

# Topología

## 1 Espacios topológicos

Se dice que  $p$  es el límite de una sucesión de reales  $a_1, \dots, a_n$  cuando, para todo abierto  $p - \epsilon, p + \epsilon$ , existe un  $m$  tal que para todo  $n \geq m$  se cumple que  $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ .

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto  $p$ ,  $B(p)$ . Sea  $X$  no vacío, para cada  $p \in X$  existe una familia  $B(p)$ . Se dice que  $B(p)$  es una **base de entornos abiertos** de  $p$  si todas las familias  $B(p)$  verifican:

- B1: si  $U \subset B(p)$ , entonces  $p \in U$ .
- B2: si  $U \in B(p)$  y  $V \in B(p)$ , existe  $W \in B(p)$  tal que  $W \subset U \cap V$ .
- B3: si  $U \in B(p)$ , para todo  $q \in U$  existe  $V \in B(q)$  tal que  $V \subset U$ .

Esta generalización de conjuntos  $(p - \epsilon, p + \epsilon)$  nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico**  $(X, d)$  a un conjunto  $X$  con una distancia  $d$  definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro  $p$  y radio  $r$  al conjunto  $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$ . Las familias  $B(p)$  de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en  $(X, d)$ .

Si  $X$  es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos  $B(p)$ , un subconjunto  $A \subset X$  es un **conjunto abierto** cuando es  $\emptyset$  o cuando para cada  $t \in A$  existe un subconjunto  $U \in B(t)$  tal que  $U \subset A$ .

En  $\mathbb{R}$  la topología usual  $(T_u)$  viene dada por  $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$ . En esta topología,  $(\mathbb{R}, T_u)$ , cada intervalo abierto  $(a, b)$  viene dado como  $B(t)$ ,  $t = \frac{a+b}{2}$ . El intervalo  $[a, b)$  no es abierto, pues para  $a$  no existe ningún conjunto  $U \in B(a)$  tal que  $U \subset [a, b)$ .

Dos sistemas de bases de entornos abiertos,  $B(p), B'(p)$  son **equivalentes** cuando determinan la misma topología  $T$  en  $X$ ; es decir, que para cada  $U \in B(p)$  existe un  $U' \in B'(p)$  tal que  $U \subset U'$  y que para cada  $V' \in B'(p)$  exista un  $V \in B(p)$  tal que  $V' \subset V$ .

### 1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto  $X$ . La topología  $T$  determinada en  $X$  cumple:

- P1:  $\emptyset \in T$  y  $X \in T$ .
- P2: Dada una familia de abiertos  $U_\lambda, \lambda \in L$  de  $T$ , la unión de los elementos,  $\bigcup_\lambda U_\lambda$  es un elemento de  $T$ .
- P3: Dada una familia **finita**  $U_i, i = 1, \dots, n$  de elementos de  $T$ , la intersección de los elementos,  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  es un elemento de  $T$ .

Un **espacio topológico**  $(X, T)$  es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de  $X$ ,  $H(p)$  para cada  $p \in X$  [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias  $H$  forman una topología  $T$  en  $X$ . Si para esa topología existe una métrica  $d$ , entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si  $T, T'$  son dos topologías de  $X$ , y  $T \subset T'$ , entonces se dice que  $T$  es menos **fin**a que  $T'$ . La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por  $\{\emptyset, X\}$ , y la menos fina, o **discreta**, está dada por  $\mathcal{P}(X)$ , es decir, el conjunto partición de  $X$ .

En  $(X, T)$  se llama **conjunto cerrado** a un conjunto  $M \subset X$  tal que  $X - M$  es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es  $(X, T)$  verifica:

- C1:  $\emptyset \in T$  y  $X \in T$  son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados  $M_\lambda, \lambda \in L$  de  $T$ , la unión de los elementos,  $\bigcup_\lambda M_\lambda$  es un cerrado.
- C3: Dada una familia  $M_\lambda, \lambda \in L$  de elementos de  $T$ , la intersección de los elementos,  $\bigcap_L U_\lambda$  es un elemento de  $T$ .

