La(s) hoja(s) de Chema

Alex Martínez Ascensión

1. Espacios métricos

Definición 1.1 $\delta : M \times M \to \mathbb{R}$ es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x,y) > 0$ si $x \neq y$, o $\delta(x,x) = 0$
- $\delta(x,y) = \delta(y,x)$
- $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

Ejercicio 1.1 Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a: $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \cdots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

Teorema 1.4 Si $M' \subset M$ y existe el espacio métrico (M,δ), entonces también existe (M',δ), y se llama **métrica inducida** por (M,δ).

Definición 1.5 Sean $(M,\delta),(M',\delta')$ y $g : M \to M'$. Se dice que g conserva las distancias si $\delta'(g(x),g(y)) = \delta(x,y)\ \ \forall\ \ x,y \in M$. Si además g es biyectiva, entonces es una **isometría**.

Teorema 1.7 Si existen $(M,\delta),(M',\delta'),(M'',\delta'')$ y $g : M \to M'$ y $h : M \to M'$ son isometrías, entonces $h \circ g$ y g^{-1} también son isometrías.

Definición 1.8 La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si $g \in \mathrm{Isom}(M)$ entonces $g^{-1} \in \mathrm{Isom}(M)$
- La isometría identidad, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Isom}(M)$

Definición 1.12 Si (M,δ), para $a,b \in M$ se llama **segmento** de extremos a y b y se representa por $[a,b]$ al conjunto $[a,b] = \{x \in M \mid \delta(a,x) + \delta(x,b) = \delta(a,b)\}$. Asimismo, $x,y,z \in M$ están alineados si $(x < y < z)$ $y \in [x,z]$.

Ejercicio 1.5 Para $\sigma \in \{1,-1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría para $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

Leyenda

☻ Demostración que ha caído en exámenes de hasta hace 3 años o que sale en la guía.

Nota

⚠ Este resumen está basado en la versión del libro base de 2014. Los cambios son mínimos, como la inclusión del tema *Geometría analítica* en el resto de temas.

Page intentionally left in blank

2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

Axioma P1 Si tenemos el conjunto $\mathbb{P}$, denominado **plano**, y la aplicación $d : \mathbb{P}\times\mathbb{P} \to \mathbb{R}$ llamada **distancia**, entonces$(\mathbb{P}, d)$ es un espacio métrico.

Definición 2.2 Una **recta** $r \subset \mathbb{P}$ satisface

- r contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos A, B, C, están alineados si están en r.

Axioma P2 $\mathbb{P}$ contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos, A y B de $\mathbb{P}$ pasa una recta, r_{AB}.

Definición 2.6 / **Teorema 2.7** Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por $a \parallel b$. Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

Axioma P3 Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ existe una biyección $\gamma : r \to \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(X)-\gamma(Y)| = |x-y| = d(X,Y)\ \forall\ X,Y \in r$

Observación 2.8 Si $A, B \in r$ son distintos, entonces existe un punto $M \in r : d(A,M) = d(M,B)$ que denotamos por medio$[A,B]$ y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto $B \in r$ tal que $B = \text{medio}[A,M]$.

☻ Demostración. Tomamos una biyección $\gamma : r \to \mathbb{R}$ y suponemos $\gamma(A) = a, \gamma(B) = b$. Para $X \in r$ tomamos $\gamma(X) = t$. Si suponemos $A \neq B$ entonces $d(A,X) = d(X,B) \iff \big|(t-a)\big| = \big|(t-b)\big| \iff t = \frac{a+b}{2}$. Por tanto, M sólo puede ser $\gamma^{-1}(t)$. Si definimos, por tanto $M = \gamma^{-1}(\frac{a+b}{2})$ se tiene que

$$d(A,M) = \big|\gamma(M)-\gamma(A)\big| = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{1}{2}\big|b-a\big| = \frac{1}{2}d(A,B)$$

Observación 2.9 Si r es una recta y $P \in r$, entonces r se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$ y $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$.

Axioma P4 Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ hay dos subconjuntos H^1 y H^2, denominados **semiplanos** de r, que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si $X, Y \in H^i$ entonces $[X,Y] \subset H^i$
- Si $X \in H^1$ y $Y \in H^2$ entonces $[X,Y] \cap r \neq \emptyset$.

Definición 2.15 Sean P, Q, R no alineados, entonces el triángulo $\triangle\{P,Q,R\}$, o $\triangle PQR$ está formado por los segmentos $[P,Q]$, $[Q,R]$, $[P,R]$, llamados lados, y los vértices P, Q, R.

Teorema 2.16 [Axioma de Pasch] Dado un triángulo $\triangle PQR$ y una recta r; si r corta a $[P,Q]$, entonces o corta a $[P,R]$ o a $[Q,R]$.

Definición 2.17 = 1.5 Una **isometría** en $\mathbb{P}$ es una biyección $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ que cumple que $d(g(X), g(Y)) = d(X,Y)\ \forall\ X,Y \in \mathbb{P}$.

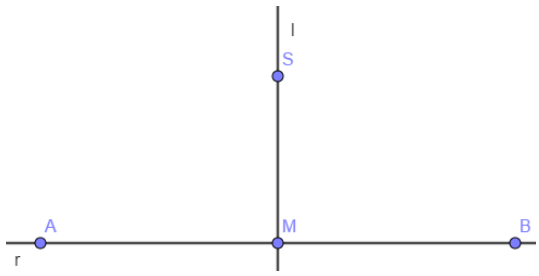
Teorema 2.18 Si $A, B \in \mathbb{P}$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g([A,B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

Axioma P5 Si $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$ y $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$ son dos pares de puntos que cumplen $d(A_1,A_2) = d(B_1,B_2)$ entonces existe $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ tal que $g(A_i) = B_i$. Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

Axioma P6 Para toda recta r existe una isometría σ llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma\circ\sigma = \text{Id}$

Definición 2.23 / **Teorema 2.25** / **Corolario 2.30** Una recta l es **ortogonal** a r si para todo $S \in l$ y para todo par de puntos A, B que cumple que $M = \text{medio}[A,B]$, de modo que $l \cap r = M$, entonces se da que $d(A,S) = d(S,B)$. Se denota $l \perp_M r$. En estas condiciones, $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S,A) = d(S,B)\}$, se denomina **mediatriz** de $[A,B]$.



Lema 2.21 Si σ_r entonces, para todo X, medio$[X, \sigma_r(X)] \in r$.

Observación 2.24 Si $l \perp r$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g(l) \perp g(r)$.

Teorema 2.26 Si $l, r \subset \mathbb{P}$ cortan en M y σ_l, σ_r son dos reflexiones de l y r, entonces se cumple que

$l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$.

Teorema 2.27 / 2.29 Para toda recta r y todo punto $S \in \mathbb{P} - r$, existe una recta l ortogonal a r, que pasa por S. Si r es una recta, y $M \in r$, entonces existe l tal que $l \perp_M r$.

Axioma P7 Para toda recta r y todo punto P existe sólo una recta **paralela** a r que pase por P.

Teorema 2.31 / 2.33 Si $a \perp l$ y $b \perp l$ entonces $a \parallel b$. Sean $a \parallel b$. Entonces, para todo $A \in a$, la única recta $l \perp_A a$ también es ortogonal a b.

Teorema 2.32 Las rectas parallelas forman una relación de equivalencia.

- Reflexividad: $a \parallel a$
- Simetría: $a \parallel b \to b \parallel a$
- Transitividad $a \parallel b$ y $b \parallel c \to a \parallel c$

Ejercicio 2.6 Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. Para todo t, existe un único $P_t \in r$ que cumple $d(P_t, A) = |t|$ y $d(P_t, B) = \left| t - d(A,B) \right|$. En definitiva, la posición de P_t está sólamente determinada por las distancias $d(A, P_t)$ y $d(P_t, B)$.

3. Isometrías del plano

Definición 3.1 Para una aplicación $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $P \in \mathcal{M}$ es un **punto fijo** de ϕ si $\phi(P) = P$; y $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ es un **subconjunto invariante** de ϕ si $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{M}$.

Lema 3.2 Si $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ y $A \neq B$ son dos puntos fijos de g, entonces todo $X \in r_{AB}$ es punto fijo de g.

Definición 3.3 Si $g, g' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$, g y g' son **conjugadas** si existe una isometría h tal que $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$.

Teorema 3.4 Un punto P es fijo de g sii $h^{-1}(P)$ es un punto fijo de g'. Es decir

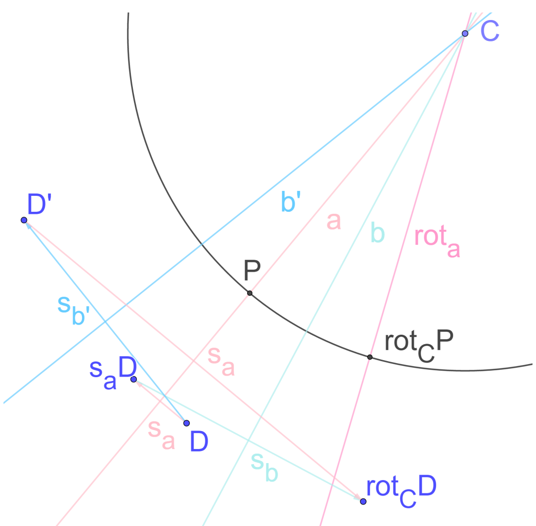
Demostración. Si $h^{-1}(P)$ es punto fijo de g', entonces $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$. Por tanto, $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$, luego $g(P) = P$.

Ejemplo 3.5 Una reflexión sobre r cumple que

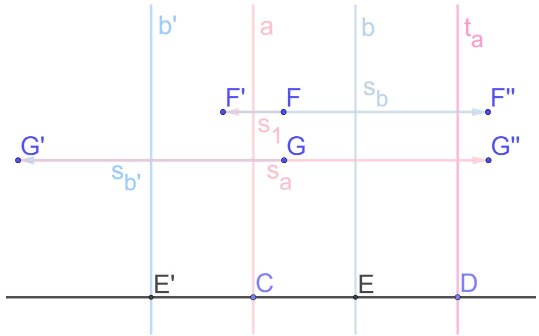
- $\sigma_r \circ \sigma_r = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$ y $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$ (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$ y viceversa.
- X y $\sigma_r(X)$ se encuentran en una recta ortogonal a r.

Teorema 3.6 Sea $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ y sea r_{AB}. Si A, B son puntos fijos en g, entonces o bien $g = \sigma_r$ o bien $g = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$.

