In [45]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sts
import math
%matplotlib inline
```

Рассматривается следующая параметрическая модель: $X_1, \ldots, X_N$ — выборка из распределения $N(\theta, 1)$. Известно, что θ близко к нулю: с вероятностью не менее 0.95 выполнено неравенство $|\theta| < 0.5$.

В чём суть байесовского метода? Выжать как можно информации (из экспертов, условия задачи, гороскопа, etc.) о том, как ведёт себя θ и использовать её.

Посмотрим, что можно сказать про априорное распределение θ:

Общеизвестно, что в интервал $[-2\sigma_0, 2\sigma_0]$ при $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ входит около 95% выборки

Значит, логично предположить, что априорное распределение - нормальное.

Тогда мы знаем кое-что о его дисперсии:

$\rightarrow 2\sigma_0 = 0.5 \rightarrow \sigma_0 = 0.25$

В качестве μ_0 возьмём 0, потому что можем.

Значит, $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) =$ N(0, 0.0625) - априорное распределение θ

Сгенерируйте выборку размера 100 из распределения Коши с нулевым параметром сдвига и с параметром масштаба равным 1. При N = 100 используйте эту выборку в качестве $X_1, \ldots, X_N$ для описанной выше модели.

Посчитайте байесовские оценки (для одного априорного распределения, учитывающего описанное выше свойство) и оценки максимального правдоподобия для всех $n \leqslant 100$. Постройте графики абсолютной величины отклонения этих оценкок от истинного значения параметра $\theta_0 = 0$ в зависимости от n. Сделайте выводы.

Знаем, что $\sigma = 1$ для исходной выборки. Получим байесовскую оценку θ.

Как и в предыдущей задаче, апостериорное - сопряженное к априорному нормальное с параметрами :

$$\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right), \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{0.0625} + \frac{n}{\sigma^2}\right), \left(\frac{1}{0.0625} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}$$

Мы хотим получить условное матожидание апостериорного при данной выборке, то есть

$$\theta^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\frac{1}{0.0625} + n}$$

In [91]:
```
big_sample = sts.cauchy.rvs(loc=0., scale=1., size=100)
```

In [100]:
```
sigma_0 = 0.25
def bayes_estimator(X_array):
    return np.sum(X_array)*1./(sigma_0**-2. + 1.*len(X_array))

def likelihood_estimator(X_array):
    return np.mean(X_array)
```

In [ ]:

In [ ]:

In [101]:
```
bayes_values = []
likelihood_values = []

