

Studio sul Gioco del Domino

Alex Lorenzato

22 novembre 2024

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Il Domino	2
1.2	Storia del Domino	2
1.3	Variante "Block"	3
1.4	Altre varianti	4
1.5	L'albero di gioco	5
1.6	Minimax	5
2	Risultati	7
2.1	Statistiche Globali	7
2.2	Statistiche di set specifici	8
2.3	Grafici	12
3	Conclusioni	15
4	Altro (da sistemare)	16
A	Codice sorgente	17

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il Domino

Il domino è un antico gioco da tavolo, le cui origini risalgono alla Cina imperiale. Le tessere di gioco sono rettangolari e suddivise in due metà; su ciascuna metà è presente un valore numerico che varia tra 0 e 6, rappresentato tipicamente con dei pallini, o "pip", simili a quelli presenti sui dadi che indicano il punteggio della tessera. Le tessere formano una combinazione unica di numeri, con 28 tessere totali in un set "double-six", ovvero la cui tessera di maggior valore è quella in cui appaiono due 6.

L'obiettivo generale del gioco, sebbene esistano diverse varianti, è di liberarsi di quante più tessere possibili dalla propria mano prima della fine della partita. Il gioco procede a turni in senso orario: ogni giocatore, al suo turno, ha la possibilità di aggiungere una tessera dalla propria mano all'inizio o alla fine della sequenza di tessere presenti sul tavolo, rispettando la condizione che il valore su una delle estremità della tessera coincida con il valore della tessera a cui si collega.

Nella variante classica, la partita inizia con il giocatore che possiede la tessera doppia con il valore più alto, di conseguenza il doppio-6 è la tessera che garantisce di partire per primi. Questa versione è particolarmente popolare nella modalità a 2 giocatori, ma può essere giocata anche da un massimo di 4 o 6 giocatori, con regole e adattamenti per gestire il numero di tessere e i turni.

Esempio di partita in cui..

1.2 Storia del Domino

Il domino con tessere nacque in Cina intorno al XII secolo e si ritiene che sia stato sviluppato da uno statista nel 1120, come dono per l'imperatore Hui Tsung. Inizialmente, il domino aveva anche un ruolo come strumento di divinazione intorno al XIII secolo, diventando poi un gioco da tavolo vero e proprio.

Nel corso del tempo, il gioco del domino si diffuse dal continente asiatico all'Europa, probabilmente grazie agli scambi culturali mediati dal mondo arabo. Giunto in Italia, il gioco si diffuse rapidamente in Francia e successivamente in tutta Europa.