Teorema 3.9 Llamamos ρ una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo C. Para toda recta a pasando por C existen dos rectas b, b' únicas tales que $\rho = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$.



Ejercicio 3.1 Llamamos τ una **traslación** a una isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta c invariante, es decir, $\tau(c) = c$. entonces para toda recta $a \perp c$ existen dos rectas $b, b' \perp c$ que cumplen $\tau = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$. Además, si $\tau(l) = l$, entonces $l \parallel c$.



Ejercicio 3.2 Si $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P}) \mid g$ es rotación de centro $P\} \cup \{\mathrm{id}_{\mathbb{P}}\}$ entonces

- Si a es una recta que pasa por P, entonces $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$.
- $gh = hg$ para todo $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$.
- Para $X \in \mathbb{P} - \{P\}$ y $g(X) = h(X)$ entonces $g = h$.

Ejercicio 3.3 Si h es una isometría

- Si $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ entonces $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si r es una recta entonces $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

Ejercicio 3.3 Si a, b son rectas en $\mathbb{P}$

- $\sigma_a\sigma_b\sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a\sigma_b = \sigma_b\sigma_a \iff a \perp b$

Ejemplo 3.12 Sean a, b tales que $a \perp_P b$. Entonces la rotación es de 180° y se llama **reflexión central** si se denota como σ_P. Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P\sigma_P = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$
- Para todo X, $\sigma_P(X)$ es el único punto que cumple $P = \mathrm{medio}[X, \sigma_P(X)]$.
- σ_P es independiente de la elección de rectas $a \perp b$.

Teorema 3.13 Las rectas r y $\sigma_P(r)$ son paralelas.

Ejemplo 3.14 Una **reflexión con deslizamiento** ϕ es una composición de una reflexión σ_c y una traslación τ: $\phi = \tau\sigma_c$. ϕ deja invariante sólo la recta c, y no tiene ningún punto invariante.

Teorema 3.15 Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones σ:

	Con puntos fijos	Sin puntos fijos
par	ρ	τ
impar	σ	ϕ

Teorema 3.16 Si g, g' son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

4. Ángulos

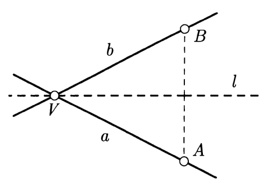
Definición 4.1 Sean r, l dos rectas con un punto V en común. Sean $\overline{r}$ y $\overline{l}$ dos semirrectas determinadas por V en r y l. El par $\{\overline{l}, \overline{r}\}$ es un **ángulo**. V es el vértice del ángulo y $\overline{l}$ y $\overline{r}$ son los lados del ángulo. El ángulo se designa por $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ o, si no hay lugar a confusión, $\angle V$. Así, por ejemplo, dado un triángulo $\triangle PQR$, $\angle P$ es el ángulo formado por P con $[P, Q]$ y $[P, R]$.

Observación 4.4 Si $r = l$, y $\overline{r}_1$ y $\overline{r}_2$ son las semirrectas determinadas por V, entonces, en estas circunstancias, el ángulo $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_2\}$ se denomina **ángulo llano** y $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_1\}$ se denomina **ángulo nulo**.

Definición 4.5 Un ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y un ángulo $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **congruentes** si existe una isometría g tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$. Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como $\angle A = \angle B$.

Observación 4.6/4.8 Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ tiene vértice V y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ tiene vértice V', y g es una isometría tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$, entonces $g(V) = V'$. Asimismo, si existe una isometría h que hace $h(V) = V'$, entonces $h(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$.

Ejemplo 4.9 Consideramos las rectas $a \neq b$ que cortan en V, con sus respectivas semirrectas $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2$. Consideramos $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ y elegimos los puntos $A \in \overline{a}_1, B \in \overline{b}_1$ a igual distancia, $d(V, A) = d(V, B)$. Existe una recta $l \perp r_{AB}$ que pasa por V (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**. La bisectriz l cumple que $\sigma_l(A) = B, \sigma_l(\overline{a}_1) = \overline{b}_1$ y viceversa. Además, si $\overline{l}$ es la semirrecta que corta a $[A, B]$, entonces $\angle\{\overline{a}_1, \overline{l}\} = \angle\{\overline{b}_1, \overline{l}\}$.

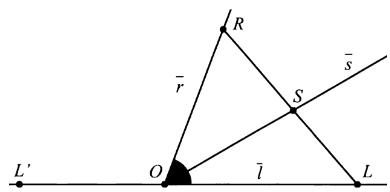


Teorema 4.11 Sean a, b que cortan en V. El ángulo $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ es congruente con $\angle\{\overline{a}_2, \overline{b}_2\}$ y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

Teorema 4.13/Definición 4.23 Sean $l \perp_V r$ y $l' \perp_{V'} r'$. Entonces $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son congruentes. En este caso, los ángulos $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

Definición 4.15 Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ no es ni nulo ni llano, y H_l^1 es el semiplano que contiene a $\overline{r}$, y H_r^1 es el semiplano que contiene a $\overline{l}$, entonces el ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ viene determinado como el conjunto $H_l^1 \cap H_r^1$.

Teorema 4.18 [De la barra transversal] Sea $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ con vértice V y sean $L \in \overline{l}, R \in \overline{r}$. Una semirrecta $\overline{s}, V \in \overline{s}$ está dentro de $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ sii corta a $[L, R] - \{L, R\}$.



Definición 4.19 (Comparación de ángulos) Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, se dice que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ es menor que $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, si existe una isometría g tal que $g(\overline{a}) = \overline{c}$ y que $g(\overline{b})$ está en el interior de $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$

Teorema 4.21 Si existen 4 ángulos tales que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{a}', \overline{b}'\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\} = \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$, y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}', \overline{b}'\} \prec \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$.

Teorema 4.22 Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, o $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \succ \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$.

Definición 4.25 Sea $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ con vértice V y $\overline{b}$ una semirrecta en el interior de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$. Entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ es la **suma** de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$, o $\angle\{\overline{b}, \overline{c}\} = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\} + \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$

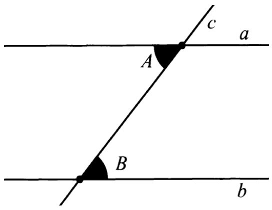
Definición 4.26 Para tres ángulos $\angle U, \angle V, \angle W$, decimos que $\angle V = \angle U + \angle W$ si existe una descomposición $\angle V = \angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$, $\angle U = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$, $\angle W = \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$.

Definición 4.28 Dado $\triangle PQR$, el lado $[R, Q]$ y el ángulo $\angle P$ son **opuestos**.

Definición 4.29 / **Teorema 4.30** Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si $\triangle PQR$ es isósceles y $[P,Q]$ es congruente con $[P,R]$, existe una reflexión σ tal que $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$, la bisectriz de $\angle P$. Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

Definición 4.34 / **Teorema 4.35** Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación ρ tal que $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$.

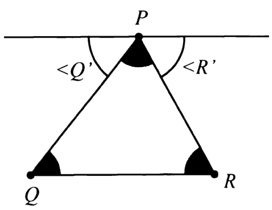
Definición 4.39 / **Teorema 4.40** Sean $a \parallel b$ y c una recta que corta a a en A y a b en B. El par de ángulos $\angle A, \angle B$ de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.



☻ Demostración. Sea m = medio$[A,B]$. La media vuelta σ_M verifica que $\sigma_M(A) = B$ y $\sigma_M(c) = c$. Además, $\sigma_M(a)$ es paralela a a y pasa por B, luego por el **Axioma P7**, ha de ser b. Por tanto, $\angle\{\overline{a},\overline{c}\} = \angle\{\overline{b},\overline{c}\}$ y, por tanto $\angle(A) = \angle(B)$

Teorema 4.41 La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Si hacemos una recta p paralela a $[Q,R]$ tenemos que (Q,Q') y (R,R') son pares de ángulos internos y la suma $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$ es un ángulo llano.



Ejercicio 4.9 Sea ρ una rotación de centro C y sea $t = \triangle\{C, P, \rho(P)\}$. Entonces la clase de congruencia del ángulo $\angle_t C$ se denomina ángulo de rotación $\angle\rho$.

Ejercicio 4.11 Un ángulo orientado es un ángulo donde se fija un orden en sus lados. Dos ángulos orientados $\overrightarrow{\angle}(\overline{r},\overline{l})$ y $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}',\overline{l}')$ son congruentes si existe una isometría donde $g(\overline{r}) = \overline{r}'$ y $g(\overline{l}) = \overline{l}'$ y se conserva la orientación del plano. Así $\overrightarrow{\angle}(\overline{r},\overline{l})$ la clase de congruencia con todos los ángulos congruentes.

5. Teorema de Tales

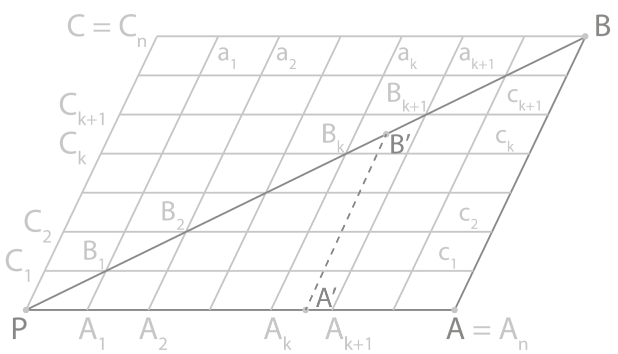
Definición 5.0 Un **cuadrilátero** es una cuaterna ordenada de puntos [vértices] de $\mathbb{P}$, (P, Q, R, S) formada por los segmentos $[P, Q], [Q, R], [R, S], [S, P]$ [lados] si dos cualesquiera segmentos son disjuntos o tienen un extremo en común. Dos vértices extremos del mismo lado son adyacentes y, si no, son opuestos.

Definición 5.1 Un cuadrilátero $\square PABC$ es un **paralelogramo** si medio$[P, B]$ = medio$[A, C] = M$, donde los segmentos $[P, B]$ y $[A, C]$ son las diagonales, y M es el centro.

Observación 5.2 Sea $\square PABC$ con centro M. Por las propiedades de las reflexiones centrales, se tiene que $\sigma_M(P) = B$ y $\sigma_M(A) = C$ [y viceversa]. Además, por tales propiedades, se tiene que $r_{PA} \parallel r_{BC}$ y $r_{PC} \parallel r_{AB}$; y $d(P, A) = d(B, C)$ y $d(P, C) = d(A, B)$.

