

Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en \mathbb{R} . Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z .

Definición 1.2 La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$(x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de z , \bar{z} a $x - yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

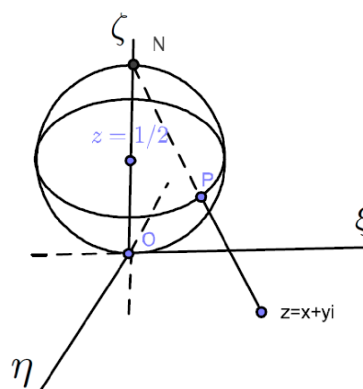
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

Definición 1.5 Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos \alpha$, $q = \sin \alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.

El argumento cumple que (1) $\arg \bar{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico (\mathbb{C}, δ_E) con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, \mathbb{S} , es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemann.

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Funciones complejas

Definición 2.0 Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

Definición 2.1.1 $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si f es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

Teorema 2.1.1 Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $f_1 + f_2$ y f_1/f_2 son continuas en z_0 . Así, los polinomios complejos son continuos.

Definición 2.1.2 Una función $f(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$ es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

Definición 2.2.1, 2.2.2 Una función $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en todo A se llama función **holomorfa** o **analítica**.

Proposición 2.3.2 Si f es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena) Sean $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Definición 2.4.1 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme en z_0 si existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en t_0 , $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$ se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en t_0 tal que $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$. Si α es el ángulo en el punto de cruce z_0 entre γ_1, γ_2 , entonces el ángulo de $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ es α .

Teorema 2.4.1 Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa, es conforme. Demostración. Por la regla de la cadena, $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

Definición 2.5.1 Una función de variable compleja puede transformarse a una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea f . $f'(z_0)$ existe sii f es diferenciable como función de dos variables y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos f derivable en z_0 complejo, con derivada $\lambda = f'(z_0)$. Si tomamos la aplicación lineal $l_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \eta \rightarrow \lambda\eta$. Entonces $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - \lambda \right| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$. Escribiendo $f(z_0)$ y $l_c(\eta)$ como componentes reales: (1) $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ su jacobiano es $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ y (2) $l_c(\eta) = \lambda\eta = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$, que como aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Como el jacobiano la derivada de f en los reales, y A es también la diferencial de f en z_0 , $D = A$, y se dan las ecuaciones.

Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa)

Sea f analítica con derivada continua en A . Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existen U, V abiertos tal que $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es biyectiva. Además, f^{-1} es analítica en V y para todo $z \in U$, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Series de potencias. Funciones elementales

Definición 3.0.1 Una **sucesión** de complejos es una aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se le corresponde $a_n \in \mathbb{C}$.

Definición 3.0.2 Una **serie** es una sucesión de complejos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

Definición 3.0.3 Una sucesión es de **Cauchy** o **fundamental** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 \geq n_0$, se tiene que $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$.

Definición 3.0.4 Se dice que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **convergente** a a si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|a_n - a| < \epsilon$, y diremos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Asimismo, A_n es convergente a A si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Definición 3.0.5 Una serie A_n es absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Teorema 3.1.1 (Criterio de la raíz) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, sea $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $\lambda < 1$ la serie converge y si $\lambda > 1$ diverge.

Teorema 3.1.2 (Criterio del cociente) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sea $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$, si $\beta < 1$ la serie converge, y si $\beta > 1$ diverge.

Definición 3.2.0 Una **sucesión de variable compleja** es una aplicación de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$. Representamos la sucesión por $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Asimismo, una **serie de funciones de variable compleja** es el resultado de sumar dichas funciones: $F_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i$.

Definición 3.2.1 Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $z_0 \in A$ cuando converge la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diremos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge puntualmente** cuando converge para todo $z \in A$.

Definición 3.2.2 La serie $f_0 + \dots + f_n + \dots$ converge en un punto $z_0 \in A$, A abierto en \mathbb{C} si la sucesión $\{F_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $F_n = f_0 + \dots + f_n$ converge. La serie converge puntualmente en A si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en A .

Definición 3.2.3 La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$, $n \geq n_0$.

Definición 3.2.4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A si la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en A .

Teorema 3.2.1 Criterio de la mayorante de Weierstrass Una condición suficiente para que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ es que exista una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq a_n$ para todo z y $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 3.3.0 Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n . Los a_n se llaman **coeficientes** de la serie. Si $z_0 = 0$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ decimos que la serie está **centrada en el origen**.

Definición 3.3.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ considerando $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$; si llamamos $R = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

- La serie converge absolutamente en el interior del círculo $D_R = \{z \mid |z - z_0| < R\}$ y diverge en el exterior $\overline{D}_R = \{z \mid |z - z_0| > R\}$
- La convergencia es uniforme en todo círculo de radio $0 \leq r < R$

R se llama **radio de convergencia** de la serie.

Teorema 3.3.2 La función definida por la suma de serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo:

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

Definición 3.4.1 La función exponencial compleja es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Su radio de convergencia es $R = \infty$. Cumple

también que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. El exponente puede reescribirse como $e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Definición 3.4.2 La función logaritmo se obtiene desde la exponencial. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ tenemos que $\log z = \log |r| + i\theta = \log |r| + i \arg(z)$. Como $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, el logaritmo principal es $\theta \in [0, 2\pi] = \text{Arg } z$.

