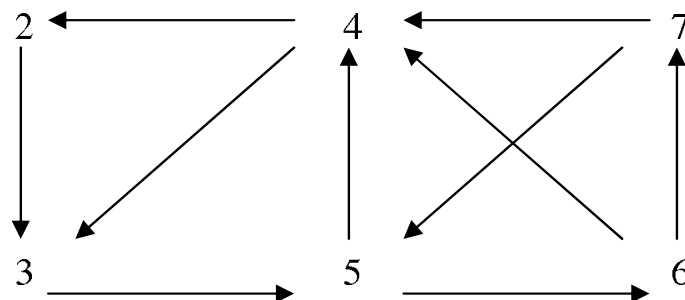
Marcamos el vértice no marcado, (4), con $(-)$ y un arco que salga de él con $(+)$, $(4 - 3)$.

El (3) está marcado, $(-)$, luego hemos encontrado un circuito al que no pertenece el nodo inicial, marcamos el arco $(4 - 3)$ con $(\#)$.



¿Hay algún arco más, no marcado que salga de (4)? Marcamos con $(-)$ el arco $(4 - 2)$. Llegamos a 2, $(*)$. Circuito: $2 - 3 - 5 - 4 - 2$.

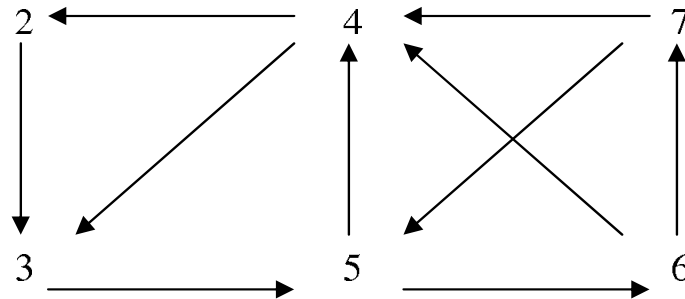
Marcamos $(4 - 2)$ con (\square) , y probamos con otro arco saliente del último nodo marcado, (4). No hay mas!, están marcados doblemente todos los arcos.



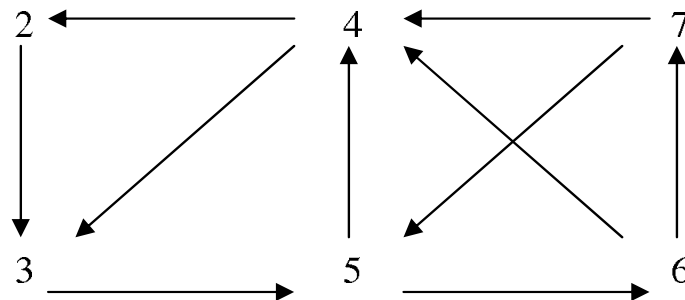
Marcamos con (\square) el arco que nos dio acceso a (4) y desmarcamos el (4).

Ejemplo:

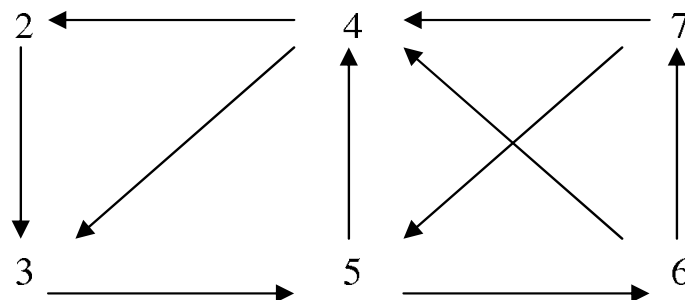
Marcamos (5) con $(-)$ y $(5 - 6)$ con $(+)$. Marcamos (6) con $(-)$ y $(6 - 4)$ con $(+)$. Marcamos (4) con $(-)$ y $(4 - 2)$ con $(+)$, ya que $(4 - 3)$ está doblemente marcado.



Llegamos a 2, (\star) . Circuito: $2 - 3 - 5 - 6 - 4 - 2$. Marcamos $(4 - 2)$ con (\square) . No hay más arcos salientes de (4). Marcamos $(6 - 4)$ con (\square) . Desmarcamos el vértice (4) y los arcos que salen de él.



Marcamos $(6 - 7)$ con $(+)$. Marcamos (7) con $(-)$ y $(7 - 5)$ con $(+)$, añadimos $(\#)$. Marcamos $(7 - 4)$ con $(+)$ y (4) con $(-)$. $(4 - 3)$ con $(+)$, añadimos $(\#)$. $(4 - 2)$ con $(-)$. Ciclo: $2-3-5-6-7-4-2$.



