

# Topología

## 1 Espacios topológicos

Se dice que  $p$  es el límite de una sucesión de reales  $a_1, \dots, a_n$  cuando, para todo abierto  $p - \epsilon, p + \epsilon$ , existe un  $m$  tal que para todo  $n \geq m$  se cumple que  $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ .

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto  $p$ ,  $B(p)$ . Sea  $X$  no vacío, para cada  $p \in X$  existe una familia  $B(p)$ . Se dice que  $B(p)$  es una **base de entornos abiertos** de  $p$  si todas las familias  $B(p)$  verifican:

- B1: si  $U \subset B(p)$ , entonces  $p \in U$ .
- B2: si  $U \in B(p)$  y  $V \in B(p)$ , existe  $W \in B(p)$  tal que  $W \subset U \cap V$ .
- B3: si  $U \in B(p)$ , para todo  $q \in U$  existe  $V \in B(q)$  tal que  $V \subset U$ .

Esta generalización de conjuntos  $(p - \epsilon, p + \epsilon)$  nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico**  $(X, d)$  a un conjunto  $X$  con una distancia  $d$  definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro  $p$  y radio  $r$  al conjunto  $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$ . Las familias  $B(p)$  de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en  $(X, d)$ .

Si  $X$  es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos  $B(p)$ , un subconjunto  $A \subset X$  es un **conjunto abierto** cuando es  $\emptyset$  o cuando para cada  $t \in A$  existe un subconjunto  $U \in B(t)$  tal que  $U \subset A$ .

En  $\mathbb{R}$  la topología usual  $(T_u)$  viene dada por  $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$ . En esta topología,  $(\mathbb{R}, T_u)$ , cada intervalo abierto  $(a, b)$  viene dado como  $B(t)$ ,  $t = \frac{a+b}{2}$ . El intervalo  $[a, b)$  no es abierto, pues para  $a$  no existe ningún conjunto  $U \in B(a)$  tal que  $U \subset [a, b)$ .

Dos sistemas de bases de entornos abiertos,  $B(p), B'(p)$  son **equivalentes** cuando determinan la misma topología  $T$  en  $X$ ; es decir, que para cada  $U \in B(p)$  existe un  $U' \in B'(p)$  tal que  $U \subset U'$  y que para cada  $V' \in B'(p)$  exista un  $V \in B(p)$  tal que  $V' \subset V$ .

### 1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto  $X$ . La topología  $T$  determinada en  $X$  cumple:

- P1:  $\emptyset \in T$  y  $X \in T$ .
- P2: Dada una familia de abiertos  $U_\lambda, \lambda \in L$  de  $T$ , la unión de los elementos,  $\bigcup_\lambda U_\lambda$  es un elemento de  $T$ .
- P3: Dada una familia **finita**  $U_i, i = 1, \dots, n$  de elementos de  $T$ , la intersección de los elementos,  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  es un elemento de  $T$ .

Un **espacio topológico**  $(X, T)$  es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de  $X$ ,  $H(p)$  para cada  $p \in X$  [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias  $H$  forman una topología  $T$  en  $X$ . Si para esa topología existe una métrica  $d$ , entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si  $T, T'$  son dos topologías de  $X$ , y  $T \subset T'$ , entonces se dice que  $T$  es menos **fin**a que  $T'$ . La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por  $\{\emptyset, X\}$ , y la menos fina, o **discreta**, está dada por  $\mathcal{P}(X)$ , es decir, el conjunto partición de  $X$ .

En  $(X, T)$  se llama **conjunto cerrado** a un conjunto  $M \subset X$  tal que  $X - M$  es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es  $(X, T)$  verifica:

- C1:  $\emptyset \in T$  y  $X \in T$  son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados  $M_\lambda, \lambda \in L$  de  $T$ , la unión de los elementos,  $\bigcup_\lambda M_\lambda$  es un cerrado.
- C3: Dada una familia  $M_\lambda, \lambda \in L$  de elementos de  $T$ , la intersección de los elementos,  $\bigcap_L U_\lambda$  es un elemento de  $T$ .

Si  $(X, T)$  es un espacio topológico y  $M \subset X$ , la topología  $T_M = \{M \cap U\}$  de las intersecciones de  $M$  con abiertos  $U$  de  $(X, T)$  se llama **topología inducida o subordinada** de  $T$ . Así, el espacio  $M, T_M$  es un subespacio de  $(X, T)$ .

