Topologie et géométrie des complexes de groupes à courbure négative ou nulle

Alexandre Martin

IRMA, Strasbourg

31 mai 2013

Introduction :

Problèmes de combinaison en théorie géométrique des groupes

PROBLÈME DE COMBINAISON : Soit G un groupe agissant de manière cocompacte sur un complexe simplicial X. Quelles propriétés de G peut-on déduire de :

- la géométrie du complexe X,
- la dynamique de l'action,
- les propriétés des inclusions de stabilisateurs ?

Théorie de Bass-Serre

Étude des groupes agissant de manière non triviale sur des arbres simpliciaux.

Quelques conséquences remarquables :

- une preuve géométrique de la liberté des sous-groupes discrets sans torsion de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$,
- l'hyperbolicité du groupe fondamental de certaines variétés de dimension 3 obtenues comme suspensions de difféomorphismes pseudo-Anosov de surfaces hyperboliques, grâce au théorème de combinaison de Bestvina-Feighn,
- l'hyperbolicité relative des groupes limites (Dahmani).

Actions géométriques

Étude des groupes agissant de manière propre et cocompacte sur des complexes simpliciaux.

Quelques exemples :

- cubulation de certains groupes (Wise, Haglund-Wise, Agol),
- construction de groupes simples sans torsion de présentation finie (Burger-Mozes),
- complexes de groupes finis, notamment :
  - groupes de Coxeter hyperboliques de grande dimension (Januszkiewicz-Świątkowski),
  - groupes ayant des propriétés de point fixe très fortes (Arzhantseva-Bridson-Januszkiewicz-Leary-Minasaya-Świątkowski).

CADRE DE CETTE THÈSE : Actions cocompactes, mais non nécessairement propres, sur des complexes simpliciaux dotés d'une géométrie à courbure négative ou nulle (en un sens large), et plus particulièrement sur des complexes CAT(0).

Deux exemples importants de telles situations :

- l'action du groupe modulaire d'une surface hyperbolique sur son complexe des courbes,
- l'action d'un groupe possédant un sous-groupe de codimension 1 sur le complexe cubique CAT(0) associé (Sageev).

On s'intéresse à des problèmes de combinaison pour les propriétés suivantes :

- existence d'un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres,
- $E\mathcal{Z}$-structure,
- hyperbolicité.

Préliminaires :

Complexes de groupes

Définition (Gersten-Stallings, Corson, Haefliger)

Soit Y un complexe simplicial. Un *complexe de groupes* $G(\mathcal{Y}) = (G_\sigma, \psi_{\sigma,\sigma'}, g_{\sigma,\sigma',\sigma''})$ *au-dessus de* Y est la donnée :

- pour tout simplexe σ de Y, d'un groupe G_σ appelé *groupe local*,
- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma'$, d'un morphisme injectif $\psi_{\sigma,\sigma'} : G_{\sigma'} \to G_\sigma$,
- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma' \subset \sigma''$, un *coefficient de twist* $g_{\sigma,\sigma',\sigma''} \in G_\sigma$,

avec les conditions de compatibilité suivantes :

- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma' \subset \sigma''$, on a

$$g_{\sigma,\sigma',\sigma''} \cdot \psi_{\sigma,\sigma''} \cdot g_{\sigma,\sigma',\sigma''}^{-1} = \psi_{\sigma,\sigma'} \circ \psi_{\sigma',\sigma''},$$

- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma' \subset \sigma'' \subset \sigma'''$, on la *condition de cocycle* suivante :

$$\psi_{\sigma,\sigma'}(g_{\sigma',\sigma'',\sigma'''})g_{\sigma,\sigma',\sigma'''} = g_{\sigma,\sigma',\sigma''}g_{\sigma,\sigma'',\sigma'''}.$$

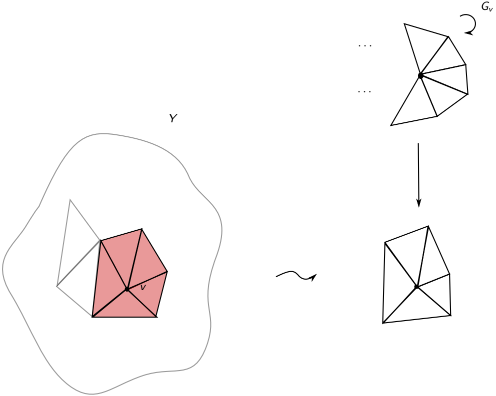
Étant donné un groupe G agissant sans inversion sur un complexe simplicial simplement connexe X, il est possible de lui associer un complexe de groupes au-dessus de $G \setminus X$. Un tel complexe de groupes est unique à isomorphisme près.

