Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a+bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2+1=0$ en $\mathbb{R}$. Así, definimos $i=\sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a+bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z.

Definición 1.2 La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i) = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\, i$$

$$(x_1+y_1 i)\,(x_2+y_2 i) = (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\, i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0+0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1+0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z=x+yi$, llamamos **conjugado** de z, $\bar{z}$ a $x-yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ y $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

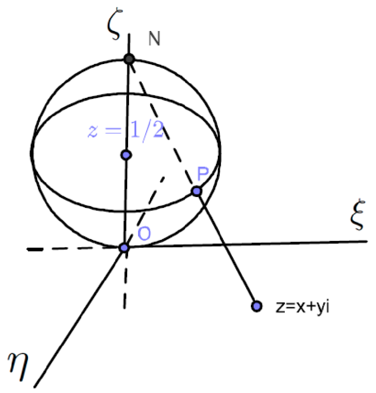
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z=x+yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2+y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z=0$, (3) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ y (4) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

Demostración. (4) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+z_2\overline{z_2} = |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1|\,|z_2| = \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$

Definición 1.5 Dado un $z=a+bi$, aplicando $u=p+iq=z/|z|$, entonces $|u|=1=p^2+q^2$. El ángulo tal que $p=\cos\alpha, q=\sin\alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

El argumento cumple que (1) $\arg\bar{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1z_2 = \arg z_1+\arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico $(\mathbb{C}, \delta_E)$ con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann** es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ en una esfera con centro $(0,0,1/2)$ con ecuación $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemman.

$$\delta(z_1,z_2) = \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{(1+x_1^2+y_1^2)(1+x_2^2+y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$