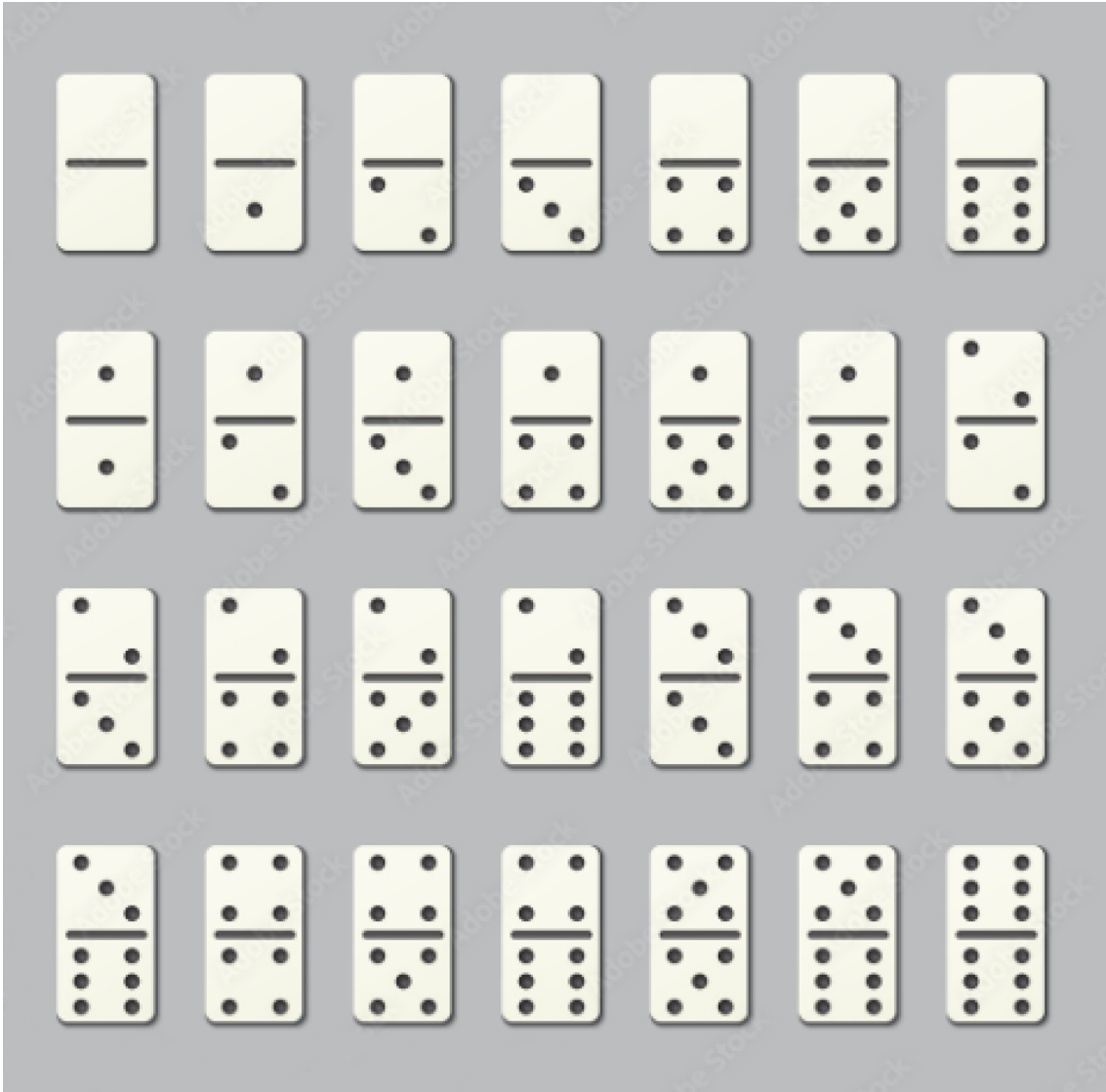


Figura 1.1: Set base di tessere del domino

Il termine "domino" deriva dal latino *dominus*, che significa "padrone", e sembra essere legato al senso di controllo e strategia che il gioco richiede.¹

1.3 Variante "Block"

La variante "Block" è la versione del domino utilizzata come oggetto di studio in questa tesi, nonché la variante più diffusa e popolare.

Questa versione utilizza un set di tessere "double-six", ovvero tessere con valori che vanno da 0 a 6 su ciascuna metà. Ogni giocatore pesca sette tessere all'inizio del gioco, e le rimanenti 14 tessere vengono scartate e non utilizzate per tutta la durata della partita. La partita termina in due casi:

¹Fonte: Wikipedia, "Domino", <https://it.wikipedia.org/wiki/Domino> (accesso il 25 ottobre 2024).

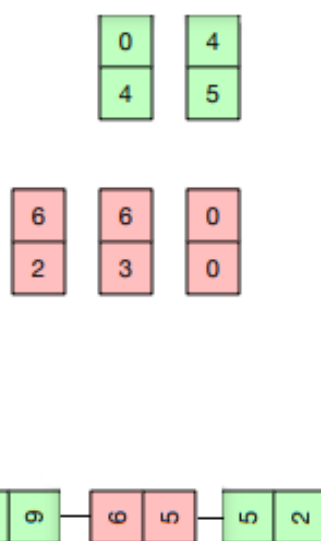


Figura 1.2: Esempio di partita in corso

1. Quando un giocatore riesce a liberarsi di tutte le tessere in mano, vincendo automaticamente.
2. Quando la partita è "bloccata", ossia nessuno dei due giocatori può posizionare una tessera valida.

In caso di "blocco", vince il giocatore con il minor punteggio totale in mano, dove il punteggio è calcolato come la somma dei valori presenti sulle tessere rimanenti. Se un giocatore riesce a esaurire tutte le sue tessere, è dichiarato automaticamente vincitore.

1.4 Altre varianti

Assieme alla variante "Block", esiste la variante "Draw", che differisce per l'uso delle tessere non distribuite ai giocatori. Mentre nella "Block" le tessere avanzate vengono rimosse definitivamente dalla partita, nella variante "Draw" i giocatori possono pescare tessere aggiuntive quando non riescono a fare una mossa valida. Le modalità di pesca variano: in alcune versioni il giocatore è obbligato a pescare fino a trovare una tessera giocabile, mentre in altre può pescare solo una tessera per turno.

Queste varianti danno origine a una vasta gamma di regole aggiuntive e variazioni del gioco. Esistono inoltre numerose versioni del domino fan-made e competitive, ognuna con modifiche più o meno significative alle regole delle varianti "Block" e "Draw". Per esempio, oltre all'obiettivo tradizionale di esaurire la propria mano, alcune modalità premiano configurazioni particolari di tessere sul tavolo, rendendo il gioco ancora più strategico e vario.

1.5 L'albero di gioco

Un albero di gioco è una struttura utilizzata per rappresentare tutte le possibili sequenze di mosse in un gioco a turni, in questo caso il domino, partendo da una situazione iniziale fino a tutte le configurazioni finali possibili, dette "foglie" dell'albero.

Ogni possibile situazione di gioco è rappresentata da un "nodo" dell'albero e ciascun "ramo" rappresenta una possibile mossa effettuata dal giocatore corrente.

Il nodo radice rappresenta lo stato iniziale, con le mani iniziali dei giocatori e il turno del primo giocatore. Ogni nodo discendente rappresenta uno stato raggiungibile in base alla tessera che un giocatore gioca e al cambiamento delle condizioni di gioco.

