

# La(s) hoja(s) de Chema

## 1. Espacios métricos

**Definición 1.1**  $\delta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ , o  $\delta(x, x) = 0$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$

**Ejercicio 1.1** Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a:  $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \dots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

**Teorema 1.4** Si  $M' \subset M$  y existe el espacio métrico  $(M, \delta)$ , entonces también existe  $(M', \delta)$ , y se llama **métrica inducida** por  $(M, \delta)$ .

**Definición 1.5** Sean  $(M, \delta), (M', \delta')$  y  $g : M \rightarrow M'$ . Se dice que  $g$  conserva las distancias si  $\delta'(g(x), g(y)) = \delta(x, y) \quad \forall x, y \in M$ . Si además  $g$  es biyectiva, entonces es una **isometría**.

**Teorema 1.7** Si existen  $(M, \delta), (M', \delta'), (M'', \delta'')$  y  $g : M \rightarrow M'$  y  $h : M' \rightarrow M''$  son isometrías, entonces  $h \circ g$  y  $g^{-1}$  también son isometrías.

**Definición 1.8** La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si  $g \in \text{Isom}(M)$  entonces  $g^{-1} \in \text{Isom}(M)$
- La isometría identidad,  $\text{id}_M \in \text{Isom}(M)$

**Definición 1.12** Si  $(M, \delta)$ , para  $a, b \in M$  se llama **segmento** de extremos  $a$  y  $b$  y se representa por  $[a, b]$  al conjunto  $[a, b] = \{x \in M \mid \delta(a, x) + \delta(x, b) = \delta(a, b)\}$ . Asimismo,  $x, y, z \in M$  están alineados si  $(x < y < z) \vee (z < y < x)$ .

**Ejercicio 1.5** Para  $\sigma \in \{1, -1\}$  y  $\tau \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $f(x) = \sigma x + \tau$  es una isometría para  $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

*Page intentionally left in blank*

## 2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

**Axioma P1** Si tenemos el conjunto  $\mathbb{P}$ , denominado **plano**, y la aplicación  $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  llamada **distancia**, entonces  $(\mathbb{P}, d)$  es un espacio métrico.

**Definición 2.2** Una **recta**  $r \subset \mathbb{P}$  satisface

- $r$  contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos  $A, B, C$ , están alineados si están en  $r$ .

**Axioma P2**  $\mathbb{P}$  contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos,  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{P}$  pasa una recta,  $r_{AB}$ .

**Definición 2.6 / Teorema 2.7** Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por  $a \parallel b$ . Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

⚠ **Axioma P3** Para toda recta  $r \subset \mathbb{P}$  existe una biyección  $\gamma : r \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\gamma(X) - \gamma(Y)| = |x - y| = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in r$

**Observación 2.8** Si  $A, B \in r$  son distintos, entonces existe un punto  $M \in r : d(A, M) = d(M, B)$  que denotamos por  $\text{medio}[A, B]$  y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto  $B \in r$  tal que  $B = \text{medio}[A, M]$ .

**Observación 2.9** Si  $r$  es una recta y  $P \in r$ , entonces  $r$  se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos  $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$  y  $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$ .

**Axioma P4** Para toda recta  $r \subset \mathbb{P}$  hay dos subconjuntos  $H^1$  y  $H^2$ , denominados **semiplanos** de  $r$ , que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si  $X, Y \in H^i$  entonces  $[X, Y] \subset H^i$
- Si  $X \in H^1$  y  $Y \in H^2$  entonces  $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$ .

**Definición 2.15** Sean  $P, Q, R$  no alineados, entonces el triángulo  $\triangle\{P, Q, R\}$ , o  $\triangle PQR$  está formado por los segmentos  $[P, Q]$ ,  $[Q, R]$ ,  $[P, R]$ , llamados **lados**, y los vértices  $P, Q, R$ .

