

# Cálculo de Probabilidades

## El modelo matemático

El **espacio muestral** de un fenómeno aleatorio,  $\Omega$  es el conjunto de resultados posibles. Los subconjuntos de un único elemento son los **sucesos simples**, y los sucesos de más de un elemento son los **sucesos compuestos**. El conjunto de todos los posibles sucesos de  $\Omega$  es el conjunto por partes,  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Una **probabilidad** es una aplicación

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

tal que se verifica

- Si  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  y  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$

$P(A)$  es la **probabilidad del suceso**  $A$  y el par  $(\Omega, P)$  es el **espacio de probabilidad finito**.

De estas dos propiedades pueden construirse otra serie de propiedades

- Si  $B$  ocurre siempre que sucede  $A$ , es decir,  $A \subset B \subset \Omega$  entonces  $P(A) \leq P(B)$ . Esto es cierto pues  $B = A \cup (B \cap A^c)$ , y al ser disjuntos,  $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$ .
- Como  $A \subset B \subset \Omega$  y  $B - A = B \cap A^c$ ,  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ .
- Si tomamos  $B = \Omega$ ,  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .
- $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - 1 = 0$
- Sean  $A, B \subset \Omega$ .  $B$  se puede expresar como  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ , y al ser disjuntos,  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$ .
- Como  $A \cap B = A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ , y al ser disjuntos,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son disjuntos dos a dos, se tiene que  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ .
- Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  de  $(\Omega, P)$  y  $A = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{ik}\}$  con  $\omega_{ik}$  un suceso simple, entonces  $P(A) = P(\{\omega_{i1}\}) + \dots + P(\{\omega_{ik}\})$  y  $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) = 1$ .

## La asignación de probabilidades

El resumen del capítulo culmina con la **Regla de Laplace**: La probabilidad de un suceso  $A$  relativo a un fenómeno aleatorio es

$$P(A) = \frac{\text{número de casos probables}}{\text{número de casos posibles}}$$

suponiendo que **todos los casos posibles son equiprobables**.

Como consejo. Un caso típico donde se falla en pensar es cuando se establece  $\Omega$  con casos en los que el orden no importa (extraer 3 cartas de una baraja, o bolas de una urna, etc.), pues algunas combinaciones ponderan más que otras, y si no se tiene en cuenta, se desvirtúan las probabilidades). En esos casos lo ideal es considerar que los sucesos son diferentes ( $112 \neq 121$ ) aludiendo a una propiedad extra (asignar un color, posición, etc. imaginarios), pues así nos aseguramos de contar todos los casos probables y posibles.