Si  $(X, T)$  es un espacio topológico y  $M \subset X$ , la topología  $T_M = \{M \cap U\}$  de las intersecciones de  $M$  con abiertos  $U$  de  $(X, T)$  se llama **topología inducida o subordinada** de  $T$ . Así, el espacio  $M, T_M$  es un subespacio de  $(X, T)$ .

## 2 Base de una topología

Dada una topología  $T$  en  $X$ , la **base de la topología**,  $B$ , es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío  $U \subset T$  es una unión de elementos de  $B$ .  $\forall U \subset T, U = \bigcup_i B_i$

Sea  $X$  un conjunto y  $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $F$  sea base de  $X$  es:

- I:  $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si  $A_\lambda, A_\mu$  son dos elementos de  $F$ , y  $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ , para cualquier punto  $t \in A_\lambda \cap A_\mu$  existe  $A_\nu \in F$  tal que  $t \in A_\nu$

### 2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio  $(X, T)$  verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo  $x \in X$  existe una base de entornos de  $x$  que sea numerable. Un espacio  $(X, T)$  verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

### 2.2 Topología engendrada por una familia de subconjuntos

Cualquier familia  $\{A_\lambda\}$  de  $X$  que cumpla I es una subbase de una topología de  $X$ . Si  $H = \{A_\lambda\}$  cumple I y II, la familia  $B$  formada por las intersecciones (y uniones) finitas de  $H$  es base para alguna topología de  $X$  y se llama **topología engendrada**.

### 3 Entornos en un espacio topológico

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico, y  $p \in X$ .  $A \subset X$  es entorno de  $p$  si existe un abierto  $U$  de la topología  $T$  tal que  $p \in U \subset A$ . No todo entorno ha de ser abierto. Por ejemplo,  $[0, 1)$  es entorno de  $1/2$  (existe  $U = (1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4) \subset [0, 1)$ ), pero no de  $0$  (ningún abierto en  $T$  cumple  $U \subset [0, 1)$ ).

Los sistemas de entornos  $E(p)$  para  $X$  cumplen:

- E1: Si  $A \in E(p)$ , entonces  $p \in A$ .
- E2: Si  $A \in E(p)$ , todo subconjunto  $A' \subset X$  tal que  $A' \supset A$  pertenece a  $E(p)$  [porque  $p \in A'$ ].
- E3: Si  $A, A' \in E(p)$ , entonces  $A \cap A' \in E(p)$ . Esto es aplicable a un número finito de intersecciones.
- E4: Si  $A \in E(p)$ ,  $A$ , existe  $U \in E(p)$  tal que para todo  $q \in U$ ,  $A \in E(q)$ .

Sea  $p \in (X, T)$ , y  $E(p)$  su sistema de entornos. Una subfamilia  $A(p)$  de  $E(p)$  es un sistema fundamental de entornos (abiertos o no) de  $p$  [base de entornos] si todo entorno de  $p$  contiene un elemento de  $A(p)$ .

Los sistemas de bases de entornos  $B(p)$  resultan ser sistemas fundamentales de entornos. P. ej. en  $(\mathbb{R}, T_u)$  cada punto  $x$  tiene una base de entornos numerable, los intervalos abiertos de radio racional:  $\{(x - r, x + r)\}_{0 < r \in \mathbb{Q}}$ .

Un espacio topológico métrico verifica el primer axioma de numerabilidad, pues  $\{(x - r, x + r)\}_{0 < r \in \mathbb{Q}}$  es un sistema de entornos numerable.

### 4 Subconjuntos en un espacio topológico

Todo punto en un espacio topológico puede ser de 3 tipos distintos. Si consideramos el espacio  $(X, T)$  y  $M \subset X$ , entonces

- $t \in X$  es un punto **interior** a  $M$  ( $t \in \text{int}(M)$ ) si existe algún entorno  $V \subset M$ .
- $t \in X$  es un punto **exterior** a  $M$  ( $t \in \text{ext}(M)$ ) si existe un entorno  $V$  de  $t$  que no corta a  $M$  [ $V \cap M = \emptyset$ ].
- $t \in X$  es un punto **frontera** ( $t \in \text{front}(M)$ ) si para todo entorno  $V$ ,  $V \cap M \neq \emptyset$  y  $V \cap (X - M) \neq \emptyset$ .