Definición 3.4.3 Las funciones seno y coseno se definen a través de sus series de potencias con $R = \infty$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

La derivación es como con los números reales, y las identidades de Euler son idénticas:

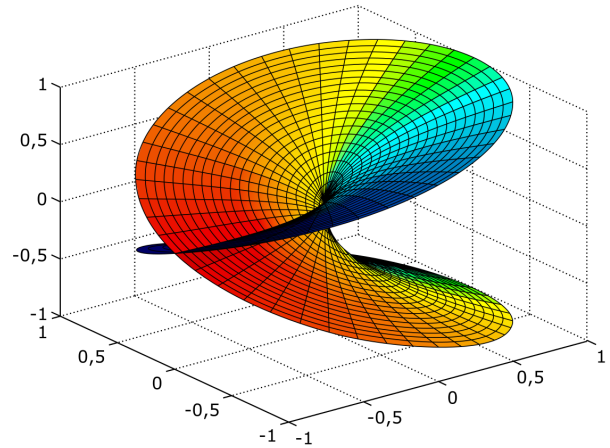
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Definición 3.4.4 La función potencial con exponente complejo, $z^\zeta, \zeta \in \mathbb{C}$ es $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$

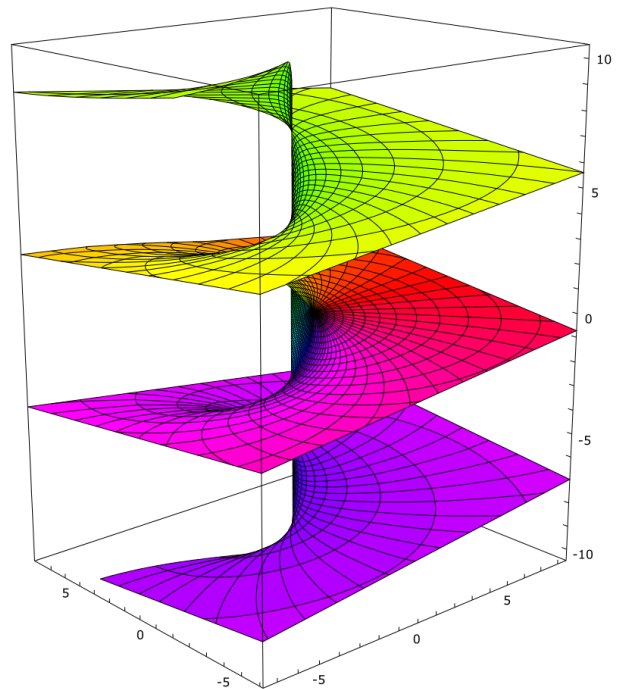
Definición 3.5.1 (Funciones multiformes) Una función f es multiforme cuando $w = f(z)$ puede tomar diferentes valores para el mismo z . Por ejemplo, para $f = \sqrt{z}$, $f(2i) = 1 + i$ y $f(2i) = -1 - i$. Esto se debe a que $z^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\log |z| + i \arg(z))} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$.

Observamos que como k puede tomar dos valores, entonces la función tiene dos ramas, es decir, $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, w_2 = -\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Por tanto, para completar un ciclo en w necesitamos completar dos ciclos en z (uno por rama). Esto genera una **superficie de Riemann** como la siguiente figura:



En este caso los ejes X e Y representan el plano complejo de z . El eje Z representa la parte real de $f(z)$, y el color representa la imaginaria. El punto de corte del plano es el caso $\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R} = 0 + i\sqrt{a}$. Sin embargo, el corte es un artefacto de la visualización tridimensional de 4 dimensiones.

Debajo se muestra el ejemplo de $f = \log z$, donde el eje X representa el argumento, y el color representa la parte real.



Vemos que el el plano "cae" de nivel en cada vuelta. Esto es el equivalente a cada rama del logaritmo.

Integración en el campo complejo

Definición 4.0.1 Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **rectificable** cuando presenta una longitud finita.

Definición 4.0.2 Una **partición** de un intervalo es el conjunto $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. La **norma** de la partición es $|\Delta| = \max\{|t_{k-1} - t_k|, k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Una partición Δ' es **más fina** que otra partición Δ cuando $\Delta \subset \Delta'$.

Definición 4.0.3 Dados f, γ, Δ , definimos la suma de Riemman-Stieljes como $S(\Delta, f, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)[\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)]$, con $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$. f es **integrable** Riemman-Stieljes (RS) si existe un complejo I tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición Δ_ϵ tal que para toda $\Delta_\epsilon \subset \Delta$, $|S(\Delta, f, \gamma) - I| < \epsilon$. I se denota por $\int_a^b f d\gamma$.

Definición 4.0.4 Si $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$, entonces $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$.