**Teorema 2.16 [Axioma de Pasch]** Dado un triángulo  $\triangle PQR$  y una recta  $r$ ; si  $r$  corta a  $[P, Q]$ , entonces o corta a  $[P, R]$  o a  $[Q, R]$ .

**Definición 2.17 = 1.5** Una **isometría** en  $\mathbb{P}$  es una biyección  $g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  que cumple que  $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{P}$ .

**Teorema 2.18** Si  $A, B \in \mathbb{P}$  y  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  entonces  $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$  y  $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

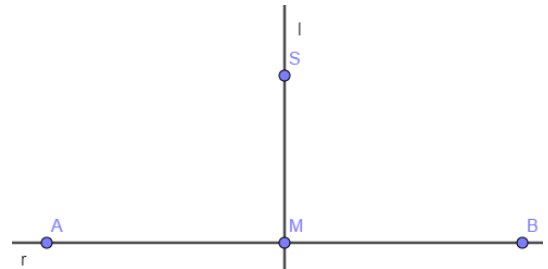
**Axioma P5** Si  $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$  y  $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$  son dos pares de puntos que cumplen  $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$  entonces existe  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  tal que  $g(A_i) = B_i$ . Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

**Axioma P6** Para toda recta  $r$  existe una isometría  $\sigma$  llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$

**Definición 2.23 / Teorema 2.25 / Corolario 2.30**

Una recta  $l$  es **ortogonal** a  $r$  si para todo  $S \in l$  y para todo par de puntos  $A, B$  que cumple que  $M = \text{medio}[A, B]$ , de modo que  $l \cap r = M$ , entonces se da que  $d(A, S) = d(S, B)$ . Se denota  $l \perp_M r$ . En estas condiciones,  $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S, A) = d(S, B)\}$ , se denomina **mediatriz** de  $[A, B]$ .



**Lema 2.21** Si  $\sigma_r$  entonces, para todo  $X$ ,  $\text{medio}[X, \sigma_r(X)] \in r$ .

**Observación 2.24** Si  $l \perp r$  y  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  entonces  $g(l) \perp g(r)$ .

⚠ **Teorema 2.26** Si  $l, r \subset \mathbb{P}$  cortan en  $M$  y  $\sigma_l, \sigma_r$  son dos reflexiones de  $l$  y  $r$ , entonces se cumple que  $l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$ .

⚠ **Teorema 2.27 / 2.29** Para toda recta  $r$  y todo punto  $S \in \mathbb{P} - r$ , existe una recta  $l$  ortogonal a  $r$ , que pasa por  $S$ . Si  $r$  es una recta, y  $M \in r$ , entonces existe  $l$  tal que  $l \perp_M r$ .

**Axioma P7** Para toda recta  $r$  y todo punto  $P$  existe

sólo una recta **paralela** a  $r$  que pase por  $P$ .

**Teorema 2.31 / 2.33** Si  $a \perp l$  y  $b \perp l$  entonces  $a \parallel b$ . Sean  $a \parallel b$ . Entonces, para todo  $A \in a$ , la única recta  $l \perp_A a$  también es ortogonal a  $b$ .

**Teorema 2.32** Las rectas paralelas forman una relación de recurrencia.

- Reflexividad:  $a \parallel a$
- Simetría:  $a \parallel b \rightarrow b \parallel a$
- Transitividad  $a \parallel b$  y  $b \parallel c \rightarrow a \parallel c$

**Ejercicio 2.6** Sean  $A, B \in r$ ,  $A \neq B$ . Para todo  $t$ , existe un único  $P_t \in r$  que cumple  $d(P_t, A) = |t|$  y  $d(P_t, B) = |t - d(A, B)|$ . En definitiva, la posición de  $P_t$  está sólomente determinada por las distancias  $d(A, P_t)$  y  $d(P_t, B)$ .