Hemos obtenido todos los circuitos elementales que pasan por (2). Lo eliminamos junto con todos los arcos incidentes en él y repetimos el proceso.

Búsqueda de Caminos Mínimos

El objetivo es encontrar caminos óptimos entre cualquier pareja de vértices del nodo.

- Algoritmo de Floyd: Obtiene todos los caminos óptimos entre parejas de vértices.
- Algoritmo de Dijkstra: Obtiene los caminos óptimos de un vértice dado, a los demás.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 31 / 47

Algoritmo de Floyd

Partimos de dos matrices D_0 y C_0 , donde:

- $D_0(i, j)$: representa el valor del arco cuyo origen es i y destino j . Si dicho arco no existe tomará el valor ∞ .
- $C_0(i, j) = i$, en general $C_k(i, j)$ representará el penúltimo vértice del camino de i a j .

Si la red dispone de n vértices el algoritmo de Floyd tendrá n fases.

Para cada fase consideraremos matrices D_k y C_k calculadas a partir de las anteriores, D_{k-1} , C_{k-1} .

Fases del Algoritmo:

1. $D_k(i, k) = D_{k-1}(i, k)$ y $C_k(i, k) = C_{k-1}(i, k)$, $\forall i$.
 $D_k(k, j) = D_{k-1}(k, j)$ y $C_k(k, j) = C_{k-1}(k, j)$, $\forall j$.
2. $\forall i, j \neq k$
 $D_k(i, j) = \min(D_{k-1}(i, j), D_{k-1}(i, k) + D_{k-1}(k, j))$
 Si $D_k(i, j) = D_{k-1}(i, j) \Rightarrow C_k(i, j) = C_{k-1}(i, j)$
 Si $D_k(i, j) = D_{k-1}(i, k) + D_{k-1}(k, j) \Rightarrow C_k(i, j) = k$

Una vez realizadas las n fases, $D_n(i, j)$ nos dará la distancia del camino más corto con origen en el vértice i y destino en el vértice j .

$C_n(i, j) = l$ nos dice que l es el penúltimo vértice del camino más corto de i a j ; $C_n(i, l) = m$ nos dará el antepenúltimo vértice del camino, y así sucesivamente.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 32 / 47

Ejemplo:

$$D_0 = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 4 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

k=1:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \mathbf{4} & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \mathbf{6} & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 33 / 47

Ejemplo:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 4 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

k=2

$$D_2 = \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{10} & 4 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \mathbf{4} & \infty & \mathbf{2} & \infty & \mathbf{6} \\ \infty & \mathbf{3} & \infty & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \mathbf{1} & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 3 & \mathbf{3} & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & \mathbf{4} & 4 & \infty & 4 & \infty \\ 5 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & \mathbf{6} & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 34 / 47

Ejemplo:

$$D_2 = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 4 & 8 & \infty & 16 \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 6 & 9 \\ \infty & 1 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

k=3

$$D_3 = \begin{pmatrix} \infty & & \mathbf{4} & & & \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & \mathbf{3} & \infty & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \infty & 1 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ \infty & & \mathbf{2} & & & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{1} & & & \\ 2 & 2 & \mathbf{2} & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 4 & 4 & \mathbf{4} & 2 & 4 & 2 \\ 5 & & \mathbf{5} & & & 5 \\ 6 & 6 & \mathbf{6} & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 35 / 47

Ejemplo:

$$D_3 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ \infty & 4 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 6 & 9 \\ \infty & 1 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ \infty & 5 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

k=4

$$D_4 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & \mathbf{7} & & 13 \\ \infty & & \infty & \mathbf{2} & & 6 \\ \infty & 3 & \infty & \mathbf{3} & & 9 \\ \infty & \mathbf{1} & \infty & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \infty & 5 & 2 & \mathbf{5} & & 3 \\ \infty & & \infty & \mathbf{3} & & \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \mathbf{3} & & 3 \\ 2 & & 2 & \mathbf{2} & & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \mathbf{3} & & 2 \\ 4 & 4 & 4 & \mathbf{2} & 4 & \mathbf{2} \\ 5 & 3 & 5 & \mathbf{3} & & 5 \\ 6 & & 6 & \mathbf{6} & & \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 36 / 47