Proposición 4.1.1 Sean f, γ . Entonces existe la integral RS y $\left| \int_a^b f d\gamma \right| \leq ML(\gamma)$, donde $M = \max\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$ y $L(\gamma)$ es la longitud de γ . Demostración. $|S(\Delta, f, \gamma)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(s_k)| |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq (\max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}) \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq ML(\gamma)$

Proposición 4.1.2 Si f es continua en $[a, b]$ y γ define un camino de clase C^1 entonces la integral RS viene dada por $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f \gamma' dt$ Demostración. Como $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$, vamos a demostrar que $\int_a^b f d\phi = \int_a^b f \phi' dt$. Por la definición de I existe para todo $\epsilon > 0$ una partición tal que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) [\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)] - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$ Por el teorema del valor intermedio: $\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k)$, luego $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$. Ahora bien, la expresión de sumatorio puede aplicarse a la integral, de modo que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f \phi' dt \right| < \epsilon$. Por último, si denominamos S al sumatorio anterior, tenemos que $|\int_a^b f \phi' dt - \int_a^b f d\phi| \leq |\int_a^b f \phi' dt - S| + |S - \int_a^b f d\phi| \leq 2\epsilon$. Repetimos para $\int_a^b f d\psi$ y finalmente $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi = \int_a^b f \phi' dt + i \int_a^b f \psi' dt = \int_a^b f \gamma' dt$

Definición 4.2.0 Sean f, γ . Se define la **integral de f a lo largo de γ** , $\int_\gamma f dz$ como $\int_a^b f \circ \gamma d\gamma$ y, si γ es C^1 , entonces $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$. La integral cumple:

- Linealidad: $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) dz = c_1 \int_\gamma f_1 dz + c_2 \int_\gamma f_2 dz$
- Si $-\gamma$ es el camino opuesto a γ : $\int_{-\gamma} f dz = - \int_\gamma f dz$
- Yuxtaposición: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- Se tiene la siguiente estimación: $|\int_\gamma f dz| \leq \int_\gamma |f| |dz| = \int_a^b |f(t)| |\gamma'(t)| dt \leq ML(\gamma)$.

Proposición 4.2.1 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, y γ . Si f_n son continuas y $f_n \rightarrow f$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz$. Demostración. Si $|dz|$ es la longitud de la curva, L , entonces $\left| \int_\gamma f dz - \int_\gamma f_n dz \right| \leq \int_\gamma |f - f_n| |dz| < \epsilon L$.

También, si $\sum f_n$ converge uniformemente a F , entonces $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma F dz$. Demostración. $\int_\gamma (\sum_{n=1}^\infty f_n) dz = \int_\gamma (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma F_n dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_\gamma f_k dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz$

Proposición 4.3.1 Sean $f, \gamma, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 . Si F es una primitiva de f , se tiene que $\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Demostración. Si $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$, como la derivada de $F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))$ es $F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$; por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $\int_\gamma f dz = \int_a^b [F(\gamma(t))]' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Proposición 4.3.2 Sea f y γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Entonces $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

Teorema 4.4.1 (Preliminar del T de Cauchy) Sea f analítica y $\gamma \subset A$ es una curva cerrada y su interior. Entonces $\int_\gamma f dz = 0$. Demostración. La fórmula de Green indica que $\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$\iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$ Con A el interior de γ . Si describimos $f = u(x, y) + iv(x, y)$ operando tenemos que $\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (u dx - v dy) + i \int_\gamma (u dy + v dx)$. Aplicando el teorema de Green tenemos que $\int_\gamma f dz = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$ y, por las ecs. de Cauchy-Riemman, $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Ídem para la segunda integral.

Teorema 4.4.2 (T de Cauchy-Goursat para el triángulo) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y f analítica en $A \setminus \{p\}$. Si T es el triángulo cerrado contenido en A , se tiene $\int_{\partial T} f dz = 0$.

Teorema 4.4.3 (T de Cauchy para un conjunto convexo). Sea f analítica en $A \setminus \{p\}$ con $p \in A$ y continua en A . Entonces $\int_{\partial T} f dz = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A .

Consecuencias del Teorema de Cauchy

Definición 5.0 Llamamos **índice** de γ respecto de α , representado por $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ a la integral

$$\text{Ind}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

Intuitivamente $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ representa el número de vueltas de γ respecto de α . **Demostración.** La función $\frac{1}{z-\alpha}$ admite la primitiva $\log(z - \alpha)$ en todo entorno excepto para α . Subdividimos γ en subarcs suficientemente pequeños $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tal que $\gamma_i = z_i z_{i+1}$; $z_i, z_{i+1} \in \gamma$. Así, la integral se puede calcular como $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln(z_{j+1} - \alpha) - \ln(z_j - \alpha)] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln |z_{j+1} - \alpha| - \ln |z_j - \alpha|] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$. La primera suma es 0 por ser teléscopica y $z_1 = z_n$, luego $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$. Cada elemento de la suma es una variación de la circunferencia, y en conjunto representa el número de vueltas recorrido.

Teorema 5.1.1 Si γ es diferenciable cerrado, γ^* su interior, entonces $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ es entero si $\alpha \in \gamma^*$, o es cero si $\alpha \in \mathbb{C}/\gamma^*$.

