

Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en \mathbb{R} . Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z .

Definición 1.2 La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$(x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de z , z a $x - yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

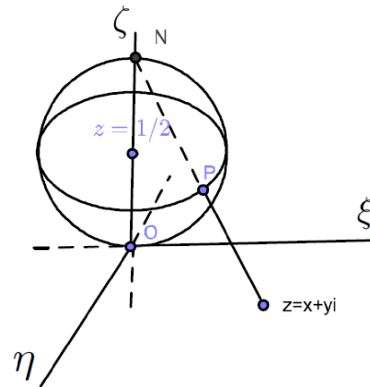
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

Definición 1.5 Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos \alpha$, $q = \sin \alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.

El argumento cumple que (1) $\arg \bar{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico (\mathbb{C}, δ_E) con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, \mathbb{S} , es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemann.

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Funciones complejas

Definición 2.0 Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

Definición 2.1.1 $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si f es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

Teorema 2.1.1 Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $f_1 + f_2$ y f_1/f_2 son continuas en z_0 . Así, los polinomios complejos son continuos.

Definición 2.1.2 Una función $f(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$ es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

Definición 2.2.1, 2.2.2 Una función $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en todo A se llama función **holomorfa** o **analítica**.

Proposición 2.3.2 Si f es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena) Sean $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Definición 2.4.1 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme en z_0 si existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en t_0 , $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$ se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en t_0 tal que $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$. Si α es el ángulo en el punto de cruce z_0 entre γ_1, γ_2 , entonces el ángulo de $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ es α .

Teorema 2.4.1 Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa, es conforme. Demostración. Por la regla de la cadena, $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

Definición 2.5.1 Una función de variable compleja puede transformarse a una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea f . $f'(z_0)$ existe sii f es diferenciable como función de dos variables y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos f derivable en z_0 complejo, con derivada $\lambda = f'(z_0)$. Si tomamos la aplicación lineal $l_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \eta \rightarrow \lambda\eta$. Entonces $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - \lambda \right| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$. Escribiendo $f(z_0)$ y $l_c(\eta)$ como componentes reales: (1) $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ su jacobiano es $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ y (2) $l_c(\eta) = \lambda\eta = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$, que como aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Como el jacobiano la derivada de f en los reales, y A es también la diferencial de f en z_0 , $D = A$, y se dan las ecuaciones.

Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa)

Sea f analítica con derivada continua en A . Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existen U, V abiertos tal que $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es biyectiva. Además, f^{-1} es analítica en V y para todo $z \in U$, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Series de potencias. Funciones elementales

Definición 3.0.1 Una **sucesión** de complejos es una aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se le corresponde $a_n \in \mathbb{C}$.

Definición 3.0.2 Una **serie** es una sucesión de complejos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

Definición 3.0.3 Una sucesión es de **Cauchy** o **fundamental** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 \geq n_0$, se tiene que $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$.

Definición 3.0.4 Se dice que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **convergente** a a si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|a_n - a| < \epsilon$, y diremos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Asimismo, A_n es convergente a A si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Definición 3.0.5 Una serie A_n es absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Teorema 3.1.1 (Criterio de la raíz) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, sea $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $\lambda < 1$ la serie converge y si $\lambda > 1$ diverge.

Teorema 3.1.2 (Criterio del cociente) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sea $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$, si $\beta < 1$ la serie converge, y si $\beta > 1$ diverge.

Definición 3.2.0 Una **sucesión de variable compleja** es una aplicación de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$. Representamos la sucesión por $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Asimismo, una **serie de funciones de variable compleja** es el resultado de sumar dichas funciones: $F_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i$.

Definición 3.2.1 Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $z_0 \in A$ cuando converge la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diremos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge puntualmente** cuando converge para todo $z \in A$.

Definición 3.2.2 La serie $f_0 + \dots + f_n + \dots$ converge en un punto $z_0 \in A$, A abierto en \mathbb{C} si la sucesión $\{F_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $F_n = f_0 + \dots + f_n$ converge. La serie converge puntualmente en A si $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en A .

Definición 3.2.3 La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$, $n \geq n_0$.

Definición 3.2.4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A si la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en A .

Teorema 3.2.1 Criterio de la mayorante de Weierstrass) Una condición suficiente para que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ es que exista una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq a_n$ para todo z y $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 3.3.0 Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n . Los a_n se llaman **coeficientes** de la serie. Si $z_0 = 0$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ decimos que la serie está **centrada en el origen**.

