Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{R}$. Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z.

Definición 1.2 La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de z, $\overline{z}$ a $x - yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

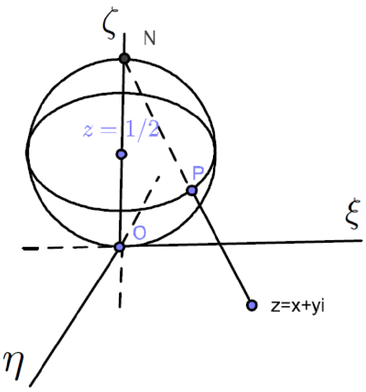
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

Definición 1.5 Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos\alpha, q = \sin\alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.x

El argumento cumple que (1) $\arg\overline{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico $(\mathbb{C}, \delta_E)$ con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, $\mathbb{S}$, es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemman.

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Funciones complejas

Definición 2.0 Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

Definición 2.1.1 $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si f es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

Teorema 2.1.1 Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2$ y $\mathrm{f}_1/\mathrm{f}_2$ son continuas en z_0. Así, los polinomios complejos son continuos.

Definición 2.1.2 Una función $f(z)$ en $A \subset S$ es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

Definición 2.2.1, 2.2.2 Una función $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en todo A se llama función **holomorfa** o **analítica.**

Proposición 2.3.2 Si f es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena) Sean $g : A \to \mathbb{C}$ y $f : B \to \mathbb{C}$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Definición 2.4.1 Una función $f : A \to \mathbb{C}$ es conforme en z_0 si existe exsite $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en t_0, $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$ se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en t_0 tal que $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$. Si α es el ángulo en el punto de cruce z_0 entre γ_1, γ_2, entonces el ángulo de $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ es α.

Teorema 2.4.1 Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa, es conforme. Demostración. Por la regla de la cadena, $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

Definición 2.5.1 Una función de variable compleja puede transformarse a una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemman) Sea f. $f'(z_0)$ existe sii f es diferenciable como función de dos variables y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos f derivable en z_0 complejo, con derivada $\lambda = f'(z_0)$. Si tomamos la aplicación lineal $l_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \eta \to \lambda\eta$. Entonces $\lim_{\eta\to 0} \left|\frac{f(z_0+\eta)-f(z_0)}{\eta} - \lambda\right| = \lim_{\eta\to 0} \frac{|f(z_0+\eta)-f(z_0)-l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$. Escribiendo $f(z_0)$ y $l_c(\eta)$ como componentes reales: (1) $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ su jacobiano es $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ y (2) $l_c(\eta) = \lambda\eta = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$, que como aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Como el jacobiano la derivada de f en los reales, y A es también la diferencial de f en z_0, $D = A$, y se dan las ecuaciones.

Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa) Sea f analítica con derivada continua en A. Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existen U, V abiertos tal que $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ y $f : U \to V$ es biyectiva. Además, f^{-1} es analítica en V y para todo $z \in U$, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Series de potencias. Funciones elementales

Definición 3.0.1 Una **sucesión** de complejos es una aplicación $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se le corresponde $a_n \in \mathbb{C}$.

Definición 3.0.2 Una **serie** es una sucesión de complejos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Definición 3.0.3 Una sucesión es de **Cauchy** o **fundamental** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 \geq n_0$, se tiene que $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$.

Definición 3.0.4 Se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente** a a si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|a_n - a| < \epsilon$, y diremos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Asimismo, A_n es convergente a A si $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Definición 3.0.5 Una serie A_n es absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Teorema 3.1.1 (Criterio de la raíz) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, sea $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $\lambda < 1$ la serie converge y si $\lambda > 1$ diverge.

Teorema 3.1.2 (Criterio del cociente) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sea $\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$, si $\beta < 1$ la serie converge, y si $\beta > 1$ diverge.

Definición 3.2.0 Una **sucesión de variable compleja** es una aplicación de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde una función $f_n : A \to \mathbb{C}$. Representamos la sucesión por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Asimismo, una **serie de funciones de variable compleja** es el resultado de sumar dichas funciones: $F_n(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Definición 3.2.1 Una sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ converge en $z_0 \in A$ cuando converge la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Diremos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** cuando converge para todo $z \in A$.

Definición 3.2.2 La serie $f_0 + \cdots + f_n + \cdots$ converge en un punto $z_0 \in A$, A abierto en $\mathbb{C}$ si la sucesión $\{F_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $F_n = f_0 + \cdots + f_n$ converge. La serie converge puntualmente en A si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en A.

Definición 3.2.3 La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in N}$ converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A, n \geq n_0$.

Definición 3.2.4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A si la sucesión $\{F_n\}_{n\in N}$ converge uniformemente en A.

Teorema 3.2.1 Criterio de la mayorante de Weierstrass) Una condición suficiente para que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ es que exista una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq a_n$ para todo z y $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 3.3.0 Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n. Los a_n se llaman **coeficientes** de la serie. Si $z_0 = 0$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ decimos que la serie está **centrada en el origen**.

