Topología

1 Espacios topológicos

Se dice que p es el límite de una sucesión de reales $a_1, \cdots, a_n$ cuando, para todo abierto $p - \epsilon, p + \epsilon$, existe un m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto p, $B(p)$. Sea X no vacío, para cada $p \in X$ existe una familia $B(p)$. Se dice que $B(p)$ es una **base de entornos abiertos** de p si todas las familias $B(p)$ verifican:

- B1: si $U \subset B(p)$, entonces $p \in U$.
- B2: si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, existe $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$.
- B3: si $U \in B(p)$, para todo $q \in U$ existe $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$.

Esta generalización de conjuntos $(p - \epsilon, p + \epsilon$ nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico** (X, d) a un conjunto X con una distancia d definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro p y radio r al conjunto $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$. Las familias $B(p)$ de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en (X, d).

Si X es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$, un subconjunto $A \subset X$ es un **conjunto abierto** cuando es $\emptyset$ o cuando para cada $t \in A$ existe un subconjunto $U \in B(t)$ tal que $U \subset A$.

En $\mathbb{R}$ la topología usual (T_u) viene dada por $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$. En esta topología, $(\mathbb{R}, T_u)$, cada intervalo abierto (a, b) viene dado como $B(t)$, $t = \frac{a+b}{2}$. El intervalo $[a, b)$ no es abierto, pues para a no existe ningún conjunto $U \in B(a)$ tal que $U \subset [a, b)$.

Dos sistemas de bases de entornos abiertos, $B(p)$, $B'(p)$ son **equivalentes** cuando determinan la misma topología T en X; es decir, que para cada $U \in B(p)$ existe un $U' \in B'(p)$ tal que $U \subset U'$ y que para cada $V' \in B'(p)$ exista un $V \in B(p)$ tal que $V' \subset V$.

1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto X. La topología T determinada en X cumple:

- P1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$.
- P2: Dada una familia de abiertos $U_\lambda, \lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda U_\lambda$ es un elemento de T.
- P3: Dada una familia **finita** $U_i, i = 1, \cdots, n$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ es un elemento de T.

Un **espacio topológico** (X, T) es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de X, $H(p)$ para cada $p \in X$ [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias H forman una topología T en X. Si para esa topología existe una métrica d, entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si T, T' son dos topologías de X, y $T \subset T'$, entonces se dice que T es menos **fina** que T'. La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por $\{\emptyset, X\}$, y la menos fina, o **discreta**, está dada por $\mathcal{P}(X)$, es decir, el conjunto partición de X.

En (X, T) se llama **conjunto cerrado** a un conjunto $M \subset X$ tal que $X - M$ es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es (X, T) verifica:

- C1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$ son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados M_λ, $\lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda M_\lambda$ es un cerrado.
- C3: Dada una familia M_λ, $\lambda \in L$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_L U_\lambda$ es un elemento de T.

Si (X, T) es un estacio topológico y $M \subset X$, la topología $T_M = \{M \cap U\}$ de las intersecciones de M con abiertos U de (X, T) se llama **topología inducida o subordinada** de T. Así, el espacio M, T_M es un subespacio de (X, T).

2 Base de una topología

Dada una topología T en X, la **base de la topología**, B, es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío $U \subset T$ es una unión de elementos de B. $\forall U \subset T \ , \ U = \cup_i B_i$

Sea X un conjunto y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de X. Una condución necesaria y suficiente para que F sea base de X es:

- I: $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si A_λ, A_μ son dos elementos de F, y $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$, para cualquier punto $t \in A_\lambda \cap A_\mu$ existe $A_\nu \in F$ tal que $t \in A_\nu$

2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio (X, T) verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo $x \in X$ existe una base de entornos de x que sea numerable. Un espacio (X, T) verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

2.2 Topología engendrada for una familia de subconjuntos

Cualquier familia $\{A_\lambda\}$ de X que cumpla I es una subase de una topología de X. Si $H = \{A_\lambda\}$ cumple I y II, la familia B formada por las intersecciones (y uniones) finitas de H es base para alguna topología de X y se llama **topología engendrada**.