Teorema 5.2.1 (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, y sea γ un camino cerrado en A . Entonces para todo $z \in A$ tal que $z \notin \gamma^*$ se tiene

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Demostración. Definimos $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ mediante:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{para } \zeta \in A, \quad \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{para } \zeta = z \end{cases}$$

donde $z \in A \setminus \gamma^*$ es un punto fijo. La función g es analítica para $\zeta \neq z$ y $g'(\zeta) = \frac{(\zeta - z)f'(\zeta) - f(\zeta) + f(z)}{(\zeta - z)^2}$ y es continua para $\zeta = z$ pues $\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = f'(z)$. Por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat y $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0$ y como $z \notin \gamma^*$, se puede escribir $0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \iff \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ es decir $f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Teorema 5.3.1 (Teorema de Taylor) Sea f holomorfa, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y $\alpha \in A$. Sea $d > 0$ la

distancia de α a la frontera de A ; entonces para todo $z \in B(\alpha, d)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

El radio de convergencia es mayor o igual que d , y en $B(\alpha, d)$ su suma es $f(z)$. Además las derivadas sucesivas $f^{(n)}(\alpha)$ de f en α vienen dadas por

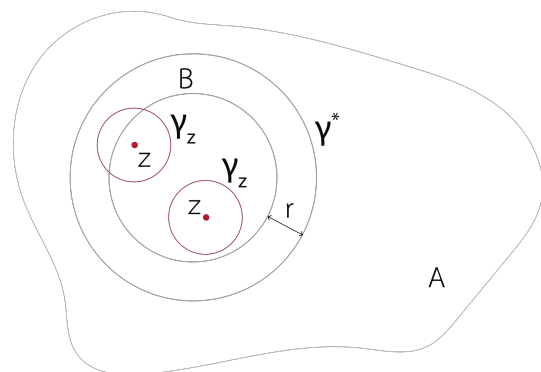
$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

donde γ es una circunferencia de centro α y radio r , con $0 < r < d$.

Teorema 5.4.1 (Desigualdades de Cauchy) Si f es analítica y $B(\alpha, d) \subset A$ entonces $|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$, con $M(r) = \max_{|z|=\alpha+d} |f(z)|$

Teorema 5.4.2 (Teorema de Liouville) Si f es entera (analítica en todo \mathbb{C}) y acotada, entonces es constante. **Demostración.** Por ser f analítica existe un desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia infinito. Sea K una cota de f , es decir $|f(z)| < K$, para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces de las desigualdades de Cauchy se obtiene $|a_n| < \frac{K}{r^n}$, $n = 1, 2, \dots$. Como $r \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow 0$ y $f(z) = a_0$.

Teorema 5.5.1 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en A que converge uniformemente en todo compacto de A . Entonces la sucesión $\{f'_n\}$ converge uniformemente en todo compacto de A . Además, si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z)$ para todo $z \in A$.



Demostración. Bastará demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f'_n\}$ a f' en todo cír-

culo $B \subset A$, pues todo compacto $K \subset A$ puede ser recubierto por una cantidad finita de círculos. Sea $\gamma^* \subset A$ una circunferencia concéntrica con B con $r = r_\gamma - r_B$. Sea $z \in B$ y γ_z la circunferencia de centro z y radio r . Entonces $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$, $f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$ de donde $|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{M_n}{r}$ donde M_n es $\max(|f(\zeta) - f_n(\zeta)|)$ en γ_z . Puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre todo círculo cerrado, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ de tal manera que $\frac{M_n}{r} < \epsilon$ para $n \geq n_0$, y $z \in B$.

Definición 5.6 f en $A \subset \mathbb{C}$ tiene la **propiedad de la media** si para todo cerrado $\overline{D}(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| \leq r\} \subset A$, el valor $f(\alpha)$ en el centro es la media de f en la circunferencia:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt$$

Proposición 5.6.1 Toda función analítica f en A tiene la propiedad de la media.

Teorema 5.6.1 (Principio del módulo máximo) Sea f analítica en A , abierto conexo. Entonces para todo $\alpha \in A$ en cualquier entorno de α existe $\beta \in A$ para el cual $|f(\alpha)| < |f(\beta)|$.

Lema 5.7.1 (Lema de Schwarz) Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ analítica. $|f(z)| < 1$ para todo $z \in B(0, 1)$ y $f(0) = 0$. Entonces se tiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B(0, 1)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si para un $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, se tiene $|f(z_0)| = |z_0|$, o si se verifica $f'(0) = 1$, entonces $f(z)$ es de la forma $f(z) = cz$, con $|c| = 1$

Teorema general de Cauchy

Definición 6.1.1 Dos caminos γ_0, γ_1 con $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset A$ son A -homótopos si existe una aplicación h :

$$h : I \times I \longrightarrow A$$

$$(s, t) \longmapsto h((s, t)) = \gamma_s(t)$$

Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos, se exige que $h(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $h(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finalmente, si los caminos son cerrados, $h(s, 0) = h(s, 1)$.

γ_0, γ_1 son A -homótopos cuando γ_0 se puede deformar a γ_1 continuamente a través de una familia de caminos γ_s . Un camino γ es homotópico a $z_0 \in A$ cuando γ es homotópico al camino constante γ_{z_0} .

Teorema 6.1.1 (Teorema de Cauchy, versión homotópica) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos caminos tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

También si γ_0, γ_1 son cerrados y homotópicos obtenemos la misma conclusión.