El interior de  $M$ ,  $\text{int}(M)$  es el mayor abierto contenido en  $M$ .  $\text{ext}(M)$  también es un conjunto abierto, y  $\text{front}(M)$  es siempre cerrado.

De esta clasificación pueden crearse más definiciones.

- $t \in X$  es **adherente** a  $M$  si para todo entorno  $V(t)$  es  $V \cap M \neq \emptyset$ .  $\text{adh}(M) = \overline{M} = \text{int}(M) \cup \text{front}(M)$ .
  - $t \in X$  es un punto de **acumulación** de  $M$  si todo entorno  $V(t)$  corta a  $M$  en algún punto distinto de  $t$ ; es decir,  $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos de acumulación se denomina **derivado** de  $M$ , o  $\text{der}(M)$ .
  - $t \in X$  es **aislado** cuando existe algún entorno  $V(t)$  tal que  $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$ .

En  $(X, T)$ , un conjunto  $M$  es cerrado sii contiene todos sus puntos de acumulación.

En un espacio  $(X, T)$  un subconjunto  $M$  es denso en  $X$  si  $\text{adh}(M) = X$ . Por ejemplo,  $\mathbb{Q}$  es denso en

$\mathbb{R}$ , porque para todo entorno de  $\mathbb{R}$  siempre hay un racional. Un subconjunto es denso sii para todo abierto no vacío  $U \subset X$  se tiene que  $U \cap M \neq \emptyset$ .

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto numerable y denso.

## 5 Sucesiones, límites de sucesiones

Una **sucesión** en un conjunto  $X$  es una aplicación  $s : \mathbb{N} \rightarrow X ; s(i) \mapsto a_i$ . Cuando se tiene una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  y una sucesión  $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ , definimos la sucesión  $s' : \mathbb{N} \rightarrow Y$  a la composición  $s' = f \circ s$  de modo que  $s'(i) = f \circ s(i) = f(a_i) \in Y$ . La sucesión  $s(i) = a_i$  se representa por  $\{a_i\}$ .

Dada una sucesión  $\{a_i\}$  en  $X$ , se define  $A_m = \{a_i \in s \mid i \geq m\}$ . Se tiene que  $A_m \neq \emptyset$  y  $A_k \subset A_m \cap A'_m \iff k = \max(m, m')$ .

Si  $X$  es un conjunto, una **base de filtro**  $\mathcal{B}$  es una familia  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\} \subset X$  que verifica que (1)  $A_\lambda \neq \emptyset$  y (2) dados  $A_\lambda, A_\mu$  existe  $A_\nu \in \mathcal{B}$  tal que  $A_\nu \subset A_\lambda \cap A_\mu$ . En un espacio  $(X, T)$ , una base de entornos  $E(p)$  es una base  $\mathcal{B}$ .

Dadas dos bases de filtro  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ , se dice que  $\mathcal{B}'$  es **más fina** que  $\mathcal{B}$  cuando para todo  $A \in \mathcal{B}$ , existe  $A' \in \mathcal{B}'$  tal que  $A' \subset A$ .

Si  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$ , las imágenes  $\{f(A_\lambda)\}$  forman una base de filtro en  $Y$ , y se representa por  $f(\mathcal{B})$ . Si  $\mathcal{B}' = \{A'_\lambda\}$  es una base de filtro en  $Y$  y  $\forall \lambda A'_\lambda \cap f(X) \neq \emptyset$ , entonces  $\{f^{-1}(A'_\lambda)\}$  forman una base de filtro en  $X$  y se representa por  $f^{-1}(\mathcal{B}')$ .

Si consideramos la sucesión  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , los conjuntos  $\mathbb{N}_m = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq m\}$  forman una base de filtro  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{N}$ , llamada **base de filtro de Fréchet**.

$p$  es el **punto límite** de  $\{a_i\}$  si dado un entorno  $U$  de  $p$ , existe  $m$  tal que  $A_m \subset U$ . Asimismo,  $p$  es un punto límite de  $\mathcal{B}$  en un espacio topológico  $(X, T)$  si dado un entorno  $U$  de  $p$ , existe un  $A_\lambda \in \mathcal{B}$  tal que  $A_\lambda \subset U$ .