### 3. Isometrías del plano

**Definición 3.1** Para una aplicación  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $P \in \mathcal{M}$  es un **punto fijo** de  $\phi$  si  $\phi(P) = P$ ; y  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$  es un **subconjunto invariante** de  $\phi$  si  $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ .

**Lema 3.2** Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  y  $A \neq B$  son dos puntos fijos de  $g$ , entonces todo  $X \in r_{AB}$  es punto fijo de  $g$ .

**Definición 3.3** Si  $g, g' \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ ,  $g$  y  $g'$  son **conjugadas** si existe una isometría  $h$  tal que  $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$ .

**Teorema 3.4** Un punto  $P$  es fijo de  $g$  sii  $h^{-1}(P)$  es un punto fijo de  $g'$ . Es decir

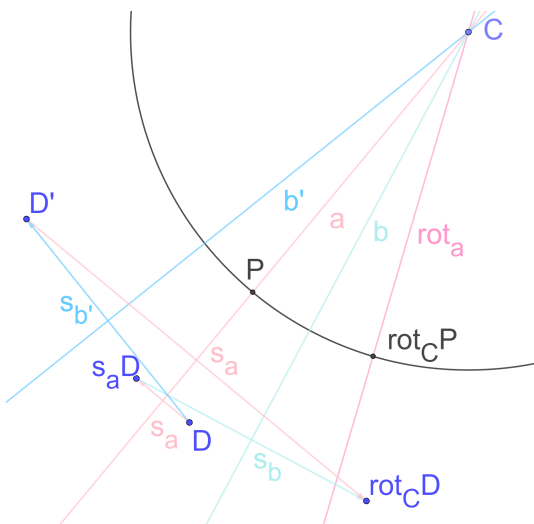
Demostración. Si  $h^{-1}(P)$  es punto fijo de  $g'$ , entonces  $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$ . Por tanto,  $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$ , luego  $g(P) = P$ .

**Ejemplo 3.5** Una reflexión sobre  $r$  cumple que

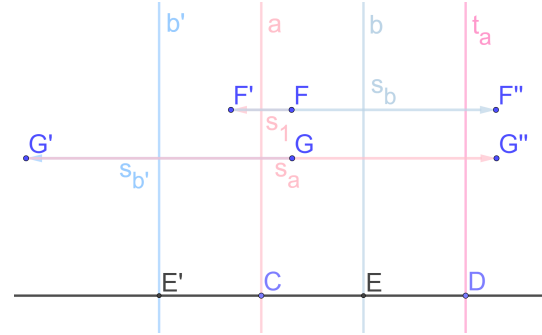
- $\sigma_r \circ \sigma_r = \text{id}_{\mathbb{P}}$  y  $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$  (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$  y viceversa.
- $X$  y  $\sigma_r(X)$  se encuentran en una recta ortogonal a  $r$ .

**Teorema 3.6** Sea  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  y sea  $r_{AB}$ . Si  $A, B$  son puntos fijos en  $g$ , entonces o bien  $g = \sigma_r$  o bien  $g = \text{id}_{\mathbb{P}}$ .

**Teorema 3.9** Llamamos  $\rho$  una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo  $C$ . Para toda recta  $a$  pasando por  $C$  existen dos rectas  $b, b'$  únicas tales que  $\rho = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$ .



**Ejercicio 3.1** Llamamos  $\tau$  una **traslación** a una isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta  $c$  invariante, es decir,  $\tau(c) = c$ . entonces para toda recta  $a \perp c$  existen dos rectas  $b, b' \perp c$  que cumplen  $\tau = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$ . Además, si  $\tau(l) = l$ , entonces  $l \parallel c$ .



**Ejercicio 3.2** Si  $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{P}) \mid g \text{ es rotación de centro } P\} \cup \{\text{id}_{\mathbb{P}}\}$  entonces

- Si  $a$  es una recta que pasa por  $P$ , entonces  $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$ .
- $gh = hg$  para todo  $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ .
- Para  $X \in \mathbb{P} - \{P\}$  y  $g(X) = h(X)$  entonces  $g = h$ .