Definición 3.3.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ considerando $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$; si llamamos $R = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

- La serie converge absolutamente en el interior del círculo $D_R = \{z \mid |z - z_0| < R\}$ y diverge en el exterior $\overline{D}_R = \{z \mid |z - z_0| > R\}$
- La convergencia es uniforme en todo círculo de radio $0 \leq r < R$

R se llama **radio de convergencia** de la serie.

Teorema 3.3.2 La función definida por la suma de serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo:

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

Definición 3.4.1 La función exponencial compleja es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

. Su radio de convergencia es $R = \infty$. Cumple

también que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. El exponente puede reescribirse como $e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Definición 3.4.2 La función logaritmo se obtiene desde la exponencial. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ tenemos que $\log z = \log |r| + i\theta = \log |r| + i \arg(z)$. Como $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, el logaritmo principal es $\theta \in [0, 2\pi] = \text{Arg } z$.

Definición 3.4.3 Las funciones seno y coseno se definen a través de sus series de potencias con $R = \infty$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

La derivación es como con los números reales, y las identidades de Euler son idénticas:

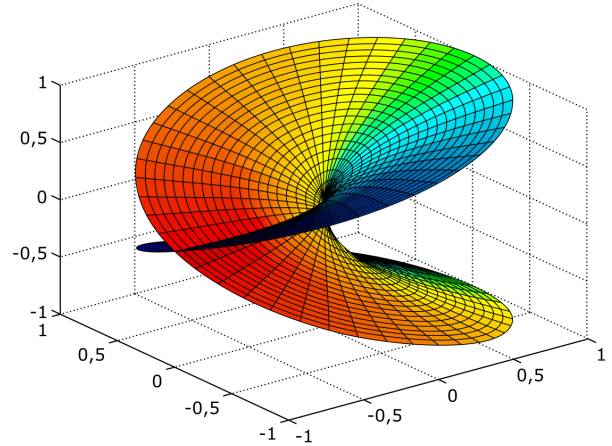
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Definición 3.4.4 La función potencial con exponente complejo, $z^\zeta, \zeta \in \mathbb{C}$ es $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$

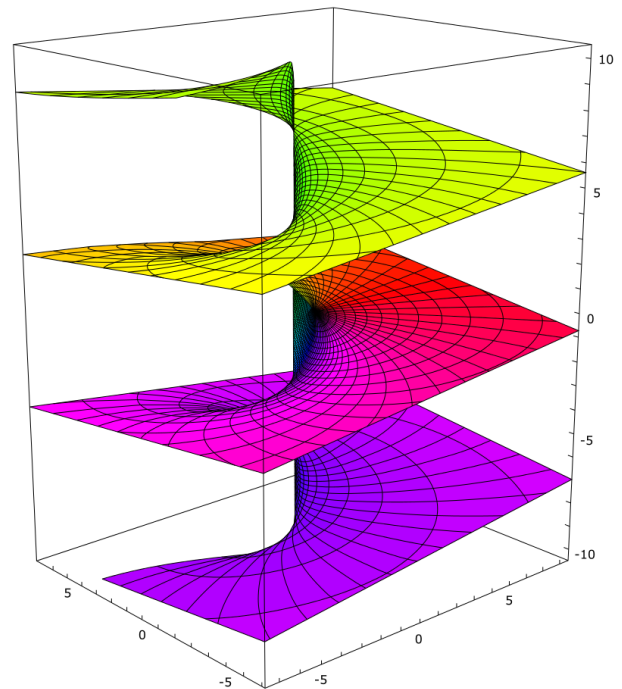
Definición 3.5.1 (Funciones multiformes) Una función f es multiforme cuando $w = f(z)$ puede tomar diferentes valores para el mismo z . Por ejemplo, para $f = \sqrt{z}$, $f(2i) = 1 + i$ y $f(2i) = -1 - i$. Esto se debe a que $z^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\log |z| + i \arg(z))} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$.

Observamos que como k puede tomar dos valores, entonces la función tiene dos ramas, es decir, $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, w_2 = -\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Por tanto, para completar un ciclo en w necesitamos completar dos ciclos en z (uno por rama). Esto genera una **superficie de Riemann** como la siguiente figura:



En este caso los ejes X e Y representan el plano complejo de z . El eje Z representa la parte real de $f(z)$, y el color representa la imaginaria. El punto de corte del plano es el caso $\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R} = 0 + i\sqrt{a}$. Sin embargo, el corte es un artefacto de la visualización tridimensional de 4 dimensiones.

Debajo se muestra el ejemplo de $f = \log z$, donde el eje X representa el argumento, y el color representa la parte real.



Vemos que el el plano "cae" de nivel en cada vuelta. Esto es el equivalente a cada rama del logaritmo.