Observación 5.3 Si existen tres puntos P, A, C no alineados, se puede construir un paralelogramo de varias maneras. Una forma es aplicar el axioma de las paralelas y proyectar r_{PA} en C, y r_{PC} en A. Otra forma es obtener M = medio$[C, A]$, crear la recta r_{PM} y proyectar el punto B como el que $PM = d(P, M) = d(M, B) = MB$.

☻ **Teorema 5.5 [Tales]** Sea $\triangle PAB$ y sean $A' \in [P, A]$, $B' \in [P, B]$ dos puntos tales que $r_{AB} \parallel r_{A'B'}$. En estas condiciones se tiene que $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$.



Demostración. Vamos a basar la demostración en la figura de arriba. Diseñamos el paralelogramo $\square PABC$ y dividimos el lado $[P, A]$ en n segmentos con puntos de división $A_1, A_2, \cdots, A_n$, de modo que $d(A_i, A_{i+1}) = \frac{d(P,A)}{n}$. El mismo proceso se realiza con el lado $[P, C]$. Además, introducimos las rectas $a_k \parallel r_{PC}$ y $c_k \parallel r_{PA}$, de modo que el punto P_{kl} es la intersección de a_k con c_l. Vemos que $B_i = P_{ii}$. También observamos que existen los paralelogramos $\square A_k A_{k+1} P_{k+1,l} P_{k,l}$ y $\square C_l C_{l+1} P_{k,l+1} P_{k,l}$, de modo que $P_{kl}P_{k+1,l} = \frac{PA}{n}$ y $P_{kl}P_{k,l+1} = \frac{PC}{n}$. Ahora consideramos B_k. Sabemos que $\sigma_{B_k}(r) \parallel r$, $\sigma_{B_k}(c_k) = c_k$ y $\sigma_{B_k}(P_{k-1,k}) = P_{k+1,k}$. También, como $a_{k-1} \parallel a_{k+1}$, $\sigma_{B_k}(a_{k-1}) = a_{k+1}$, y por el mismo criterio, $\sigma_{B_k}(c_{k-1}) = c_{k+1}$. Con esto demostramos que

$$\sigma_{B_k}(B_{k-1}) = \sigma_{B_k}(P_{k-1,k-1}) = P_{k+1,k+1} = B_{k+1}$$

Por tanto, los puntos B_{k-1}, B_k, B_{k+1} están alineados y $B_{k-1}B_k = B_k B_{k+1}$. Por tanto, $B_k B_{k+1} = \frac{PB}{n}$. Es decir, hemos demostrado que

$$P_{kl}P_{k+1,l} = \frac{PA}{n} \qquad P_{kl}P_{k,l+1} = \frac{PC}{n} \qquad P_{kl}P_{k+1,l+1} = \frac{PB}{n}$$

Si reordenamos, tenemos que

$$\frac{PA_k}{PA} = \frac{P_{0,0}P_{k,0}}{PA} = \frac{k}{n} = \frac{P_{0,0}P_{k,k}}{PB} = \frac{PB_k}{PB}$$

Y con esto demostramos el teorema para los puntos k. Si tenemos A' y B' en la figura tales que $A' \in [A_k, A_{k+1}]$, de modo que $a' = r_{A'B'}$ está entre a_k y a_{k+1}, y es paralelo a estas, haciendo que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$. Por ser $A' \in [A_k, A_{k+1}]$ entonces $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k}{PA} + \frac{1}{n}$ y, como $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$, entonces $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n}$. Dado que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$ entonces

$$\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$$

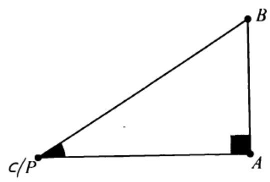
Si nos fijamos en los elementos de azul, vemos que n puede hacerse tan pequeño como queramos, de modo que, en el límite

$$\frac{PB'}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} \iff \frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA}$$

Corolario 5.6 En base al teorema de Tales, se tiene que

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

Definición 5.7 Dado un triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces la **hipotenusa** es el lado opuesto a $\angle A$, $[P, B]$. Los lados adyacentes, $[P, A], [B, A]$, son los **catetos**.

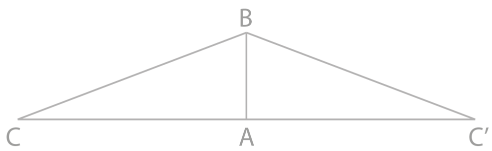


Definición 5.8 Sea el triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces se definen las relaciones

- seno: $\operatorname{sen}\angle P = \frac{BA}{PB}$
- coseno: $\cos\angle P = \frac{PA}{PB}$
- tangente: $\tan\angle P = \frac{BA}{PA}$
- cotangente: $\cot\angle P = \frac{PA}{BA}$

Teorema 5.10 Las razones trigonométricas para $\angle P$ no dependen del triángulo $\triangle PAB$, sólo de la clase de congruencia de $\angle P$.

Teorema 5.12 Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, la medida de los catetos, AB, AC, es menor que la de la hipotenusa BC.



Demostración. Con la construcción anterior, vemos que los puntos B, C, C' no están alineados, pues $C \in r_{AC}$ y $r_{AB} \perp r_{AC}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $2AC = CC' < BC + BC' = 2BC$.

Definición 5.13 La **medida de un ángulo** agudo $\angle P$ es el número real:

$$\measuredangle P = \arccos(\cos\angle P)$$

Teorema 5.14 / 5.19 Si $\angle P = \angle Q$ entonces $\measuredangle P = \measuredangle Q$, sean $\angle P$ y $\angle Q$ agudos y obtusos.

Definición 5.15 Dado un ángulo $\angle\overline{a},\overline{b}_1 = \angle V$, un **ángulo suplementario** $\overline{\angle V} = \angle\overline{a},\overline{b}_2$ es aquel donde $\overline{b}_1$ y $\overline{b}_2$ son las dos semirrectas de b en V, y $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ comparten $\overline{a}$. La suma de $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ es un ángulo llano.

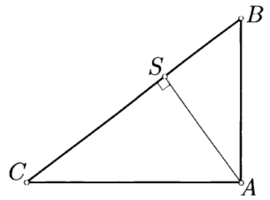
Teorema 5.17 Si dos ángulos son congruentes, sus suplementarios lo son.

Definición 5.18 Para un ángulo obtuso $\angle P$ se tiene $\operatorname{sen}\angle P = \operatorname{sen}\overline{\angle P}$ y $\cos\angle P = -\cos\overline{\angle P}$

6. Teorema de Pitágoras

Teorema 6.1 [Pitágoras] Para todo triángulo rectángulo $\angle ABC$ con $\angle A$ recto, se tiene que

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$



Demostración. Consideramos el punto $S \in r_{BC}$ tal que $r_{SA} \perp r_{CB}$. Pese a que es evidente, hay que demostrar que $S \in [B,C]$. Observamos que $SC < CA < BC$, la primera igualdad por $\cos\angle C = \frac{SC}{CA} < 1 \iff SC < CA$. Del mismo modo, $BS < BC$. Entonces, $S \in [B,C]$. Ahora observamos que

$$\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = \frac{CS}{CA}$$

Por otra parte, también vemos que

$$\cos\angle B = \frac{BS}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

De ambas expresiones tenemos que (1) $CA^2 = CB \cdot CS$ y (2) $AB^2 = BS \cdot BC$. Así, $CB \cdot CS + CB \cdot BS = CB(CS + BS) = CB^2 = CA^2 + BA^2$.

Corolario 6.3 Sea $\angle C$, entonces

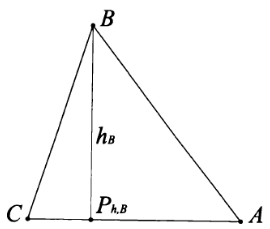
$$\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = 1$$

Demostración. Si tenemos que $BC = 1$, entonces $\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = CA$ y $\operatorname{sen}\angle C = \frac{BA}{BC} = BC$. Aplicando el teorema de Pitágoras, entonces $\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = BA^2 + CA^2 = BC^2 = 1$.

Teorema 6.4 Dado $x \in [0,\pi] \subset \mathbb{R}$, existe un ángulo $\angle V$ tal que $\measuredangle V = x$.

Teorema 6.5 $\angle P = \angle Q$ sii $\measuredangle P = \measuredangle Q$

Definición 6.6 Sea $\triangle ABC$ y $h_B \perp r_{CA}$ y que pasa por B, y sea el punto $P_{h,b}$ el punto de corte de h_B y r_{CA}. Entonces, $P_{h,b}$ es el **pie de la altura de** B, y $[P_{h,b}, B]$ es la **altura** de $\triangle ABC$ desde B.



Teorema 6.7 En el triángulo de la **Definición 6.6**, si $\angle A$ y $\angle C$ son agudos, entonces $P_{h,b} \in [C,A]$. Si $\angle A$ o $\angle C$ es obtuso, entonces $P_{h,b} \notin [C,A]$.

Teorema 6.8 [Fórmula del coseno] Sea $\triangle ABC$ un triángulo, entonces se cumple que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

Demostración. Basándonos en la figura de la **Definición 6.6**, y por el **Teorema 6.7** [en el caso de $\triangle$ acutángulo], entonces se forman dos triángulos rectángulos $\triangle P_{hB}BC$ y $\triangle P_{hB}BA$ donde se verifica que $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ Por el **Teorema de Pitágoras** tenemos que

$$AB^2 = P_{hB}A^2 + P_{hB}B^2 \qquad BC^2 = BP_{hB}^2 + P_{hB}C^2$$

Si sustituimos una igualdad en otra tenemos que

$$BC^2 = CP_{hB}^2 + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Como $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ entonces

$$BC^2 = (CA - P_{hB}A)^2 + AB^2 - P_{hB}A^2 =$$

$$CA^2 + P_{hB}A^2 - 2 \cdot CA \cdot P_{hB}A + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Si quitamos las partes en azul, y consideramos que $P_{hB}A = AB\cos\angle A$, entonces queda el teorema demostrado.

Corolario 6.9 [Recíproco del Tma de Pitágoras] Dado un triángulo donde $BC^2 = AB^2 + AC^2$ entonces es un triángulo rectángulo, con $\angle A$ recto.

Demostración. Si aplicamos el **Teorema del coseno**, entonces, el término $2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 0$, y como $AB \neq 0$, $AC \neq 0$, entonces $\cos\angle A = 0 \iff \angle A$ es recto (**Teorema 6.5**).