Un espacio topológico  $(X, T)$  verifica el **axioma de separación**  $T_2$  cuando, dados  $p, q \in X$  existen dos entornos  $U(p), V(q)$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ . Este espacio se denomina también **espacio de Hausdorff**. Por ejemplo,  $(\mathbb{R}, T_u)$  es de Hausdorff, porque si se toman  $p, q \in \mathbb{R}$ , y  $d = |p - q|$ , entonces  $U = (p - \frac{d}{2}, p + \frac{d}{2})$  y  $V = (q - \frac{d}{2}, q + \frac{d}{2})$  son disjuntos.

Sea  $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$  una base en un espacio de Hausdorff. Si  $\mathcal{B}$  es convergente a  $p$ , éste es el único punto límite de  $\mathcal{B}$ .

Sea  $s = \{a_i\}$ .  $p \in X$  es un **punto de aglomeración** de  $s$  si se verifica que para todo entorno  $U$  de  $p$  y para todo  $A_m$  de la base de filtro de Fréchet de la sucesión, es  $A_m \cap U \neq \emptyset$ .

Si  $s = \{a_i\}$  es una sucesión en  $(X, T)$ , el conjunto de puntos de aglomeración de  $s$  es  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{adh(A_m)\}$ .

Si  $\mathcal{B}$  es una base de filtro en  $(X, T)$ ,  $p$  es de aglomeración cuando para todo entorno  $U$  de  $p$  y para todo  $A_\lambda \in \mathcal{B}$ ,  $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ . El conjunto  $\bigcap_\lambda \{adh(A_\lambda)\}$  es el conjunto de puntos de aglomeración de  $\mathcal{B}$ .

## 6 Aplicaciones continuas. Homeomorfismos

Sea  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ , y  $p \in X$ . Entonces  $f$  es **continua** en  $p$  cuando para todo entorno  $V \in (Y, S)$  existe un entorno  $U \in (X, T)$  tal que  $f(U) \subset V$ . Si consideramos una base de  $\mathcal{B}$ , entonces  $f$  es continua en  $p$  si para toda base de filtro  $\mathcal{B}$  convergente a  $p$ ,  $f(\mathcal{B})$  converge a  $f(p)$ .

Una aplicación  $f$  es continua en  $(X, T)$  si lo es para todo  $p \in X$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $f$  sea continua es que para todo abierto  $V$  de  $(Y, S)$  [o de la base del espacio],  $f^{-1}(V)$  sea abierto en  $(X, T)$ . Análogamente,  $f$  es continua si para todo cerrado  $V$ ,  $f^{-1}(V)$  es cerrado en  $(X, T)$ .

Sea  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  y  $g : (Y, S) \rightarrow (Z, T')$ , si  $f$  y  $g$  son continuas,  $g \circ f$  también lo es.

Una aplicación  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  es un **homeomorfismo** si  $f$  es biyectiva, y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son continuas. Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Se llama propiedad topológica o **invariante** topológico a aquella que si la tiene un espacio topológico, la tienen todos los que son homeomorfos a este. Ejemplos de invariantes son los axiomas de numerabilidad, poseer un denso numerable (separabilidad) o ser espacio  $T_2$ . Por ejemplo, espacios con topologías  $T_u$  y  $D$  no son homeomorfos.

## 7 Topología inducida por una o varias aplicaciones

Dada una aplicación  $f : X \rightarrow (Y, T')$ , se llama **topología inducida** o **topología inicial** por  $f$  en  $X$  a la topología  $T = \{f^{-1}(V) \mid V \in T'\}$ , que es la topología menos fina de  $X$  que hace continua a  $f$ .

En la topología inducida en  $X$  por  $f : X \rightarrow (Y, T')$ , un conjunto  $A \subset X$  es cerrado si  $A = f^{-1}(U)$ , siendo  $U$  un cerrado de  $(Y, T')$ . Lo mismo se aplica si  $A$  es abierto o es un entorno.