3 Entornos en un espacio topológico

Sea (X, T) un espacio topológico, y $p \in X$. $A \subset X$ es entorno de p si existe un abierto U de la topología T tal que $p \in U \subset A$. No todo entorno ha de ser abierto. Por ejemplo, $[0, 1)$ es entorno de $1/2$ (existe $U = (1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4) \subset [0, 1)$, pero no de 0 (ningún abierto en T cumple $U \subset [0, 1)$.

Los sistemas de entornos $E(p)$ para X cumplen:

- E1: Si $A \in E(p)$, entonces $p \in A$.
- E2: Si $A \in E(p)$, todo subconjunto $A' \subset X$ tal que $A' \supset A$ pertenece a $E(p)$ [porque $p \in A'$].
- E3: Si $A, A' \in E(p)$, entonces $A \cap A' \in E(p)$. Esto es aplicable a un número finito de intersecciones.
- E4: Si $A \in E(p)$, A, existe $U \in E(p)$ tal que para todo $q \in U, A \in E(q)$.

Sea $p \in (X, T)$, y $E(p)$ su sistema de entornos. Una subfamilia $A(p)$ de $E(p)$ es un sistema fundamental de entornos (abiertos o no) de p [base de entornos] si todo entorno de p contiene un elemento de $A(p)$.

Los sistemas de bases de entornos $B(p)$ resultan ser sistemas fundamentales de entornos. P. ej. en $(\mathbb{R}, T_u)$ cada punto x tiene una base de entornos numerable, los intervalos abiertos de radio racional: $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q}}$.

Un espacio topológico métrico verifica el primer axioma de numerabilidad, pues $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q}}$ es un sistema de entornos numerable.

4 Subconjuntos en un espacio topológico

Todo punto en un espacio topológico puede ser de 3 tipos distintos. Si consideramos el espacio (X, T) y $M \subset T$, entonces

- $t \in X$ es un punto **interior** a M ($t \in int(M)$) si existe algún entorno $V \subset M$.
- $t \in X$ es un punto **exterior** a M ($t \in ext(M)$) si existe un entorno V de t que no corta a M [$V \cap M = \emptyset$].
- $t \in X$ es un punto **frontera** ($t \in front(M)$) si para todo entorno V, $V \cap M \neq \emptyset$ y $V \cap (X - M) \neq \emptyset$.

El interior de M, $int(M)$ es el mayor abierto contenido en M. $ext(M)$ también es un conjunto abierto, y $front(M)$ es siempre cerrado.

De esta clasificación pueden crearse más definiciones.

- $t \in X$ es **adherente** a M si para todo entorno $V(t)$ es $V \cap M \neq \emptyset$. $adh(M) = \overline{M} = int(M) \cup front(M)$.
  - $t \in X$ es un punto de **acumulación** de M si todo entorno $V(t)$ corta a M en algún punto distinto de t; es decir, $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación se denomina **derivado** de M, o $der(M)$.
  - $t \in X$ es **aislado** cuando existe algún entorno $V(t)$ tal que $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$.

En $((X, T)$, un conjunto M es cerrado sii contiene todos sus puntos de acumulación.

En un espacio (X, T) un subconjunto M es denso en X si $adh(M) = X$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en

$\mathbb{R}$, porque para todo entorno de $\mathbb{R}$ siempre hay un racional. Un subconjunto es denso sii para todo abierto no vacío $U \subset X$ se tiene que $U \cap M \neq \emptyset$.

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto numerable y denso.