**Ejercicio 3.3** Si  $h$  es una isometría

- Si  $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$  entonces  $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si  $r$  es una recta entonces  $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

**Ejercicio 3.3** Si  $a, b$  son rectas en  $\mathbb{P}$

- $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a \iff a \perp b$

**Ejemplo 3.12** Sean  $a, b$  tales que  $a \perp b$ . Entonces la rotación es de  $180^\circ$  y se llama **reflexión central** si se denota como  $\sigma_P$ . Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P \sigma_P = \text{id}_{\mathbb{P}}$
- Para todo  $X$ ,  $\sigma_P(X)$  es el único punto que cumple  $P = \text{medio}[X, \sigma_P(X)]$ .
- $\sigma_P$  es independiente de la elección de rectas  $a \perp b$ .

**Teorema 3.13** Las rectas  $r$  y  $\sigma_P(r)$  son paralelas.

**Ejemplo 3.14** Una **reflexión con deslizamiento**  $\phi$  es una composición de una reflexión  $\sigma_c$  y una

traslación  $\tau$ :  $\phi = \tau\sigma_c$ .  $\phi$  deja invariante sólo la recta  $c$ , y no tiene ningún punto invariante.

**Teorema 3.15** Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones  $\sigma$ :

	Con puntos fijos	Sin puntos fijos
par	$\rho$	$\tau$
impar	$\sigma$	$\phi$

**Teorema 3.16** Si  $g, g'$  son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

## 4. Ángulos

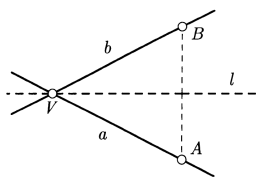
**Definición 4.1** Sean  $r, l$  dos rectas con un punto  $V$  en común. Sean  $\bar{r}$  y  $\bar{l}$  dos semirrectas determinadas por  $V$  en  $r$  y  $l$ . El par  $\{\bar{l}, \bar{r}\}$  es un **ángulo**.  $V$  es el vértice del ángulo y  $\bar{l}$  y  $\bar{r}$  son los lados del ángulo. El ángulo se designa por  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  o, si no hay lugar a confusión,  $\angle V$ . Así, por ejemplo, dado un triángulo  $\triangle PQR$ ,  $\angle P$  es el ángulo formado por  $P$  con  $[P, Q]$  y  $[P, R]$ .

**Observación 4.4** Si  $r = l$ , y  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  son las semirrectas determinadas por  $V$ , entonces, en estas circunstancias, el ángulo  $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$  se denomina **ángulo llano** y  $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_1\}$  se denomina **ángulo nulo**.

**Definición 4.5** Un ángulo  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y un ángulo  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son **congruentes** si existe una isometría  $g$  tal que  $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ . Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como  $\angle A = \angle B$ .

**Observación 4.6/4.8** Si  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  tiene vértice  $V$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  tiene vértice  $V'$ , y  $g$  es una isometría tal que  $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ , entonces  $g(V) = V'$ . Asimismo, si existe una isometría  $h$  que hace  $h(V) = V'$ , entonces  $h(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ .

**Ejemplo 4.9** Consideramos las rectas  $a \neq b$  que cortan en  $V$ , con sus respectivas semirrectas  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ . Consideramos  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$  y elegimos los puntos  $A \in \bar{a}_1, B \in \bar{b}_1$  a igual distancia,  $d(V, A) = d(V, B)$ . Existe una recta  $l \perp r_{AB}$  que pasa por  $V$  (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**). La bisectriz  $l$  cumple que  $\sigma_l(A) = B$ ,  $\sigma_l(\bar{a}_1) = \bar{b}_1$  y viceversa. Además, si  $\bar{l}$  es la semirrecta que corta a  $[A, B]$ , entonces  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{l}\} = \angle\{\bar{b}_1, \bar{l}\}$ .