Teorema 6.10 [Fórmula de los senos] Sea $\triangle ABC$, entones se verifica

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A}$$

Demostración. Seguimos con la figura de la **Definición 6.6**. Vemos que $BP_{hB} = BC\operatorname{sen}\angle C = BA\operatorname{sen}\angle A$. Si el triángulo es obtusángulo también se cumple porque los senos se mantienen. Simplemente, igualando BP_{hB} tenemos que $\frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{BA}{\operatorname{sen}\angle C}$. El resto de igualdades se consiguen con las demás alturas.

Teorema 6.11 Para $\triangle ABC$...

- Si se conoce $\measuredangle A$ y AB, AC (adyacentes), entonces se pueden hallar $\measuredangle B, \measuredangle C, BC$.
- Si se conocen AB, AC, BC entonces se pueden hallar $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C$.
- Si se conocen $AB, \measuredangle A, \measuredangle B$ entonces se pueden hallar $BC, AC, \measuredangle C$.

Corolario 6.12 [Criterios de congruencia de $\triangle$] Dados $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ entonces

- $\measuredangle A = \measuredangle A', AB = A'B', AC = A'C'$ [LAL]
- $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$ [LLL]
- $\measuredangle A = \measuredangle A', \measuredangle B = \measuredangle B', AB = A'B'$ [ALA]

Entonces existe una isometría η tal que $\eta(A) = A'$, etc. y $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Hay que considerar que para emplear isometrías pares hay que definir la orientación de los triángulos.

Corolario 6.14 Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\operatorname{sen}(\angle P+\angle Q) = \operatorname{sen}(\angle P)\cos(\angle Q)+\operatorname{sen}(\angle Q)\cos(\angle P)$$

$$\cos(\angle P+\angle Q) = \cos(\angle P)\cos(\angle Q)-\operatorname{sen}(\angle P)\operatorname{sen}(\angle Q)$$

Corolario 6.15 Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\measuredangle(\angle P + \angle Q) = \measuredangle P + \measuredangle Q$$

Demostración. Nota: en el punto final se demuestra que

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\measuredangle P + \measuredangle Q)$$

Sabiendo que $\measuredangle P = \arccos(\cos \angle P)$ entonces $\arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \measuredangle(\angle P + \angle Q)$ y, por tanto,

$$\measuredangle(\angle P + \angle Q) = \arccos(\cos(\measuredangle P + \measuredangle Q)) = \measuredangle P + \measuredangle Q$$

Corolario 6.16 Si $\angle V$ es un ángulo y n es entero, entonces existe $n\angle V$ y $\measuredangle(n\angle V) = n\measuredangle V$.

Ejercicio 6.10 El centro de Fermat, F es aquel que minimiza la distancia a los vértices del triángulo. Este sucede cuando el ángulo entre dos vértices cualesquiera del triángulo y F es $2\pi/3$.

7. Semejanzas

Definición 7.1 Sea C un punto de $\mathbb{P}$ y $k > 0$. Una **homotecia** $\eta_{C,k} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ es una aplicación tal que a cada punto $P \in r_{CP}$ le hace corresponder un punto $\eta_{C,k}(P) \in r_{CP}$ tal que $C\eta_{C,k}(P) = kCP$. k es la **razón de homotecia**.

Observación 7.2 Sea $X \in \mathbb{P}$, $\eta_{C,k}$ y γ una aplicación del **Axioma P3**. Entonces se cumple que $\gamma(\eta_{C,k}(X)) = \gamma(C) + k(\gamma(X) - \gamma(C))$

Observación 7.3 Toda homotecia es una biyección que tiene

- Identidad: $\eta_{C,1}$
- Inversa: $\eta_{C,1/k}$

Teorema 7.4/**Corolario 7.5** Sean A, B y $\eta_{C,k}$, entonces $\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) = kAB$. Además, $\eta_{C,k}[A,B] = [\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$.

Demostración. 7.4 Suponemos A, B, C no alineados. Por definición, $C, A, \eta_{C,k}(A)$ están alineados, y lo mismo con $C, B, \eta_{C,k}(B)$. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\Delta\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B)C$ comparten $\angle C$. Por el **Teorema del coseno** aplicado a $\angle C$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC\cos(\angle C)$$

Por otra parte:

$$\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B)^2 = \eta_{C,k}(A)C^2 + \eta_{C,k}(B)C^2$$

$$-2\eta_{C,k}(A)C \cdot \eta_{C,k}(B)C\cos(\angle C)$$

Por definición $\eta_{C,k}(A)C = kAC$ y $\eta_{C,k}(B)C = kBC$, luego

$$\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B)^2 = k^2AC^2 + k^2AC^2 - 2k^2AC^2BC^2\cos(\angle C) =$$

$$k^2(AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC\cos(\angle C)) = k^2AB^2$$

Luego $\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) = kAB$

Demostración. 7.5 Si $X \in [A,B]$ entonces $AX + XB = AB$. Por tanto:

$$kAX + kXB = kAB \iff$$

$$\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(X) + \eta_{C,k}(X)\eta_{C,k}(B) = \eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) \iff$$

$$\eta_{C,k}(X) \in [\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$$

Teorema 7.7 Toda homotecia envía un ángulo a un ángulo congruente, y toda recta a una paralela.

Definición 7.8 Una **semejanza** es una combinación de homotecias e isometrías.

Corolario 7.10/7.11 / **Teorema 7.19** Toda semejanza envía rectas a rectas, segmentos a segmentos, y conserva los ángulos. Toda biyección ψ que cumpla estas condiciones es una semejanza.

Teorema 7.12 / **Corolario 7.13** Toda semejanza δ cumple que $\delta(A)\delta(B) = kAB$, donde k es la razón de semejanza. Dados A, B, C, D, entonces se cumple que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\delta(A)\delta(B)}{\delta(C)\delta(D)}$$

Demostración.

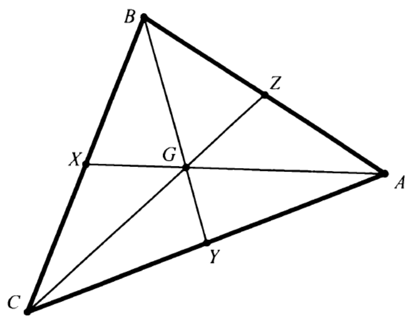
$$\frac{\delta(A)\delta(B)}{\delta(C)\delta(D)} = \frac{kAB}{kCD} = \frac{AB}{CD}$$

Teorema 7.15 Si $\angle A = \angle B$, entonces existe δ tal que $\delta(\angle A) = \angle B$.

Teorema 7.18 Sean $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ que comparten $\angle A$ y A, B, B' están alineados, así como A, C, C'. Entonces si existe k tal que $AB' = kAB$ y $AC' = kAC$ entonces $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ son semejantes, $r_{BC} \parallel r_{B'C'}$ y $B'C' = kBC$.

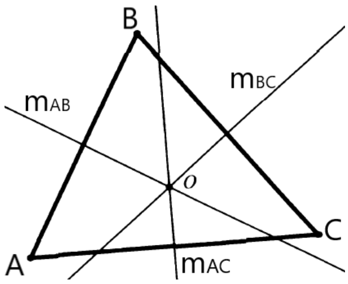
Definición 7.20 Se llama **mediana** al segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto de un triángulo. Es decir, dado $\triangle ABC$, las medianas son $[A, \text{medio}[B,C]]$, $[B, \text{medio}[A,C]]$ y $[C, \text{medio}[A,B]]$.

Teorema 7.21 Las tres medianas de un triángulo cortan en un punto G, llamado **baricentro**.



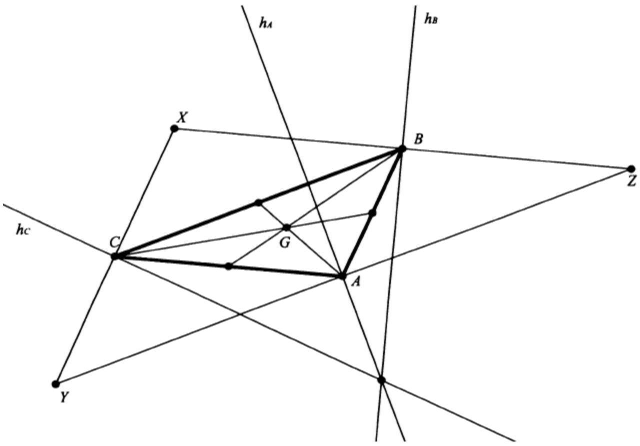
Demostración. Definimos $X = \text{medio}[B,C], Y = \text{medio}[A,C], Z = \text{medio}[A,B]$ y sea G $[B,Y] \cap [C,Z]$. El punto existe porque, si definimos la recta r_{BY}, entonces C está en uno de los semiplanos de la recta (pongamos, H^2) y, si $A \in H^1$, entonces $Z \in H^1$, C y Z están en distintos semiplanos de r_BC. Si tomamos $\triangle ABC$ y $\triangle AZY$ entonces, por ser Y, Z puntos medios, entonces, por el **Teorema 7.18**, $r_{YZ} \parallel r_{BC}$ y $BC = 2YZ$. Además, por ser los ángulos entre $[C, Z]$ y $[B, Y]$ alternos internos, los triángulos $\triangle GYZ$ y $\triangle GBC$ son semejantes de razón 2. Por tanto, $GB = 2GY$ y $GC = 2GZ$. Si repetimos esto con $[A, X]$ y $[B, Y]$, entonces existe un punto G' tal que $G'A = 2G'X$ y $G'B = 2G'Y$. Como $\frac{G'B}{G'Y} = \frac{GB}{GY}$, entonces $G = G'$ y las tres medianas cortan en G.

Teorema 7.23 Las tres mediatrices de un tríangulo cortan en un punto, el **circuncentro**.



☻ Demostración. Si $\triangle ABC$ es un triángulo, las mediatrices m_{AB} y m_{BC} cortan en un punto O. Si no cortaran, entonces $m_{AB} \parallel m_{BC}$, y como $r_{AB} \perp m_{AB}$ y $m_{BC} \perp r_{BC}$ entonces $r_{AB} \parallel r_{BC}$, lo cual es absurdo. Por ser m_{BC} mediatriz, entonces $OB = OC$, y $OA = OB$ para m_{AB}. Entonces $OA = OC$ y por tanto $O \in m_{AC}$, luego O corta las tres mediatrices.

Teorema 7.24 Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro**



☻ Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo con baricentro G y sean h_A, h_B, h_C sus alturas. Consideramos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, de modo que $\triangle ABC$ se transforma en $\triangle XYZ$, con $\tau(A) = X, \tau(B) = Y, \tau(C) = Z$. Por las propiedades de las semejanzas, $r_{BC} \parallel r_{YZ}, r_{AC} = r_{XZ}, r_{AB} \parallel r_{XY}$, y se cumple que $A = \text{medio}[Y, Z], B = \text{medio}[X, Z], C = \text{medio}[X, Y]$.