5 Sucesiones, límites de sucesiones

Una **sucesión** en un conjunto X es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$; $s(i) \mapsto a_i$. Cuando se tiene una aplicación $f : X \to Y$ y una sucesión $s : \mathbb{N} \to X$, definimos la sucesión $s' : \mathbb{N} \to Y$ a la composición $s' = f \circ s$ de modo que $s'(i) = f$ o $s(i) = f(a_i) \in Y$. La sucesión $s(i) = a_i$ se representa por $\{a_i\}$.

Dada una sucesión $\{a_i\}$ en X, se define $A_m = \{a_i \in s \mid i \geq m\}$. Se tiene que $A_m \neq \emptyset$ y $A_k \subset A_m \cap A'_m \iff k = max(m, m')$.

Si X es un conjunto, una **base de filtro X** es una familia $\mathcal{B} = \{A_\lambda\} \subset X$ que verifica que (1) $A_\lambda \neq \emptyset$ y (2) dados A_λ, A_μ existe $A_\nu \in \mathcal{B}$ tal que $A_\nu \subset A_\lambda \cap A_\mu$. En un espacio (X, T), una base de entornos $E(p)$ es una base $\mathcal{B}$.

Dadas dos bases de filtro $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, se dice que $\mathcal{B}'$ es **más fina** que $\mathcal{B}$ cuando para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $A' \in \mathcal{B}'$ tal que $A' \subset A$.

Si $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$, las imágenes $\{f(A_\lambda)\}$ forman una base de filtro en Y, y se representa por $f(\mathcal{B})$. Si $\mathcal{B}' = \{A'_\lambda\}$ es una base de filtro en Y y $\forall\lambda\ A'_\lambda \cap f(X) \neq \emptyset$, entonces $\{f^{-1}(A'_\lambda)\}$ forman una base de filtro en X y se representa por $f^{-1}(\mathcal{B}')$.

Si consideramos la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{N}_m = \{i \in N \mid i \geq m\}$ forman una base de filtro $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$, llamada **base de filtro de Fréchet**.

p es el **punto límite** de $\{a_i\}$ si dado un entorno U de p, existe m tal que $A_m \subset U$. Asimismo, p es un punto límite de $\mathcal{B}$ en un espacio topológico (X, T) si dado un entorno U de p, existe un $A_\lambda \in \mathcal{B}$ tal que $A_\lambda \subset U$.

Un espacio topológico (X, T) verifica el **axioma de separación** T_2 cuando, dados $p, q \in X$ existen dos entornos $U(p), V(q)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Este espacio se denomina también **espacio de Hausdorff**. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, T_u)$ es de Hausdorff, porque si se toman $p, q \in \mathbb{R}$, y $d = |p - q|$, entonces $U = (p - \frac{d}{2}, p + \frac{d}{2})$ y $V = (q - \frac{d}{2}, q + \frac{d}{2})$ son disjuntos.

Sea $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$ una base en un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{B}$ es convergente a p, éste es el único punto límite de $\mathcal{B}$.

Sea $s = \{a_i\}$. $p \in X$ es un **punto de aglomeración** de s si se verifica que para todo entorno U de p y para todo A_m de la base de filtro de Fréchet de la sucesión, es $A_m \cap U \neq \emptyset$.

Si $s = \{a_i\}$ es una sucesión en (X, T), el conjunto de puntos de aglomeración de s es $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{adh(A_m)\}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en (X, T), p es de aglomeración cuando para todo entorno U de p y para todo $A_\lambda \in \mathcal{B}$, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$. El conjunto $\cap_\lambda\{adh(A_m)\}$ es el conjunto de puntos de aglomeración de $\mathcal{B}$.

6 Aplicaciones continuas. Homeomorfismos

Sea $f : (X,T) \to (Y,S)$, y $p \in X$. Entonces f es **continua** en p cuando para todo entorno $V \in (Y,S)$ existe un entorno $U \in (X,T)$ tal que $f(U) \subset V$. Si consideramos una base de $\mathcal{B}$, entonces f es continua en p si para toda base de filtro $\mathcal{B}$ convergente a p, $f(\mathcal{B})$ converge a $f(p)$.

