Topología

1 Espacios topológicos

Se dice que p es el límite de una sucesión de reales $a_1, \cdots, a_n$ cuando, para todo abierto $p - \epsilon, p + \epsilon$, existe un m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto p, $B(p)$. Sea X no vacío, para cada $p \in X$ existe una familia $B(p)$. Se dice que $B(p)$ es una **base de entornos abiertos** de p si todas las familias $B(p)$ verifican:

- B1: si $U \subset B(p)$, entonces $p \in U$.
- B2: si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, existe $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$.
- B3: si $U \in B(p)$, para todo $q \in U$ existe $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$.

Esta generalización de conjuntos $(p - \epsilon, p + \epsilon$ nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico** (X, d) a un conjunto X con una distancia d definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro p y radio r al conjunto $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$. Las familias $B(p)$ de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en (X, d).

Si X es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$, un subconjunto $A \subset X$ es un **conjunto abierto** cuando es $\emptyset$ o cuando para cada $t \in A$ existe un subconjunto $U \in B(t)$ tal que $U \subset A$.

Se llama **topología** T **del conjunto** X a la familia de conjuntos abietos de X definidos por bases de entornos abiertos $B(p)$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ la topología usual (T_u) viene dada por $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$. En esta topología, $(\mathbb{R}, T_u)$, cada intervalo abierto (a, b) viene dado como $B(t), t = \frac{a+b}{2}$. El intervalo $[a, b)$ no es abierto, pues para a no existe ningún conjunto $U \in B(a)$ tal que $U \subset [a, b)$.

Dos sistemas de bases de entornos abiertos, $B(p), B'(p)$ son **equivalentes** cuando determinan la misma topología T en X; es decir, que para cada $U \in B(p)$ existe un $U' \in B'(p)$ tal que $U \subset U'$ y que para cada $V' \in B'(p)$ exista un $V \in B(p)$ tal que $V' \subset V$.

1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto X en un sistema $B(p)$. La topología T determinada por $B(p)$ en X cumple:

- P1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$.

- P2: Dada una familia de abiertos $U_\lambda, \lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda U_\lambda$ es un elemento de T.
- P3: Dada una familia **finita** $U_i, i = 1, \cdots, n$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ es un elemento de T.

Un **espacio topológico** (X, T) es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de X, $H(p)$ para cada $p \in X$ [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias H forman una topología T en X. Si para esa topología existe una métrica d, entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si T, T' son dos topologías de X, y $T \subset T'$, entonces se dice que T es menos **fina** que T'. La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por $\{\emptyset, X\}$, y la menos fina, o **discreta**, está dada por $\mathcal{P}(X)$, es decir, el conjunto partición de X.

En (X, T) se llama **conjunto cerrado** a un conjunto $M \subset X$ tal que $X - M$ es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es (X, T) verifica:

- C1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$ son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados $M_\lambda, \lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda M_\lambda$ es un cerrado.
- C3: Dada una familia $M_\lambda, \lambda \in L$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_L U_\lambda$ es un elemento de T.

Si (X, T) es un estacio topológico y $M \subset X$, la topología $T_M = \{M \cap U\}$ de las intersecciones de M con abiertos U de (X, T) se llama **topología inducida o subordinada** de T. Así, el espacio M, T_M es un subespacio de (X, T).

2 Base de una topología

Dada una topología T en X, la **base de la topología**, B, es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío $U \subset T$ es una unión de elementos de B. $\forall U \subset T\ ,\ U = \cup_i B_i$

Sea X un conjunto y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de X. Una condución necesaria y suficiente para que F sea base de X es:

- I: $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si A_λ, A_μ son dos elementos de F, y $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$, para cualquier punto $t \in A_\lambda \cap A_\mu$ existe $A_\nu \in F$ tal que $t \in A_\nu$

2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio (X, T) verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo $x \in X$ existe una base de entornos de x que sea numerable. Un espacio (X, T) verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

2.2 Topología engendrada for una familia de subconjuntos

Cualquier familia $\{A_\lambda\}$ de X que cumpla I es una subase de una topología de X. Si $H = \{A_\lambda\}$ cumple I y II, la familia B formada por las intersecciones (y uniones) finitas de H es base para alguna topología de X y se llama **topología engendrada**.