Por tanto, ahora $h_A = m_{YZ}, h_B = m_{XZ}, h_C = m_{XY}$ y, por tanto, el ortocentro de $\triangle ABC$ es el circuncentro de $\triangle XYZ$.

Teorema 7.25 [Recta de Euler] Dado un triángulo, su baricentro G, ortocentro O y circuncentro H pertenecen a una misma recta (si el triángulo no es equilátero). Además, $OH = 2OG$.

☻ Demostración. Si partimos del triánguo con baricentro G y aplicamos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, como en el **Teorema 7.24**, entonces se cumple que $\tau(O) = H$. Por ser σ_G, entonces $H \in r_{OG}$ y por ser $\eta_{G,2}$, entonces $OH = 2OG$.

Corolario 7.26 El **incentro** del triángulo es el punto donde se cortan las tres bisectrices del triángulo.

Ejercicio 7.7 [Teorema de Ceva] En $\triangle ABC$ sean $X \in [B, C], Y \in [C, A], Z \in [A, B]$. Si X, Y, Z no coinciden con ninguno de los vértices del triángulo, entonces los segmentos $[A, X], [B, Y], [C, Z]$ se cortan en un punto sii

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = 1$$

Ejercicio 7.8 [Teorema de Menelao] Sea $\triangle ABC$ y sean $X \in r_{BC}, Y \in r_{CA}, Z \in r_{AB}$. Entonces, sii X, Y, Z están alineados se cumple que

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = 1$$

8. Circunferencias

Definición 8.1 Sea $O \in \mathbb{P}$ y $\rho > 0$. Entonces una **circunferencia** $\mathcal{C}$ es el conjunto de puntos a una distancia ρ de O. O es el **centro** y ρ el **radio**.

Teorema 8.3 Una circunferencia corta a una recta en a lo sumo dos puntos.

Definición 8.4 Dada $\mathcal{C}$ una recta que corta en dos puntos se llama **secante**, que corta en un punto se llama **tangente** y que no corta se llama **exterior**. Si para un punto $X \in \mathbb{P}$, $d(O,X) > d(O,\rho)$ el punto es exterior, y si $d(O,X) < d(O,\rho)$ entonces es interior.

Teorema 8.5 Sea $\mathcal{C}$ con centro O. Si t es tangente a $\mathcal{C}$ en P_t, entonces $t \perp r_{O,P_t}$.

Definición 8.6 Sean P, P' dos puntos tales que $O = \text{medio}[P,P']$. Entonces, si los puntos están en $\mathcal{C}$, se denominan **diametralmente opuestos en** $\mathcal{C}$, y $[P,P']$ es un diámetro de $\mathcal{C}$.

Teorema 8.7/Definición 8.9 Dados tres puntos no alineados, entonces existe una única circunferencia que pase por estos puntos, la **circunferencia circunscrita**.

Corolario 8.8 Dos circunferencias tienen a lo sumo dos puntos en común. Si sólo tienen un punto en común se llaman **tangentes**.

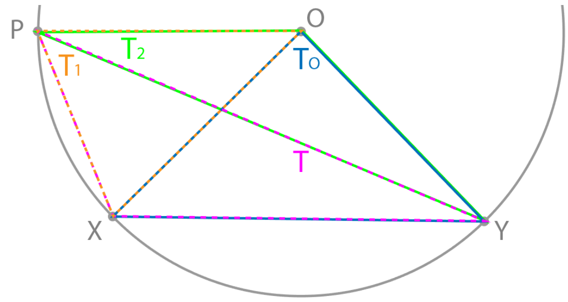
Teorema 8.10 Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ con centros O, O' y radios ρ, ρ' respectivamente. Si las dos circunferencias cortan en dos puntos, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$OO' < \rho + \rho' \qquad \rho < OO' + \rho' \qquad \rho' < OO' + \rho$$

Y si las circunferencias son tangentes, entonces se verifica una de estas igualdades:

$$OO' = \rho + \rho' \qquad \rho = OO' + \rho' \qquad \rho' = OO' + \rho$$

Teorema 8.11 [Arco capaz] Sea $\mathcal{C}$ con centro O y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en $\mathcal{C}$ y P, P', O están en el mismo semiplano determinado por r_{XY}. Si X e Y no son diametralmente opuestos, entonces $\measuredangle P = \measuredangle P' = \frac{1}{2}\measuredangle O$. Todo este arco, así como el arco surgido de la reflexión $\sigma_{r_{XY}}$ cumplen $\measuredangle P = \measuredangle P'$, y se denomina **arco capaz**.



☻ Demostración. Sea $\mathcal{T} = \triangle PXY$ y $\mathcal{T}_O = \triangle OXY$. Construimos también $\mathcal{T}_1 = \triangle POX$ y $\mathcal{T}_2 = \triangle POY$, isósceles, de modo que $\measuredangle_{\mathcal{T}_1} X = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}_2} Y = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$. Como la suma de los ángulos de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ es llano, entonces

$$2\measuredangle_{\mathcal{T}_1} P = \pi - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} O \qquad 2\measuredangle_{\mathcal{T}_2} P = \pi - \measuredangle_{\mathcal{T}_2} O$$

Vamos a suponer ahora que $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P - \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$. Para $2\measuredangle_{\mathcal{T}} P$ entonces se cumple que

$$2\measuredangle_{\mathcal{T}} P = 2\measuredangle_{\mathcal{T}_1} P - 2\measuredangle_{\mathcal{T}_2} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} O - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} O = \measuredangle_{\mathcal{T}_O} O = \measuredangle O$$

La misma demostración sucede para $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P + \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P$

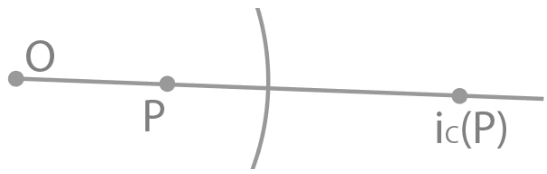
Ejercicio 8.2 Sea $\mathcal{C}$ con centro O y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en $\mathcal{C}$ y P, P', O están en distinto semiplano determinado por r_{XY}. Entonces $\measuredangle P = \pi - \measuredangle P'$

Definición 8.13 Sea $\mathcal{C}$ con centro O y radio ρ. Se denomina **inversión** del plano con respecto a $\mathcal{C}$ a una aplicación $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbb{P} - \{O\} \to \mathbb{P} - \{O\}$ que a cada punto P le hace corresponder otro punto $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ tal que $O, P, \iota_{\mathcal{C}}(P)$ están alineados, $O \notin [P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$ y se verifica que

$$OP \cdot O_{\iota_{\mathcal{C}}}(P) = \rho^2$$

Esta aplicación verifica que

- $\iota_{\mathcal{C}} \circ \iota_{\mathcal{C}}(P) = P$ para todo $P \in \mathbb{P} - O$.
- Para todo $P \in \mathcal{C}$ se cumple $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$. A todo punto fuera del circulo, $\iota_{\mathcal{C}}$ lo manda dentro, y viceversa.
- Si r pasa por O, $\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$.



Teorema 8.16/8.17 Sea $\mathcal{C}$ y $P \in \mathbb{P}$. Sean a, b rectas que cortan a P y secantes a $\mathcal{C}$. Sean A_1 y A_2 los

puntos de corte de a con $\mathcal{C}$ y B_1, B_2 los de b con $\mathcal{C}$. Entonces se verifica que

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$

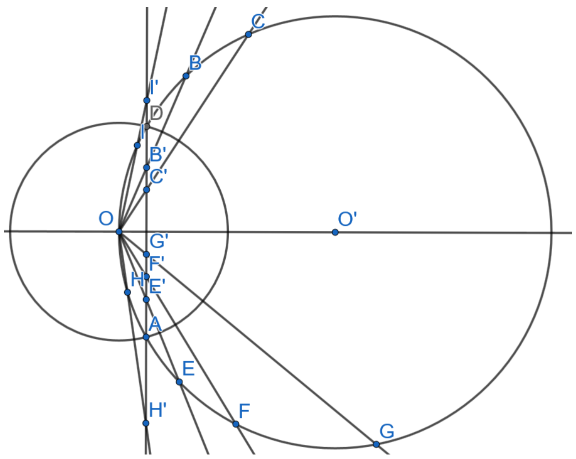
Si a es tangente, entonces

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

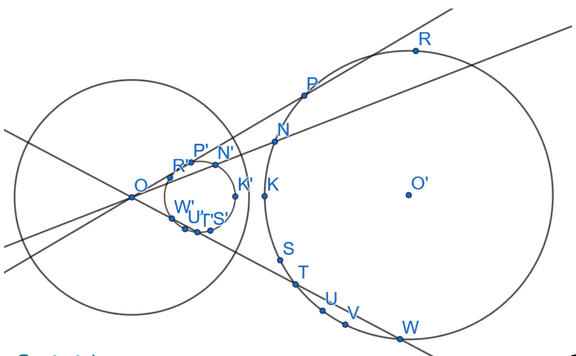
Ese producto, por tanto, es invariante de la recta, y se denomina **potencia de P con respecto a $\mathcal{C}$**.

Teorema 8.18 Sea $\mathcal{C}$ de radio ρ y centro O.

- Sea $\mathcal{C}'$ una circunferencia de centro O' que pasa por O, entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$ es una recta ortogonal a $r_{O,O'}$. Sea r que no pasa por O, entonces $\iota_{\mathcal{C}}(r) = \mathcal{C}' - \{O\}$, donde $\mathcal{C}'$ es una circunferencia que pasa por O.



- Si $\mathcal{C}'$ no pasa por O entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es otra circunferencia que no pasa por O. Si O es exterior a $\mathcal{C}'$ entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es la imagen de $\mathcal{C}'$ por la homotecia de centro O y razón ρ^2/t, donde t es la potencia de O con respecto a $\mathcal{C}'$. Si O es interior a $\mathcal{C}'$ entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \sigma_O \circ \eta_{O,\rho^2/t}(\mathcal{C})$.



Definición 8.19 Sea A, B, C, D una cuaterna ordenada de puntos distintos del plano. Se define **razón doble** como

$$(A, B : C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

. Si A, B, C, D están alineados, entonces la razón doble es una razón de las dos razones simples: $\frac{CA}{CB}\frac{DB}{DA}$.