**Topología inducida por la composición.** Sean  $X, X^*$  conjuntos,  $(X', T')$  un espacio topológico y las aplicaciones  $h : X^* \rightarrow X$  y  $f : X \rightarrow (X', T')$ . Si  $T$  es la topología inducida por  $f$  en  $X$ , y  $T^*$  es la topología inducida por  $h$  en  $X^*$ , entonces  $T^*$  es la topología inducida por  $f \circ h$  en  $X^*$ .

**Topología inducida por varias aplicaciones.** Sea  $X$  un conjunto, y  $(Y_1, S_1), (Y_2, S_2), \dots, (Y_n, S_n)$  diferentes espacios topológicos. Entonces, la topología de  $X$  más fina que haga continuas las aplicaciones  $f_1, \dots, f_n$  es aquella que tenga por base la familia de subconjuntos de  $X$  de la forma  $f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(U_n)$ , donde  $U_1 \in S_1, \dots, U_n \in S_n$ .

**Propiedad universal de la topología inducida (una o varias aplicaciones).** Sea  $(X, T)$  un espacio topológico con la topología  $T$  inducida por las aplicación  $f_i : (X, T) \rightarrow (Y_i, T_i)$ . Se verifica que para todo espacio  $(M, S)$  y cualquier aplicación  $g : (M, S) \rightarrow (X, T)$ ,  $g$  es continua si  $f_i \circ g : (M, S) \rightarrow (Y_i, T_i)$  lo es para todo  $i$ .

## 8 Topología relativa. Subespacio topológico

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico,  $M$  un subconjunto de  $(X, T)$  y  $j : M \rightarrow (X, T) ; x \mapsto j(x) = x$ . La topología  $T_M$  inducida en  $X$  por  $j$  se llama **topología relativa**, o **topología subordinada** por  $(X, T)$  en

$M$ . El espacio  $(M, T_M)$  es un subespacio topológico de  $(X, T)$ .

Sea  $M$  un subconjunto del espacio  $(X, T)$ . Una parte  $A$  de  $M$  es un abierto en  $(M, T_M)$  sii existe un abierto  $U \in T$  tal que  $A = U \cap M$ . Así,  $T_M = \{M \cap U\}$ .

La topología inducida tiene las siguientes propiedades:

- En el subespacio  $(M, T_M)$  de  $(X, T)$  un subconjunto  $W$  es cerrado sii existe un cerrado  $W'$  de  $(X, T)$  tal que  $W = M \cap W'$ .
- Un conjunto  $A \subset M$  es entorno de  $p \in M$  para el espacio  $(M, T_M)$  sii existe un entorno  $A' \subset X$  tal que  $A = A' \cap M = j^{-1}(A')$ .
- Propiedad universal: Para un subespacio  $(M, T_M)$  de un espacio  $(X, T)$ , la aplicación  $g : (X^*, S) \rightarrow (M, T_M)$  es continua sii la aplicación  $j \circ g : (X^*, S) \rightarrow (X, T)$  es continua.
- Transitividad: Si  $(M, T_M)$  es un subespacio de  $(X, T)$  y  $M'$  es un subconjunto de  $M$ , se verifica que la topología subordinada en  $M'$  por  $(M, T_M)$  coincide con la subordinada por  $(X, T)$ .

Sea  $M, T_M$  subespacio de  $(X, T)$ . Para que todo abierto / cerrado  $A$  de  $(M, T_M)$  sea abierto / cerrado en  $(X, T)$ , es condición necesaria y suficiente que  $M$  sea abierto / cerrado en  $(X, T)$ .

Si  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  es una aplicación continua, la restricción  $f|_M$  de  $(M, T_M)$  a  $(X, T)$  es continua. Sin embargo, que  $f|_M$  sea continua no implica que  $f$  sea continua.

Se llama **propiedad hereditaria** una propiedad topológica que si un espacio la tiene, la tienen todos sus subespacios. Propiedades hereditarias son la separación  $T_2$ , o los axiomas de numerabilidad.

También es hereditario el ser un espacio metrizable. Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, con  $T$  la topología de  $X$  correspondiente a la distancia  $d$ , la topología inducida por  $T$  en  $M$  coincide con la topología definida en  $M$  por  $d_M$ .

Un espacio es  $T_1$  separable cuando cada conjunto unitario  $\{x\}$  es cerrado.

