# Variable compleja

## Los números complejos

**Definición 1.1** Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $i$ es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{R}$. Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de $z$.

**Definición 1.2** La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

**Definición 1.3** Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de $z$, $\overline{z}$ a $x - yi$.

**Proposición 1.3.1** Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

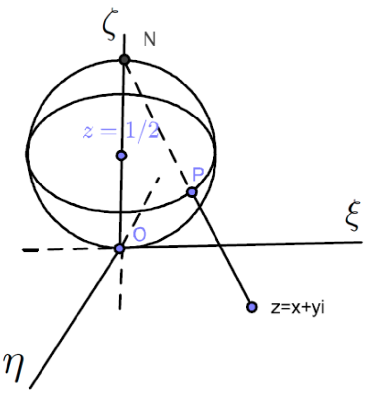
**Definición 1.4.1** Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

**Definición 1.5** Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos\alpha, q = \sin\alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, $z$ puede representarse como $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.x

El argumento cumple que (1) $\arg\overline{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

**Definición 1.7 / 1.8** El espacio topológico $(\mathbb{C}, \delta_E)$ con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, $\mathbb{S}$, es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.




La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos $z_1, z_2$ es la distancia euclídea entre los puntos $P_1, P_2$ de la esfera de la esfera de Riemman.

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

# Funciones complejas

**Definición 2.0** Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

**Definición 2.1.1** $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. $f$ es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo $z$ tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si $f$ es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

**Teorema 2.1.1** Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, $A$ abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2$ y $\mathrm{f}_1/\mathrm{f}_2$ son continuas en $z_0$. Así, los polinomios complejos son continuos.

**Definición 2.1.2** Una función $f(z)$ en $A \subset S$ es continua en $z_0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

**Definición 2.2.1, 2.2.2** Una función $f(z)$ es **derivable** en $z_0$ si existe el límite $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y $f$ es derivable en $\infty$ si $g$ es derivable en $z = 0$. Una función $f : A\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en todo $A$ se llama función **holomorfa** o **analítica.**

**Proposición 2.3.2** Si $f$ es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

**Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena)** Sean $g : A \to \mathbb{C}$ y $f : B \to \mathbb{C}$ tal que $g(A) \subset B$. Si $g$ es derivable en $z_0$ y $f$ es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.