Описание метода решения

Метод последовательной верхней релаксации развивает идеи метода Гаусса-Зейделя. В методе Гаусса-Зейделя уточненное решение на r-ом шаге находится как

$$(L+D)x^{(r)} = -Ux^{(r-1)} + b \qquad (3),$$

где D – диагональ матрицы A, L – нижняя треугольная часть матрицы A, U – верхняя треугольная часть матрицы A.

$$x^{(r)} = (L+D)^{-1}(-Ux^{(r-1)} + b)$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}\left(-Ux^{(r-1)} + b\right) - x^{(r-1)}$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}(-U)x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}b - x^{(r-1)}$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + [(L+D)^{-1}(-U) - E]x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}b$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + [(L+D)^{-1}(-U) - (L+D)^{-1}(L+D)]x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}b$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}(-U-L-D)x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}b$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} + (L+D)^{-1}(-(L+D+U)x^{(r-1)} + b)$$

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} - (L+D)^{-1}(Ax^{(r-1)} - b)$$

Прорелаксируем на ω. Получим:

$$x^{(r)} = x^{(r-1)} - \omega(L+D)^{-1}(Ax^{(r-1)} - b)$$

Оптимальным значением ω является

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\,\rho\left(D^{-1}(L+U)\right)\,)^2}},$$

где $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$, λ_1, λ_2,… λ_n – собственные значения матрицы A.

Список использованных источников

1. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third Edition. — Cambridge University Press, 2007. [Электронный ресурс].
URL: http://e-maxx.ru/bookz/files/numerical_recipes.pdf
(дата обращения: 03.04.2024).