Estructuras algebráicas

Generalidades y teorema de Lagrange

Grupos

Definición 1.1 Un grupo es un conjunto no vacío G en el que se define una operación binaria $G \times G \longrightarrow G$; $(a, b) \mapsto ab$ que cumple (1) **asociatividad** ($(ab)c = a(bc)$), (2) **existencia de elemento neutro** $u \in G$; $ua = a = au$ y (3) **existencia de elemento inverso** $a, x \in G$; $ax = u = xa$. Tanto u como a son únicos. Para la suma $u = 0, a = -x$ y para el producto $u = 1, a = x^{-1}$.

Otras propiedades inmediatas de los grupos son (1) **simplificación**: $ab = ac \iff b = c; ba = ca \iff b = c$; (2) **asociatividad generalizada**: $(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_l)(a_{l+1} \cdots a_n)$, (3) **inverso de un producto**: $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Definición 1.2 Un **grupo simétrico** S_n es el conjunto de biyecciones de un conjunto X con n elementos. Se cumple que $\mathrm{card}(S_n) = n!$. Otros ejemplos de grupos son $GL_n(\mathbb{R})$, el grupo de matrices no singulares para la operación producto; o D_n es el conjunto de biyecciones que conserva la distancia en un polígono de n lados.

Definición 1.3 Un grupo es **abeliano** si $ab = ba \quad \forall a, b \in G$. Todo grupo con dos elementos es abeliano, pues $aa = aa; uu = uu; ua = a = au$; pero para $n \geq 3$, S_n no puede ser abeliano. $GL_n; n \geq 2$, ni $D_n; n \geq 3$ son abelianos.

Proposición 1.4 (1) Si $x^2 = 1 \ \forall x \in G$, entonces G es abeliano; (2) si $(ab)^2 = a^2b^2$ entonces G es abeliano.

Demostración. (1) Para cada x, $x \cdot x = 1 \iff x = x^{-1}$, luego si $a, b \in G$ entonces $a = a^{-1}; b = b^{-1}$x y si $c = ab$ entonces $ab = c = c^{-1} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. (2) Dados $a, b \in G$, se tiene que $a(ba)b = (ab)^2 = a^2b^2 = a(ab)b$ y, por simplificación, $ab = ba$.

Definición 1.5 Si G, G' son dos grupos con operaciones $G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto ab \quad ; \quad G' \times G' \longrightarrow G' : (a', b') \mapsto a'b'$ el **producto cartesiano** $G'' = G \times G'$ es un grupo con operación $G'' \times G'' \longrightarrow G'' : ((a, a'), (b, b')) = (ab, a'b')$. La asociatividad se mantiene, y se ve que $1_{G''} = (1_G, 1_{G'})$. Además, si G, G' son abelianos, G'' también lo es. Se dice que $G_1 \times \cdots \times G_r$ es el **producto directo**.

Subgrupos

Definición 1.6 Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un **subgrupo** de G si es un grupo con la misma operación que G. **EN ALGUNOS SITIOS** $H \subset G$ **INDICO QUE** H **ES SUBGRUPO DE** G. Se puede ver que el elemento neutro de H es 1_G, y que si $x \in H; x^{-1} \in H$. Para que (1) H sea subgrupo de G se tiene que cumplir que (2) si $x, y \in H$, entonces $xy^{-1} \in H$.

$\{1_G\}$ y G son subgrupos de G. El resto de subgrupos se llaman **subgrupos propios** de G. Por ejemplo, $m\mathbb{Z} = \{mx \mid x, m \in \mathbb{Z};\}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$.

Definición 1.8.3 Se denomina a $\langle S\rangle$ al **subgrupo generado** por S.

$\langle S\rangle = \left\{s_1^{h_1}\cdots s_n^{h_n} \mid n\in\mathbb{N}, s_i\in S, h_i\in\mathbb{Z}, 1\le i\le n\right\}$. Esto se puede simplificar como

$\langle S\rangle = \left\{x_1\cdots x_m \mid m\in\mathbb{N}, x_i\in S, 1\le i\le m\right\}$. Es decir, es el conjunto de todos los elementos de S combinados con operación binaria. Si $\mathcal{F}_S$ es la familia de los subgrupos de G que contienen a S, entonces se cumple que $\langle S\rangle = \bigcap_{H\in\mathcal{F}_S} H$.

Un caso particular es cuando $S=\{a\}$. En tal caso es el **subgrupo generado por a**, $\langle a\rangle = \{a^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Un subconjunto $S\subset G$ se llama **generador de** G si $G=\langle S\rangle$. Es cierto que $\langle G\rangle = G$. Si S es finito, entonces se dice que G es **finitamente generado**.

Definición 1.8.4 Si H es subgrupo de G, se llama **centralizador de** H **en** G a $C_G(H)=\{x\in G \mid ax = xa\ \forall a\in H\}$. El centralizador de G en G, llamado **centro de** G es el caso $Z(G)=\{x\in G \mid xa=ax\ \forall a\in G\}$. Se ve que $C_G(H)$ es un subgrupo de G.

