$\frac{\bar{X}-a}{\sigma}\sqrt{N} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\frac{\bar{X}-a}{\tilde{s}}\sqrt{N} \sim t_{n-1}$, где t_{n-1} распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы,

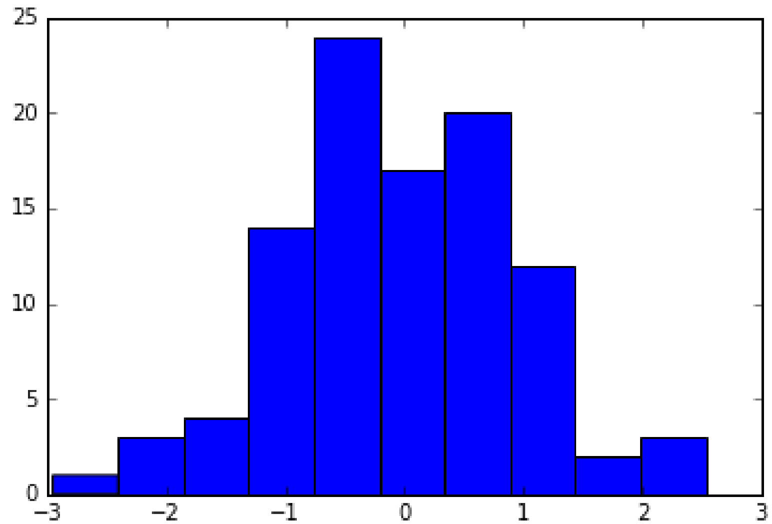
$\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ - стандартное отклонение

$\frac{(n-1)\tilde{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$, где $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}$

In [3]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt
import scipy.stats as sts
%matplotlib inline
```

In [4]:
```
alpha, N = .95, 100

def resample():
    return sts.norm(0.,1.).rvs(size=N)

sample = resample()

trash = plt.hist(sample, bins=N/10)
```



In [5]:
```
def interval_plot(lower_bound, upper_bound, ymin, ymax):
    y1, y2 = np.zeros(N), np.zeros(N)
    for i in range(1, N + 1):