Definición 3.3.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ considerando $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$; si llamamos $R = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

- La serie converge absolutamente en el interior del círculo $D_R = \{z \,|\, |z - z_0| < R\}$ y diverge en el exterior $\overline{D_R} = \{z \,|\, |z - z_0| > R\}$
- La convergencia es uniforme en todo circulo de radio $0 \leq r < R$

R se llama **radio de convergencia** de la serie.

Teorema 3.3.2 La función definida por la suma de serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

.

Definición 3.4.1 La función exponencial compleja es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

. Su radio de convergencia es $R = \infty$. Cumple también que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. El exponente puede reescribirse como $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Definición 3.4.2 La función logaritmo se obtiene desde la exponencial. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ tenemos que $\log z = \log|r| + i\theta = \log|r| + i\arg(z)$. Como $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, el logaritmo principal es $\theta \in [0, 2\pi] = \operatorname{Arg} z$.

Definición 3.4.3 Las funciones seno y coseno se definen a través de sus series de potencias con $R = \infty$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

La derivación es como con los números reales, y las identidades de Euler son idénticas:

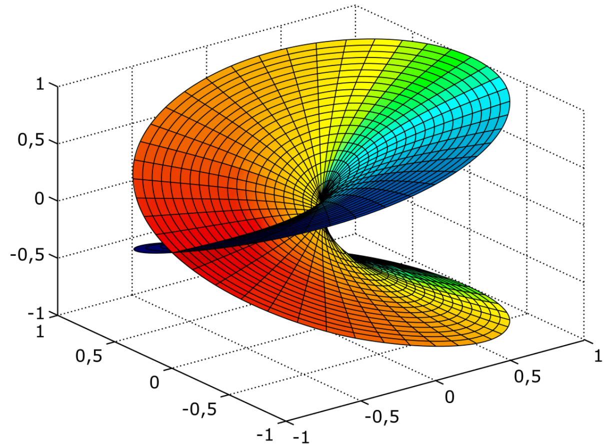
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\ ,\ \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Definición 3.4.4 La función potencial con exponente complejo, $z^\zeta, \zeta \in \mathbb{C}$ es $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$

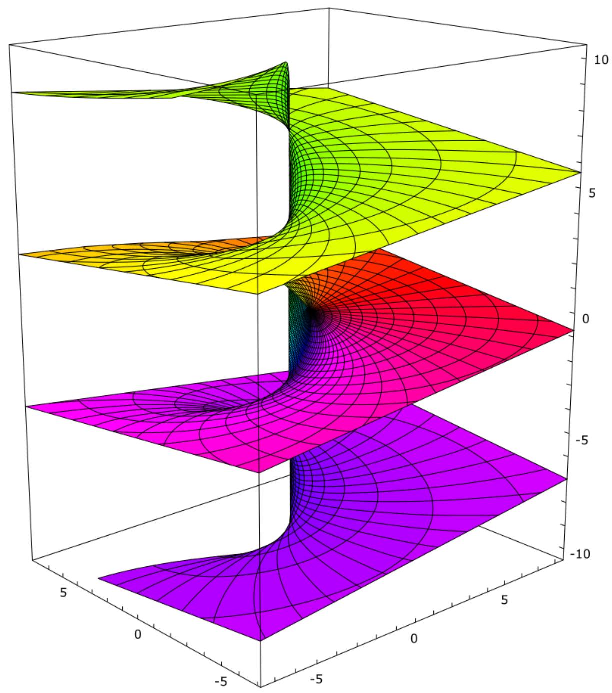
Definición 3.5.1 (Funciones multiformes) Una función f es multiforme cuando $w = f(z)$ puede tomar diferentes valores para el mismo z. Por ejemplo, para $f = \sqrt{z}$, $f(2i) = 1 + i$ y $f(2i) = -1 - i$. Esto se debe a que $z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i\arg(z))} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$.

Observamos que como k puede tomar dos valores, entonces la función tiene dos ramas, es decir, $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $w_2 = -\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Por tanto, para completar un ciclo en w necesitamos completar dos ciclos en z (uno por rama). Esto genera una **superficie de Riemann** como la siguiente figura:



En este caso los ejes X e Y representan el plano complejo de z. El eje Z representa la parte real de $f(z)$, y el color representa la imaginaria. El punto de corte del plano es el caso $\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R} = 0 + i\sqrt{a}$. Sin embargo, el corte es un artefacto de la visualización tridimensional de 4 dimensiones.

Debajo se muestra el ejemplo de $f = \log z$, donde el eje X representa el argumento, y el color representa la parte real.



Vemos que el el plano "cae" de nivel en cada vuelta. Esto es el equivalente a cada rama del logaritmo.