Definición 1.8.5 Si $S\subset G$ y $a\in G$, se llama **conjugado de** S **por** a al conjunto $S^a=\{a^{-1}xa \mid x\in S\}$

Definición 1.8.6 Si $S\subset G$, se llama **normalizador de** S **en** G al conjunto $N_G(S)=\{a\in G \mid S^a = S\}$. El normalizador de S es un subgrupo de G porque si $a,b\in N_G(S)$, entonces $S^{ab^{-1}} = (S^a)^{b^{-1}} = S^{b^{-1}} = (S^b)^{b^{-1}} = S^{bb^{-1}} = S$

Definición 1.8.8 Dados dos subgrupos K,H de G, se define $HK=\{hk \mid h\in H, k\in K\}$. Para que HK sea un subgrupo de G entonces $HK=KH$. Si $H\subset K, HK=K=KH$.

Orden de un grupo

Definición 1.9 El **orden** de un subgrupo finito $H\subset G$ es el número de elementos que tiene. Se denota por $o(H)$. Un elemento $a\in G$ es **de torsión** si $\langle a\rangle$ es finito. En tal caso el orden es $o(a)$.

Proposición 1.10 Sea G un grupo y $a\in G$ de torsión. Entonces se cumple que

- Existe $k\ge 1$ tal que $a^k=1$
- $o(a)$ es el menor número tal que $a^n=1$
- Si $n=o(a)$, $\langle a\rangle = \{1,a,\cdots,a^{n-1}\}$
- $a^k=1$ sii k es múltiplo de n
- $o(a^{-1})=o(a)$
- Si $x=a^k$ y $n=o(a)$, entonces $o(x)=\frac{n}{mcd(n,k)}$
- Si $b\in G$ es de torsion y $ab=ba$ entonces $o(ab)$ es divisor de $mcm(o(a),o(b))$. Si $o(a),o(b)$ son primos entre si, $o(ab)=o(a)o(b)$
- $o(ab)=o(ba)$

Índice de un subgrupo

Definición 1.2/**Observación 1.12.6/7** Sea G un grupo y $H\subset G$. Sean R^H, R_H las relaciones de equivalencia en G:

$$xR_Hy \iff xy^{-1}\in H$$

$$xR^H y \iff x^{-1}y \in H$$

Además, se definen $Hx = \{hx \mid h \in H\}; xH = \{xh \mid h \in H\}$. Se cumple que si $x, y \in G$, y $yR_H x$ entonces $yx^{-1} = h \in H$ y, por tanto, $y = hx \in Hx$.

Además, las aplicaciones $H \longrightarrow Hx : h \mapsto hx$ y su equivalente en xH son biyectivas. Es importante que pese a existir una biyeccíón entre Hx y xH, **no siempre** Hx **y** xH **son iguales**.

Proposición 1.12.3 La aplicación entre conjuntos cocientes $G/R_H \longrightarrow G/R^H : Hx \longrightarrow x^{-1}H$ es biyectiva.

Definición 1.12.4 $H \subset G$ es un subgrupo de **índice infinito** si G/R_H es un conjunto infinito. Por otra parte, el índice de H en G, $[G : H]$ es el número de elementos de G/R_H.

● **Proposición 1.12.8 (T de Lagrange)** Sea $H \subset G$ un subgrupo. Se cumple que si G es finito, entonces $o(H)$ es finito, H tiene índice finito en G y $o(G) = o(H) \cdot [G : H]$.

Corolario 1.12.9 Si H, K son subgrupos finitos de G, $o(H) = m$, y $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ entonces $H \cap K = \{1_G\}$.

Proposición 1.12.10 (F de transitividad del índice) Sean H, K subgrupos de G. Si H es subgrupo de K, y los indices entre subgrupos, y con G, son finitos, entonces se cumple $[G : K] = [G : H][H : K]$

● **Proposición 1.12.11** Sean H, K subgrupos de G, finito. Entonces

$$card(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$$

● **Definición 1.15** / **Observación 1.15.4** Un grupo G se llama **cíclico** si existe $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$. Si $o(a) = p$, primo, el grupo es cíclico.

● **Proposición 1.16 / 1.17** Sea G cíclico y $n = o(G)$, para cada divisor m de n existe un único subgrupo de G de orden m, y ese subgrupo es cíclico. Además, todo subgrupo de un grupo cíclico [finito o no] es cíclico.

Definición 1.18 Sea G finitamente generado. Un sistema generador S se llama **minimal** si cualquier subconjunto de G con menos elemenos que S no es generador de G.

Proposición 1.19 Sea G finito de orden n y $S = \{x_1, \cdots, x_p\}$ un sistema generador minimal de G. Entonces $2^p \leq n$.