## 9 Topología producto

Dados dos espacios  $(X_1, T_1)$  y  $(X_2, T_2)$ , una base para la topología producto  $T_1 \times T_2$  es la familia de abiertos  $B = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in T_1, U_2 \in T_2\}$ . Estos abiertos  $U_1 \times U_2$  se llaman **abiertos elementales** de la Topología producto. Así, un abierto  $A \in T_1 \times T_2$  es abierto sii es unión de abiertos de  $B$ :  $A = \cup_{\lambda \in L} \{U_1^\lambda \times U_2^\lambda\}$ .

Las propiedades de la Topología producto son las siguientes:

- Las propiedades  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  y  $p_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  son aplicaciones continuas, y  $X_1 \times X_2$  es la Topología menos fina de  $X_1 \times X_2$  para las que son continuas.
- Propiedad universal: una aplicación  $f : (Y, S) \rightarrow (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$  es continua sii  $p_1 \circ f$  y  $p_2 \circ f$  son continuas.

Las aplicaciones  $f_1 = p_1 \circ f$  y  $f_2 = p_2 \circ f$  se llaman **componentes de  $f$** . Un punto  $y \in (Y, S)$  se representa como  $(x_1, x_2) = f(y)$  o como  $x_1 = f_1(y), x_2 = f_2(y)$ .

Una aplicación  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  es abierta si para cada abierto  $U \in T$ ,  $f(U)$  es abierto de  $S$ . Entonces,

en el espacio producto,  $p_1, p_2$  son aplicaciones abiertas.

Para cada punto  $a \in X_1$ , el subespacio  $p_1^{-1}(a) = \{a\} \times X_2$  es homeomorfo a  $(X_2, T_2)$  y viceversa.

Si una aplicación  $f : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \rightarrow (Y, S)$  es continua, sus restricciones a subespacios  $f_a : \{a\} \times X_2 \rightarrow (Y, S)$  y  $f_b : X_1 \times \{b\} \rightarrow (Y, S)$  también son continuas. También son continuas las aplicaciones por composición  $g_a : (X_2, T_2) \rightarrow (Y, S)$ ,  $g_b : (X_1 \rightarrow T_1) \rightarrow (Y, S)$ . Sin embargo, aunque las aplicaciones por cada una de las variables ( $f_a, f_b$ ) garanticen la continuidad, no se deduce que sea continua la aplicación en  $y = f(x_1, x_2)$ .

Sea  $p(x_1, x_2)$  un punto del espacio producto  $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ . Si  $\{V_j\}$  es una base de entornos de  $x_1$  en  $(X_1, T_1)$  y  $\{W_k\}$  es una base de entornos de  $x_2$  en  $(X_2, T_2)$ , entonces  $\{V_j \times W_k\}$  constituyen una base de entornos en  $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ .

Una propiedad topológica es **finito-multiplicativa** si verifica que la poseen los espacios  $(X_1, T_1)$ ,  $(X_2, T_2)$ ,  $(X_n, T_n)$  entonces la posee su producto. Si la cantidad de espacios es infinito, entonces es multiplicativa. Los axiomas de numerabilidad, la separación  $T_2$  y la metrizabilidad son propiedades finito-multiplicativas.

Para dos puntos  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ , las distancias  $d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$ ,  $d'(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ ,  $d^*(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$  cumplen que  $d' \leq d \leq d^* \leq 2d'$ , luego todas las métricas resultan equivalentes, y con ello sus bases de entornos. Por tanto, las 3 métricas determinan la misma topología métrica en  $X_1 \times X_2$ .

## 10 Topología final para una o varias aplicaciones

Sea una aplicación  $f : (X, T) \rightarrow Y$ . La familia de conjuntos de  $Y$  tales que sus imágenes inversas son abiertos de  $T$  constituyen una topología de  $Y$ . Esta topología, la **topología final**,  $S = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in T\}$  es la topología más fina de  $Y$  para la que  $f$  es continua. Si  $S$  contiene algún conjunto  $U$  tal que  $f^{-1}(U) \notin T$ , entonces  $f$  no es continua.  $\times$

En la topología final de  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  un conjunto  $M$  es cerrado si  $f^{-1}(M)$  es cerrado en  $(X, T)$ . Si  $f$  no es sobreyectiva,  $f(X)$  es abierto y cerrado en la topología final de  $f$ , pues  $f^{-1}(f(X)) = X$ , que es cerrado y abierto en  $(X, T)$  por definición. Si  $q \in f(X)$  es un punto de  $Y$ , tal que  $f(p) = q$ ,  $V(q) \in S$  es un entorno de  $q$  en  $(Y, S)$  si  $f^{-1}(V)$  es entorno de  $p$  en  $(X, T)$ .

