

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

Номера задач указаны по книгам

(Б) Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2003, 2006.

(К) Кострикин А.И. (ред.) Сборник задач по алгебре. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009.

Многочлены.

(К) 25.2(б,и) (также найти линейное выражение НОД); ~~25.6*~~; 25.7(г); 25.8(д).

(К) 26.6; 26.8; ~~26.9*~~.

Собственные векторы и собственные значения. Инвариантные подпространства.

(Б) 24.72(2); 24.77; ~~24.78*~~; 24.81(2); 24.85(1).

1. Пусть φ — линейное преобразование пространства V , p — многочлен. Обозначим $U = \text{Ker } p(\varphi)$. Докажите, что U инвариантно относительно φ .

(Б) 24.13; 24.22(1); 24.26(2,4); ~~24.27*~~; 24.28(2); 24.29; 24.30(8,15,30); 24.32(3); 24.42(1); ~~24.50*~~; 24.74(1,2).

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем а) \mathbb{Z}_3 ; б) \mathbb{Z}_5 , заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть поворот трехмерного геометрического пространства вокруг некоторой оси на угол α в некотором базисе задан матрицей с элементами a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Используя инвариантность следа матрицы, найти угол α .

(К) 40.9; 40.12(~~a,6*~~); ~~40.21*~~.

Теорема Гамильтона–Кэли. Жорданова нормальная форма. Минимальный многочлен.

4. Дана квадратная матрица A порядка n и натуральные числа k_1, k_2, \dots, k_{n+1} . Докажите, что матрицы $A^{k_1}, A^{k_2}, \dots, A^{k_{n+1}}$ линейно зависимы.

~~5. В некотором базисе преобразование A задано матрицей~~

~~$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$~~

~~Найти матрицу перехода к базису, в котором матрица A' преобразования A является треугольной, и выписать матрицу A' .~~

(Б) ~~24.117; 24.126(4); 24.127(3); 24.15,17~~ (также найти жорданов базис и минимальный многочлен матрицы); ~~24.141(1).~~

6*. Докажите, что множество линейных операторов в n -мерном комплексном пространстве, перестановочных с данным оператором A , является линейным пространством, размерность которого не меньше n .

(К) ~~41.4; 41.18; 41.22~~, 41.30.