Por convenio se tiene que

$$(A, B : C, \infty) = \frac{CA}{CB}$$

Teorema 8.20 Sea $\mathcal{C}$ con centro O y sean $A, B \neq O$ y que no estén alineados a O. Si $\iota_{\mathcal{C}}(A) = A'$ y $\iota_{\mathcal{C}}(B) = B'$, los triángulos $(T)_1 = \triangle OAB$ y $(T)_2 = \triangle OA'B'$ son semejantes, y $\angle A = \angle B'$ y $\angle B = \angle A'$.

Teorema 8.21 Sea $\mathcal{C}$ con centro O y sean $A, B, C, D \neq O$. Entonces

$$(A, B : C, D) = (\iota_{\mathcal{C}}(A), \iota_{\mathcal{C}}(B) : \iota_{\mathcal{C}}(C), \iota_{\mathcal{C}}(D))$$

9. Geometría hiperbólica

Definición 9.0 Para describir la geometría hiperbólica se fija una recta l_∞ y uno de los semiplanos de la recta l_∞ como $\mathbb{H}$. La distancia hiperbólica sigue la lógica de para que dos pares de puntos A, A' y B, B' sobre $r \perp l_\infty$ y $d(A, A') = d(B, B')$, pero A, A' están más cerca de l_∞ que B, B', entonces $d_{\mathbb{H}}(A, A') > d_{\mathbb{H}}(B, B')$.

Si $R = r \cap l_\infty$, definimos la **distancia hiperbólica** como

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left|\log \frac{RP}{RQ}\right| = |\log(P, Q : R, \infty)|$$

Teorema 9.1 Sean P, Q, S en $\mathbb{H}$ sobre $r \perp l_\infty$ tal que $Q \in [P, S]$. Entonces:

- $d_H(P, Q) + d_H(Q, S) = d_H(P, S)$.
- Sea $\mathcal{C}$ con centro $R = r \perp l_\infty$, entonces

$$d_H(\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}(Q)) = d_H(P, Q)$$

Teorema 9.2 Sean $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$. Existe una única circunferencia $\mathcal{C}_{PQ}$ con centro l_∞ y que pasa por P y Q.

Definición 9.0-cont Queremos que la distancia anterior sea invariante a inversiones respecto a circunferencias. Si tenemos $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$ y $X, Y = \mathcal{C}_{PQ} \cap l_\infty$, podemos crear $\mathcal{C}_X$. Entonces, se tiene que la recta $r_{\iota_{\mathcal{C}_X}(P)\iota_{\mathcal{C}_X}(Q)} \perp l_\infty$, y definimos

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}(Q)) = |\log(\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}(Q) : R, \infty)|$$

Sin embargo, por el **Teorema 8.21** la razón doble conserva las inversiones, luego

$$|\log(\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}(Q) : R, \infty)| =$$
$$|\log(\iota_\mathcal{C}\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}\iota_\mathcal{C}(Q) : \iota_\mathcal{C}(R), \infty)| =$$
$$|\log(P, Q : \iota_\mathcal{C}(R), \iota_\mathcal{C}(\infty))|$$

Si tomamos como convención $\iota_\mathcal{C}(\infty) = X$, y por el **Teorema 8.18**, $\iota_\mathcal{C}(R) = Y$ entonces

$$d_H(P, Q) = |\log(P, Q : Y, X)|$$

Teorema 9.3 Sea $\mathcal{C}$ con centro l_∞, entonces $\iota_\mathcal{C}$ preserva las distancias hiperbólicas para todo P, Q:

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_\mathcal{C}(P), \iota_\mathcal{C}(Q))$$

Teorema 9.4 Si $\mathcal{C}$ tiene centro en l_∞, entonces $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica.

Definición 9.5 Dos rectas hiperbólicas son paralelas si son disjuntas o coinciden.

Teorema 9.6 Sea r_H hiperbólica y P un punto de $\mathbb{H}$ que no está en r_H. Existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a r_H que pasan por P.

Page intentionally left in blank

10. Polígonos

Definición 10.1 Un polígono $\mathcal{P}$ es un conjunto finito $\{\cdots,[V,W],\cdots\}$ de r segmentos llamados lados del polígono. Los extremos de los lados, vértices, forman el conjunto $\{V_1,\cdots,V_r\}$. $\mathcal{P}$ cumple

- Dos lados de $\mathcal{P}$ o bien no se cortan o tienen únicamente un extremo común (son lados adyacentes).
- Los lados de $\mathcal{P}$ pueden escribirse como una sucesión finita de vértices $[V_1,V_2],[V_2,V_3],\cdots,[V_r,V_1]$.

Definición 10.4 Une **diagonal** es un segmento cuyos extremos son dos vértices que no pertenecen al mismo lado.

Definición 10.6 Sea V un vértice de $\mathcal{P}$ y sean $[V,W_1]$ y $[V,W_2]$ dos lados. El ángulo con vértice V y semirrectas que contienen a ambos lados forman el ángulo $\angle V$ de $\mathcal{P}$.

Definición 10.8 Un polígono es **convexo** si toda recta que no contiene a ninguno de los lados del polígono corta a lo sumo en dos lados de éste.

Teorema 10.10 Un polígono $\mathcal{P}$ es convexo sii para todo lado $[V,W]$ de $\mathcal{P}$ los vértices de $\mathcal{P}$ distintos de V y W están todos en el mismo de los dos semiplanos determinados por r_{VW}.

Definición 10.11 Un punto P está en el **interior** de un polígono convexo $\mathcal{P}$ si cualquier recta que pase por P corta a los lados del polígono en dos puntos. Si P no está ni en el interior ni en los lados del polígono, entonces está en el exterior.

Observación 10.12 Un punto P está en el interior de un polígono $\mathcal{P}$ si existe una recta r que pasa por P de modo que si $\overline{s}$ es una de las semirrectas, $\overline{s}$ corta a $\mathcal{P}$ en un número n impar de puntos que no son vértices.

Definición 10.13 Un polígono convexo es **regular** si todos sus lados y ángulos son congruentes.

Lema 10.14 Sean r y s rectas que al cortarse forman un ángulo π/n. Sean σ_r y σ_s. Si V es un punto en r, definimos los puntos $V_{i+1}=(\sigma_s\circ\sigma_r)^i(V)$, $\quad i=1,\cdots,n-1$, es decir, las imágenes de V por rotaciones. Entonces, si $V_1=V$, el polígono

$$\mathcal{P}=\{[V_1,V_2],\cdots,[V_{n-1},V_n],[V_n,V_1]\}$$

es regular.

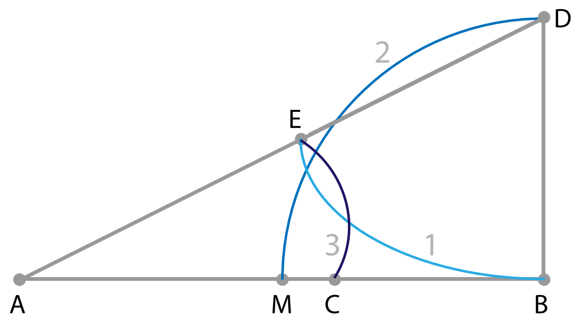
Teorema 10.15 Sea n entero mayor que 2. Sea $[V,W]$ un segmento del plano, y H uno de los semiplanos determinados por r_{VW}. Existe un polígono regular de n lados contenido en $H\cup r_{VW}$ y uno de los lados es $[V,W]$. **Corolario 10.17** En estas condiciones $\mathcal{P}$ es único.

Teorema 10.16/10.19 Sea $\mathcal{P}$ regular con n vértices. $\mathcal{P}$ admite n reflexiones distintas, que son simetrías de $\mathcal{P}$. También existe una rotación con ángulo $2\pi/n$ que es simetría de $\mathcal{P}$. Análogamente, si $\mathcal{P}$ es convexo con n vértices y tiene como simetría una rotación $2\pi/n$, entonces es regular.

Corolario 10.18 Todo $\mathcal{P}$ regular permite una circunferencia $\mathcal{C}$ que pase por todos sus vértices. Entonces $\mathcal{P}$ está **inscrito** en $\mathcal{C}$.

Construcciones con regla y compás

Teorema 10.24/Definición 10.26 Dados dos puntos A y B se puede construir un punto $C\in[A,B]$ con regla y compás de modo que $AB\cdot BC=AC^2$. C divide en razón áurea, $\frac{AB}{AC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Demostración. La construcción está contenida en la figura. Se puede demostrar la igualdad por el **Teorema de Pitágoras**, escribiendo todo en función de AB:

$$AB^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=AD^2=(AC+\frac{1}{2}AB)^2$$

$$AB^2+\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{AB^2}=AC^2+\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{AB^2}+AC\,AB=AC^2+(AB-BC)AB$$

$$\cancel{AB^2}=AC^2+\cancel{AB^2}-AB\,BC\iff AC^2=AB\cdot BC$$

Teorema 10.27, 10.28 Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles tal que $AB = AC$ y $\measuredangle B = \measuredangle C = 2\measuredangle A$. Entonces $\frac{AB}{BC}$ es la razón áurea. Además, este triángulo puede construirse con regla y compás.

Observación 10.29/**Corolario 10.30** El ángulo $\measuredangle A$ del triángulo áureo es $\pi/5$. Por tanto, se puede construir un pentágono regular con lados congruentes a $[A, B]$.

Teorema 10.31 Un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás sii la factorización de n en números primos tiene la forma $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, con p_i de la forma $2^{2^s} + 1$, y son primos distintos. Así, los lados polígonos construibles son $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \cdots$.

11. Geometría euclidiana espacial

Definición 11.0 $\mathbb{E}$ es el conjunto de puntos en un espacio tridimensional. La distancia d es la aplicación $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$.

Axioma E1 $(\mathbb{E}, d)$ es un espacio métrico.

Definición 11.1 Una recta r y su segmento $[A,B] = \{X \in \mathbb{E} \mid d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)\}$ son similares que en $\mathbb{P}$. Una recta cumple:

- contiene al menos dos puntos distintos.
- Para toda terna A,B,C en r, A,B,C están alineados.
- Si $A,B \in r$ distintos, y $X \in \mathbb{E}$, si $X \in r$, A,B,X están alineados.

Definición 11.2 Un **plano** $\pi \in \mathbb{E}$ es un subconjunto que, con la distancia d restringida a π, cumple los axiomas de la geometría euclidiana plana.