Ejemplo:

$$D_4 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & 9 & 13 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & 5 & 9 \\ \infty & 1 & \infty & 3 & 2 & 7 \\ \infty & 5 & 2 & 5 & 7 & 3 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

k=5

$$D_5 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & \mathbf{9} & \\ \infty & 3 & & 2 & \mathbf{4} & 6 \\ \infty & 3 & & 3 & \mathbf{5} & \\ \infty & 1 & & 3 & \mathbf{2} & \\ \infty & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \infty & 4 & & 3 & \mathbf{5} & \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & \mathbf{4} & \\ 2 & 4 & & 2 & \mathbf{4} & 2 \\ 3 & 3 & & 3 & \mathbf{4} & \\ 4 & 4 & & 2 & \mathbf{4} & \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ 6 & 4 & & 6 & \mathbf{4} & \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 37 / 47

Ejemplo:

$$D_5 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & 9 & 12 \\ \infty & 3 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ \infty & 3 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ \infty & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ \infty & 5 & 2 & 5 & 7 & 3 \\ \infty & 4 & 7 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

k=6

$$D_6 = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 4 & 7 & 9 & \mathbf{12} \\ \infty & 3 & 6 & 2 & 4 & \mathbf{6} \\ \infty & 3 & 7 & 3 & 5 & \mathbf{8} \\ \infty & 1 & 4 & 3 & 2 & \mathbf{5} \\ \infty & 5 & 2 & 5 & 7 & \mathbf{3} \\ \infty & 4 & \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \quad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & \mathbf{2} \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 4 & \mathbf{5} \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 38 / 47

Algoritmo de Dijkstra

Objetivo: Encontrar los caminos mínimos desde un vértice del grafo que llamaremos origen a todos los demás vértices del mismo.

Usaremos 3 conjuntos en el desarrollo del algoritmo:

1. El conjunto C que contendrá los vértices del grafo cuyo camino mínimo desde el origen se desconoce.
2. El conjunto D de dimensión el grado del grafo, que contendrá las distancias mínimas entre el origen y el resto de los vértices.
3. El conjunto P , con las mismas dimensiones que D y que contendrá información relativa a los penúltimos vértices de los caminos mínimos.

1. $C = \{\text{Vértices del grafo}\}$
2. Condiciones Iniciales $D(i) = \infty$ salvo $D(O) = 0$ y para todo vértice $i \in C$, $P(i) = O$.
3. Se obtiene $i \in C$ tal que $D(i)$ es mínimo y eliminamos i de C , $C = C - \{i\}$.
4. $D(j) = \min\{D(j), D(i) + d(i, j)\} \forall j \in C$, si $D(j)$ cambia de valor entonces $P(j) = i$.
5. Repetir hasta que $C = \emptyset$.

Ejemplo:

Grafo:

Caminos mínimos desde A :

$$C = (A, B, C, D)$$

$$D = (0, \infty, \infty, \infty)$$

$$P = (A, A, A, A)$$

- $D(i)$ mínimo para $i = A$.

$$C = (B, C, D).$$

$$D(j) = \min\{D(j), D(A) + d(A, j)\} \forall j \in C, \text{ si } D(j) \text{ cambia de valor entonces } P(j) = A.$$

$$D = (0, 1, 8, 6), \quad P = (A, A, A, A).$$

- $D(i)$ mínimo para $i = B$.

$$C = (C, D).$$

$$D(j) = \min\{D(j), D(B) + d(B, j)\} \forall j \in C, \text{ si } D(j) \text{ cambia de valor entonces } P(j) = B.$$

$$D = (0, 1, 8, 4), \quad P = (A, A, A, B).$$

- $D(i)$ mínimo para $i = D$.

$$C = (C).$$

$$D(j) = \min\{D(j), D(D) + d(D, j)\} \forall j \in C, \text{ si } D(j) \text{ cambia de valor entonces } P(j) = D.$$

$$D = (0, 1, 6, 4), \quad P = (A, A, D, B).$$

- $D(i)$ mínimo para $i = C$.

$$C = (\emptyset).$$

FIN.

$$D = (0, 1, 6, 4), \quad P = (A, A, D, B).$$

D distancias mínimas desde A .

P penúltimos vértices de los caminos mínimos.

El Problema del Viajante

El Problema del Viajante (traveling salesman) consiste en encontrar un itinerario óptimo, en términos de coste (distancia, tiempo, etc.), para recorrer todos los nodos sin pasar dos veces por ninguno de ellos: **Camino Hamiltoniano**.

Si el recorrido tiene como destino el nodo de partida entonces será un **Circuito Hamiltoniano**.

No hay algoritmos exactos y eficientes para abordar este problema, por lo que los algoritmos usados tienen un carácter heurístico.