Integración en el campo complejo

Definición 4.0.1 Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **rectificable** cuando presenta una longitud finita.

Definición 4.0.2 Una **partición** de un intervalo es el conjunto $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. La **norma** de la partición es $|\Delta| = \max\{|t_{k-1} - t_k|, k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Una partición Δ' es **más fina** que otra partición Δ cuando $\Delta \subset \Delta'$.

Definición 4.0.3 Dados f, γ, Δ , definimos la suma de Riemman-Stieljes como $S(\Delta, f, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)[\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)]$, con $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$. f es **integrable** Riemman-Stieljes (RS) si existe un complejo I tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición Δ_ϵ tal que para toda $\Delta_\epsilon \subset \Delta$, $|S(\Delta, f, \gamma) - I| < \epsilon$. I se denota por $\int_a^b f d\gamma$.

Definición 4.0.4 Si $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$, entonces $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$.

Proposición 4.1.1 Sean f, γ . Entonces existe la integral RS y $\left| \int_a^b f d\gamma \right| \leq ML(\gamma)$, donde $M = \max\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$ y $L(\gamma)$ es la longitud de γ . Demostración. $|S(\Delta, f, \gamma)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(s_k)| |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq (\max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}) \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq ML(\gamma)$

Proposición 4.1.2 Si f es continua en $[a, b]$ y γ define un camino de clase C^1 entonces la integral RS viene dada por $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f \gamma' dt$ Demostración. Como $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$, vamos a demostrar que $\int_a^b f d\phi = \int_a^b f \phi' dt$. Por la definición de I existe para todo $\epsilon > 0$ una partición tal que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) [\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)] - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$ Por el teorema del valor intermedio: $\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k)$, luego $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$. Ahora bien, la expresión de sumatorio puede aplicarse a la integral, de modo que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f \phi' dt \right| < \epsilon$. Por último, si denominamos S al sumatorio anterior, tenemos que $\left| \int_a^b f \phi' dt - \int_a^b f d\phi \right| \leq \left| \int_a^b f \phi' dt - S \right| + \left| S - \int_a^b f d\phi \right| \leq 2\epsilon$. Repetimos para $\int_a^b f d\psi$ y finalmente $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi = \int_a^b f \phi' dt + i \int_a^b f \psi' dt = \int_a^b f \gamma' dt$

Definición 4.2.0 Sean f, γ . Se define la **integral de f a lo largo de γ** , $\int_\gamma f dz$ como $\int_a^b f \circ \gamma d\gamma$ y, si γ es C^1 , entonces $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$. La integral cumple:

- Linealidad: $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) dz = c_1 \int_\gamma f_1 dz + c_2 \int_\gamma f_2 dz$
- Si $-\gamma$ es el camino opuesto a γ : $\int_{-\gamma} f dz = - \int_\gamma f dz$
- Yuxtaposición: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- Se tiene la siguiente estimación: $\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \int_a^b |f(t)| |\gamma'(t)| dt \leq ML(\gamma)$.

Proposición 4.2.1 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, y γ . Si f_n son continuas y $f_n \rightarrow f$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz$. Demostración. Si $|dz|$ es la longitud de la curva, L , entonces $\left| \int_\gamma f dz - \int_\gamma f_n dz \right| \leq \int_\gamma |f - f_n| |dz| < \epsilon L$.

También, si $\sum f_n$ converge uniformemente a F , entonces $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma F dz$. Demostración. $\int_\gamma (\sum_{n=1}^\infty f_n) dz = \int_\gamma (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma F_n dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma (\sum_{k=1}^n f_k) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_\gamma f_k dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz$

Proposición 4.3.1 Sean $f, \gamma, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 . Si F es una primitiva de f , se tiene que $\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Demostración.

Si $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$, como la derivada de $F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$; por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Proposición 4.3.2 Sea f y γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Entonces $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

Teorema 4.4.1 (Preliminar del T de Cauchy) Sea f analítica y $\gamma \subset A$ es una curva cerrada y su interior. Entonces $\int_\gamma f dz = 0$. Demostración. La fórmula de Green indica que $\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$\iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$ Con A el interior de γ .
 Si describimos $f = u(x, y) + iv(x, y)$ operando tenemos que $\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (u dx - v dy) + i \int_\gamma (u dy + v dx)$. Aplicando el teorema de Green tenemos que $\int_\gamma f dz = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$ y, por las ecs. de Cauchy-Riemann, $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Ídem para la segunda integral.

Teorema 4.4.2 (T de Cauchy-Goursat para el triángulo) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y f analítica en $A \setminus \{p\}$. Si T es el triángulo cerrado contenido en A , se tiene $\int_{\partial T} f dz = 0$.