Demostración. Llamamos $S_i = \{x_1, \cdots, x_i\}$, $1 \leq i \leq p$; y $H_i = \langle S_i \rangle$. Evidentemente, $H_i \subset H_{i+1}$. Por ele teorema de Lagrange y la fórmula de la transitividad del índice,

$$[G : H_1] = [H_P : H_1] = [H_P : H_{P-1}][H_{P-1} : H_{P-2}] \cdots [H_2 : H_1]$$

Además,

$$[H_{i+1} : H_i] = \frac{o(H_{i+1})}{o(H_i)} > 1 \iff [H_{i+1} : H_i] \geq 2$$

pues los índices son enteros. Por tanto, $[G : H_1] \geq 2^{p-1}$, y como $o(H_1) \geq 2$, entonces, $o(G) = o(H_1)[G : H_1] \geq 2^p$

Definición Grupo diédrico D_n Definimos el grupo diédrico al grupo con las operaciones f, g tales que $o(g) = 2$ y $o(f) = n$. Entonces $D_n = \{1, f, f^2, \cdots, f^{n-1}, g, gf, \cdots, gf^{n-1}\}$. Este grupo posee unas propiedades demostrables:

- $f^k g f^k = g$
- $g f^k g = f^{n-k}$

Definición Grupo cuaternión Q El grupo cuaternión tiene los elementos $Q = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$. Las relaciones que definen el grupo son $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Subgrupos normales, homomorfismos, teorema de estructura de grupos abelianos finitos

Proposición 2.1 Sea G un grupo y H un subgrupo. H es un subgrupo **normal** (**LO DEFINO AQUÍ COMO** $\subset_N$) si se cumplen las condiciones equivalentes:

1. Para todo $a \in G$, $aH = Ha$
2. Para todo $a \in G$, $H = H^a$
3. Para todo $a, b \in G$, $ab \in H \iff ba \in H$, luego si H es abeliano, es normal.

Demostración. $1 \implies 2$. Si $y \in H^a$ entonces $aya^{-1} = h \in H$. Como $ay = ha \in Ha = aH$ existe $h' \in H$ tal que $ay = ah'$. Así, $y \in H^a = h' \in H \iff H^a \subset H$. Si aplicamos lo mismo con xa^{-1} tenemos $H^{a^{-1}} \subset H$ y, con ello $H \subset H^a$, luego $H = H^a$. $2 \implies 3$. Como $ab \in H$, $ba = a^{-1}aba \in H^a$, y como $ba \in H$, $H = H^a$. $3 \implies 1$. Sea $x \in Ha$, luego $\exists h \in H, x = ha$, y $xa^{-1} = h \in H$. Por hipótesis $h' = a^{-1}x \in H$ y $x = ah' \in aH$, luego $Ha \subset aH$. Si empezamos con $x \in aH$ obtenemos que $aH \subset Ha$, luego $aH = Ha$.

Observación 2.2.1 Si H es normal, entonces $R^H = R_H$, y G/R_H se escribe G/H.

Observación 2.2.4/2.2.5 Si H es un subgrupo de G, y $[G : H] = 2$, H es subgrupo normal de G. Asimismo, los subgrupos $\{1_G\}, G$ son normales.

Definición 2.2.14 Un grupo G es **simple** si los únicos subgrupos son $\{1_G\}, G$. Si $o(G)$ es primo p, por el teorema de Lagrange, los únicos subgrupos son $\{1_G\}, G$, luego G es simple.

Proposición 2.2.8 Todo subgrupo $H \subset Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \ \forall g \in G\}$ es subgrupo normal de G.

Proposición 2.2.10 Sea H subgrupo de G.

1. H es subgrupo de $N_G(H) = \{a \in G \mid H = H^a\}$.
2. $H \subset_N N_G(H)$.
3. Si $H \subset K \subset G$ y $H \subset_N K$, entonces $K \subset N_G(H)$.

Definición 2.2.11 Si H, K son subgrupos de G, K es un **subgrupo conjugado** de H si existe $a \in G$ tal que $K = H^a$. Como la relación es recíproca, se dice que K y H son conjugados.

Proposición 2.2.11

- Si Σ es la familia de conjugados de H y $N = N_G(H)$, la aplicación $\phi : G/R_N \to \Sigma : Na \to H^a$ es biyectiva.
- Si N tiene índice finito en G, el número de conjugados con H es $[G : N]$.

Proposición 2.2.13 Si $A \subset_N G$, $H \subset K \subset G$, y $H \subset_N K$, entonces $AH \subset_N AK$.

La normalidad no es transitiva, es decir, si $H \subset_N K \subset_N G$, no siempre es cierto que $H \subset_N G$.

Definición 2.2.16/**Observación 2.2.16.1** Si $H \subset G$, se llama corazón de H a

$$\heartsuit(H) = K(H) = \bigcap_{a \in G} H^a$$

Si $N \subset_N H$ entonces $N \subset K(H)$, pues para cada $a \in G$: $N = N^a \subset H^a$, luego $N = N^a \subset \cap_{a\in G} H^a = K(H)$

Proposición 2.2.17 (T de Poincaré) Si G posee un subgrupo de índice finito, también posee un subgrupo normal de índice finito.