        y1[i-1], y2[i-1] = lower_bound(sample[:i], i), upper_bound(sample[:i], i)
    plt.figure(figsize=(16, 8))
    plt.fill_between(np.arange(1, N + 1), y1, y2)
    plt.ylim(ymin, ymax)
    plt.show()
```

a)

Найдем точный доверительный интервал для a при $\sigma^2 = 1$.

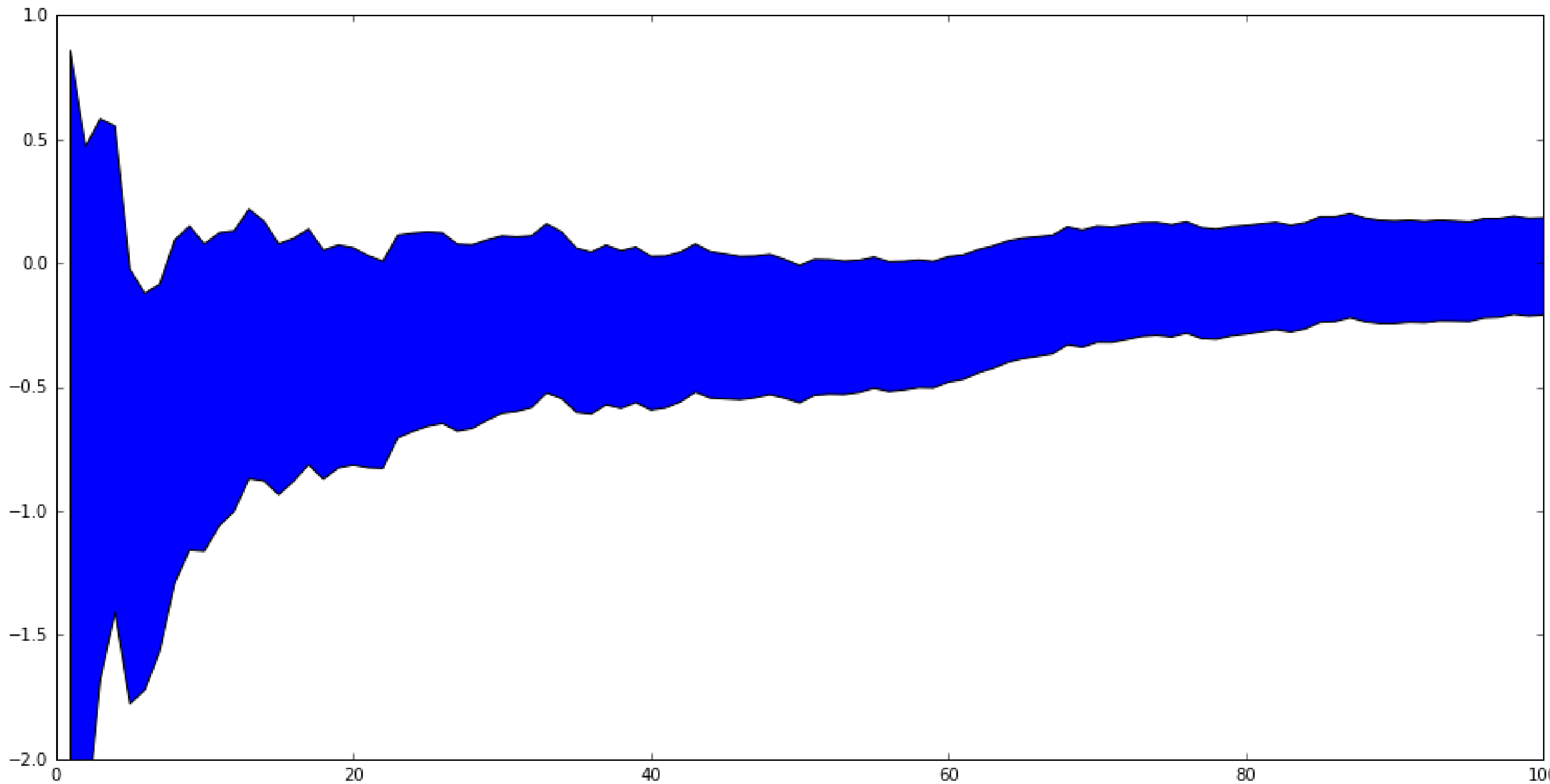
Для $N(\theta, 1)$ точным доверительным интервалом уровня α будет:

$$(\bar{X} - Z_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}}, \bar{X} + Z_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}})$$

где $Z_{(\frac{1+\alpha}{2})}$ - квантиль нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ уровня $\frac{1+\alpha}{2}$

In [21]:
```
z = sts.norm.ppf((alpha+1.)/2.)
lower_bound = lambda x, n: np.mean(x)-z*n**-.5
upper_bound = lambda x, n: np.mean(x)+z*n**-.5
```

In [22]:
```
interval_plot(lower_bound,
              upper_bound,
              -2.,
              1.)