Un complexe de groupes est dit *développable* s'il provient d'une telle action $G \curvearrowright X$. Dans ce cas :

- G est unique à isomorphisme près (*groupe fondamental* du complexe de groupes)
- X est unique à isomorphisme simplicial équivariant près (*revêtement universel* du complexe de groupes)

Contrairement à la théorie de Bass-Serre, tous les complexes de groupes ne sont pas développables.

Néanmoins, la non développabilité est un problème global, un complexe de groupes étant toujours développable localement (notion de *développement local*).



Il existe un critère géométrique impliquant la développabilité :

Supposons que le complexe fini Y soit muni d'une structure de complexe localement euclidien. Cela munit chaque développement local d'une structure de complexe localement euclidien.

Théorème de développabilité CAT(0) (Haefliger)

Si pour les métriques induites, chaque développement local est CAT(0), alors le complexe de groupes $G(\mathcal{Y})$ est développable et son revêtement universel est CAT(0).

Partie I :

Combinaison d'espaces classifiants

Définition

Un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres (par la suite *espace classifiant*) pour un groupe de type fini G est un CW-complexe EG muni d'une action proprement discontinue et cocompacte de G par homéomorphismes cellulaires, et tel que pour tout sous-groupe fini H de G, l'ensemble EG^H des points fixés par H est contractile.

Un exemple important : Soit G un groupe hyperbolique. Alors G admet comme espace classifiant un complexe de Rips adéquat.

Problème de combinaison : Soit $G(\mathcal{Y})$ un complexe de groupes au-dessus d'un complexe fini Y, tel que tous les groupes locaux admettent des modèles locaux d'espaces classifiants. Le groupe G admet-il un modèle cocompact d'espace classifiant ?

Idée : généraliser les constructions topologiques de Scott-Wall pour les graphes de groupes.

Définition

Un *complexe d'espaces* $C(\mathcal{Y})$ au-dessus d'un complexe Y est la donnée, pour chaque simplexe $\sigma \subset Y$, d'un espace topologique C_σ, et pour toute inclusion de simplexes $\sigma \subset \sigma'$ d'une application continue $\phi_{\sigma,\sigma'} : C_{\sigma'} \to C_\sigma$ de sorte que le diagramme d'applications soit commutatif.

À un complexe d'espace $C(\mathcal{Y})$ on peut associer sa *réalisation*, qui est l'espace

$$|C(\mathcal{Y})| := \Big(\coprod_{\sigma \subset Y} \sigma \times C_\sigma \Big) / \sim,$$

où

$$(i_{\sigma,\sigma'}(x), s) \sim (x, \phi_{\sigma,\sigma'}(s)) \text{ pour } x \in \sigma \subset \sigma' \text{ et } s \in C_{\sigma'},$$

et $i_{\sigma,\sigma'} : \sigma \hookrightarrow \sigma'$ est l'inclusion.

Définition

Étant donné un complexe de groupes au-dessus d'un complexe fini Y, un *complexe d'espaces classifiants* $EG(\mathcal{Y})$ *compatible avec* $G(\mathcal{Y})$ est la donnée :

- pour tout simplexe $\sigma \subset Y$, d'un modèle cocompact d'espace classifiant pour G_σ, noté EG_σ,
- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma'$, d'une application $\psi_{\sigma,\sigma'}$-équivariante $\phi_{\sigma,\sigma'} : EG_{\sigma'} \rightarrow EG_\sigma$,

satisfaisant la condition de compatibilité suivante :

- pour toute inclusion $\sigma \subset \sigma' \subset \sigma''$, on a

$$g_{\sigma,\sigma',\sigma''} \cdot \phi_{\sigma,\sigma''} = \phi_{\sigma,\sigma'} \circ \phi_{\sigma',\sigma''}.$$

Remarque : Un complexe d'espaces classifiants compatible avec un complexe de groupes n'est pas un complexe d'espaces lorsque les coefficients de twist sont non triviaux.