L'albero di gioco ha lo scopo di esplorare tutte le mosse possibili per individuare le mosse ottimali, in modo da massimizzare la probabilità di vittoria.

Accade molto facilmente che un albero di gioco si allarghi moltissimo, questo comporta un peso computazionale maggiore, ed è per questo che si possono adottare delle ottimizzazioni algoritmiche per ridurre la complessità e di conseguenza le tempistiche di calcolo.

In figura si può vedere un esempio di albero da gioco, gli elementi visibili sono i seguenti:

1. i due set da 4 tessere rappresentati in cima sono le mani iniziali dei due giocatori
2. il nodo radice, ovvero il 6—6 verde in cima all'albero, è la prima mossa giocata
3. i 3 nodi immediatamente sotto sono le possibili mosse che può fare l'avversario
4. i numeri rappresentati all'immediata sinistra di ogni tessera dell'albero è il valore della testa e della coda nel tavolo facendo quella mossa
5. le foglie sono le tessere dove l'albero si interrompe e ciascuna rappresenta un fine partita
6. il numero sotto alle foglie rappresenta il punteggio di fine partita: positivo se vince il primo giocatore e viceversa

1.6 Minimax

L'algoritmo Minimax è un algoritmo utilizzato nella teoria dei giochi. L'obiettivo di Minimax è massimizzare il punteggio del giocatore principale (di solito detto "Max") e minimizzare quello dell'avversario (detto "Min").

Questo approccio presuppone che entrambi i giocatori siano perfettamente razionali, cioè che massimizzino sempre il loro vantaggio, ossia giochino sempre la mossa migliore possibile.

Ogni foglia dell'albero è associata a un punteggio tendente al positivo se vince il giocatore iniziale e viceversa, che rappresenta l'esito finale della partita per i due giocatori. Il giocatore Max cerca di scegliere mosse che massimizzino il suo