Grupos cocientes

Proposición 2.3 El grupo cociente G/H de $H \subset_N G$ tiene estructura de grupo con la operación:

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (aH, bH) &\longmapsto abH \end{aligned}$$

El elemento neutro del grupo cociente es H, y el inverso de aH es $(aH)^{-1} = a^{-1}H$.

Observación 2.3.1 Si $H \subset_N K \subset G$ (entonces $H \subset_N G$), el grupo cociente $K/H \subset G/H$, ya que si $aH, bH \in K/H, a, b \in K$, entonces $(aH)(bH)^{-1} = (aH)(b^{-1}H) = ab^{-1}H \in K/H$, ya que como $K \subset G, ab^{-1} \in K$

Observación 2.3.1.1 $K \subset_N G \iff K/H \subset_N G/H$

Ejemplo 2.3.3 (Función ϕ de Euler) Si denotamos $\mathbb{Z}_m^* = \{a + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid mcd(a, m) = 1\}$ y consideramos la operación binaria

$$\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m^* \to \mathbb{Z}_m^* : (a + m\mathbb{Z}, b + m\mathbb{Z}) \mapsto ab + m\mathbb{Z}$$

vemos que $\mathbb{Z}_m^*$ forma un grupo abeliano con elemento neutro $1 + m\mathbb{Z}$ y elemento inverso $u + m\mathbb{Z}$, con $au = 1$.

Entonces, la función $\phi : \mathbb{N}\{0\} \to \mathbb{N}\{0\}$ que a cada m positivo le corresponde el orden de $\mathbb{Z}_m^*$ es la función de Euler. Para p primo, $\phi(p) = p - 1$, y $\phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$. Si tenemos m, n tal que $mcd(m, n) = 1$, entonces $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Con todo esto, si tenemos un numero $a = p_1^{k_1} \cdots p_i^{k_i}$, entonces $\phi(a) = p_1^{k_1-1} \cdots p_i^{k_i-1}(p_1 - 1) \cdots (p_i - 1)$

Homomorfismos

● **Definición 2.4 / 2.6** Una aplicación $f : G \to G'$ es un **homomorfismo de grupos** si $f(ab) = f(a)f(b) \forall a, b \in G$. Para todo homomorfismo se tiene que $f(1_G) = 1_{G'}$ y $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. Si un homomorfismo es biyectivo se llama **isomorfismo**. Se denota por $G \simeq G'$ cuando dos grupos son isomorfos.

Definición 2.4.3/Proposición 2.4.4 El **núcleo** de un homomorfismo es $ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = 1_{G'}\}$. f es inyectiva sii $ker(f) = \{1_G\}$.

Definición 2.4.5 Se llama **imagen** de f a $im(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$.

Proposición 2.4.6 Si $f : G \to G'$ es homomorfismo y $H' \subset G'$, entonces $f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$ es un subgrupo de G. Además, si $H' \subset_N G'$ entonces $f^{-1}(H') \subset_N G$.

Observación 2.4.7/2.4.8 Si $H \subset G$, la inclusión $j : H \to G : x \mapsto x$ es un homomorfismo inyectivo; y si $H \subset_N G$, la proyección $\pi : G \to G/H : x \mapsto xH$ es un homomorfismo sobreyectivo.

Proposición 2.4.9 Si $f : G \to G'$ y $g : G' \to G''$ son homomorfismos, $g \circ f : G \to G''$ también lo es, pues $(g \circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y)$

Proposición 2.4.10 Si f es un homomorfismo y $x \in G$ tiene orden m, se cumple que (i) $o(f(x))$ divide a m (ii) Si f es inyectiva, $o(f(x)) = m$.

Proposición 2.5 (Factorización canónica de un homomorfismo)

Sea $f : G \to G$ un homomorfismo. Entonces existe un homomorfismo biyectivo $b : G/ker(f) \to im(f)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/ker(f) \arrow[r, "b"'] & im(f) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. $f(x) = j((b \circ pi)(x)) = b(\pi(x)) = b(x\ ker(f))$. Comprobamos que se cumple el enunciado. (1) b está bien definida porque si $x\ ker(f) = y\ ker(f)$ entonces $x^{-1}y \in ker(f)$, $f(x)^{-1}f(y) = 1_{G'} \iff f(y) = f(x)$, luego $b(x\ ker(f)) = b(y\ ker(f))$. (2) b es homomorfismo, ya que $b((x\,ker(f))(y\,ker(f)) = b(xy\,ker(f) = f(xy) = f(x)f(y) = b(x\,ker(f))b(y\,ker(f))$. (3) b es inyectivo, ya que si $x\,ker(f) \in ker(b)$ entonces $f(x) = b(x\,ker(f)) = 1_{im(f)} = 1_{G'}$, y $xinker(f)$. (4) b es sobreyectiva ya que para cada elemento de $im(f)$ existe un elemento de la forma $b(x\,ker(f)$.

Proposición 2.6.X (Propiedades de isomorfismos) Si $G \simeq G'$, y G es abeliano o cíclico, entonces G' también lo es. Si X, Y son conjuntos con el mismo número de elementos, entonces $Biy(X) \simeq Biy(Y)$.