La Topología final cumple la composición. Sea  $(X, T)$  y los conjuntos  $Y, Y^*$ ; y las aplicaciones  $f : (X, T) \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Y^*$ . Si  $S$  es la topología final para  $f$ ,  $S^*$  es la topología para  $g$  si  $S^*$  es la topología final para  $g \circ f$ .

Dada una familia de aplicaciones  $f_\lambda : (X_\lambda, T_\lambda) \rightarrow Y$  con espacios topológicos iguales o distintos, la topología final de  $Y$  es la topología más fina que hace continua toda  $f_\lambda$ . Un conjunto  $A \subset Y$  es abierto en esta topología si para todo  $\lambda$ ,  $f_\lambda^{-1}(A) \in T_\lambda$ . Hay que considerar que la topología menos fina de  $Y$  es siempre la trivial:  $\{\emptyset, Y\}$ .

La topología final también cumple la propiedad universal. Para las aplicaciones  $f_\lambda : (X_\lambda, T_\lambda) \rightarrow Y$  continuas, para el espacio topológico  $(Y^*, T^*)$  y la aplicación  $g : (Y, S) \rightarrow (Y^*, T^*)$  se cumple que  $g$  es continua si cada una de las aplicaciones  $g \circ f_\lambda$  lo es.

## 11 Topología cociente

Conceptos a recordar:

- Si  $X$  es un conjunto y  $E$  es una relación de equivalencia,  $\bar{x}$ , también llamado  $E(x)$  es la clase de  $x$  por  $E$ .
- $A \subset X$  es un **conjunto saturado** si  $\forall x \in A, E(x) \subset A \iff A = \cup_{x \in A} \{E(x)\}$ .
- El saturado de  $A$  es el mínimo conjunto saturado que contiene a  $A$ :  $E(A) = \cup_{x \in A} \{E(x)\}$ . Si  $p : X \rightarrow X/E$  es la aplicación canónica,  $A$  es saturado sii  $E(A) = p^{-1}(p(A)) = A$ .
- Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es **compatible** con la relación  $E$  de  $X$  cuando  $xEy \rightarrow f(x) = f(y)$  o cuando  $p(x) = p(y) \rightarrow f(x) = f(y)$ .
- Si  $E, E'$  son dos relaciones de equivalencia,  $E$  es más fina que  $E'$  cuando si  $xEy$ , entonces  $xE'y$ . De otro modo, si  $E$  es más fina, si la aplicación canónica  $p' : X \rightarrow X/E$  es compatible con  $E$ ,  $xEy \rightarrow p'(x) = p'(y)$ .

Si  $E$  es la relación de equivalencia en  $(X, T)$  y  $X/E$  es el conjunto cociente se dota a este conjunto la **topología cociente**  $T_E$  basado en la proyección canónica  $p : (X, T) \rightarrow (X/E, T_E)$ .  $T_E$  es la topología final de esta aplicación.  $A$  es abierto en  $(X, T_E)$  si  $p^{-1}(A)$  es abierto en  $(X, T)$ .

Si  $f : (X, T) \rightarrow Y$  es una aplicación sobreyectiva,  $f$  determina la relación de equivalencia  $E(f)$  en  $X$  tal que  $x E(f) y \iff f(x) = f(y)$ . Entonces, la aplicación  $f^* : (X/E(f), T_f) \rightarrow (Y, S)$ , con  $T_f$  la topología cociente para  $E(f)$  y  $S$  la topología final para  $f$ , es un homeomorfismo.