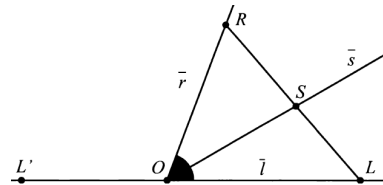


**Teorema 4.11** Sean  $a, b$  que cortan en  $V$ . El ángulo  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$  es congruente con  $\angle\{\bar{a}_2, \bar{b}_2\}$  y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

**Teorema 4.13/Definición 4.23** Sean  $l \perp_V r$  y  $l' \perp_{V'} r'$ . Entonces  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son congruentes. En este caso, los ángulos  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

**Definición 4.15** Si  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  no es ni nulo ni llano, y  $H_l^1$  es el semiplano que contiene a  $\bar{r}$ , y  $H_r^1$  es el semiplano que contiene a  $\bar{l}$ , entonces el ángulo  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  viene determinado como el conjunto  $H_l^1 \cap H_r^1$ .

**Teorema 4.18 [De la barra transversal]** Sea  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  con vértice  $V$  y sean  $L \in \bar{l}, R \in \bar{r}$ . Una semirrecta  $\bar{s}, V \in \bar{s}$  está dentro de  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  si corta a  $[L, R] - \{L, R\}$ .



**Definición 4.19 (Comparación de ángulos)** Dados  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , se dice que  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  es menor que  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ ,  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , si existe una isometría  $g$  tal que  $g(\bar{a}) = \bar{c}$  y que  $g(\bar{b})$  está en el interior de  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ .

**Teorema 4.21** Si existen 4 ángulos tales que  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{a}', \bar{b}'\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\} = \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$ , y  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , entonces  $\angle\{\bar{a}', \bar{b}'\} < \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$ .

**Teorema 4.22** Dados  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , entonces  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ ,  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , o  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} > \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ .

**Definición 4.25** Sea  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$  con vértice  $V$  y  $\bar{b}$  una semirrecta en el interior de  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ . Entonces  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$  es la **suma** de  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ , o  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\} = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\} + \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ .

**Definición 4.26** Para tres ángulos  $\angle U, \angle V, \angle W$ , decimos que  $\angle V = \angle U + \angle W$  si existe una descomposición  $\angle V = \angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ ,  $\angle U = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ ,  $\angle W = \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ .

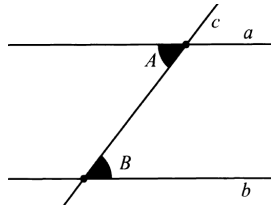
**Definición 4.28** Dado  $\triangle PQR$ , el lado  $[R, Q]$  y el

ángulo  $\angle P$  son **opuestos**.

**Definición 4.29 / Teorema 4.30** Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si  $\triangle PQR$  es isósceles y  $[P, Q]$  es congruente con  $[P, R]$ , existe una reflexión  $\sigma$  tal que  $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$ , la bisectriz de  $\angle P$ . Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

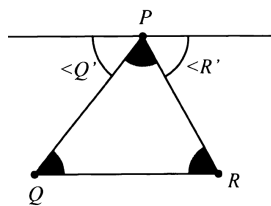
**Definición 4.34 / Teorema 4.35** Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación  $\rho$  tal que  $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$ .

**Definición 4.39 / Teorema 4.40** Sean  $a \parallel b$  y  $c$  una recta que corta a  $a$  en  $A$  y a  $b$  en  $B$ . El par de ángulos  $\angle A, \angle B$  de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.



**Teorema 4.41** La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Si hacemos una recta  $p$  paralela a  $[Q, R]$  tenemos que  $(Q, Q')$  y  $(R, R')$  son pares de ángulos internos y la suma  $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$  es un ángulo llano.





Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-NoDerivs 3.0 España”.