Teorema 4.4.3 (T de Cauchy para un conjunto convexo). Sea f analítica en $A \setminus \{p\}$ con $p \in A$ y continua en A . Entonces $\int_{\partial T} f dz = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A .

Consecuencias del Teorema de Cauchy

Definición 5.0 Llamamos **índice** de γ respecto de α , representado por $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ a la integral

$$\text{Ind}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

Intuitivamente $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ representa el número de vueltas de γ respecto de α . **Demostración.** La función $\frac{1}{z-\alpha}$ admite la primitiva $\log z - \alpha$ en todo entorno excepto para α . Subdividimos γ en subarcs suficientemente pequeños $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tal que $\gamma_i = z_i z_{i+1}$; $z_i, z_{i+1} \in \gamma$. Así, la integral se puede calcular como $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln(z_{j+1} - \alpha) - \ln(z_j - \alpha)] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln |z_{j+1} - \alpha| - \ln |z_j - \alpha|] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$. La primera suma es 0 por ser teléscopica y $z_1 = z_n$, luego $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$. Cada elemento de la suma es una variación de la circunferencia, y en conjunto representa el número de vueltas recorrido.

Teorema 5.1.1 Si γ es diferenciable cerrado, γ^* su interior, entonces $\text{Ind}_\gamma(\alpha)$ es entero si $\alpha \in \gamma^*$, o es cero si $\alpha \in \mathbb{C}/\gamma^*$.

Teorema 5.2.1 (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, y sea γ un camino cerrado en A . Entonces para todo $z \in A$ tal que $z \notin \gamma^*$ se tiene

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Demostración. Definimos $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ mediante:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{para } \zeta \in A, \quad \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{para } \zeta = z \end{cases}$$

donde $z \in A \setminus \gamma^*$ es un punto fijo. La función g es analítica para $\zeta \neq z$ y $g'(\zeta) = \frac{(\zeta - z)f'(\zeta) - f(\zeta) + f(z)}{(\zeta - z)^2}$ y es continua para $\zeta = z$ pues $\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = f'(z)$. Por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat y $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0$ y como $z \notin \gamma^*$, se puede escribir $0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \iff \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ es decir $f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Teorema 5.3.1 (Teorema de Taylor) Sea f holomorfa, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y $\alpha \in A$. Sea $d > 0$ la

distancia de α a la frontera de A ; entonces para todo $z \in B(\alpha, d)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

El radio de convergencia es mayor o igual que d , y en $B(\alpha, d)$ su suma es $f(z)$. Además las derivadas sucesivas $f^{(n)}(\alpha)$ de f en α vienen dadas por

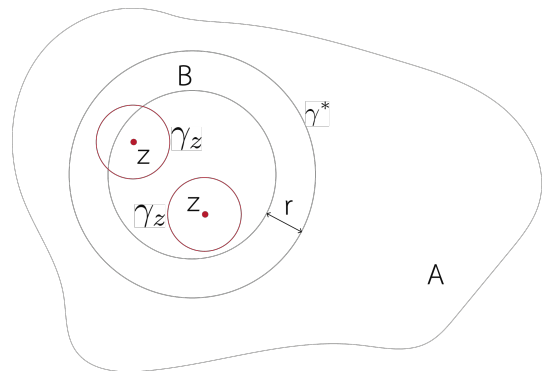
$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

donde γ es una circunferencia de centro α y radio r , con $0 < r < d$.

Teorema 5.4.1 (Desigualdades de Cauchy) Si f es analítica y $B(\alpha, d) \subset A$ entonces $|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$, con $M(r) = \max_{|z|=r < d} |f(z)|$

Teorema 5.4.2 (Teorema de Liouville) Si f es entera (analítica en todo \mathbb{C}) y acotada, entonces es constante. **Demostración.** Por ser f analítica existe un desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia infinito. Sea K una cota de f , es decir $|f(z)| < K$, para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces de las desigualdades de Cauchy se obtiene $|a_n| < \frac{K}{r^n}$, $n = 1, 2, \dots$ para todo r . Como $r \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow 0$ y $f(z) = a_0$.

Teorema 5.5.1 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en A que converge uniformemente en todo compacto de A . Entonces la sucesión $\{f'_n\}$ converge uniformemente en todo compacto de A . Además, si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z)$ para todo $z \in A$.