Idée : Construire à partir de $EG(\mathcal{Y})$ un complexe d'espaces au-dessus de X dont la réalisation est un modèle d'espace classifiant pour G.

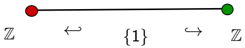
Proposition (Combinaison d'espaces classifiants)

Soit $G(\mathcal{Y})$ un complexe de groupes au-dessus d'un complexe fini Y, de groupe fondamental G et de revêtement universel X. Supposons que :

- pour tout sous-groupe fini H de G, l'ensemble X^H des points fixés par H est contractile,
- il existe un complexe d'espaces classifiants $EG(\mathcal{Y})$ compatible avec $G(\mathcal{Y})$.

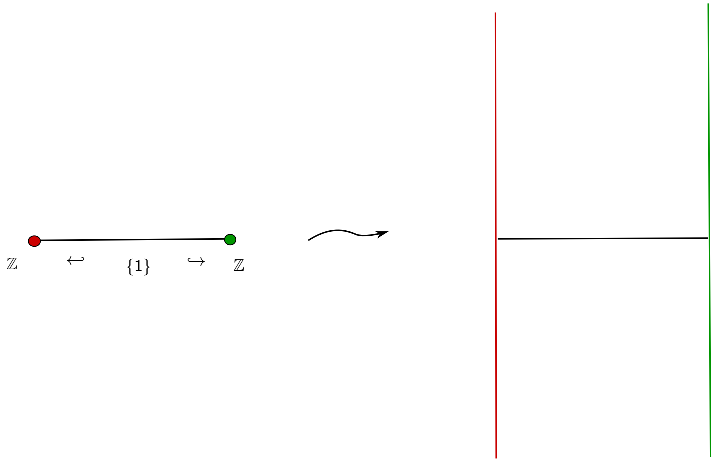
Alors G admet un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres.

Un exemple : le produit libre $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, vu comme arête de groupes.

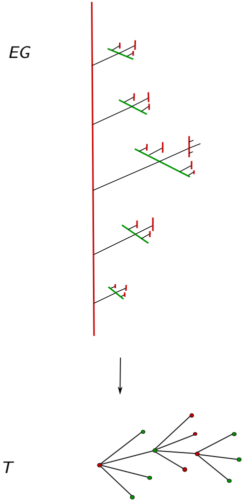


Un exemple : le produit libre $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, vu comme arête de groupes.

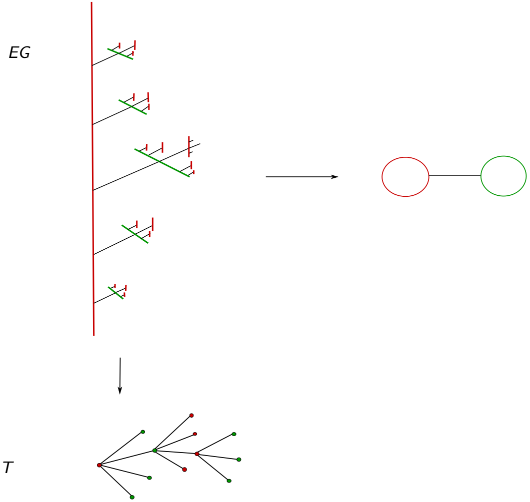
On a le complexe d'espaces classifiants compatible suivant, qui a pour réalisation :



Cela donne alors le modèle suivant d'espace classifiant :



Cela donne alors le modèle suivant d'espace classifiant :

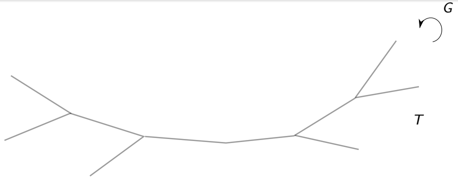


Un exemple d'application :

Petite simplification métrique sur un graphe de groupes

Définition

Soit G un groupe agissant sans inversion sur un arbre simplicial T, et $\mathcal{R}$ un ensemble fini d'éléments de G agissant de manière hyperbolique sur T. On note $A(w)$ l'axe et $l(w)$ la longueur de translation d'un élément w de $\mathcal{R}$, et $R_{\min}$ le minimum des longueurs de translation des éléments de $\mathcal{R}$.