```



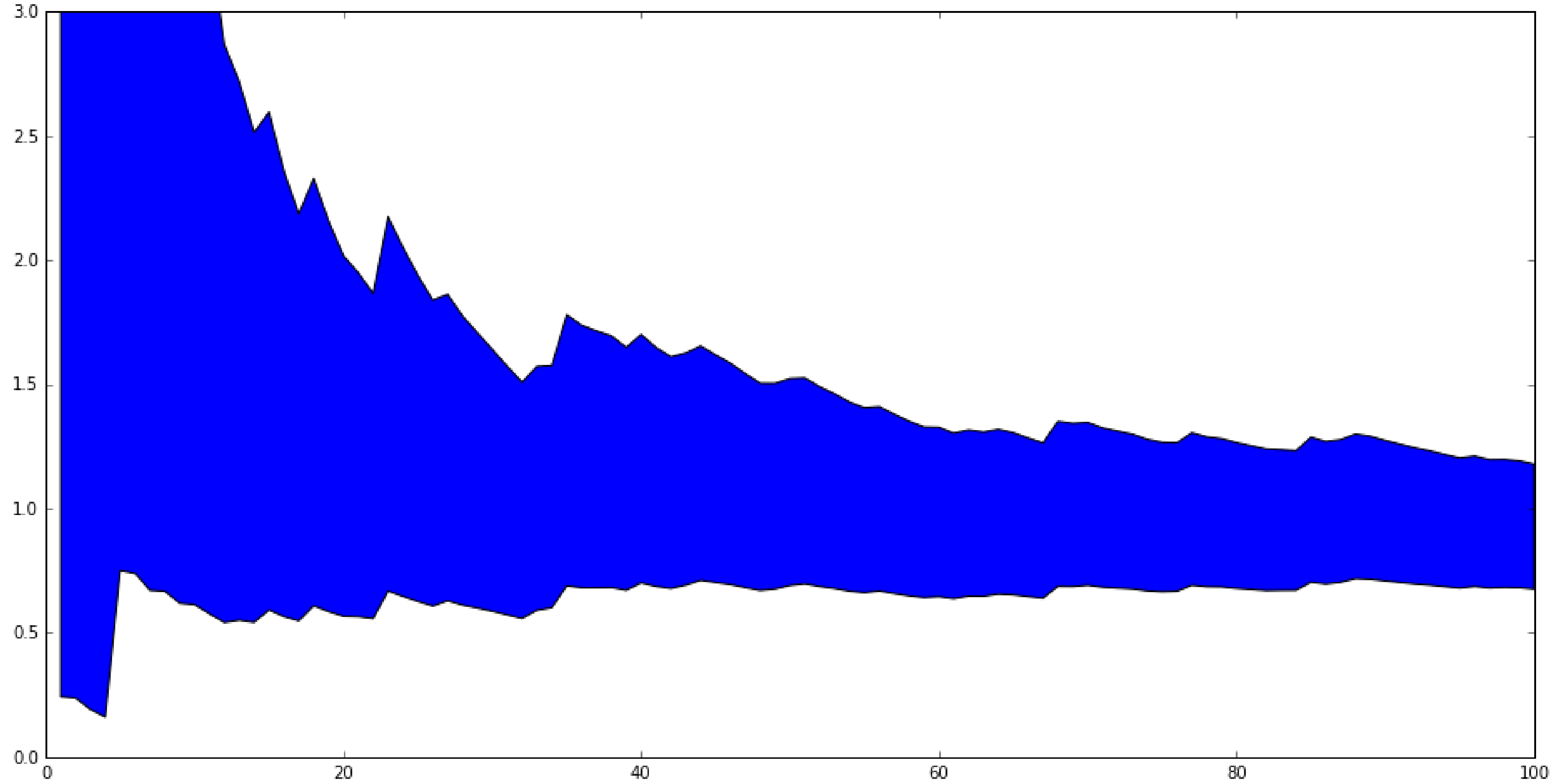
b)

Для $N(0, \theta)$ точным доверительным интервалом уровня α будет:

$(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{z_{\frac{1-\alpha}{2}}})$, г z - квантиль распределения χ^2_n

In [23]:
```
z_1 = lambda n: sts.chi2.ppf((1.+alpha)/2., df=n)
z_2 = lambda n: sts.chi2.ppf((1.-alpha)/2., df=n)
lower_bound = lambda x, n: np.sum(x*x)/z_1(n)
upper_bound = lambda x, n: np.sum(x*x)/z_2(n)
```

In [28]:
```
interval_plot(lower_bound,
              upper_bound,
              0.,
              3.)