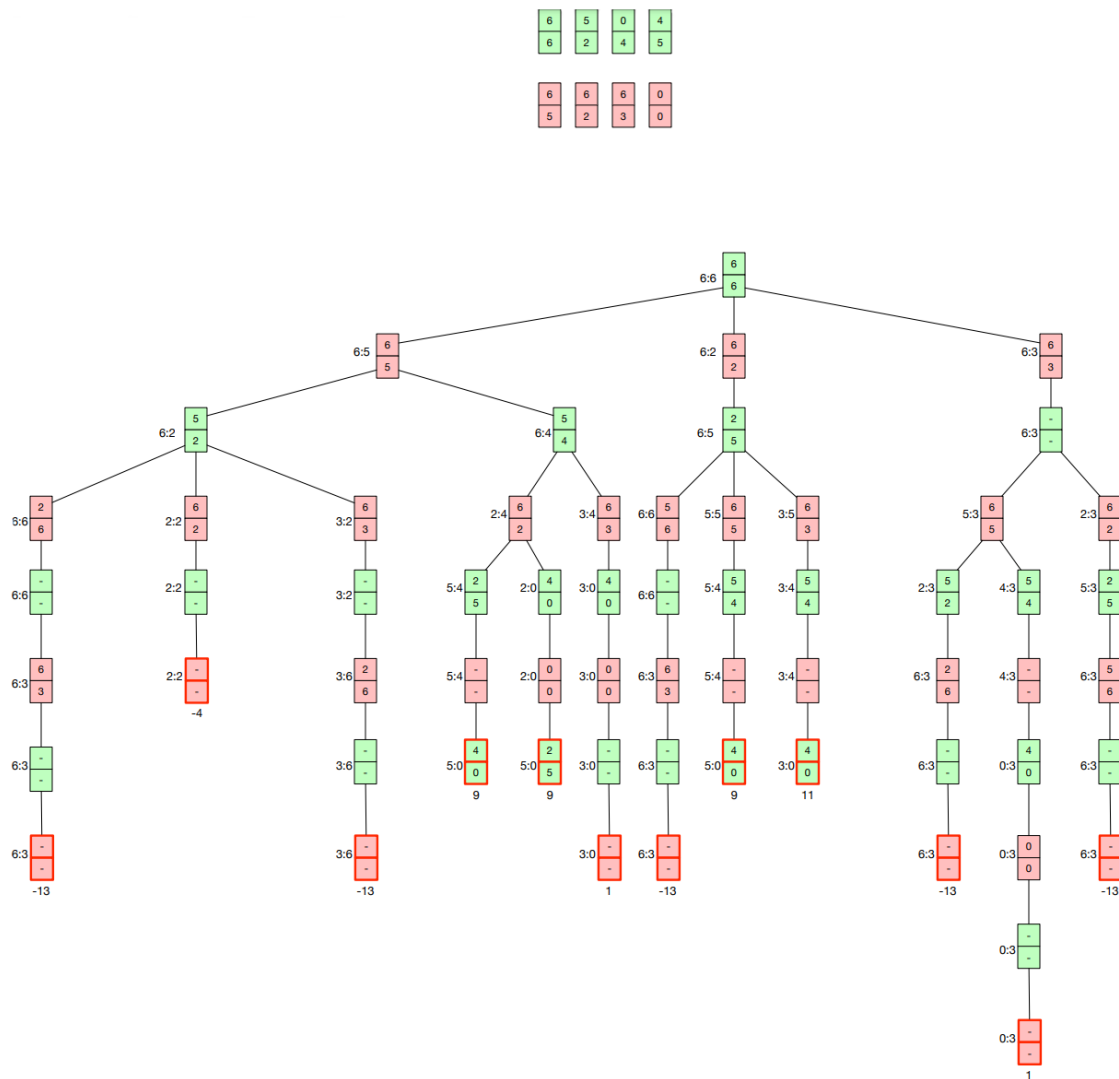


Figura 1.3: Esempio di albero di gioco

punteggio, mentre il giocatore Min cerca di fare mosse che minimizzino il punteggio di Max.

Una volta calcolate tutte le foglie il Minimax "risale" l'albero partendo dal punteggio delle foglie per arrivare fino al nodo radice, dove può scegliere la mossa migliore per Max visto che ora conosce i punteggi che ogni ramo può garantirgli.

Per rendere il Minimax più efficiente, si può utilizzare la tecnica di potatura alpha-beta, che consente di eliminare nodi dell'albero che non influenzano la decisione finale, riducendo drasticamente il numero di nodi da esaminare.

Capitolo 2

Risultati

Di seguito vengono commentati i risultati globali ottenuti dalle partite analizzate, si ricorda che quando si parla di foglie si intendono quelle dell'albero di gioco, dove ognuna corrisponde a una situazione di fine partita.

2.1 Statistiche Globali

Il numero totale di configurazioni delle mani iniziali, corrispondente al numero di partite diverse giocabili nel domino è: 137.281.098.240; più precisamente, questo è il numero di set da 14 tessere formabili senza che ci sia mai un set che sia formato dalle stesse tessere di un altro, che si traduce nel distribuire queste 14 tessere tra i 2 giocatori avendo sempre delle mani differenti. Questo numero è calcolato nel seguente modo:

1. Possibili set da 14 tessere: $\binom{28}{14} = 40.116.600$, ai quali bisogna sottrarre tutti i set che non contengono nessuna tessera doppia.
2. Set che non contengono nessuna tessera doppia: $\binom{21}{14} = 116.280$.
3. Possibili set da 14 tessere validi per poter iniziare una partita: $40.116.600 - 116.280 = 40.000.320$, ovvero il totale di set possibili esclusi quelli senza una tessera doppia.
4. Ognuna delle 40.000.320 possibili partite è costituita da un set di 14 tile, che però possono essere distribuite in $\binom{14}{7} = 3432$ modi diversi tra i 2 giocatori
5. Il numero totale di partite esistenti con un set da 28 tile e mani da 7 tile ciascuna quindi è: $40.000.320 * 3432 = 137.281.098.240$

Testare l'algoritmo su tutte le possibili partite non è temporalmente possibile con gli strumenti a disposizione, questo perché supponendo una media di 70ms a partita (media calcolata sui dati raccolti) ci vorrebbero $137.281.098.240 * 70 = 9.609.676.876.800$ ms, equivalenti a 304.7 anni su un sistema monoprocesso; avendo avuto a disposizione un server con 40 processori, il tempo di calcolo necessario sarebbe stato $304/40 \approx 7.5$ anni.

Per trovare un compromesso temporale sulla raccolta dati, sul totale delle partite teoriche, ho preso un campione di 40.000.320 configurazioni iniziali per fare in modo che ogni possibile set fosse rappresentato, e testato l'algoritmo su queste partite raccogliendone i dati.

Il processo è stato parallelizzato dividendo il file in sotto-file da 1 milione di righe.

Altre statistiche raccolte:

Durata media della partita	71.56 ms
Numero medio di foglie	1023.36
Percentuale di vittorie	100.00%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	48.13%

La partita con il maggior numero di foglie in assoluto, ovvero 32.172, è quella in cui i giocatori hanno le seguenti mani:

Mano giocatore 1: 0|2, 1|2, 1|5, 2|2, 2|6, 4|4, 5|6

Mano giocatore 2: 0|4, 1|4, 1|6, 2|4, 2|5, 4|5, 4|6

Un'altra statistica interessante è che ci sono 356.142 partite con una sola foglia, equivalenti al 9%, questo accade perché un giocatore ha una doppia tessera con cui partire ma poi né lui né l'avversario hanno una tessera che si può attaccare a quella inizialmente giocata.

Il numero di foglie è indice della complessità della partita, con una sola foglia la partita è banale e non necessita che vengano prese decisioni, al contrario se si hanno migliaia di foglie la partita permette molta libertà d'azione e l'ordine in cui vengono giocate le tessere assume molta più importanza.