Definición 6.2.1 Dos caminos cerrados γ_0, γ_1 contenidos en el mismo abierto A son A -homólogos cuando

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

para todo $\alpha \notin A$

Teorema 6.2.1 Si γ_0, γ_1 son cerrados en A , y γ_0, γ_1 son A -homótopos, son también A -homólogos. Si γ_0 es homotopo a un punto en A , entonces es A -homólogo a cero.

Teorema 6.2.2 (Teorema de Cauchy, versión homológica) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos ciclos A homólogos, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

Definición 6.3.1 / Teorema 6.3.1 Un abierto conexo no vacío $A \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si todo cerrado $\gamma \subset A$ es A -homotopo a cero. Si f es analítica

en A , simplemente conexo, entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A .

Teorema 6.3.2 Sea $A \in \mathbb{C}$ un dominio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es simplemente conexo
- Todo ciclo γ contenido en A es homólogo a 0.
- $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ es conexo

Desarrollo en serie de Laurent

Teorema 6.4.1 (Series de Laurent) Sea $f(z)$ analítica en la corona circular $A = \{z \mid r < |z - \alpha| < R\}$, donde r puede ser 0 y R infinito. Entonces existen dos desarrollos en serie según las potencias de $z - \alpha$ y de $(z - \alpha)^{-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$ convergentes en A y tales que

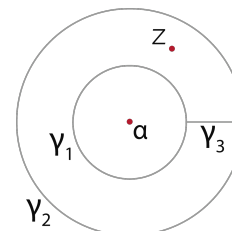
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$$

para $z \in A$. Además estas series convergen uniformemente en toda corona cerrada $A' \subset A$ de la forma $A' = \{z \mid r < r' \leq |z - \alpha| \leq R' < R\}$ y los coeficientes a_n, b_n vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta$$

donde γ es una circunferencia dada por $\gamma(t) = \alpha + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ siendo ρ un radio cualquiera entre r y R .



Demostración. Sean r_1, r_2 dos radios tales que $r < r_1 < r_2 < R$, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias $\gamma_1(t) = \alpha + r_1 e^{it}$, $\gamma_2(t) = \alpha + r_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tal que si z está entre ambas se tiene $\text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$, $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$.

Sea $r_1 < |z - \alpha| < r_2$, y supongamos que z no pertenece al segmento γ_3 (si no movemos γ_3). Sea $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_3$; entonces z está en el recinto simplemente conexo encerrado por Γ y de la Fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Utilizaremos ahora desarrollos en serie similares a los de Taylor. Para $\zeta \in \gamma_2$ y z en el interior de γ_2 tendremos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}$$

y para $\zeta \in \gamma_1$ y z exterior a γ_1 tendremos

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \alpha} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \alpha)^{n-1}}{(z - \alpha)^n}$$

siendo convergentes las series geométricas y uniformemente convergentes en $\zeta \in \gamma_2$ y $\zeta \in \gamma_1$ respectivamente. Integrando término a término ambos desarrollos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \right) (z - \alpha)^n \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta \right) \frac{1}{(z - \alpha)^n} \end{aligned}$$

Puesto que los caminos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ son A-homótopos y las funciones $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}, f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1}$ son analíticas en A , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = a_n \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta = b_n \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - \alpha)^n}, z \in A$$

Queda por probar la convergencia uniforme en una corona cerrada contenida en A . Sean z_1, z_2 puntos de A tales que $r < |z_1 - \alpha| < r' < R' < |z_2 - \alpha| < R$. Como $z_2 \in A$, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ converge uniformemente en el círculo cerrado de centro α y radio $R' < |z_2|$. Análogamente, puesto que $z_1 \in A$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z_1 - \alpha} \right)^n$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - \alpha} \right)^n$ convergerá uniformemente para $|z - \alpha| \geq r'$ con $r' > |z_1 - \alpha|$, pues en estas condiciones $\left| \frac{1}{z - \alpha} \right| \leq \frac{1}{r'} < \left| \frac{1}{z_1 - \alpha} \right|$. Análogamente se comprueba la convergencia uniforme en $|z - \alpha| < R'$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$.

Ceros de las funciones analíticas. Singularidades aisladas.

Teorema 7.1.1 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, con A un dominio. El conjunto $\mathbb{Z}(f)$, los ceros de f , o coincide con A ($f = 0$) o no tiene puntos de acumulación en A . En este último caso, para cada $\alpha \in A$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$, con $g(\alpha) \neq 0$.

Teorema 7.1.2 (Ppo de Identidad) Si f_1, f_2 son funciones analíticas en A tal que $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in B \subset A$; si B tiene punto de acumulación en A entonces $f_1 = f_2$ en A .

Definición 7.2.0 f tiene una **singularidad aislada** en $\alpha \in A$ si f es analítica en $A/\{\alpha\}$ pero desconocemos el comportamiento en α .

Definición 7.2.1 f tiene una **singularidad evitable** en α si tiene una singularidad aislada pero se puede encontrar un valor $b \in \mathbb{C}$ tal que poniendo $f(\alpha) = b$, f es analítica en A .