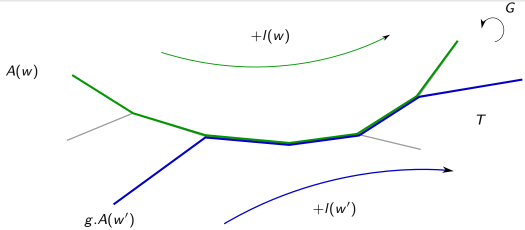


Définition

Soit G un groupe agissant sans inversion sur un arbre simplicial T, et $\mathcal{R}$ un ensemble fini d'éléments de G agissant de manière hyperbolique sur T. On note $A(w)$ l'axe et $l(w)$ la longueur de translation d'un élément w de $\mathcal{R}$, et $R_{\min}$ le minimum des longueurs de translation des éléments de $\mathcal{R}$.

On dit que $\mathcal{R}$ satisfait la condition de *petite simplification métrique* $C''(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, si :

- pour tout élément $g \in G$ et toute paire d'éléments distincts $w, w' \in \mathcal{R}$, le diamètre de l'intersection $A(w) \cap g.A(w')$ est strictement inférieur à $\lambda.R_{\min}$,
- pour tout élément $w \in \mathcal{R}$ et tout élément $g \in G \setminus \mathrm{Stab}\big(A(w)\big)$, le diamètre de l'intersection $A(w) \cap g.A(w)$ est strictement inférieur à $\lambda.R_{\min}$.



Théorème

Soit $G(\Gamma)$ un graphe de groupes au-dessus d'un graphe fini Γ, de groupe fondamental G et d'arbre de Bass-Serre T, tel qu'aucun élément de G ne fixe une droite de T. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble fini d'éléments de G agissant de manière hyperbolique sur T, et qui satisfait la condition de petite simplification métrique $C''(1/6)$.
Alors ${}^{G}/_{\ll \mathcal{R} \gg}$ se réalise comme groupe fondamental d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle au-dessus d'un complexe simplicial fini de dimension 2, dont les groupes locaux sont finis ou sont des sous-groupes des groupes locaux de $G(\Gamma)$.

Théorème

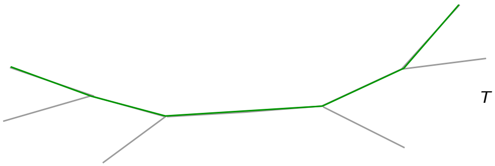
Soit $G(\Gamma)$ un graphe de groupes satisfaisant les conditions du théorème précédent. Si chaque groupe local admet un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres, il en va de même pour ${}^{G}/_{\ll \mathcal{R} \gg}$.

On se limite au cas où $\mathcal{R}$ est réduit à un unique élément hyperbolique g, que l'on écrit sous la forme $g = h^{n_g}$, avec $n_g \geq 1$ et h primitif.

1ère étape : Construction d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle.

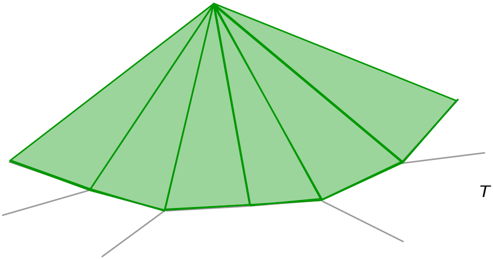
1ère étape : Construction d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle.

On construit un complexe $\widehat{T}$ en collant un cône sur chaque translaté de l'axe de h.



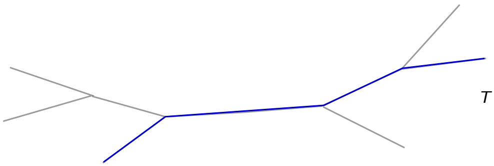
1ère étape : Construction d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle.

On construit un complexe $\widehat{T}$ en collant un cône sur chaque translaté de l'axe de h.



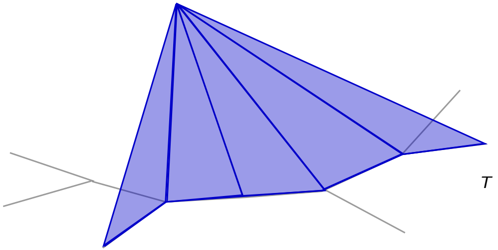
1ère étape : Construction d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle.