## 2 Base de una topología

Dada una topología  $T$  en  $X$ , la **base de la topología**,  $B$ , es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío  $U \subset T$  es una unión de elementos de  $B$ .  $\forall U \subset T, U = \bigcup_i B_i$

Sea  $X$  un conjunto y  $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $F$  sea base de  $X$  es:

- I:  $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si  $A_\lambda, A_\mu$  son dos elementos de  $F$ , y  $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ , para cualquier punto  $t \in A_\lambda \cap A_\mu$  existe  $A_\nu \in F$  tal que  $t \in A_\nu$

### 2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio  $(X, T)$  verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo  $x \in X$  existe una base de entornos de  $x$  que sea numerable. Un espacio  $(X, T)$  verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

### 2.2 Topología engendrada por una familia de subconjuntos

Cualquier familia  $\{A_\lambda\}$  de  $X$  que cumpla I es una subbase de una topología de  $X$ . Si  $H = \{A_\lambda\}$  cumple I y II, la familia  $B$  formada por las intersecciones (y uniones) finitas de  $H$  es base para alguna topología de  $X$  y se llama **topología engendrada**.

### 3 Entornos en un espacio topológico

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico, y  $p \in X$ .  $A \subset X$  es entorno de  $p$  si existe un abierto  $U$  de la topología  $T$  tal que  $p \in U \subset A$ . No todo entorno ha de ser abierto. Por ejemplo,  $[0, 1)$  es entorno de  $1/2$  (existe  $U = (1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4) \subset [0, 1)$ ), pero no de  $0$  (ningún abierto en  $T$  cumple  $U \subset [0, 1)$ ).

Los sistemas de entornos  $E(p)$  para  $X$  cumplen:

- E1: Si  $A \in E(p)$ , entonces  $p \in A$ .
- E2: Si  $A \in E(p)$ , todo subconjunto  $A' \subset X$  tal que  $A' \supset A$  pertenece a  $E(p)$  [porque  $p \in A'$ ].
- E3: Si  $A, A' \in E(p)$ , entonces  $A \cap A' \in E(p)$ . Esto es aplicable a un número finito de intersecciones.
- E4: Si  $A \in E(p)$ ,  $A$ , existe  $U \in E(p)$  tal que para todo  $q \in U$ ,  $A \in E(q)$ .

Sea  $p \in (X, T)$ , y  $E(p)$  su sistema de entornos. Una subfamilia  $A(p)$  de  $E(p)$  es un sistema fundamental de entornos (abiertos o no) de  $p$  [base de entornos] si todo entorno de  $p$  contiene un elemento de  $A(p)$ .

Los sistemas de bases de entornos  $B(p)$  resultan ser sistemas fundamentales de entornos. P. ej. en  $(\mathbb{R}, T_u)$  cada punto  $x$  tiene una base de entornos numerable, los intervalos abiertos de radio racional:  $\{(x - r, x + r)\}_{0 < r \in \mathbb{Q}}$ .

Un espacio topológico métrico verifica el primer axioma de numerabilidad, pues  $\{(x - r, x + r)\}_{0 < r \in \mathbb{Q}}$  es un sistema de entornos numerable.

### 4 Subconjuntos en un espacio topológico

Todo punto en un espacio topológico puede ser de 3 tipos distintos. Si consideramos el espacio  $(X, T)$  y  $M \subset X$ , entonces

- $t \in X$  es un punto **interior** a  $M$  ( $t \in \text{int}(M)$ ) si existe algún entorno  $V \subset M$ .
- $t \in X$  es un punto **exterior** a  $M$  ( $t \in \text{ext}(M)$ ) si existe un entorno  $V$  de  $t$  que no corta a  $M$  [ $V \cap M = \emptyset$ ].
- $t \in X$  es un punto **frontera** ( $t \in \text{front}(M)$ ) si para todo entorno  $V$ ,  $V \cap M \neq \emptyset$  y  $V \cap (X - M) \neq \emptyset$ .

El interior de  $M$ ,  $\text{int}(M)$  es el mayor abierto contenido en  $M$ .  $\text{ext}(M)$  también es un conjunto abierto, y  $\text{front}(M)$  es siempre cerrado.

De esta clasificación pueden crearse más definiciones.

- $t \in X$  es **adherente** a  $M$  si para todo entorno  $V(t)$  es  $V \cap M \neq \emptyset$ .  $\text{adh}(M) = \overline{M} = \text{int}(M) \cup \text{front}(M)$ .
  - $t \in X$  es un punto de **acumulación** de  $M$  si todo entorno  $V(t)$  corta a  $M$  en algún punto distinto de  $t$ ; es decir,  $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos de acumulación se denomina **derivado** de  $M$ , o  $\text{der}(M)$ .
  - $t \in X$  es **aislado** cuando existe algún entorno  $V(t)$  tal que  $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$ .

En  $(X, T)$ , un conjunto  $M$  es cerrado sii contiene todos sus puntos de acumulación.