```



c)

Для $N(\theta, \sigma^2)$ точным доверительным интервалом уровня α будет:

$(\bar{X} - t_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\tilde{s}}{\sqrt{N}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\tilde{s}}{\sqrt{N}})$

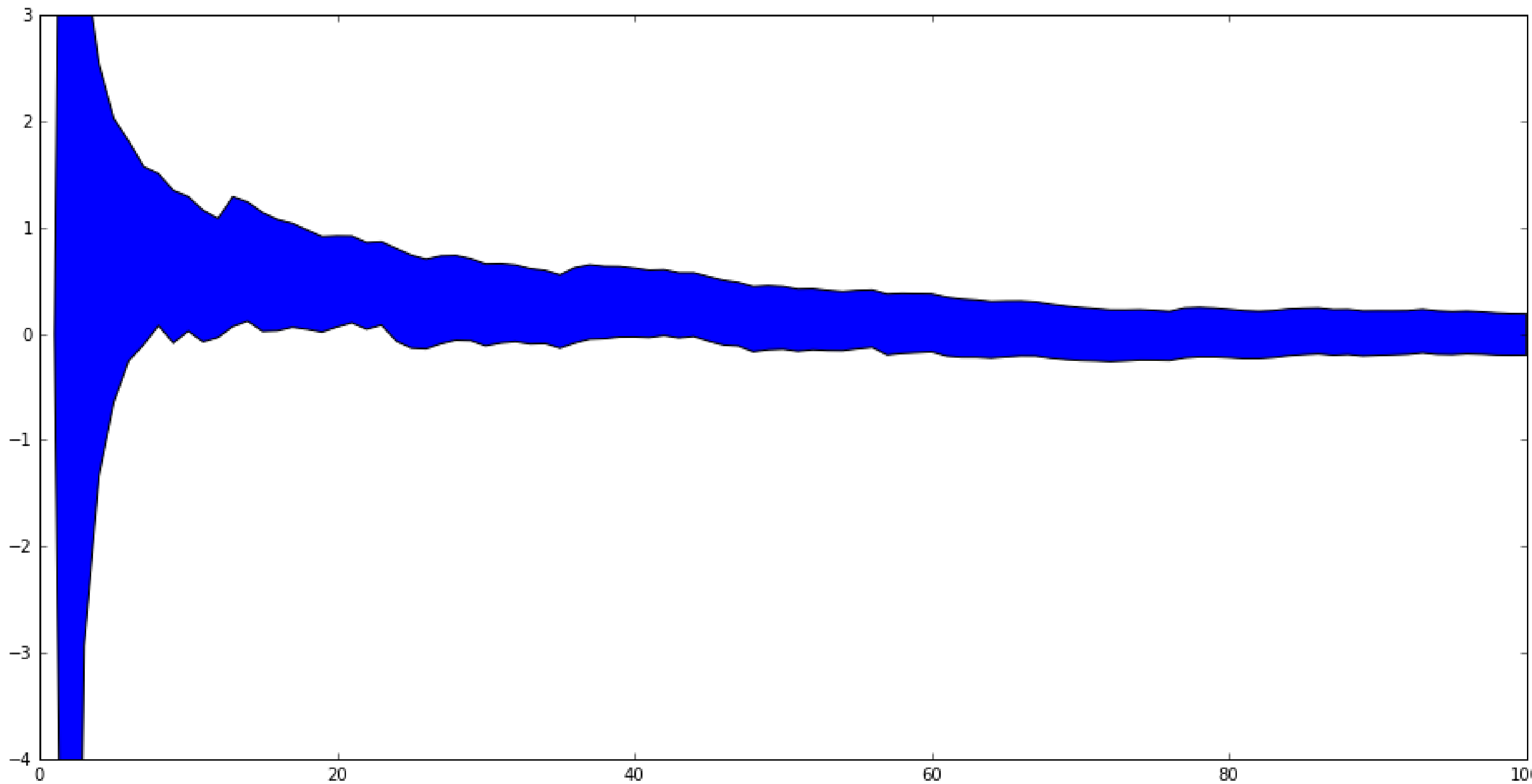
где $z_{(\frac{1+\alpha}{2})}$ - квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы уровня $\frac{1+\alpha}{2}$,

$\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ - стандартное отклонение

In [6]:
```
def interval_plot_c(lower_bound, upper_bound, ymin, ymax):
    y1, y2 = np.zeros(N), np.zeros(N)
    for i in range(2, N + 1):
        y1[i-1], y2[i-1] = lower_bound(sample[:i], i), upper_bound(sample[:i], i)
    plt.figure(figsize=(16, 8))
    plt.fill_between(np.arange(1, N + 1), y1, y2)
    plt.ylim(ymin, ymax)
    plt.show()
```

In [14]:
```
z = lambda n : sts.t.ppf((1.+alpha)/2., n-1.)