On construit un complexe $\widehat{T}$ en collant un cône sur chaque translaté de l'axe de h.

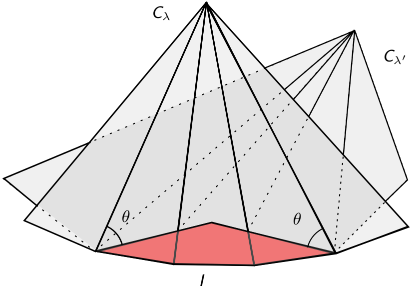


1ère étape : Construction d'un complexe de groupes à courbure négative ou nulle.

On construit un complexe $\widehat{T}$ en collant un cône sur chaque translaté de l'axe de h. Le complexe $\widehat{T}$ est muni d'une action de G.

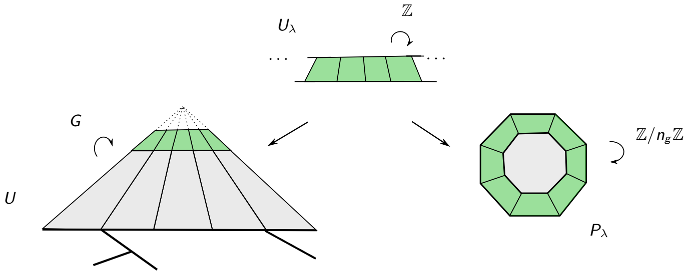


Pour obtenir un complexe CAT(0), on adapte une idée de Gromov et l'on effectue des identifications de la forme :



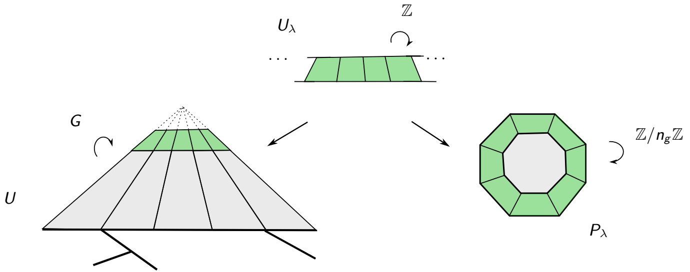
Le complexe Z ainsi obtenu est CAT(0), ce que l'on prouve en étudiant les links de ses sommets.

On recolle maintenant les complexes de groupes suivants :



où U est obtenu à partir de Z en enlevant un petit voisinage polygonal de chaque sommet de cône, et P_λ est un polygone à $l(g) = n_g.l(h)$ côtés.

On recolle maintenant les complexes de groupes suivants :

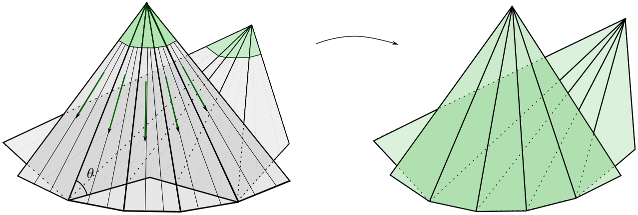


où U est obtenu à partir de Z en enlevant un petit voisinage polygonal de chaque sommet de cône, et P_λ est un polygone à $l(g) = n_g.l(h)$ côtés.

On obtient alors un complexe de groupes à courbure négative ou nulle au-dessus d'un complexe fini de dimension 2, dont le groupe fondamental est ${}^{G}/_{\ll \mathcal{R} \gg}$.

2ème étape : Construction d'un modèle cocompact d'espace classifiant.

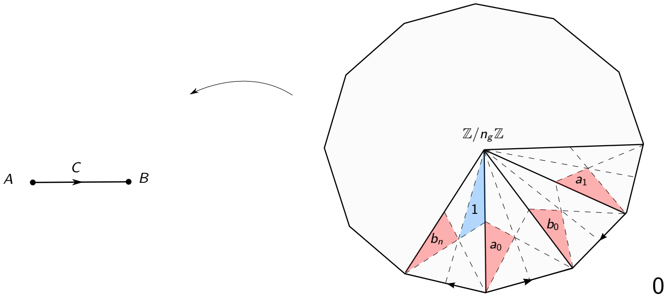
Les identifications précédentes étaient utiles pour s'assurer de la développabilité (condition CAT(0)). On peut néanmoins obtenir un complexe de groupes plus simple en déformant le précédent de la manière suivante :



Cela revient à faire la construction de graphe de complexes de groupes précédente, mais sans identification préalable.