Los caminos hamiltonianos tienen una longitud $n - 1$ mientras que los circuitos hamiltonianos tienen una longitud n .

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 42 / 47

Teorema de Existencia

Teorema de König: Si una red es completa, existe al menos un camino hamiltoniano.

Teorema de Dirac: Si una red es simétrica, conexa y sin bucles, tal que para cualquier nodo el número de descendientes es mayor o igual que la mitad de sus nodos, entonces dicha red tiene al menos un circuito hamiltoniano.

Dado un circuito hamiltoniano, los circuitos que resultan de él por permutación circular de sus vértices se llaman **Circuitos Equivalentes**.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 43 / 47

Multiplicación Latina

Ejemplo:

Asociamos a la red una matriz latina:

- ☐ Si existe el vértice (i, j) en la coordenada correspondiente de la matriz colocamos los 2 vértices.
- ☐ En caso contrario pondremos un 0.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & 0 & 0 & AF \\ 0 & 0 & 0 & BD & BE & 0 \\ 0 & CB & 0 & 0 & 0 & CF \\ DA & 0 & DC & 0 & 0 & 0 \\ EA & 0 & EC & ED & 0 & EF \\ 0 & 0 & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix}$$

Obtendremos L_1^* eliminando de L_1 los vértices origen:

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ A & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & C & D & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \end{pmatrix}$$

El proceso de obtención de los caminos hamiltonianos de longitud i consiste en obtener $L_i = L_{i-1} \times L_1^*$ multiplicando como en el cálculo matricial y en un cierto sentido:

- ☐ Pondremos un 0 en la posición (i, j) si $\forall k = 1, \dots, n$ en los productos del elemento (i, k) por (k, j) al menos uno de ellos es 0.
- ☐ Si las dos celdas contienen secuencias, asociaremos 0 si la última letra de la celda (i, k) coincide con la primera de la celda (k, j) o si las dos secuencias tienen alguna letra repetida.
- ☐ Si al realizar estos productos, asociamos a cada secuencia contenida en la celda (i, k) una o más de la celda (k, j) sin que se repitan las letras, entonces llevaremos las secuencias encadenadamente a la celda (i, j) .

Ejemplo:

$$L_2 = L_1 \times L_1^* = \begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & 0 & 0 & AF \\ 0 & 0 & 0 & BD & BE & 0 \\ 0 & CB & 0 & 0 & 0 & CF \\ DA & 0 & DC & 0 & 0 & 0 \\ EA & 0 & EC & ED & 0 & EF \\ 0 & 0 & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ A & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & C & D & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ABD & ABE & 0 \\ BDA & 0 & BDC & AFD & AFE & 0 \\ BEA & 0 & BEC & BED & 0 & BEF \\ 0 & 0 & 0 & CBD & CBE & 0 \\ 0 & DAB & 0 & CFD & CFE & 0 \\ EDA & DCB & 0 & 0 & 0 & DAF \\ FDA & EAB & EDC & EFD & 0 & DCF \\ FEA & ECB & FEC & FED & 0 & EAF \\ & & & & & ECF \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$L_3 = L_2 \times L_1^* =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} ABD \\ AFD \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} ABE \\ AFE \end{smallmatrix} & 0 \\ \begin{smallmatrix} BDA \\ BEA \end{smallmatrix} & 0 & \begin{smallmatrix} BDC \\ BEC \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} BED \\ \end{smallmatrix} & 0 & \begin{smallmatrix} BEF \\ \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} CBD \\ CFD \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} CBE \\ CFE \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} DAB \\ DCB \end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} DAF \\ DCF \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} EDA \\ FDA \\ FEA \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} EAB \\ ECB \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} EDC \\ FEC \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} EFD \\ FED \end{smallmatrix} & 0 & \begin{smallmatrix} EAF \\ ECF \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & F \\ A & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & C & D & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & D & E & 0 \end{pmatrix}$$

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 46 / 47

Camino Hamiltoniano

- Las matrices L_i proporcionan los caminos elementales de longitud i .
- L_{n-1} proporciona los caminos hamiltonianos, de longitud $n - 1$.
- Para calcular los caminos hamiltonianos mínimos basta con evaluar la distancia de todos los caminos hamiltonianos y quedarse con el de menor longitud.
- Para calcular los circuitos hamiltonianos basta con considerar entre los caminos hamiltonianos aquellos que se puedan prolongar hasta su vértice inicial.

Licesio J. Rodríguez-Aragón

Métodos Cuantitativos Org. Ind. – 47 / 47