Corolario 2.7 (Primer teorema de la isomorfía) Si $f : G \to G'$ es un homomorfismo, $G/ker(f) \simeq im(f)$.

Corolario 2.8 Todo grupo cíclico es isomorfo a $\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Demostración. Sea $G = \langle a \rangle$ cíclico. Consideramos $f : \mathbb{Z} \to G : k \to f(k) = a^k$. Como $f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y)$, f es homomorfismo. Cada elemento $b \in G$ es de la forma a^k, luego f es sobreyectiva, es decir, $im(f) = G$. Por el primer tma de isomorfía tenemos que $\mathbb{Z}/ker(f) \simeq im(f)$, luego $\mathbb{Z}/ker(f) \simeq G$, y como $ker(f)$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$, existe m tal que $ker(f) = m\mathbb{Z}$. Si $m = 0$, $ker(f) = 0\mathbb{Z} = \{0\}$, y $\mathbb{Z} \simeq G$. Si $m > 0$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq G$.

Ejemplo 2.9.4.4 Si n es múltiplo de m, existen homomorfismos inyectivos y el número de homomorfismos es $\phi(m)$. Si $mcd(m, n) = n$, existen isomorfismos sobreyectivos y el número es $\phi(n)$.

Ejemplo 2.9.6 Sea $n \geq 2$ y $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ y $f_n \in S_n = Biy(X)$. Se llama **signatura de f**, $s(f)$ al número de pares $(i, j) \in X \times X$ tales que $i < j \quad f(i) > (j)$. La aplicación $\epsilon : S_n \to U_2 = \{-1, 1\} \quad f \mapsto \epsilon(f) = (-1)^{s(f)}$ es homomorfismo. Esta fórmula puede ser calculada también así: $\epsilon(f) = \prod_{i<j} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}$ Se denomina **grupo alternado**, A_n al núcleo de ϵ: $A_n = \{f \in S_n \mid \epsilon(f) = 1\}$

Proposición 2.10 Si G es un grupo con $o(G) < 12$, para cada divisor d de n existe un subgrupo $G, o(G) = d$. Sin embargo, si $o(G) \geq 12$, no siempre se cumple esto (A_4 tiene $o(A_4) = 12$, pero no tiene subgrupos de orden 6. Esto verifica que el **recíproco del teorema de Lagrange no es cierto siempre**.

Teoremas de isomorfía

Proposición 2.15 (Segundo teorema de isomorfía) Sean $N, H \subset_N G$, y $N \subset H$. Entonces $H/N \subset_N G/N$ y $(G/N)/(H/N) \simeq G/H$

Proposición 2.16 (Tercer teorema de isomorfía Si $H, N \subset G$, y $N \subset_N G$,

1. $H \cap N \subset_N H$
2. $HN \subset G$
3. $N \subset_N HN$
4. $HN/N \simeq H/(H \cap N)$

Lema 2.17 Sean $A, B, C \subset G$, y $B \subset A$. Entonces $A \cap BC = B(A \cap C)$

Proposición 2.18 (Cuarto teorema de isomorfía). Sea $H_1, H_2 \subset G$, $N_i \subset_N H_i$. Entonces

- $N_1(H_1 \cap H_2) \subset H_1$ y $N_2(H_1 \cap H_2) \subset H_2$
- $N_1(H_1 \cap N_2) \subset_N N_1(H_1 \cap H_2)$ y $N_2(N_1 \cap H_2) \subset_N N_2(H_1 \cap H_2)$
- $(H_1 \cap N_2)(N_1 \cap H_2) \subset_N H_1 \cap H_2$
- $(N_1(H_1 \cap H_2))/(N_1(H_1 \cap N_2)) \simeq (H_1 \cap H_2)/(H_1 \cap N_2)\ (N_1 \cap H_2) \simeq (N_2(H_1 \cap H_2))/(N_2(N_1 \cap H_2)$

Estructura de grupos abelianos finitos

Lema 2.20 Sea G grupo abeliano finito y $x \in G$ un elemento de orden máximo. Entonces, para cada $y \in G$, el orden de y divide al de x.

Lema 2.20.2 Sea G abeliano finito y $x \in G$ de orden máximo. Sean $H = \langle x \rangle$ e $y \in G$, entonces existe $z \in Hy$ tal que $o(z) = o(Hy)$

● **Lema 2.20.3** Sean $H, K \subset_N G$ tales que $H \cap K = \{1\}$. Entonces $HK \simeq H \times K$.

● **Proposición 2.2.1 (Teorema de estructura de grupos abelianos finitos)** Si G es abeliano finito, existen $m_1, \cdots, m_r$, denominados **coeficientes de torsión de G**, tales que

$$G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$$

y cada m_i divide a m_{i-1}. Además, los coeficientes son únicos.

● **Proposición 2.22** Sean G_1, G_2 grupos cíclicos de órdenes m y n, y $G = G_1 \times G_2$, entonces las afirmaciones (1) G es cíclico, (2) $mcd(m, n) = 1$ son equivalentes.