Cela permet de réaliser $G/\ll \mathcal{R} \gg$ comme groupe fondamental d'un complexe de groupes explicite.

Exemple : Cas où $G = A *_C B$ et $h = a_0 b_0 \ldots a_n b_n$.



On peut alors construire un complexe d'espaces classifiants compatible, ce qui permet de conclure.

Partie II

Combinaison de bords de groupes

Définition

Soit G un groupe finiment engendré possédant un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres. Une $E\mathcal{Z}$-structure pour G est une compactification $\overline{EG} = EG \cup \partial G$ de EG telle que :

- $\overline{EG}$ est un compact métrisable contractile, localement contractile et de dimension topologique finie,
- le bord ∂G est un $\mathcal{Z}$-set dans $\overline{EG}$, i.e. pour tout voisinage U dans $\overline{EG}$ d'un point du bord, l'inclusion $U \setminus \partial G \hookrightarrow U$ est une équivalence d'homotopie,
- les compacts s'évanouissent à l'infini, i.e. pour tout $\xi \in \partial G$, pour tout voisinage U de ξ dans $\overline{EG}$ et tout compact K de EG, il existe un sous-voisinage V tel qu'un G-translaté de K rencontrant V est nécessairement contenu dans U,
- l'action de G sur EG s'étend continûment à $\overline{EG}$.

Quelques exemples de telles structures :

- Soit G un groupe agissant de manière géométrique sur un complexe CAT(0) X. Alors X est un modèle cocompact d'espace classifiant pour les actions propres de G. On obtient une $E\mathcal{Z}$-structure en adjoignant à X son bord visuel.
- Soit G un groupe hyperbolique. Une $E\mathcal{Z}$-structure est obtenue en adjoignant à un complexe de Rips adéquat le bord de Gromov de G (Bestvina-Mess, Meintrup-Schick).
- Il existe également de telles structures pour les groupes systoliques (Osajda-Przytycki).

Théorème (Farrell-Lafont)

Soit G un groupe admettant une $E\mathcal{Z}$-structure. Alors G satisfait la conjecture de Novikov.

PROBLÈME DE COMBINAISON : Soit $G(\mathcal{Y})$ un complexe de groupes à courbure négative ou nulle au-dessus d'un complexe simplicial fini localement euclidien Y, tel que chaque groupe local possède une $E\mathcal{Z}$-structure. Peut-on construire une $E\mathcal{Z}$-structure pour son groupe fondamental ?

Conditions de trois natures :

- condition *géométrique* : $G(\mathcal{Y})$ est à courbure négative ou nulle, i.e. son revêtement universel est CAT(0),
- condition *dynamique* : l'action de G sur X est *acylindrique*, i.e. il existe une constante uniforme $A \geq 0$ telle que tout sous-complexe de X de diamètre au moins A a un fixateur fini,
- condition *algébrique* sur les morphismes entre groupes locaux : pour simplifier, on supposera que les groupes locaux sont hyperboliques et que les plongements sont quasiconvexes.

Théorème de combinaison pour les bords de groupes

Soit $G(\mathcal{Y})$ un complexe de groupes au-dessus d'un complexe simplicial fini localement euclidien Y, de groupe fondamental G et de revêtement universel X, admettant un complexe d'espaces classifiants compatible. Supposons que :

- le revêtement universel X est CAT(0),
- l'action de G sur X est acylindrique,
- les groupes locaux sont hyperboliques et les morphismes sont des plongements quasiconvexes.

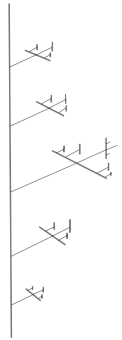
Alors G possède une $E\mathcal{Z}$-structure (et l'on possède une description d'un bord de G).

Idée de la preuve : On suit une stratégie de Dahmani pour étudier les graphes de groupes relativement hyperboliques.

On commence par définir le bord en tant qu'ensemble.

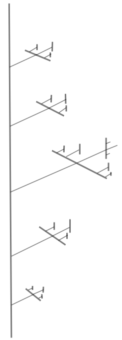
Idée de la preuve : On suit une stratégie de Dahmani pour étudier les graphes de groupes relativement hyperboliques.