Teorema 7.2.1 Sea α aislada para f en A , y supongamos f **acotada** en un círculo perforado $B^*(\alpha, r)$ contenido en $A/\{\alpha\}$. Entonces la singularidad es evitable. Demostración. Definamos la función $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \begin{cases} (z - \alpha)^2 f(z) & \text{para } z \in A \setminus \{\alpha\} \\ 0 & \text{para } z = \alpha \end{cases}$$

Por la hipótesis de acotación (pues f es acotada) existe $h'(\alpha)$ y $h'(\alpha) = 0$. Luego h es analítica en A y existe un desarrollo en serie de potencias en un $B(\alpha, r')$, $r' \geq r$, donde tendremos que $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ para todo z en dicho círculo y, por tanto, también en $B(\alpha, r)$. Se tiene que $a_0 = h(\alpha) = 0$, $a_1 = h'(\alpha) = 0$ y, considerando entonces la función analítica en $B(\alpha, r)$ definida por $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z - \alpha)^n$, vale a_2 en $z = \alpha$ y coincide con f en $B^*(\alpha, r)$, luego concluimos que α es una singularidad evitable para f .

Teorema 7.2.2 (Weierstrass) Sea $\alpha \in A$ una singularidad aislada para f en $A/\{\alpha\}$. Entonces (1) f tiene una singularidad evitable en α , (2) existen complejos $c_1, \dots, c_m \neq 0$ y la función $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - \alpha)^k}$ tiene una singularidad evitable en α , o (3) para todo $B(\alpha, r) \subset A$, $r > 0$ la imagen de f en $B^*(\alpha, r)$ es densa en \mathbb{C} .

Definición 7.2.2 Sea $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ abierto y f analítica en $A \setminus \{\infty\}$. Se dice que f tiene una singularidad evitable en ∞ , un polo de orden m o una singulari-

dad esencial, si la función $\phi : B \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(z) = f(\frac{1}{z})$, con $B = \{z \mid \frac{1}{z} \in A\}$ tiene una singularidad de tal tipo en $z = 0$.

Teorema 7.2.3 Si existe una singularidad aislada en ∞ entonces (1) f tiene una singularidad evitable sii existe un entorno perforado de ∞ ; (2) f tiene un polo de orden m si existe un polinomio $h(z) = a_1 z + \dots + a_m z^m \neq 0$ tal que $f(z) - h(z)$ está acotada en $\{z \mid |z| > r\}$; (3) para todo r la imagen de $\{z \mid |z| > r\}$ es densa en \mathbb{C} .

Definición 7.3.1 Diremos que $f_A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto es meromorfa si existe un conjunto $P \subset A$, sin puntos de acumulación en A , tal que f es analítica en $A \setminus P$ y f presenta en cada $p \in P$ una singularidad aislada, que es un polo.

Teorema 7.3.1 $f(z)$ tiene un **polo** de orden m en $\alpha \in \mathbb{C}$ sii existe un entero $m > 0$ y un entorno $U_\alpha \subset A$ de definición de f tal que la función $g(z) = f(z)(z - \alpha)^m$ es analítica en U_α y $g(\alpha) \neq 0$. Demostración. Sea

$$p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{(z - \alpha)^n}$$

la parte principal del polo, de tal forma que $h = f - p$ es analítica en un entorno $U(\alpha)$ de α y por tanto también lo será la función $h(z)(z - \alpha)^m$.

Como $p(z)(z - \alpha)^m = c_m + c_{m-1}(z - \alpha) + \dots + c_1(z - \alpha)^{m-1}$ es también analítica, también lo será la función $f(z)(z - \alpha)^m = h(z)(z - \alpha)^m + p(z)(z - \alpha)^m$. Llamando $g(z)$ a esta función, obtenemos $g(\alpha) = c_m \neq 0$.

Inversamente, si para un entero $m > 0$ se tiene que $g(z) = f(z)(z - \alpha)^m$ es analítica y $g(\alpha) \neq 0$ en un entorno $U(\alpha)$ de α entonces admitirá un desarrollo en serie de potencias de $z - \alpha$; $f(z)(z - \alpha)^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \alpha)^n$, con $b_0 \neq 0$. De esta igualdad resulta si $z \neq \alpha$

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \alpha)^n = p(z) + \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z - \alpha)^{n-m}$$

donde

$$p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{b_{m-n}}{(z - \alpha)^n}, \text{ con } b_0 \neq 0$$

De aquí se deduce que α es un polo de orden m y su parte principal es p .

Teorema 7.3.2 Si $f(z)$ es analítica en el abierto A y si $f(z)$ tiene un cero de orden m en $\alpha \in A$, entonces

la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un polo de orden m en α . Recíprocamente, si $f(z)$ tiene un polo de orden m en α , entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica en un entorno de α y tiene un cero de orden m en α .

Definición 7.3.2 Si $f(z)$ es una función con un polo de orden m en α y su parte principal es $p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{(z-\alpha)^n}$, llamaremos **residuo** de f en α al coeficiente c_1 del término $\frac{1}{z-\alpha}$, y se designa por $\text{Res}(f, \alpha)$.