Demostración. (1) $\rightarrow$ (2). Sea M el $mcm(m, n)$. Escribimos $M = ma, M = nb$. Cada $u = (x, y) \in G$ cumple $u^M = (x^M, y^M) = ((x^m)^a, (y^n)^b) = (1_{G_1}^a, 1_{G_2}^b) = 1_G$ Como G es cíclico y $o(G) = m$, alguno de sus elementos tiene orden mn. Luego $mn = N$ y $mcd(m, n) = 1$

Observación 2.22.3 Si $p_1 < \cdots < p_s$ son primos, todo grupo abeliano de orden $n = p_1 \cdots p_s$ es cíclico.

Proposición 2.23 Si p es primo, $\mathbb{Z}_p^*$ es cíclico.

Grupos de automorfismos. Acción de un grupo sobre un conjunto

Corolario 3.4.3.1 Sea G un grupo y $H \subset G$, $H \subset Z(G)$. Entonces (1) $H \subset_N G$ y (2) Si G/H es cíclico, G es abeliano.

Acciones de grupos sobre conjuntos

Definición 3.8 Una **acción sobre un conjunto** X es la aplicación $G \times X \to X : (g, x) \mapsto g(x) \forall g \in G, \forall x \in X$. Se cumple (1) $(gh)(x) = g(h(x))$, (2) $1_G(x) = x$.

Observación 3.8.3 El homomorfismo $\theta : \ G \longrightarrow Biy(Y)\ ;\ g \mapsto \theta(g) : X \to X : x \mapsto g(x)$ es la que define g como acción sobre X. Definimos $ker(\theta) = \{g \in G | g(x) = x \forall x \in X\}$. Se dice que una acción es **fiel** cuando $ker(\theta) = \{1_G\}$.

● **Proposición 3.9 (Teorema de Cayley)** Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo $Biy(G)$.

Proposición 3.10 Sea $G \times X \to X$ una acción. Se llaman

- **Estabilizador** de x: $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$
- **Órbita** de x: $O_x = \{g(x) | g \in G\} \subset X$. $\cup O_x = X$ y $\cap O_x = \emptyset$.
- x es un **punto fijo** de g si $G_x = G$.

Definición Una acción es **libre** si $G_x = \{1_G\}$. Una acción es **efectiva** si $\cap_{x \in X} G_x = \{1_G\}$.

Observación 3.10.3 La aplicación $G/R^{G_x} \to O_x : gG_x \mapsto g(x)$ es biyectiva, y $card(O_x) = [G : G_x]$.

Observación 3.10.4 $ker(\theta) = \bigcap_{x \in X} G_x$

Definición 3.11.2.1 Se llama **clase de conjugación del elemento** x a $Cl(x) = \{axa^{-1} | a \in G\}$, y el conjunto de elementos de órbitas (un elemento por órbita), Y se llama **sistema de representantes por conjugación de** G.

Definición $Z(G) = \{a \in G | ax = xa \ \forall x \in G\}$, $C_G(x) = \{a \in G | ax = xa\}$.

● **Proposición 3.11.3** Sea G finito e Y un sistema de representantes por conjugación. Entonces $o(G) = o(Z(G)) + \sum_{x \in Y\ ;\ x \notin Z(G)} [G : C_G(x)]$

Corolario 3.11.4 Sea p primo, $m \geq 1 \in \mathbb{N}$ y G de orden p^m. Entonces $Z(G) \neq \{1_G\}$ y $o(Z(G)) \neq p^{m-1}$.

Corolario 3.11.5 Sea p primo y G de orden p^2. Entonces G es abeliano e isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Corolario 3.11.6 Sea G de orden p^m, $m > 1$. Entonces G no es simple. Demostración. Si G es abeliano, $Z(G) \subset_N G$ ya que $\{1\} \neq_{3.11.5} Z(G)$ y $Z(G) \neq G$ porque si no es abeliano. Si G es abeliano tomamos $a \in G/\{1\}$; y si $o(a) \neq p^m$, $H = \langle a \rangle$ es grupo normal y $\{1\} \neq H \neq G$. Si $o(a) = p^m$, tomamos $b = a^p \in G$. Entonces $o(b) = \frac{p^m}{mcd(p^m, p)} = p^{m-1}$ y $H = \langle b \rangle$ es subgrupo normal

Lema 3.11.8 Sea G finito, y $a, b \in G$ elementos de orden 2, tal que $a \notin Cl(b)$; entonces existe c de orden 2 de G tal que $a, b \in G$.

Proposición 3.11.9 (Teorema de Brauer) Sea G finito de orden par con $a, b \in G$ y $a \notin Cl(b)$. Sea m el máximo de los órdenes de $C_G(x)$; entonces $o(G) < m^3$.

Ejemplo 3.12 Sean $H \subset G$ y $X = G/R^H$. Definimos la acción $G \times G/R^H \longrightarrow G/R^H$; $g(xH) = gxH$. Entonces $ker(\theta) = K(H)$.