On commence par définir le bord en tant qu'ensemble.



Idée de la preuve : On suit une stratégie de Dahmani pour étudier les graphes de groupes relativement hyperboliques.

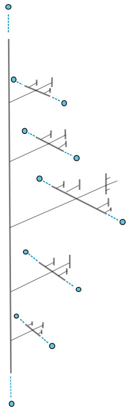
On commence par définir le bord en tant qu'ensemble.



Deux types de point du bord :

Idée de la preuve : On suit une stratégie de Dahmani pour étudier les graphes de groupes relativement hyperboliques.

On commence par définir le bord en tant qu'ensemble.

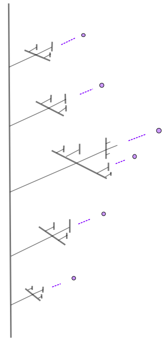


Deux types de point du bord :

- les points des bords de stabilisateurs de simplexes de X.

Idée de la preuve : On suit une stratégie de Dahmani pour étudier les graphes de groupes relativement hyperboliques.

On commence par définir le bord en tant qu'ensemble.



Deux types de point du bord :

- les points des bords de stabilisateurs de simplexes de X.
- les points du bord visuel de X,

Le bord de G est défini (en tant qu'ensemble) comme la réunion

$$\partial G := \partial X \ \sqcup \ \underbrace{\left(\coprod_{\sigma \subset X} \partial G_\sigma \right) / \sim}_{=:\partial_{Stab} G},$$

où pour toute inclusion de simplexes $\sigma \subset \sigma'$, on identifie $\xi \in \partial G_{\sigma'}$ et son image $\phi_{\sigma,\sigma'}(\xi) \in \partial G_\sigma$.

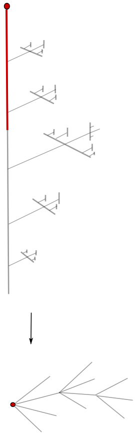
Du fait de ces identifications, un point de $\partial_{Stab} G$ n'est plus "au-dessus" d'un unique sommet, mais au-dessus d'un sous-complexe. Plus précisément :

Définition

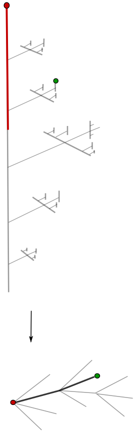
Pour un point $\xi \in \partial_{Stab} G$, on appelle *domaine de* ξ, et l'on note $D(\xi)$, la réunion des simplexes σ de X tels que ∂G_σ contienne un point dans la classe de ξ.

Idée pour définir la topologie :

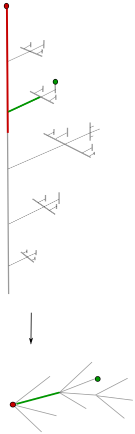
Idée pour définir la topologie :



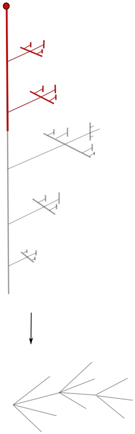
Idée pour définir la topologie :



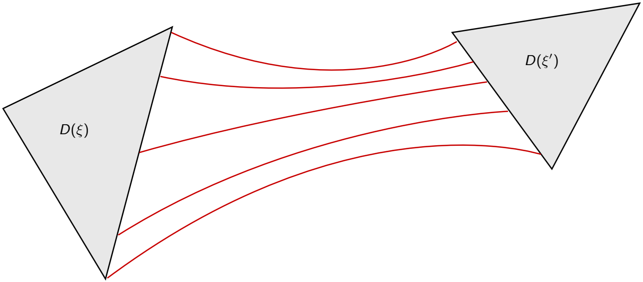
Idée pour définir la topologie :



Idée pour définir la topologie :



Dans le cas général, un élément ξ de $\partial_{Stab} G$ n'est plus au-dessus d'un unique sommet, mais "au-dessus" de son domaine $D(\xi)$. On est donc amené à considérer l'ensemble des géodésiques entre deux domaines $D(\xi)$ et $D(\xi')$.



Deux remarques :

- Les conditions d'acylindricité, de revêtement universel CAT(0), et de plongements quasiconvexes entre groupes locaux ont la conséquence suivante :

Proposition

Les domaines sont des sous-complexes convexes avec un nombre uniformément borné de simplexes.