La topología cociente presenta las siguientes propiedades:

- Un conjunto  $M$  de  $X/E$  es cerrado en  $T_E$  sii  $p^{-1}(M)$  es cerrado en  $(X, T)$ .
- Propiedad universal: Para todo espacio  $(Y, S)$  y para cualquier aplicación  $g : (X/E, T_E) \rightarrow (Y, S)$   $g$  es continua sii  $g \circ p : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  lo es.
- La aplicación canónica  $p$  es abierta sii el saturado de un abierto es abierto.
- La aplicación canónica  $p$  es cerrada sii el saturado de un cerrado es cerrado.

Cuando se tiene la composición  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ , existe una **descomposición canónica** de la aplicación así,

$$(X, T) \xrightarrow{p} (X/E(f), T_E) \xrightarrow{f^*} f(X) \xrightarrow{j} (Y, S)$$

Donde  $p$  es sobreyectiva,  $f^*$  es biyectiva y  $j$  es inyectiva; y  $f = j \circ f^* \circ p$ . En estas condiciones,  $f^*$  es homeomorfismo si la imagen por  $f$  de todo abierto o cerrado en  $X$  que sea saturado por  $E(f)$  es abierto o cerrado en  $f(X)$ .

**Transitividad de espacios cocientes:** Si en un espacio topológico  $X$  existen dos relaciones  $E, E'$ ,  $E$  más fina que  $E'$ , la relación de equivalencia  $E'/E$  determina un espacio cociente en  $X/E$  homeomorfo a  $X/E'$  con el homeomorfismo  $\phi : (X/E)/(E'/E) \rightarrow X/E'$ .

## 12 Espacios compactos

Dado un conjunto  $X$ , una familia  $\{A_\lambda\}_\lambda \in L$  de subconjuntos es un **recubrimiento** de  $X$  cuando  $\cup_{\lambda \in L} \{A_\lambda\} = X$ . Si el número de  $\{A_\lambda\}$  es finito, entonces es un recubrimiento finito. Un **subrecubrim-**



**iento** de  $A$  es toda subfamilia  $A^*$  de  $A$  que sea, a su vez, recubrimiento de  $X$ .

Si  $(X, T)$  es un espacio topológico,  $A = \{A_\lambda\}$  es un recubrimiento de  $X$ , y cada  $A_\lambda$  es un abierto en  $T$ , el recubrimiento es un **recubrimiento abierto** en  $(X, T)$ . Si además tomamos la topología inducida  $M, T_M$ , y  $M \subset \cup\{A_\lambda\}$ , entonces las intersecciones  $\{M \cap A_\lambda\}$  son abiertos en  $(M, T_M)$ .

Un espacio topológico  $(X, T)$  es **compacto** cuando todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito. Equivalentemente, un espacio  $(X, T)$  es compacto sii toda familia de cerrados  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$  de  $(X, T)$  de intersección vacía tiene una subfamilia finita de intersección vacía.

Un espacio  $(X, T)$  es compacto sii se verifica que toda base de filtro  $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$  tiene algún punto de aglomeración. Es decir,  $\cap_{\lambda \in L} B_\lambda \neq \emptyset$ . Por tanto, toda sucesión en un compacto tiene un punto de aglomeración. Además, en un compacto, si una sucesión tiene un solo punto de aglomeración, la sucesión converge a ese punto.

Dada la topología  $(\mathbb{R}, T_u)$  todo subespacio que no sea cerrado no será compacto en la topología subordinada.

Si  $(X, T)$  es compacto, todo subconjunto infinito de  $X$  tiene al menos un punto de acumulación en  $X$ . De aquí se obtiene que todo espacio discreto ha de ser finito.

Si  $(X, T)$  es compacto y  $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$  es una aplicación continua, entonces  $f(X)$  con la topología relativa es compacto. En particular, si  $f$  es sobreyectiva,  $(Y, S)$  es compacto.

Si  $\{(X_\lambda, T_\lambda)\}$  es una familia arbitraria de compactos, el espacio producto  $(\prod_{\lambda \in L} X_\lambda, T)$  es compacto.

La compacidad no es hereditaria: si tomamos el espacio  $(\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots, 0\}, T_u)$ , éste es compacto porque 0 es un punto de aglomeración. Sin embargo, el subespacio  $\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$  no es compacto, pues es discreto e infinito.