for i in np.arange(1, len(big_sample)):
    sample = big_sample[:i]
    bayes_values.append(bayes_estimator(sample))
    likelihood_values.append(likelihood_estimator(sample))
```

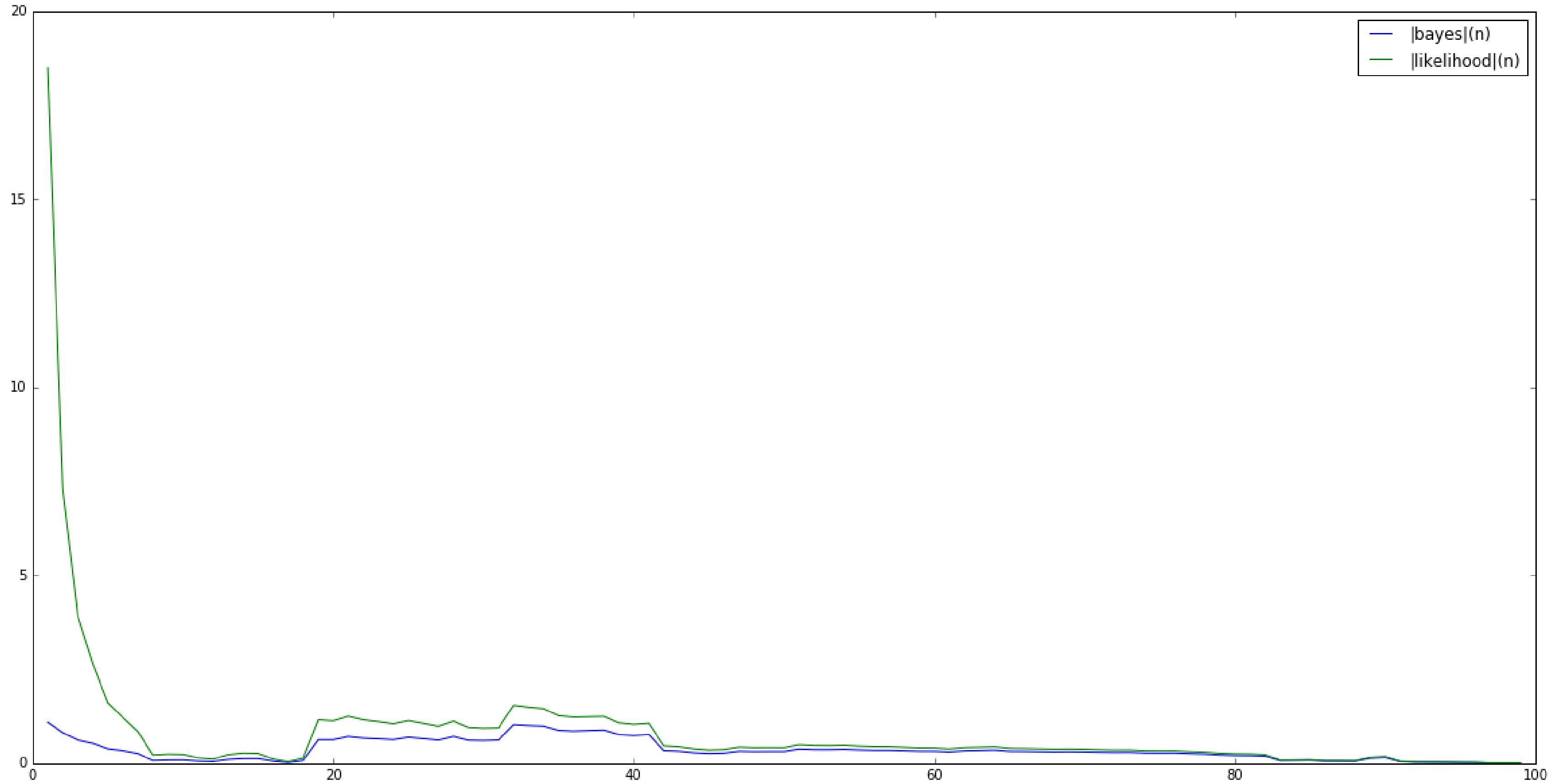
In [102]:
```
X = np.arange(1, 100)

# Y = [np.abs(likelihood_values[i-1] - bayes_values[i-1])
#       for i in np.arange(1, len(big_sample))
#      ]

plt.figure(figsize=(20,10))
trash = plt.plot(X, np.abs(bayes_values), label='|bayes|(n)')
trash = plt.plot(X, np.abs(likelihood_values), label='|likelihood|(n)')