Proposición 3.12.1 (generaliza 2.2.4). Sea G finito y $p \neq o(G)$ el menor divisor de G, y $H \subset G$, $o(H) = p$. Entonces $H \subset_N G$ y G no es simple.

Proposición 3.12.2 Sea G finito de orden n y $H \subset G$, $[G : H] = m \neq 1$. Si $n \nmid m!$ entonces $K(H) \neq \{1\}$ y G no es simple.

● **Proposición 3.12.3** Sea G finito con $o(G) > 2$. Si G posee un subgrupo H, $[G : H] = n \neq 1$, y $G \not\cong A_n$, entonces G no es simple.

Ejemplo 3.12.3.1 Si $o(G) \geq 5$, y $H \subset G$ tal que $2 \leq [G : H] \leq 4$, entonces G no es simple.

Proposición 3.12.4 Sea G finítamente generado. Para cada n, G tiene una cantidad finita (o nula) de subgrupos de índice n.

● **Corolario 3.12.5 (Generalización Teorema de Poincaré)** Si G es finitamente generado y $H \subset G$ tiene índice finito, existe un subgrupo $K \subset H$ tal que $[G : K]$ es finito.

● **Proposición 3.13 (Teorema de Cauchy-Fröbenius)** Sea p primo y G finito con orden múltiplo de p. Entonces el número de elementos $y \in G$ tales que $y^p = 1$ es múltiplo de p. Existe un elemento de orden p en G.

Corolario 3.14 Sean m, p, p primo tales que $p > m > 1$. Los grupos de orden mp no son simples.

Corolario 3.15 Sean p, q primos. Entonces, un grupo de orden pq no es simple.

Corolario 3.16 Sea G con $o(G) > 1$. Entonces G es simple sii G es finito y $o(G)$ es primo.

Proposición 3.17 Sea G un grupo de orden p^m, p primo y $m \geq 1$. Si $H \neq \{1\} \subset_N G$, entonces $H \cap Z(G) \neq \{1\}$.

Corolario 3.18 Sea p primo, $m \geq 1$ uy $o(G) = p^m$, y H subgrupo normal de orden p, entonces $H \subset Z(G)$.

Ejemplo 3.19 El grupo cuaternión Q y el diedral D_4 son, salvo isomorfismo, los únicos grupos no abelianos de orden 8.

Grupos abelianos finitamente generados. Generadores relacionales

Teorema de la Estructura

Definición 7.1 Si G es un grupo, denotamos $T(G) = \{x \in G \mid o(x) \text{ es finito}\}$. G tiene **torsión** si $T(G) \neq \{1\}$.

1. Si G es abeliano, $T(G) \subset G$ ya que $o(1) = 1$, y si $x, y \in T(G)$, $o(xy^{-1})|mcm(o(x), o(y))$, luego $o(xy) = o(xy^{-1})$ es finito y $xy^{-1} \in T(G)$.
2. El cociente $G/T(G)$ no tiene torsión.
3. Si G no es abeliano, $T(G)$ no tiene por qué ser subgrupo de G.
4. El grupo $G = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ no tiene torsión
5. Si G es finito, $G = T(G)$ ya que $\forall x \in G, x^{O(G)} = 1$.
6. Si G es infinito, puede ser que $G = T(G)$.
7. Si G es abeliano y $K \subset G$, $T(K) = K \cap T(G)$. Si K no tiene torsión, $K \cap T(G) = \{1\}$, y si G no tiene torsión, K tampoco la tiene.
8. Si $K = T(G)$, $T(T(G)) = T(K) = K \cap T(G) = T(G)$

Ejemplo 7.2 / 7.3 Si $G = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, entonces $T(G) = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ y $G/T(G) = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$

Lema 7.5/7.6 Sea $\{x_1, \cdots, x_k\}$ un sistema generador minimal de G. Si existen enteros no nulos $m_1, \cdots, m_k$, tales que $\prod x_i^{m_i} = 1$, entonces G tiene torsión. Sea G abeliano, sin torsión y finitamente generado. Si n es el mínimo número de generadores de G, existen subgrupos de G cíclicos $H_1, \cdots, H_n \simeq \mathbb{Z}$ tales que $G = H_1 \cdots H_n \simeq H_1 \times \cdots \times H_n$

Proposición 7.7 (Teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados) Sea G abeliano finitamente generado. Existen enteros no negativos n, r, y si $n \neq 0$, enteros positivos $m_1, \cdots, m_n$, todos únicos, tales que

1. $G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots_r \times \mathbb{Z}$
2. m_i divide a m_{i-1} para cada $2 \leq i \leq n$.
3. $T(G) \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n$ y $r = \beta(G) =$ número de Betti de G.
4. $G \simeq T(G) \times G/T(G)$.

Ejemplo 7.8 Si G no es finítamente generado, puede ser que $G \not\simeq T(G) \times G/T(G)$. P. ej. en el grupo $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$, si $T(G) = \{a \in G \mid \text{sop}(a) \text{ es finito}\}$, $\text{sop}(a) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n + p_n\mathbb{Z} \neq 0 + p_n\mathbb{Z}\}$ falla en cumplir la isomorfía.