Un esempio banale di partita ad una sola foglia è dato da un giocatore che parte con la tessera doppio-6 e nessuno dei due giocatori ha altre tessere in cui compaia un 6, la partita quindi termina immediatamente procedendo al calcolo del punteggio.

Non è comunque garantito che un alto numero di foglie indichi una partita complessa, spesso si presentano dinamiche per cui l'ordine in cui vengono giocate le tessere è ininfluenza ai fini del risultato finale; questo tipo di partite hanno solo una complessità apparente, ma di fatto sono banali quanto quelle con poche foglie.

2.2 Statistiche di set specifici

Ho investigato dei set specifici di tessere alla ricerca di mani più o meno vantaggiose in termini di partite vinte, i risultati sono i seguenti:

Mano: 0|0, 0|1, 0|2, 0|3, 0|4, 0|5, 0|6

Questa configurazione di mano iniziale è chiaramente vantaggiosa dato sono state vinte tutte le partite affrontate.

Match considerati	116280
Durata media delle partite	47.87 ms
Numero medio di foglie	2390.60
Percentuale di vittorie	100.00%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	24.54%

Tabella 2.1: Statistiche per la mano 0|0, 0|1, 0|2, 0|3, 0|4, 0|5, 0|6

Soffre di uno svantaggio iniziale, ovvero la difficoltà a partire per primi, visto che qualsiasi tessera doppia garantirebbe la precedenza su questa mano; superato questo difetto, si ha una mano che riesce ad agganciarsi ad ogni tessera giocata visto che si hanno tutti i numeri da 0 a 6, inoltre è molto facile connettere le tessere tra loro usando il numero 0 come "aggancio"; un ulteriore vantaggio è quello di chiudere le possibilità all'avversario, visto che non potrà avere tessere con il numero 0 in quanto le ha tutte il giocatore con questa mano, ne segue che una delle due estremità del tavolo è spesso bloccata dal numero 0.

Mano: 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	22.51 ms
Numero medio di foglie	66.74
Percentuale di vittorie	28.91%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	64.41%

Tabella 2.2: Statistiche per la mano 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6

Ho scelto di investigare questa mano per la particolarità di avere tutte le doppie, i risultati non sono stati buoni visto che il rateo di vittoria è di 1 su 3.

Il motivo per cui questa mano non funziona bene potrebbe essere dato dal fatto che di fatto non ha possibilità di prendere decisioni significative; ogni volta che collega una tessera, il tavolo rimane invariato, di conseguenza è l'avversario che tramite delle tessere diversificate può gestire la partita in maniera autonoma, il giocatore con questa mano non può fare altro che attaccare le tessere che ha senza mai influire sulle estremità del tavolo.

Presenta solo due vantaggi, chiaramente insufficienti: garanzia di iniziare per primo e avere tutti i numeri in mano, quindi potersi attaccare facilmente ad ogni situazione, con lo svantaggio di poterlo fare una volta sola per numero.

Mano: 0|0, 0|1, 0|2, 0|3, 1|1, 1|2, 1|3

Questa mano è caratterizzata da una distribuzione di tessere dai valori bassi, i risultati sono relativamente scarsi, appena al di sopra del tiro di una moneta in quanto a probabilità di vittoria. Il potenziale di questa mano era quello di avere tessere ben connesse e coese tra loro, cercando di tagliare le possibilità all'avversario andando a creare un "circuito chiuso". Un grosso svantaggio è quello di avere poche probabilità di iniziare per primi, andando a limitare fin dall'inizio la possibilità di creare un tavolo formato da tessere basse.

Match considerati	116280
Durata media delle partite	40.97 ms
Numero medio di foglie	1609.93
Percentuale di vittorie	60.97%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	41.50%

Tabella 2.3: Statistiche per la mano 0|0, 0|1, 0|2, 0|3, 1|1, 1|2, 1|3

Mano: 3|4, 4|4, 4|5, 5|5, 4|6, 5|6, 6|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	34.62 ms
Numero medio di foglie	801.53
Percentuale di vittorie	17.12%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	50.13%

Tabella 2.4: Statistiche per la mano 3|4, 4|4, 4|5, 5|5, 4|6, 5|6, 6|6

Mano: 3|3, 3|4, 4|4, 2|2, 2|3, 2|4, 4|5

Match considerati	116280
Durata media delle partite	37.43 ms
Numero medio di foglie	1013.82
Percentuale di vittorie	12.17%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	49.17%

Tabella 2.5: Statistiche per la mano 3|3, 3|4, 4|4, 2|2, 2|3, 2|4, 4|5

Mano: 0|1, 1|1, 1|2, 1|3, 1|4, 1|5, 1|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	52.85 ms
Numero medio di foglie	2580.79
Percentuale di vittorie	100.00%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	23.38%

Tabella 2.6: Statistiche per la mano 0|1, 1|1, 1|2, 1|3, 1|4, 1|5, 1|6

Mano: 0|2, 1|2, 2|2, 2|3, 2|4, 2|5, 2|6

Mano: 0|3, 1|3, 2|3, 3|3, 3|4, 3|5, 3|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	54.74 ms
Numero medio di foglie	2843.77
Percentuale di vittorie	100.00%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	22.15%