lower_bound = lambda x, n: np.mean(x) - (np.var(x) / (n-1)) ** 0.5 * z(n)
upper_bound = lambda x, n: np.mean(x) + (np.var(x) / (n-1)) ** 0.5 * z(n)
```

In [15]:
```
interval_plot_c(lower_bound,
                upper_bound,
                -4.,
                3.)
```



d)

Найдем точный доверительный интервал для σ^2 при неизвестном a.

Для $N(a, \theta)$ точным доверительным интервалом уровня α будет:

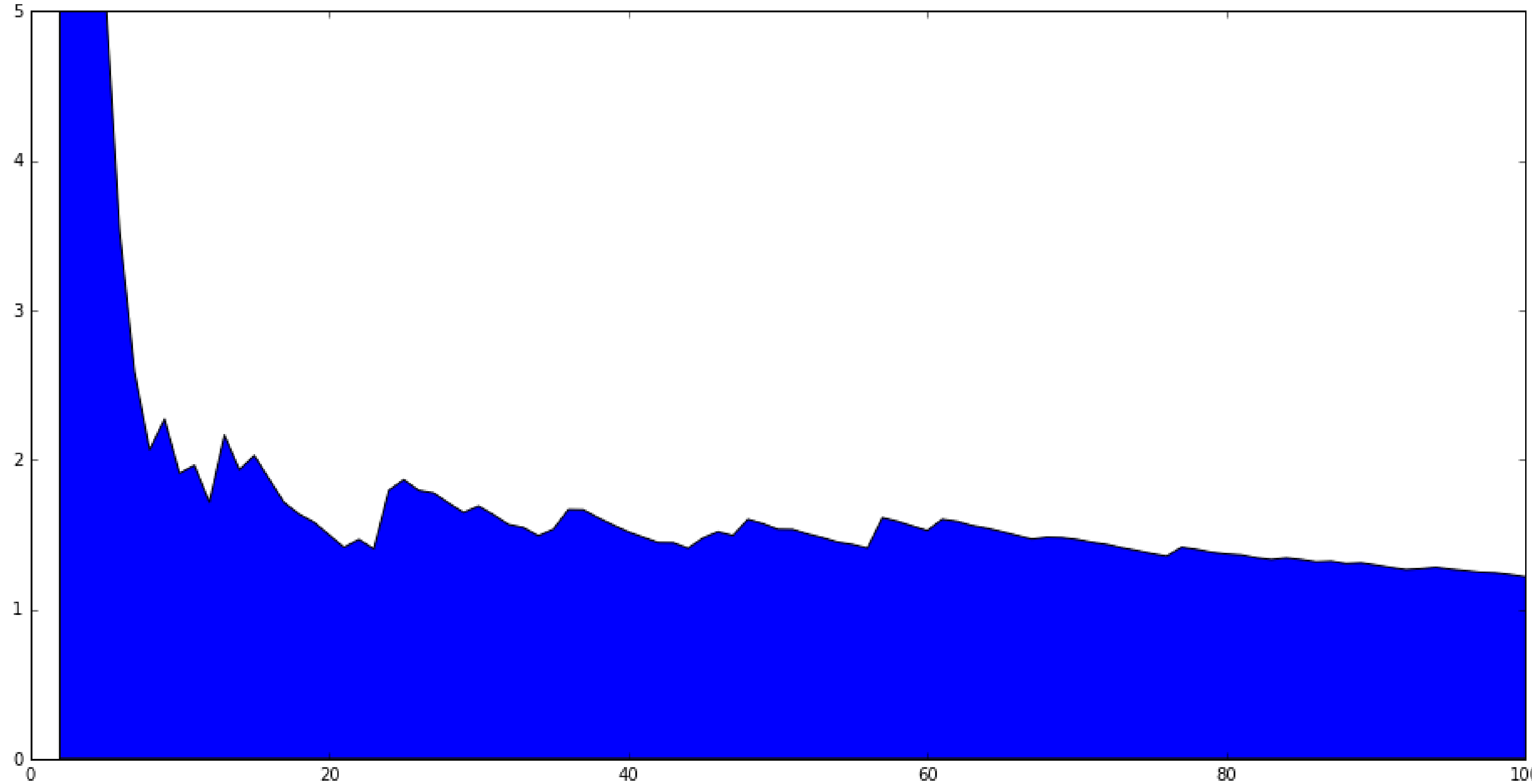
$P(0 < \sigma^2 < \frac{n|X-\overline{X}|^2}{z_{1-\alpha}}) = \alpha$,

z - квантиль χ^2_{n-1}

(возможно, правильный ответ - $\left(\frac{(n-1)\tilde{s}}{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\tilde{s}}{z_{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$, z квантиль распределения χ^2_{n-1}, $\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ - стандартное отклонение)

In [42]:
```