Teorema 7.3.3 (Residuos para funciones meromorfas) Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f(z)$ una función meromorfa con polos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Sea γ un camino cerrado contenido en A que no pasa por ninguno de los polos. Entonces se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_i) \text{Res}(f, \alpha_i)$$

Demostración. Sean los polos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de multiplicidades m_1, \dots, m_r y sean $p_i(z)$, $i = 1, \dots, r$ sus partes principales con

$$p_i(z) = \sum_{n=1}^{m_i} \frac{c_{i,n}}{(z-\alpha_i)^n}, i = 1, \dots, r$$

. Entonces la función $f - \sum_{i=1}^r p_i$ es analítica en A pues ambas funciones f y $\sum_{i=1}^r p_i$ son meromorfas en A , con los mismos polos, cuyas partes principales se cancelan en cada polo. Así pues podemos aplicar el Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos (**Teorema 7.4.1**) y obtenemos

$$\int_{\gamma} f - (p_1 + p_2 + \dots + p_r) dz = 0 \rightarrow \int_{\gamma} f dz = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma} p_i dz$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} p_i(z) dz &= \int_{\gamma} \frac{c_{i,1}}{z-\alpha_i} dz + \dots + \int_{\gamma} \frac{c_{i,m_i}}{(z-\alpha_i)^{m_i}} dz \\ &= 2\pi i c_{i,1} \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_i) \end{aligned}$$

las últimas $m_i - 1$ integrales son nulas pues las funciones integrando tienen primitiva. De ambas igualdades se concluye el enunciado del teorema.

Observación 7.3.3 Si f es meromorfa con polo en ∞ ; para el desarrollo en serie $f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$, $\text{Res}(f, \infty) = -b_1$. Demostración. Los residuos pertenecen a los diferenciales de las funciones, no a las funciones en sí.

Por tanto, dado el diferencial $f(z)dz$ con el cambio de variable $z = 1/w$ tenemos que $f(z)dz = f(1/w)(1/w)'dw = f(1/w)(-1/w^2)dw$. Entonces, $\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}(-\frac{f(1/z)}{z^2}, 0)$. Con este cambio, la representación por series $f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ con $z \rightarrow \infty$ pasa a ser $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) (\sum_{n=0}^m a_n (\frac{1}{z})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\frac{1}{z})^n}) = -(\sum_{n=0}^m a_n (\frac{1}{z})^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-2})$ y $\int_{\gamma} -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) dz = -\int_{\gamma} \frac{b_1}{z} dz = -2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}(f, \infty)$.

La opción (3) del **Teorema 7.2.2** se puede extender a dos teoremas extra, el segundo más potente que el primero.

Teorema 7.A (Casorati - Weierstrass) Sea α una singularidad esencial de f . Entonces para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una secuencia de complejos $\{z_n\}$ convergente a α tal que $f(\{z_n\}) \rightarrow w$.

Teorema 7.B (Picard) Sea α una singularidad esencial de f . Entonces, para cada $w \in \mathbb{C}$, con una excepción a lo sumo, existe una sucesión $z_n \rightarrow \alpha$ tal que $f(z_n) = w$.

Por ejemplo, para $f(z) = e^{1/z}$, que tiene una singularidad esencial en 0, queremos que $w = 3 + i$. Entonces, la sucesión $z_n = \frac{1}{\log 3+i} = \frac{1}{\sqrt{4+i} \text{Arg}(3+i) + 2\pi n}$ cumple que para $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow 0$ y $e^{\frac{1}{z_n}} = e^{\sqrt{4+i} \text{Arg}(3+i) + 2\pi n} = 3 + i$ para todo n . La excepción en este caso es $w = 0$, donde z_n no existe.

Resumen de casos (según series de Laurent)

- Singularidad evitable: $a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots$
- Polo de orden m : $\frac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots$
- Singularidad esencial: $\dots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots$

Calculo de residuos para polos

- Polo simple

$$f(z) = \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots$$

$$(z-\alpha)f(z) = b_1 + a_0(z-\alpha) + \dots$$

$$\text{Res}(f, \alpha) = b_1 = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha)f(z)$$

- Polo de orden m

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-\alpha)^m} + \dots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \dots$$

$$(z-\alpha)^m f(z) = b_m + \dots + b_1(z-\alpha)^{m-1} + a_0(z-\alpha)^m + \dots$$

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-\alpha)^m f(z))$$

Aplicación del método de residuos al cálculo de integrales reales

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Tomamos el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, entonces

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

y obtenemos una integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ con polos dentro de γ , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, y la resolvemos como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta &= \int_{\gamma} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res} \left(f(z), \alpha_i \right) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Para resolver esta integral requerimos que **no haya polos en el eje real** y, que $Q(x) \neq 0$ en \mathbb{R} , y que **ord(Q) $\geq 2 + \text{ord(P)}$** .

En estas condiciones, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los polos en el **eje imaginario POSITIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \alpha_i \right)$$

● Tenemos que asegurar la existencia de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, porque si no, el resultado será falso.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx$$

Para resolver esta integral, la **fracción no tiene que tener singularidades en el eje real**.

Entonces,

- si $a > 0$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los polos en el **eje imaginario POSITIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \alpha_i \right)$$

- si $a < 0$, y β_1, \dots, β_n son los polos en el **eje imaginario NEGATIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \beta_i \right)$$

$$[\text{Extra}] \text{ V.P. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$$\text{V.P. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^{p-1} \int_{x_j + \varepsilon}^{x_{j+1} - \varepsilon} f(x) dx \right)$$

En este tipo de integral **ord(Q) $\geq 2 + \text{ord(P)}$** y $Q(x)$ **tiene ceros simples en el eje real**.