Axioma E2 [de los planos]

- Al menos existe un plano en $\mathbb{E}$.
- Para todo plano α existe un punto $P \in \mathbb{E} - \alpha$.
- Para $X,Y,Z \in \mathbb{E}$ distintos existe un plano $\alpha \in \mathbb{E}$ que los contiene. Si no están alineados, α es único, y se denota por α_{XYZ}.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ son planos distintos, cortan en una recta.

Teorema 11.4 Si α es un plano y $A,B \in \alpha$, entonces $r_{AB} \in \alpha$.

Observación 11.5 Por dos rectas que cortan, o por una recta y un punto que no pasa por ella, pasa exactamente un plano.

Definición 11.6/Observación 11.7 Dos rectas r,s son **paralelas** si coinciden o están contenidas en un plano y son paralelas en él. Dos rectas disjuntas pueden no ser paralelas, si no están en el mismo plano.

Definición 11.8 Una recta l es **ortogonal** a un plano α en un punto P ($l \perp_P \alpha$) si l es ortogonal a toda recta de α que pase por P.

Teorema 11.10 Sea r y $P \in r$, entonces existe un plano único π que pasa por P y es perpendicular a r.

Teorema 11.12 Sea α un plano y $P \in \alpha$. Existe una única recta ortogonal a α que pase por P.

Teorema 11.13/Corolario 11.14 Sean r, s, y r es ortogonal a α. Sii s es paralela a r, entonces es ortogonal a α.

Teorema 11.15 Sea α y $P \in \mathbb{E}$. Existe una única recta r tal que $P \in r$ y $r \perp \alpha$.

Definición 11.16 Dos planos α, β son ortogonales, $\alpha \perp \beta$ si existe al menos una recta $a \in \alpha$ verificando $a \perp \beta$.

Teorema 11.17 Para los planos $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ se tiene

- $\alpha \perp \beta \iff \beta \perp \alpha$
- $\alpha \perp \beta$ sii para todo $P \in \alpha$ la única recta $a \perp \beta$ pasando por P esta en α.

Teorema 11.18 Sea λ un plano y c una recta en $\mathbb{E}$. Existe un plano $\gamma \perp \lambda$ pasando por c. Si c no es ortogonal a λ, γ es único.

Definición 11.19 Dados dos planos π_1, π_2 en $\mathbb{E}$, π_1 y π_2 son **paralelos** si $\pi_1 = \pi_2$ o $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.

Teorema 11.20 Si $\pi_1 \parallel \pi_2$ toda recta ortogonal a π_1 lo es a π_2.'

Ejercicio 11.2 Sean a, b, c tres rectas en $\mathbb{E}$. Si $a \parallel b$ y $b \parallel c$ entonces $a \parallel c$.

Ejercicio 11.3 Si a, b son dos rectas no paralelas en $\mathbb{E}$, entonces existe una única recta l ortogonal a a y b.

Ejercicio 11.4/11.5 Si π_1 y π_2 son paralelos y α es ortogonal a π_1, entonces α es ortogonal a π_2. Si β no es paralelo a π_1, entonces β tampoco es paralelo a π_2

Page intentionally left in blank

12. Isometrías en el espacio

Definición 12.0 La igual que en $\mathbb{P}$, una **isometría** es una aplicación $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biyectiva que conserva las distancias.

Teorema 12.1 Sea g una isometría y $A, B \in \mathbb{E}$. Entonces $g([A,B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$.

Teorema 12.2 Sea g y $\pi \in \mathbb{E}$, entonces $g(\pi) \in \mathbb{E}$.

Teorema 12.3 Si $A, B, C \in \mathbb{E}$ no son alineados, entonces $g(\pi_{ABC}) = \pi_{g(A)g(B)g(C)}$

Teorema 12.4 Sea l una recta y α, β planos en $\mathbb{E}$.

- $l \perp \alpha \iff g(l) \perp g(\alpha)$
- $\beta \perp \alpha \iff g(\beta) \perp g(\alpha)$

Definición 12.5 [Reflexión sobre plano] Sea $\alpha \in \mathbb{E}$. Dado $P \in \mathbb{E}$ sea t_P ortogonal a α que pasa por P, y $\pi_\alpha(P) = t_P \cap \alpha$. La **reflexión con base** α de P, o $\sigma_\alpha(P)$, es el punto tal que $\pi_\alpha(P) =$ medio$[P, \sigma_\alpha(P)]$

Observación 12.6/**Teorema 12.7** σ_α es una biyección, y $\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(P) = P$. Además, $\sigma_\alpha(P) = P \iff P \in \alpha$. σ_α es una isometría.

Teorema 12.8 Sea π un plano y σ_r una reflexión en π respecto a r. Existe una reflexión $\sigma_\alpha \in \mathbb{E}$ de modo que σ_α restringida a π coincide con σ_r.

Corolario 12.9 Sea g una isometría de un plano π. Entonces existe una isometría $\tilde{g}(X) = g(X)$ para todo $X \in \pi$.

Corolario 12.10 Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio. Existe una isometría g tal que $g(\pi_1) = \pi_2$, y se puede tomar g como reflexión.

Lema 12.11 Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $A \neq B$ son fijos en g, entonces r_{AB} es fija en g.

Teorema 12.12 Sea g, y sea α el plano pasando por A, B, C. Si A, B, C son fijos en g, entonces $g = \sigma_\alpha$ o $g = \text{id}_{\mathbb{E}}$.

Corolario 12.13 Sean $A^1, A^2, A^3, A^4 \in \mathbb{E}$, no situados en el mismo plano; y sean $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $g(A^i) = h(A^i)$ para todo i, entonces $g = h$.

Teorema 12.15

- Sea $\rho \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ una rotación de eje r. Para todo plano α conteniendo a r, existen planos β, β' conteniendo a r, únicos, tales que $\rho(\alpha) = \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_{\beta'}$.
- Sea τ una traslación paralela a una recta c. Para todo plano $\alpha \perp c$ existen planos β, β', únicos, tales que $\tau = \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_{\beta'}$.

Ejercicio 12.1 Si $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ son rotaciones con ejes ortogonales al mismo plano λ, entonces gh o bien es una rotación con eje ortogonal a λ, o una traslación paralela a rectas contenidas en λ o la identidad.

Ejercicio 12.2 Las rotaciones forman una clase de congruencia, con el **ángulo de rotación** ρ. Si $\angle V$ es el ángulo formado por la semirrectas de $\alpha \cup \lambda$ y $\beta \cup \lambda$ (siendo α, β los planos de reflexión, y λ ortogonal a α, β), entonces $2\angle V$ es el ángulo de rotación. Si el ángulo de rotación es llano, entonces ρ es una **media vuelta**.

Ejemplo 12.18 Tomando un plano π y componiendo la reflexión σ_π con una rotación ρ de eje $a \perp \pi$, se obtiene la isometría $\phi = \sigma_\pi \rho = \rho \sigma_\pi$

Ejemplo 12.20 Una **reflexión central** es una isometría entre un plano α y una recta $r \perp \alpha$, en un punto $P = r \cap \alpha$: $\sigma_P = \sigma_\alpha \rho_r$. La reflexión central cumple

- Para todo $X \in \mathbb{E}$, medio$[X, \sigma_P(X)] = P$.
- $\sigma_P \circ \sigma_P = \text{id}_{\mathbb{E}}$.
- Para cualquier β, s tal que $\beta \perp_P s$, $\sigma_\beta \rho_s = \rho_s \sigma_\beta$.

Ejercicio 12.4

- El producto de dos reflexiones centrales σ_P, σ_Q $(P \neq Q)$ es una traslación paralela a la recta r_{PQ}.
- Sea τ una traslación. Para todo $S \in \mathbb{E}$ existen puntos $B, B' \in \mathbb{E}$ únicamente determinados tales que $\tau = \sigma_A \sigma_{B'} = \sigma_B \sigma_A$.

Ejemplo 12.21 Un **movimiento helicoidal** es una composición de una rotación con eje r y una traslación paralela a dicho eje: $h = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau$.

Ejemplo 12.22 Una **reflexión con deslizamiento** es una composición de una reflexión σ_α y una traslación τ paralela a la recta $r \subset \alpha$: $d = \tau\sigma_\alpha = \sigma_\alpha \tau$.

Teorema 12.19 Las únicas isometrías en $\text{Isom}(\mathbb{E}) - \text{id}_{\mathbb{E}}$ con puntos fijos son las refleiones, rotaciones, o reflexiones-rotaciones.

Teorema 12.23 Las isometrías de $\mathbb{E}$ sin puntos fijos son las traslaciones, movimientos helicoidales y reflexiones con deslizamiento.

Ejercicio 12.5 Resumen de isometrías:

Puntos fijos	$\emptyset$	A	a	α
par	τ / h		ρ	
impar	d	ϕ		σ

13. Poliedros

Definición 13.1 Un **poliedro** $\mathcal{P}$ es un conjunto finito de polígonos $\{C_k w\}$. Los polígonos de $\mathcal{P}$ se llaman caras, los lados del polígono se llaman aristas o lados, y los vértices tienen el mismo nombre. Todo poliedro cumple:

- Dos caras de un poliedro o bien no se cortan, y tienen un único vértice en como, o un lado en común.
- Cada arista es un lado de dos polígonos de $\mathcal{P}$.
- Las caras que comparten un vértice en común V se pueden ordenar en una sucesión $C_1, \cdots, C_r$ de modo que C_i y C_{i+1} son adyacentes.
- Dadas dos caras C_i, C_j existe una sucesión finita de caras $C_1, \cdots, C_r$ tal que $C_i = C_1, C_r = C_j$.

Definición 13.2 Un poliedro es **convexo** si toda recta no contenida en ninguno de los planos que contienen a las caras corta a lo más en dos puntos a las caras.

Definición 13.3 Un **ciclo poligonal** $\mathcal{C}$ es un conjunto finito de segmentos (lados) con un conjunto finito de puntos (vértices) que verifican

- Dos segmentos o no se cortan o tienen un extremo en común.
- Los lados de $\mathcal{C}$ se pueden escribir como una sucesión finita de la forma $[V_1, V_2], [V_2, V_3], \cdots, [V_{r-1}, V_r], [V_r, V_1]$.

Definición 13.4 Sea $\mathcal{L}$ un conjunto formado por algunos lados de $\mathcal{P}$. Dadas dos caras P y P' de $\mathcal{P}$ decimos que están **conectadas** en $\mathcal{P} - \mathcal{L}$ si existe una sucesión de polígonos de $\mathcal{P}$, $P = P_1, \cdots, P_r = P'$ de modo que P_i y P_{i+1} tienen un lado en común que no está en $\mathcal{L}$. Si C es una cara de $\mathcal{P}$, la componente conexa de $\mathcal{P} - \mathcal{L}$ que contiene a C es el subconjunto de $\mathcal{P}$ formado por los polígonos de $\mathcal{P}$ que están conectados con C en $\mathcal{P} - \mathcal{L}$.