z = lambda n: sts.chi2.ppf(1.-alpha, df=n-1)
lower_bound = lambda x, n: 0.
upper_bound = lambda x, n: (n-1.)*np.var(x)/z(n)
```

In [44]:
```
interval_plot(lower_bound,
              upper_bound,
              0.,
              5.)
```



e)

Найдем точную доверительную область для (a, σ^2).

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-a)}{\sigma}$ распределен как $N(0, 1)$

$P(0 < \frac{(\overline{X}-a)^2}{\sigma^2} < \frac{z_1}{n}) = \sqrt{\alpha}$, где z_1 - квантиль уровня $\sqrt{\alpha}$ распределения χ^2_1.

$\frac{ns^2}{\sigma^2}$ распределен как χ^2_{n-1}

$P(0 < \sigma^2 < \frac{ns^2}{z_2}) = \sqrt{\alpha}$, где z_2 - квантиль уровня $1 - \sqrt{\alpha}$ распределения χ^2_{n-1}

$\frac{n(\overline{X}-a)^2}{\sigma^2}$ независим с $\frac{ns^2}{\sigma^2}$

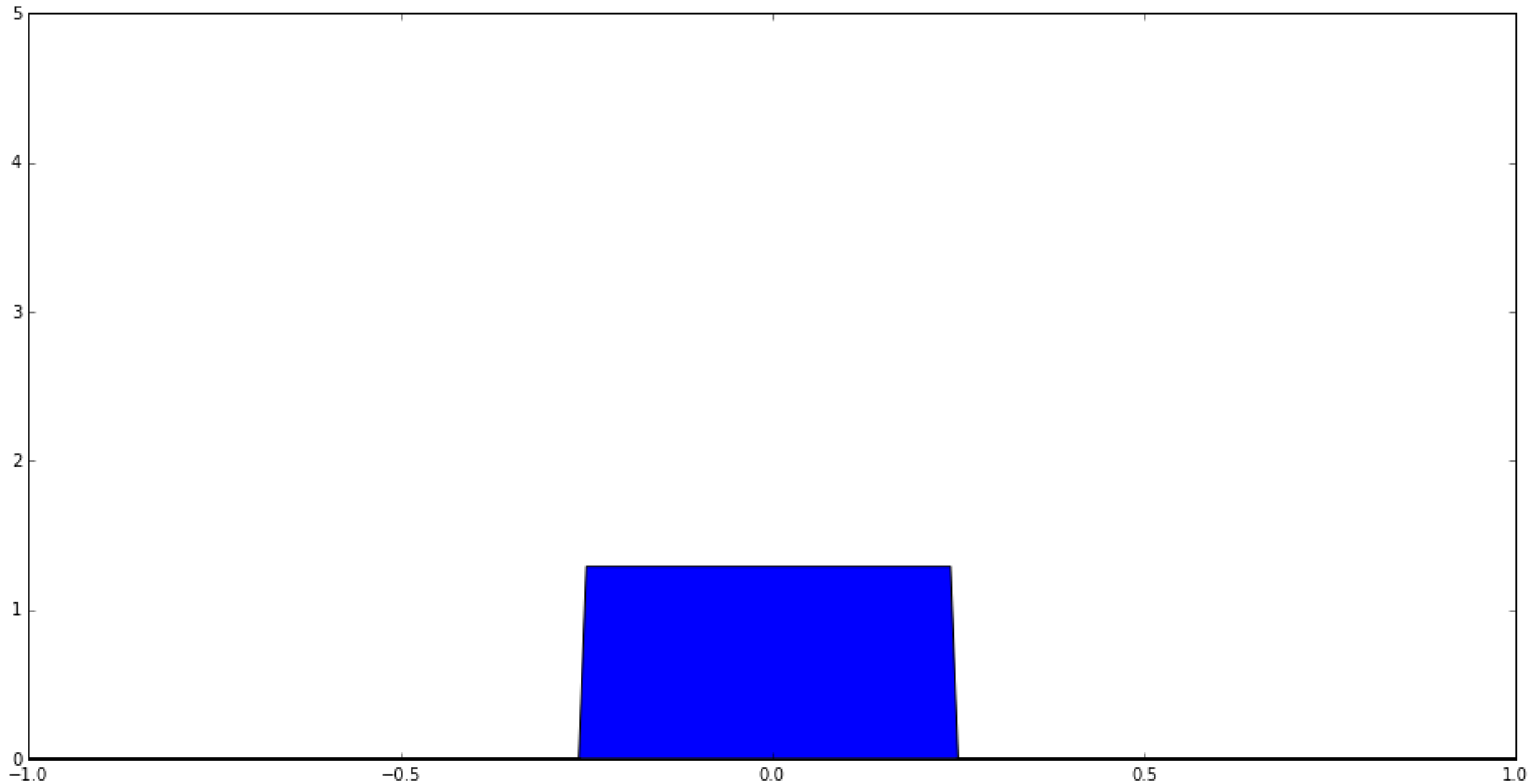
$$P(0 < \sigma^2 < \frac{ns^2}{z_2} \wedge 0 < \frac{(\overline{X}-a)^2}{\sigma^2} < \frac{z_1}{n}) = \alpha$$

$$P(0 < \sigma^2 < \frac{ns^2}{z_2} \wedge \overline{X} - \sqrt{\frac{s^2 z_1}{z_2}} < a < \overline{X} + \sqrt{\frac{s^2 z_1}{z_2}}) = \alpha$$

In [63]:

```
y1, y2, z1, z2 = [], [], sts.chi2.ppf(alpha**.5, df=1), sts.chi2.ppf(1.-alpha**.5, df=N-1)

x_min = np.mean(sample) - (np.var(sample) * z1 / z2) ** 0.5
x_max = np.mean(sample) + (np.var(sample) * z1 / z2) ** 0.5
y_min, y_max = 0, N*np.var(X)/z2

grid = np.arange(-10, 10, 0.01)

for x in grid:
    y1.append(y_min)
    if (x_min <= x <= x_max):
        y2.append(y_max)
    else:
        y2.append(y_min)

plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.fill_between(grid, y1, y2)

plt.xlim(-1, 1)
plt.ylim(0, 5)
```

Out[63]: (0, 5)



Вывод:

При известном одном из параметров доверительный интервал для другого гораздо меньше (лучше/точнее), чем когда не известно ничего