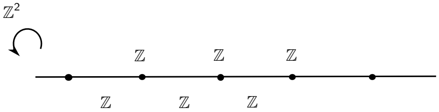
- Les complexes localement euclidiens (et plus généralement les M_κ-complexes au sens de Bridson, $\kappa \leq 0$) avec un nombre fini de types d'isométrie de simplexes possèdent de fortes propriétés de finitude sur leurs ensembles de géodésiques.

Partie III

Combinaison de groupes hyperboliques

Problème de combinaison : Soit G un groupe agissant de manière cocompacte sur un complexe simplement connexe hyperbolique X, tel que chaque stabilisateur de simplexe soit hyperbolique. Le groupe G est-il hyperbolique ?

C'est faux en général :



Il existe un tel théorème de combinaison pour les groupes hyperboliques dans le cas des graphes de groupes.

Version acylindrique du théorème de combinaison de Bestvina-Feighn

Soit $G(\Gamma)$ un graphe fini de groupes, de groupe fondamental G et d'arbre de Bass-Serre T, tel que :

- l'action de G sur T est acylindrique,
- les groupes locaux sont hyperboliques et les morphismes sont des plongements quasiconvexes.

Alors G est hyperbolique.

Le théorème général permet de montrer l'hyperbolicité de groupes fondamentaux de variétés hyperboliques de dimension 3 obtenues comme suspensions d'un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface hyperbolique.

Théorème de combinaison pour les groupes hyperboliques

Soit $G(\mathcal{Y})$ un complexe de groupes au-dessus d'un complexe simplicial fini localement euclidien, de groupe fondamental G et de revêtement universel X, admettant un complexe d'espaces classifiants compatibles. Supposons que :

- le revêtement universel X est CAT(0) et hyperbolique,
- l'action de G sur X est acylindrique,
- les groupes locaux sont hyperboliques et les morphismes locaux sont des plongements quasiconvexes.

Alors G est hyperbolique et les groupes locaux se plongent dans G comme sous-groupes quasiconvexes. De plus, on dispose d'une description du bord de Gromov de G.

Idée de la preuve : On utilise la caractérisation dynamique de l'hyperbolicité due à Bowditch.

Théorème (Bowditch)

Soit G un groupe de type fini agissant par homéomorphismes sur un espace métrisable compact contenant au moins trois points, et tel que :

- pour toute suite d'éléments (g_n) d'éléments de G, il existe une sous-suite $(g_{\varphi(n)})$ et des points ξ_-, ξ_+ de M tels que pour tout compact $K \subset M \setminus \{\xi_-\}$, la suite de translatés $g_{\varphi(n)}K$ converge uniformément vers ξ_+,
- pour tout élément ξ de M, il existe une suite (g_n) d'éléments de G et deux points distincts ξ_-, ξ_+ de M tels que $g_n\xi \to \xi_-$ et pour tout élément $\xi' \neq \xi$, on ait $g_n\xi' \to \xi_+$.

Alors G est hyperbolique, et M est homéomorphe de façon G-équivariante au bord de Gromov de G.

D'après le théorème de combinaison pour les bords de groupes, G admet une $E\mathcal{Z}$-structure $(\overline{EG}, \partial G)$. On dispose donc d'un candidat pour le bord de Gromov de G. Il reste à étudier la dynamique de l'action de G sur ∂G.

Perspectives

1) Généralisation des théorèmes précédents :

- autoriser des actions sur des complexes simpliciaux hyperboliques à la géométrie plus "combinatoire" (complexes systoliques, complexes $B(6) - C(7)$ au sens de Wise, etc.)
- relâcher les hypothèses sur les plongements entre groupes locaux.

2) Étudier des exemples concrets où les théorèmes de combinaison s'appliquent :

- Groupes possédant un sous-groupe de codimension 1 : Étant donné un groupe G possédant un sous-groupe H de codimension 1, étudier l'action de G sur le complexe cubique CAT(0) associé pour en déduire des informations sur G.

  PROBLÈME : Existe-t-il des conditions sur la paire (G, H) pour que l'hyperbolicité de H implique l'hyperbolicité de G ?

- Petite simplification sur les complexes de groupes.