Tabella 2.7: Statistiche per la mano 0|2, 1|2, 2|2, 2|3, 2|4, 2|5, 2|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	57.32 ms
Numero medio di foglie	3199.19
Percentuale di vittorie	99.99%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	20.97%

Tabella 2.8: Statistiche per la mano 0|3, 1|3, 2|3, 3|3, 3|4, 3|5, 3|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	60.73 ms
Numero medio di foglie	3670.20
Percentuale di vittorie	99.93%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	19.93%

Tabella 2.9: Statistiche per la mano 0|4, 1|4, 2|4, 3|4, 4|4, 4|5, 4|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	65.31 ms
Numero medio di foglie	4283.70
Percentuale di vittorie	99.82%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	19.11%

Tabella 2.10: Statistiche per la mano 0|5, 1|5, 2|5, 3|5, 4|5, 5|5, 5|6

Match considerati	116280
Durata media delle partite	71.24 ms
Numero medio di foglie	5070.79
Percentuale di vittorie	99.89%
Percentuale di partite in cui nessun giocatore esauriva la mano	18.58%

Tabella 2.11: Statistiche per la mano 0|6, 1|6, 2|6, 3|6, 4|6, 5|6, 6|6

Mano: 0|4, 1|4, 2|4, 3|4, 4|4, 4|5, 4|6

Mano: 0|5, 1|5, 2|5, 3|5, 4|5, 5|5, 5|6

Mano: 0|6, 1|6, 2|6, 3|6, 4|6, 5|6, 6|6

Ho approfondito le configurazioni del tipo $x-0 \dots x-6$ perché dopo aver notato la % di vittorie del set $0-0 \dots 0-6$ era ipotizzabile che anche gli altri set "mononumerici" potessero ottenere risultati simili e così è stato.

Il motivo per cui questa tipologia di set è così prestante risiede nella sua efficacia di bloccare l'avversario, ad esempio: se possiedo tutte le tessere con il 6 l'avversario ovviamente non ne avrà, aggiungendo il fatto che oltre ad avere tutti i 6 sull'altra faccia ho tutti i numeri, sono pronto a rispondere a qualsiasi mossa venga giocata, e nel rispondere è implicito che chiuderò una delle due estremità all'avversario, che ora non potrà attaccare nulla al 6 che ho giocato; ripetendo questa cosa anche per l'altra estremità è banale chiudere entrambe le estremità all'avversario, facendogli saltare il turno.

Queste configurazioni sono dunque le più vittoriose offrendo certezza di vittoria nel caso in cui le mosse giocate siano sempre quelle ottimali; in un contesto reale, quindi a informazione imperfetta, non è comunque detto che la vittoria sia necessariamente garantita usando uno di questi set: una mossa sbagliata potrebbe portare a un ramo dell'albero perdente, ovvero in cui il punteggio è negativo.

2.3 Grafici

Di seguito sono rappresentati dei grafici, il primo dei quali (figura 2.1) è quello generale, gli altri sono ingrandimenti di specifici intervalli.

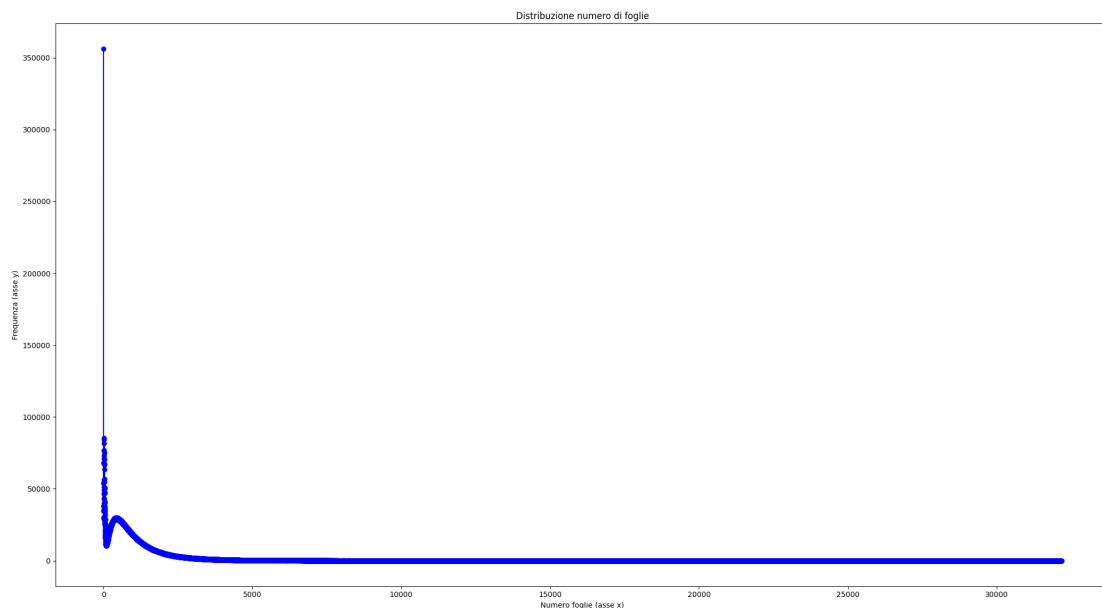


Figura 2.1: Grafico generale

Si nota subito il picco sul valore 0, indicando che ci sono poco più di 356.142 partite con una sola foglia, corrispondenti approssimativamente a un 9% del totale delle partite testate.