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{V.P. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) + \\ &\pi i \sum_{j=1}^p \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j \right) \end{aligned}$$

Donde z_j son los ceros de $Q(z)$ en el semiplano superior, y x_j son los ceros en el eje real.

$$[\text{Extra}] \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

En este tipo de integral **ord(Q) $\geq 1 + \text{ord(P)}$** y $Q(x) \neq 0$ en $[a, b]$.

Entonces,

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log \frac{z-b}{z-a}, z_j \right)$$

$$[\text{Extra}] \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

En este tipo de integral **ord(Q) $\geq 2 + \text{ord(P)}$** y $Q(x) \neq 0$ en $[a, +\infty)$.

Entonces,

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log(z-a), z_j \right)$$

Donde log es el logaritmo complejo.

Transformación conforme

Definición 9.0 una transformación de Möbius es una transformación $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ o $\phi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$.

$$w = \phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Donde $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ y $ad - bc \neq 0$.

Observación 9.1 Se tiene que $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\phi^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$

Observación 9.2 Casos particulares

- Traslación: $w = z + b$
- Homotecia de centro el origen: $w = az$
- Giros alrededor del origen: $w = az, |a| = 1$
- Inversión: $w = \frac{1}{z}$

Proposición 9.3.1 Una transformación de Möbius transforma el semiplano superior $H^+ = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ en el círculo unidad $D(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$ si es de la forma

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

donde $\alpha \in H^+$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Proposición 9.3.2 Las transformaciones de Möbius que transforman el círculo unidad sobre sí mismo son aquellas de la forma

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

donde $|\alpha| < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Demostración. Topológicamente, toda transformación de Möbius que transforme el círculo unidad sobre sí mismo habrá de transformar la circunferencia unidad $C(0, 1)$ sobre sí misma. Sea $\alpha \in D(0, 1)$ que se transforma en el origen, de modo que el inverso $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ se transforma en ∞ . Así, la transformación $w = \frac{az+b}{cz+d}$ debe satisfacer $\alpha = -\frac{b}{a}$, $\frac{1}{\alpha} = -\frac{d}{c}$, luego

$$w = \frac{a(z - \alpha)}{c(c - \frac{1}{\bar{\alpha}})} = \frac{a\hat{\alpha}}{c} \frac{z - \alpha}{\hat{\alpha} - 1}$$

Como además la imagen de $z = 1 \in C(0, 1)$, $w(1) \in C(0, 1)$, entonces $|w(1)| = 1$ y $\left| \frac{a\hat{\alpha}}{c} \frac{1 - \alpha}{\hat{\alpha} - 1} \right| = \left| \frac{a\hat{\alpha}}{c} \right| = 1$, lo que prueba la proposición.

Teorema 9.4.1 (Tma de Riemann de la transformación conforme) Sea $A \subset \mathbb{C}$ simplemente

conexa y distinta a \mathbb{C} . Entonces existe una transformación conforme $f : A \rightarrow D(0, 1)$ analítica y biyectiva en $C(0, 1)$. Además, si fijamos $z_0 \in A$ podemos construir f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0 \in \mathbb{R}$. Además, f es única. Demostración. La unicidad es consecuencia del Lema de Schwarz. En efecto supongamos que hubiera dos transformaciones conformes f, g biyectivas $f, g : A \rightarrow D(0, 1)$ con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0, g'(z_0) > 0$. Entonces podemos definir $h : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ mediante $h(w) = g \circ f^{-1}(w)$, de tal forma que $h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0$, y por tanto por el Lema de Schwarz $|h(w)| \leq |w|$ para $w \in D$. El mismo argumento es aplicable a $h^{-1} = f \circ g^{-1}$, de tal forma que $|h^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta|$ para $\zeta \in D$ con $\zeta = h(w)$. Concluimos que $|h(w)| = |w|$ para todo $w \in D$, pero en este caso el Lema de Schwarz asegura que $h(w) = e^{i\theta}w$ para $w \in D$ y por tanto tomando $w = f(z), z \in A$ también $e^{i\theta}f(z) = h(f(z)) = g \circ f^{-1}(f(z)) = g(z)$. De aquí se concluye $e^{i\theta}f'(z_0) = g'(z_0)$ y puesto que $f'(z_0), g'(z_0)$ son ambos positivos, obtenemos que $e^{i\theta} = 1$ y por tanto $f(z) \equiv g(z)$.

Teorema 9.4.2 (Fórmula de Schwarz-Christoffel)

La transformación conforme del semiplano superior $H^+ = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ sobre el polígono P viene dada por

$$w = f(z) = a \left(\int_{z_0}^z (\theta - x_1)^{-\alpha_1} \cdots (\theta - x_n)^{-\alpha_n} d\theta \right) + b$$

donde a, b son parámetros a determinar a partir de los datos del polígono, la integración se realiza a lo largo de cualquier camino $\gamma \in H^+$ comenzando en $z_0 \in H^+$. Los puntos x_1, \dots, x_n pueden ser elegidos arbitrariamente y se verifica que $f(x_1) = w_1, \dots, f(x_n) = w_n$.