En un espacio  $(X, T)$  un subconjunto  $M$  es denso en  $X$  si  $\text{adh}(M) = X$ . Por ejemplo,  $\mathbb{Q}$  es denso en

$\mathbb{R}$ , porque para todo entorno de  $\mathbb{R}$  siempre hay un racional. Un subconjunto es denso sii para todo abierto no vacío  $U \subset X$  se tiene que  $U \cap M \neq \emptyset$ .

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto numerable y denso.

## 5 Sucesiones, límites de sucesiones

Una **sucesión** en un conjunto  $X$  es una aplicación  $s : \mathbb{N} \rightarrow X ; s(i) \mapsto a_i$ . Cuando se tiene una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  y una sucesión  $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ , definimos la sucesión  $s' : \mathbb{N} \rightarrow Y$  a la composición  $s' = f \circ s$  de modo que  $s'(i) = f \circ s(i) = f(a_i) \in Y$ . La sucesión  $s(i) = a_i$  se representa por  $\{a_i\}$ .

Dada una sucesión  $\{a_i\}$  en  $X$ , se define  $A_m = \{a_i \in s \mid i \geq m\}$ . Se tiene que  $A_m \neq \emptyset$  y  $A_k \subset A_m \cap A'_m \iff k = \max(m, m')$ .

Si  $X$  es un conjunto, una **base de filtro**  $\mathcal{B}$  es una familia  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\} \subset X$  que verifica que (1)  $A_\lambda \neq \emptyset$  y (2) dados  $A_\lambda, A_\mu$  existe  $A_\nu \in \mathcal{B}$  tal que  $A_\nu \subset A_\lambda \cap A_\mu$ . En un espacio  $(X, T)$ , una base de entornos  $E(p)$  es una base  $\mathcal{B}$ .

Dadas dos bases de filtro  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ , se dice que  $\mathcal{B}'$  es **más fina** que  $\mathcal{B}$  cuando para todo  $A \in \mathcal{B}$ , existe  $A' \in \mathcal{B}'$  tal que  $A' \subset A$ .

Si  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$ , las imágenes  $\{f(A_\lambda)\}$  forman una base de filtro en  $Y$ , y se representa por  $f(\mathcal{B})$ . Si  $\mathcal{B}' = \{A'_\lambda\}$  es una base de filtro en  $Y$  y  $\forall \lambda A'_\lambda \cap f(X) \neq \emptyset$ , entonces  $\{f^{-1}(A'_\lambda)\}$  forman una base de filtro en  $X$  y se representa por  $f^{-1}(\mathcal{B}')$ .

Si consideramos la sucesión  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , los conjuntos  $\mathbb{N}_m = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq m\}$  forman una base de filtro  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{N}$ , llamada **base de filtro de Fréchet**.

$p$  es el **punto límite** de  $\{a_i\}$  si dado un entorno  $U$  de  $p$ , existe  $m$  tal que  $A_m \subset U$ . Asimismo,  $p$  es un punto límite de  $\mathcal{B}$  en un espacio topológico  $(X, T)$  si dado un entorno  $U$  de  $p$ , existe un  $A_\lambda \in \mathcal{B}$  tal que  $A_\lambda \subset U$ .

Un espacio topológico  $(X, T)$  verifica el **axioma de separación**  $T_2$  cuando, dados  $p, q \in X$  existen dos entornos  $U(p), V(q)$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ . Este espacio se denomina también **espacio de Hausdorff**. Por ejemplo,  $(\mathbb{R}, T_u)$  es de Hausdorff, porque si se toman  $p, q \in \mathbb{R}$ , y  $d = |p - q|$ , entonces  $U = (p - \frac{d}{2}, p + \frac{d}{2})$  y  $V = (q - \frac{d}{2}, q + \frac{d}{2})$  son disjuntos.

Sea  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$  una base en un espacio de Hausdorff. Si  $\mathcal{B}$  es convergente a  $p$ , éste es el único punto límite de  $\mathcal{B}$ .

Sea  $s = \{a_i\}$ .  $p \in X$  es un **punto de aglomeración** de  $s$  si se verifica que para todo entorno  $U$  de  $p$  y para todo  $A_m$  de la base de filtro de Fréchet de la sucesión, es  $A_m \cap U \neq \emptyset$ .

Si  $s = \{a_i\}$  es una sucesión en  $(X, T)$ , el conjunto de puntos de aglomeración de  $s$  es  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{adh(A_m)\}$ .

Si  $\mathcal{B}$  es una base de filtro en  $(X, T)$ ,  $p$  es de aglomeración cuando para todo entorno  $U$  de  $p$  y para todo  $A_\lambda \in \mathcal{B}$ ,  $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ . El conjunto  $\bigcap_\lambda \{adh(A_\lambda)\}$  es el conjunto de puntos de aglomeración de  $\mathcal{B}$ .