plt.legend()
```

Out[102]: <matplotlib.legend.Legend at 0x125967510>

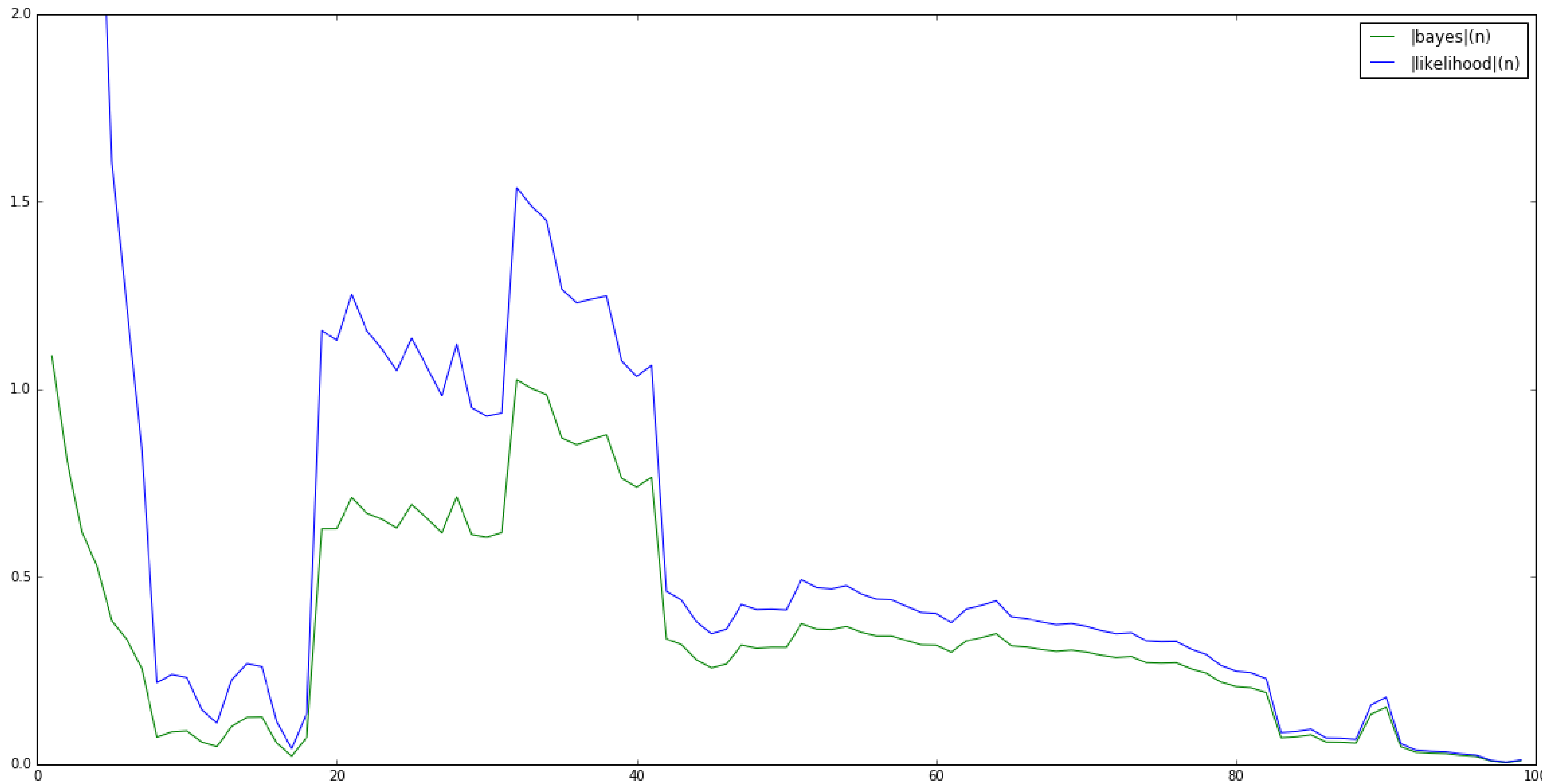


Посмотрим поближе

In [103]:
```
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.ylim((0., 2.))
trash = plt.plot(X, np.abs(bayes_values), color='g', label='|bayes|(n)')
trash = plt.plot(X, np.abs(likelihood_values), color='b', label='|likelihood|(n)')

plt.legend()
```

Out[103]: <matplotlib.legend.Legend at 0x125f0c110>



Вывод:

Байесовская оценка ведет себя стабильно лучше, чем оценка максимального правдоподобия, потому что мы использовали знание об априорном распределении и обладали большей информацией Однако оценка всё равно не очень хорошая и происходит по большому счёту бред, потому что мы неверно угадали класс распределения (Коши вместо нормального)

In [ ]:

```

```