Curiosa l'alternanza dei valori, probabilmente solo una coincidenza che non porta a nulla di significativo.

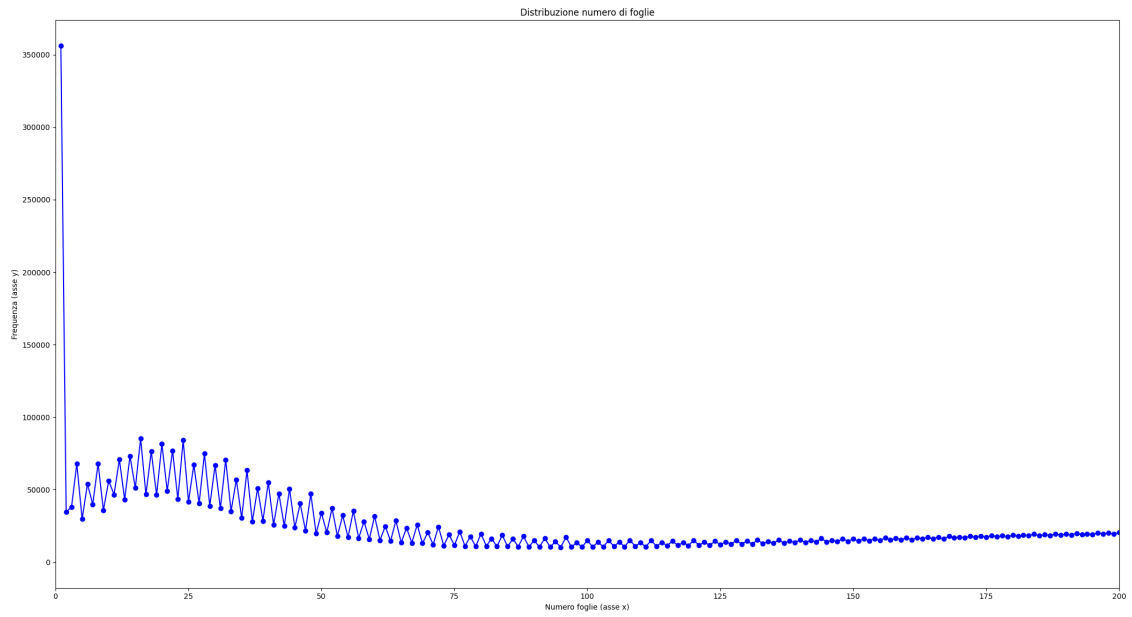


Figura 2.2: Ingrandimento dominio 0-200

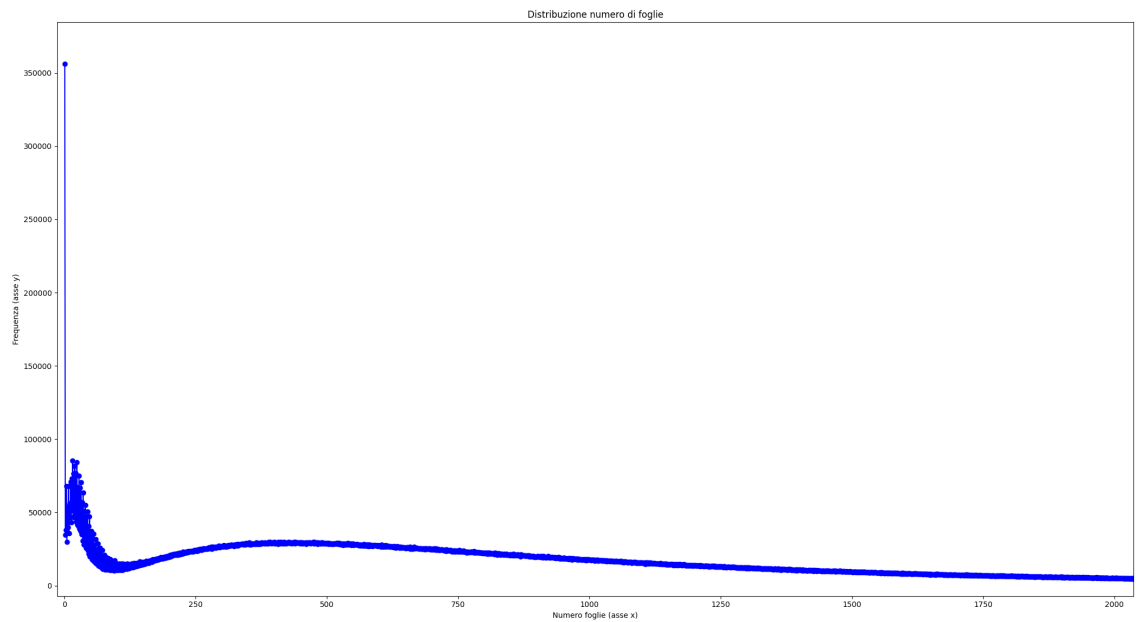


Figura 2.3: Ingrandimento dominio 0-2000

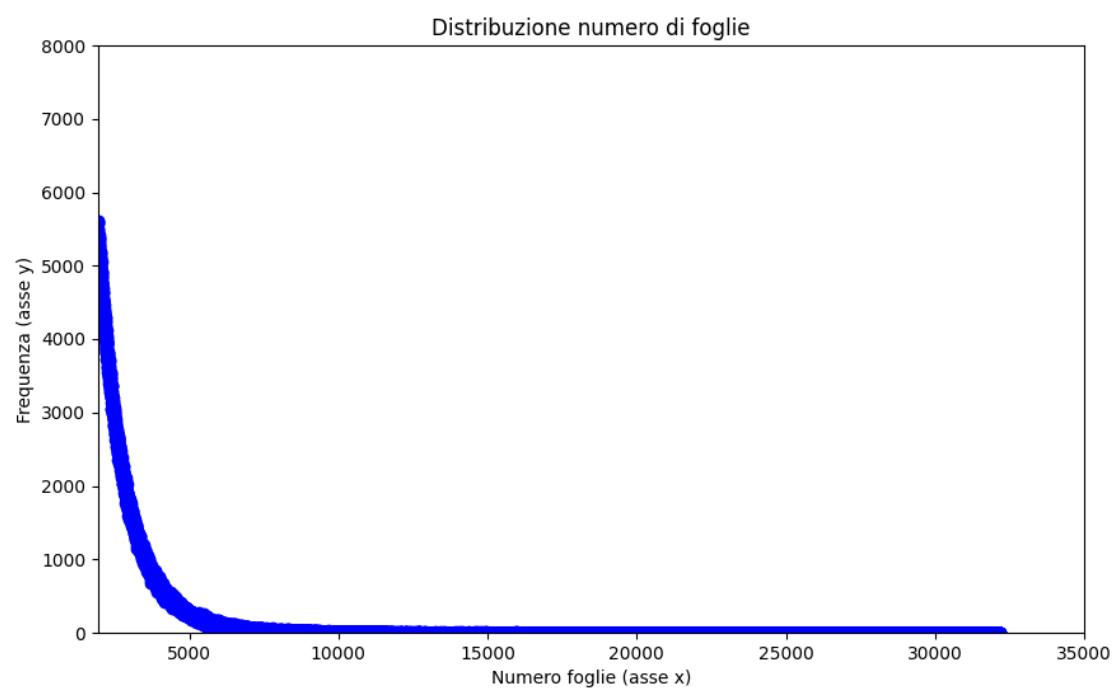


Figura 2.4: Ingrandimento dominio 2000-35000

Capitolo 3

Conclusioni

Il set più forte trovato è sicuramente $0|0, 0|1, 0|2, 0|3, 0|4, 0|5, 0|6$ che ha vinto la totalità delle 65 partite giocate.

Capitolo 4

Altro (da sistemare)

Le partite in cui viene giocata una sola tessera seguono uno schema preciso: la partita inizia giocando una tessera doppia, successivamente nessuno dei due giocatori possiede delle tessere che raffigurino il numero della tessera giocata alla prima mossa, difatto terminando immediatamente la partita.

Il numero di partite in cui viene giocata una sola tessera, spiegato tramite il caso delle tessere con il 6, si può calcolare così:

1. le tessere utilizzabili sono 22, questo perché oltre al 6—6 le altre sei tessere che rappresentano il numero 6 non possono essere usate nella distribuzione delle mani dei giocatori o si andrebbe a negare il fatto che verrà giocata una sola tessera
2. di queste 22 tessere una è il 6—6, che diamo in mano al giocatore 1
3. ci sono $\binom{21}{6} = 54.264$ modi di distribuire le restanti 6 tessere al giocatore 1
4. e $\binom{15}{7} = 6.435$ modi di distribuire la mano al giocatore 2
5. il totale di partite in cui un giocatore ha un 6—6 e nessun altro dei due ha un'altra tessera con un 6 sono: $54.264 * 6.435 = 349,188,840$
6. questo numero va raddoppiato in quanto il procedimento appena eseguito va applicato anche al giocatore 2, quindi $349.188.840 * 2 = 698,377,680$
7. ripetendo il procedimento per i set di tessere da 0 a 5, il totale è 4.888.643.760

Concludendo, le partite in cui viene giocata una sola tessera sono 4.888.643.760, che in % rispetto ai 137.281.098.240 miliardi di partite possibili sono il: 3.56%

Appendice A

Codice sorgente