123 Un grupo abeliano G es **libre** si existe algún conjunto I no vacío tal que $G \simeq \mathbb{Z}^{(I)}$. [Wikipedia: si todo elemento de G puede escribirse de forma única como producto de finitos elementos de I y sus inversos.

Generadores y relaciones

Proposición 7.10 Sea G abeliano y finitamente generado, con $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un sistema de generadores. Sea f_S el homomorfismo $f_S : \mathbb{Z} \times \cdots_n \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n \to G : (m_1, \cdots, m_n) \mapsto m_1x_1 + \cdots + m_nx_n$ y sea $R(S) = ker(f_s)$. Vemos que $ker(f_S)$ es el conjunto que hace que $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = 0$. $R(S)$ se denomina el **subgrupo de relaciones de** G. Definimos $R = \{r_1, \cdots, r_l\}$ como el sistema generador de $R(S)$. El par (R, S) se denomina **presentación de** G **mediante generadores y relaciones**.

Proposición 7.13 Sea G un grupo abeliano finitamente generado por $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Entonces se cumple que $S = \{x_1, \cdots, -x_i, \cdots, x_n\}$ también es sistema generador, y si $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son enteros, y $y_1 = x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, entonces $S = \{y_1, x_2, \cdots, x_n\}$ también es un sistema generador.

Proposición 7.14 Sea (S, R) una presentación de G, entonces se pueden obtener los coeficientes de torsión y el coeficiente de Betti mediante un ejemplo (aborrezco el algoritmo en forma de matriz).

Tomamos el sistema de la izquierda. El término más pequeño es $3x$. Procuramos obtener que todos los términos de x sean divisibles entre sí. En este caso lo hemos conseguido en un paso, pero si no se consigue, se repite tantas veces como sea necesario.

$$\begin{cases} 7x + 11y + 13z + 5u = 0 \\ 3x + 11y + 7z + 14u = 0 \\ 5x + 7y + 11z + 7u = 0 \end{cases} \xrightarrow[r_1 : r_1 - 2r_2]{r_3 : r_3 - r_1} \begin{cases} x + y - z - u = 0 \\ 3x + 11y + 7z + 14u = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 3u = 0 \end{cases}$$

Ahora creamos la variable $a = x + y - z - u$, y reescribimos el resto de ecuaciones en función de a.

$$\begin{cases} x + y - z - u = 0 \\ 3(x + y - z - u) + 8y + 10z + 17u = 0 \\ 2(x + y - z - u) + 6z + 5u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ 3a + 8y + 10z + 17u = 0 \\ 2a + 6z + 5u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 10z + 17u + 8y = 0 \\ 6z + 5u = 0 \end{cases}$$

Ahora tenemos un sistema ya reducido a dos relaciones y tres elementos. Aunque $5u$ es el menor elemento, vamos a seguir con $6z$, ya que el resultado será el mismo (demostración). El primer paso será obtener factores múltiplos entre sí para la columna de z.

$$\begin{cases} 10z + 17u + 8y = 0 \\ 6z + 5u = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 : r_1 - r_2} \begin{cases} 4z + 12u + 8y = 0 \\ 6z + 5u = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_2 : r_2 - r_1} \begin{cases} 4z + 12u + 8y = 0 \\ 2z - 7u = 0 \end{cases}$$

Ahora r_2 ya puede eliminarse. Sin embargo, los términos $2z$ y $7u$ no son múltiplos, así que habrá que reducir la expresión.

$$\begin{cases} 4(z - 4u) + 28u + 8y = 0 \\ 2(z - 4u) + u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 28u + 4b + 8y = 0 \\ u + 2b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 28(u + 2b) - 52b + 8y = 0 \\ u + 2b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 28c - 52b + 8y = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ahora sólo nos queda $8y - 52b = 0$, que se simplifica a $8(y - 7b) + 4b = 0 \to 4b + 8d = 0 \to 4(b + 2e) = 0$. En este último caso, por ser la última ecuación, que viene dada por dos variables, tenemos que $\beta(G) = 1$, y obtenemos $4f = 0$, luego $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración.

$$\begin{cases} 10z + 17u + 8y = 0 \\ 6z + 5u = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 5u + 6z = 0 \\ 17u + 10z + 8y = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_2 : r_2 - 3r_1} \begin{cases} 5u + 6z = 0 \\ 2u - 8z + 8y = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 : r_1 - 2r_2} \begin{cases} u + 22z - 16y = 0 \\ 2u - 8z + 8y = 0 \end{cases}$$

Ya tenemos el sistema preparado para reducir la variable.

$$\begin{cases} u + 22z - 16y = 0 \\ 2(u + 22z - 16y) - 52z + 40y = 0 \end{cases} \to 40y - 52x = 0 \to 40(y - x) - 12x = 0 \to 12(-x + 3e) + 4e = 0 \to 4(e + 3f) = 0$$

Vemos que igualmente tenemos $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$