Demostración. Bastará demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f'_n\}$ a f' en todo círculo $B \subset A$

A , pues todo compacto $K \subset A$ puede ser recubierto por una cantidad finita de círculos. Sea $\gamma^* \subset A$ una circunferencia concéntrica con B con $r = r_\gamma - r_B$. Sea $z \in B$ y γ_z la circunferencia de centro z y radio r . Entonces $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$, $f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$ de donde $|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} \frac{e^{\epsilon} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{M_n}{r}$ donde M_n es $\max(|f(\zeta) - f_n(\zeta)|)$ en γ_z . Puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre todo círculo cerrado, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ de tal manera que $\frac{M_n}{r} < \epsilon$ para $n \geq n_0$, y $z \in B$.

Definición 5.6 f en $A \subset \mathbb{C}$ tiene la **propiedad de la media** si para todo cerrado $\overline{D}(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| \leq r\} \subset A$, el valor $f(\alpha)$ en el centro es la media de f en la circunferencia:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt$$

Proposición 5.6.1 Toda función analítica f en A tiene la propiedad de la media.

Teorema 5.6.1 (Principio del módulo máximo)

Sea f analítica en A , abierto conexo. Entonces para todo $\alpha \in A$ en cualquier entorno de α existe $\beta \in A$ para el cual $|f(\alpha)| < |f(\beta)|$.

Lema 5.7.1 (Lema de Schwarz) Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ analítica. $|f(z)| < 1$ para todo $z \in B(0, 1)$ y $f(0) = 0$. Entonces se tiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B(0, 1)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si para un $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, se tiene $|f(z_0)| = |z_0|$, o si se verifica $f'(0) = 1$, entonces $f(z)$ es de la forma $f(z) = cz$, con $|c| = 1$.

Teorema general de Cauchy

Definición 6.1.1 Dos caminos γ_0, γ_1 con $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset A$ son A -homótopos si existe una aplicación h :

$$h : I \times I \longrightarrow A$$

$$(s, t) \longmapsto h((s, t)) = \gamma_s(t)$$

Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos, se exige que $h(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $h(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finalmente, si los caminos son cerrados, $h(s, 0) = h(s, 1)$.

γ_0, γ_1 son A -homótopos cuando γ_0 se puede deformar a γ_1 continuamente a través de una familia de caminos γ_s . Un camino γ es homotópico a $z_0 \in A$ cuando γ es homotópico al camino constante γ_{z_0} .

Teorema 6.1.1 (Teorema de Cauchy, versión homotópica) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos caminos tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

También si γ_0, γ_1 son cerrados y homotópicos obtenemos la misma conclusión.

Definición 6.2.1 Dos caminos cerrados γ_0, γ_1 contenidos en el mismo abierto A son A -homólogos cuando

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

para todo $\alpha \notin A$

Teorema 6.2.1 Si γ_0, γ_1 son cerrados en A , y γ_0, γ_1 son A -homótopos, son también A -homólogos. Si γ_0 es homotopo a un punto en A , entonces es A -homólogo a cero.

Teorema 6.2.2 (Teorema de Cauchy, versión homológica) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos ciclos A homólogos, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

Definición 6.3.1 / Teorema 6.3.1 Un abierto conexo no vacío $A \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si todo cerrado γA es A -homotopo a cero. Si f es analítica

en A , simplemente conexo, entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A .

Teorema 6.3.2 Sea $A \in \mathbb{C}$ un dominio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es simplemente conexo
- Todo ciclo γ contenido en A es homólogo a 0.
- $\hat{\mathbb{C}} A$ es conexo

Desarrollo en serie de Laurent

Teorema 6.4.1 (Series de Laurent) Sea $f(z)$ analítica en la corona circular $A = \{z \mid r < |z - \alpha| < R\}$, donde r puede ser 0 y R infinito. Entonces existen dos desarrollos en serie según las potencias de $z - \alpha$ y de $(z - \alpha)^{-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$ convergentes en A y tales que

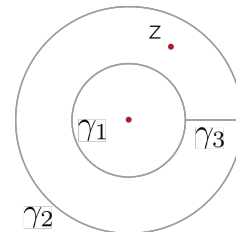
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$$

para $z \in A$. Además estas series convergen uniformemente en toda corona cerrada $A' \subset A$ de la forma $A' = \{z \mid r < r' \leq |z - \alpha| \leq R' < R\}$ y los coeficientes a_n, b_n vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta$$

donde γ es una circunferencia dada por $\gamma(t) = \alpha + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ siendo ρ un radio cualquiera entre r y R .



Demostración. Sean r_1, r_2 dos radios tales que $r < r_1 < r_2 < R$, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias $\gamma_1(t) = \alpha + r_1 e^{it}$, $\gamma_2(t) = \alpha + r_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tal que si z está entre ambas se tiene $\text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$, $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$.