Teorema 13.5 Sea $\mathcal{P}$ un poliedro convexo y $\mathcal{C}$ un ciclo de $\mathcal{P}$, entones hay exactamente dos componentes convexas en $\mathcal{P} - \mathcal{C}$.

Teorema 13.9 [Descartes-Euler] Sea $\mathbb{P}$ un poliedro convexo, con c caras, l lados y v vértices, entonces: $c - l + v = 2$

Definición 13.11 Un **poliedro regular** es un poliedro convexo contodas las caras congruentes a un mismo polígono regular y cada vértice está en un mismo número de caras. Decimos que un poliedro regular tiene tipo $\{n, m\}$ si sus caras son polígonos regulares con n lados y cada vértice es vértice exactamente de m caras.

Nombre	Tipo	c	l	v
Tetraedro	$\{3,3\}$	4	6	4
Octaedro	$\{3,4\}$	8	12	6
Cubo	$\{4,3\}$	6	12	8
Dodecaedro	$\{3,5\}$	20	30	12
Icosaedro	$\{5,3\}$	12	30	20

Teorema 13.14 Dado un real $l > 0$ existe un poliedro regular de tipo $\{3,3\}, \{3,4\}, \{4,3\}, \{3,5\}, \{5,3\}$, cuya arista mide l. Además, si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos poliedros del mismo tipo y con la misma longitud de arista entonces existe una isometría η tal que $\eta(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_2$.

Teorema 13.16 Sea V, W dos vértices de un poliedro regular $\mathcal{P}$, a, b dos aristas, de modo que a tiene por uno de sus extremos V y b tiene por extremo W, por último sea C_1 una cara que tiene a a como uno de sus lados y C_2 una cara que tiene a b como lado. Existe una simetría θ de $\mathcal{P}$ tal que

$$\theta(V) = W \;\; \theta(a) = b \;\; \theta(C_1) = C_2$$

Definición Dado un polígono $\mathcal{P}$ regular, el polígono **dual** de $\mathcal{P}$, o $\mathcal{P}*$, es aquel formado por la unión de los centros de las caras que forman los triedos (tres polígonos que comparten el mismo vértice V).

Definición Si consideramos el plano π ortogonal a r_{VW}, siendo V, W los dos vértices de un lado en común entre dos carasP_1, P_2 de $\mathcal{P}$. π pasa, por ejemplo, por medio$[V, W]$. Llamamos **ángulo diédrico** al ángulo de π con vértice en medio$[V, W]$ y cuyos lados contienen a los segmentos que son las intersecciones de P_1 y P_2 con π.

Rotaciones de un poliedro regular:

- Rotaciones con eje ortogonal a una cara C de $\mathcal{P}$ y pasa por el el centro de C; con ángulos de rotación $2\pi r/n$, $r = 1, \cdots, n-1$.

- Rotaciones cuyo eje pasa por un vértice V de $\mathcal{P}$ y es ortogonal al polígono formado por los centros de las caras de $\mathcal{P}$ que tienen a V como uno de sus vértices; con ángulos de rotación $2\pi r/m$, $r = 1, \cdots, m-1$.
- Medias vueltas con eje e que pasa por el punto medio M de una arista a de $\mathcal{P}$. Además e es ortogonal a a, así deja invariante la arista a aunque intercambia sus extremos. e es la bisectriz del ángulo formado por las dos caras C_1, C_2 que comparten a y que pasa por M; permutando así C_1 y C_2.

14. Geometría analítica

Definición 14.1 Un paralelogramo $\square PABC$ se llama **rectángulo** si $r_{PA} \perp r_{PC}$

Observación 14.3 Un sistema de **coordenadas cartesianas** es un par de rectas l^1, $l^2 \subset \mathbb{P}$ cortándose ortogonalmente en un punto O, llamado **origen**, siendo así l^1, l^2 los **ejes** [El sistema es construible porque el **Teorema 2.29** garantiza la existencia de $l_2 \perp l_1$ único pasando por O]. Por el **Axioma P3** existen aplicaciones

$$\gamma_k : l^k \to \mathbb{R}, \;\; k = 1, 2$$

tales que

$$X, Y \in l^k \to d(X, Y) = \left|\gamma_k(X) - \gamma_k(Y)\right|$$

Además, podemos elegir puntos E^k tales que $\gamma_k(O) = 0$ y $\gamma_k(E^k) = 1$. Este sistema de coordenadas OE^1E^2 es orientado, y a todo punto $A \in \mathbb{P}$ se le pueden asociar dos reales a_1, a_2 tales que cada a^k es ortogonal a l^k, de modo que $a_k = \gamma_k(A^k)$; y se puede determinar la aplicación de coordenadas $\Gamma(A) = (a_1, a_2)$.

Observación [Coordenadas en $\mathbb{E}$] Un sistema de coordenadas en el espacio $\mathbb{E}$ es una terna de rectas l^1, l^2, l^3 ortogonales entre sí, los ejes, con un origen O; los puntos E^k tales que $d(O, E^k) = 1$ que generan el sistema de coordenadas $OE^1E^2E^3$, y las aplicaciones γ_k y Γ similares a las de la **Observación 14.3** pero con una dimensión más.

Teorema 14.4/14.6/14.7 La aplicación $\Gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ es biyectiva. Si A, B son dos puntos, y $\Gamma(A) = (a_1, a_2)\,;\, \Gamma(B) = (b_1, b_2)$, entonces

$$d(A, B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

Para $\mathbb{E}$, $\Gamma : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ también es biyectiva, y la distancia entre A, B viene dada por

$$d(A, B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

Corolario 14.5/Observación 14.8 El espacio métrico $(\mathbb{P}, d)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, d_E)$ y $\Gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ es una isometría. El espacio métrico $(\mathbb{E}, d)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^3, d_E)$ y $\Gamma : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ es una isometría.

Definición [Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$] El espacio $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\mathbb{R}^n = \{X = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R};\; i = 1, \cdots, n\}$. El conjunto tiene una estructura de **espacio vectorial** con las operaciones

$$X + Y \equiv (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)\,;\; X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\,;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 14.9 [Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$] Para dos puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ la métrica euclidiana es la aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(X, Y) \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Definición 14.10 El **producto escalar** de X, Y es

$$\langle X, Y \rangle = X \cdot Y \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La **norma** es la operación

$$||X|| \equiv \langle X, X \rangle^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Teorema 14.11 Para $X, X', Y, Y' \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\langle X, X \rangle \geq 0\,;\, \langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0$
- $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
- $\langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle = \langle X, \lambda Y \rangle$
- $\langle X + X', Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X', Y \rangle\,;\, \langle X, Y + Y' \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$

Observación 14.12 El producto escalar y la distancia están relacionados:

- $d(X, Y) = ||X - Y|| = \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle}$
- $d(X, -Y) = ||X + Y||$
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(||X + Y||^2 - ||X - Y||^2)$
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(||X||^2 + ||Y||^2 - ||X - Y||^2)$

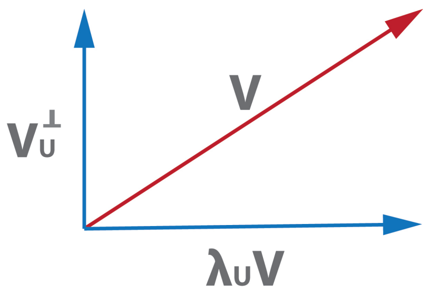
Teorema 14.13 Sea $V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq 0$. Para todo $U \in \mathbb{R}^n$ existe un único $\lambda_U \in \mathbb{R}$ y un único $V_U^\perp$ tales que

$$U = \lambda_U V + V_U^\perp\,;\, \langle V, V_U^\perp \rangle = 0$$

Además, λ_U y $V_U^\perp$ se expresan como

$$\lambda_U = \frac{\langle U, V \rangle}{||V||^2} = \frac{\langle U, V \rangle}{\langle V, V \rangle}\,;\; V_U^\perp = U - \lambda_U V$$

Demostración. Por la definición de U tenemos que $\langle U, V \rangle = \langle \lambda_U V + V_U^\perp, V \rangle = \lambda_U \langle V, V \rangle + \cancel{\langle V_U^\perp, V \rangle} \iff \lambda_U = \frac{\langle U, V \rangle}{||V||^2}$ Por otra parte, $\langle V_U^\perp, V \rangle = \langle U - \lambda_U V, V \rangle = \langle U, V \rangle - \lambda_U \langle V, V \rangle = \langle U, V \rangle - \langle U, V \rangle \frac{||V||^2}{||V||^2} = 0$



Teorema 14.14 $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico: para cada terna $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ se satisface

- $d(X,Y) \geq 0$; $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$
- $d(X,Y) = d(Y,X)$
- $d(X,Z) + d(Z,Y) \geq d(X,Y)$

Demostración. Para la tercera afirmación: $V = Y - X$. Segun 14.13, existen λ, W tales que $Z - X = \lambda V + W$; $\langle V, W\rangle = 0$. Si $Z - Y = Z - X - (Y - X) = (\lambda - 1)V + W$ y manipulamos las distancias:

$$||Z - X||^2 = \langle \lambda V + W, \lambda V + W\rangle = \lambda^2 ||V||^2 + ||W||^2$$

$$||Z - Y||^2 = \langle (\lambda - 1)V + W, (\lambda - 1)V + W\rangle = (\lambda - 1)^2 ||V||^2 + ||W||^2$$

Y, por tanto

$$||Z - X|| + ||Z - Y|| \geq |\lambda| \cdot ||V|| + |\lambda - 1| \cdot ||V|| \geq ||V|| = ||Y - X||$$

Observación 14.15 Para $A, B \in \mathbb{R}^n$ se llama **segmento de recta**, $[A,B]$ al conjunto

$$[A,B] = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)\}$$

o, empleando el **Teorema 14.14**

$$[A,B] = \{Z \in \mathbb{R}^n \mid Z = A + \lambda(B - A)\ ,\ \lambda \in [0,1]\}$$

Ejercicio 14.2 [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]
Sean $U, V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq 0$. Entonces

$$\langle U, V\rangle^2 \leq ||U||^2 \cdot ||V||^2$$

y se cumple la igualdad sii $U = \lambda V$.