Una aplicación f es continua en (X,T) si lo es para todo $p \in X$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua es que para todo abierto V de (Y,S) [o de la base del espacio], $f^{-1}(V)$ sea abierto en (X,T). Análogamente, f es continua si para todo cerrado V, $f^{-1}(V)$ es cerrado en (X,T).

Sea $f : (X,T) \to (Y,S)$ y $g : (Y,S) \to (Z,T')$, si f y g son continuas, $g \circ f$ también lo es.

Una aplicación $f : (X,T) \to (Y,S)$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son continuas. Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Se llama propiedad topológica o **invariante** topológico a aquella que si la tiene un espacio topológico, la tienen todos los que son homeomorfos a este. Ejemplos de invariantes son los axiomas de numerabilidad, poseer un denso numerable (separabilidad) o ser espacio T_2. Por ejemplo, espacios con topologías T_u y D no son homeomorfos.

7 Topología inducida por una o varias aplicaciones

Dada una aplicación $f : X \to (Y,T')$, se llama **topología inducida** o **topología inicial** por f en X a la topología $T = \{f^{-1}(V) \mid V \in T'\}$, que es la topología menos fina de X que hace continua a f.

En la topología inducida en X por $f : X \to (Y,T')$, un conjunto $A \subset X$ es cerrado sii $A = f^{-1}(U)$, siendo U un cerrado de (Y,T'). Lo mismo se aplica si A es abierto o es un entorno.

Topología inducida por la composición. Sean X, X^* conjuntos, (X',T') un espacio topológico y las aplicaciones $h : X^* \to X$ y $f : X \to (X',T')$. Si T es la topología inducida por f en X, y T^* es la topología inducida por h en $X*$, entonces T^* es la topología inducida por $f \circ h$ en X^*.

Topología inducida por varias aplicaciones. Sea X un conjunto, y $(Y_1,S_1),(Y_2,S_2),\cdots,(Y_n,S_n)$ diferentes espacios topológicos. Entonces, la topología de X más fina que haga continuas las aplicaciones $f_1,\cdots,f_n$ es aquella que tenga por base la familia de subconjuntos de X de la forma $f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots f_n^{-1}(U_n)$, donde $U_1 \in S_1,\cdots,U_n \in S_n$.

Propiedad universal de la topología inducida (una o varias aplicaciones). Sea (X,T) un espacio topológico con la topología T inducida por las aplicación $f_i : (X,T) \to (Y_i,T_i)$. Se verifica que para todo espacio (M,S) y cualquier aplicación $g : (M,S) \to (X,T)$, g es continua sii $f_i \circ g : (M,S) \to (Y_i,T_i)$ lo es para todo i.

8 Topología relativa. Subespacio topológico

Sea (X,T) un espacio topológico, M un subconjunto de (X,T) y $j : M \longrightarrow (X,T)$; $x \mapsto j(x) = x$. La topología T_M inducida en X for j se llama **topología relativa**, o **topología subordinada** por (X,T) en

M. El espacio (M, T_M) es un subespacio topológico de (X, T).

Sea M un subconjunto del espacio (X, T). Una parte A de M es un abierto en (M, T_M) sii existe un abierto $U \in T$ tal que $A = U \cap M$. Así, $T_M = \{M \cap U\}$.

La topología inducida tiene las siguientes propiedades:

- En el subespacio (M, T_M) de (X, T) un subconjunto W es cerrado sii existe un cerrado W' de (X, T) tal que $W = M \cap W'$.
- Un conjunto $A \subset M$ es entorno de $p \in M$ para el espacio (M, T_M) sii existe un entorno $A' \subset X$ tal que $A = A' \cap M = j^{-1}(A')$.
- Propiedad universal: Para un subespacio (M, T_M) de un espacio (X, T), la aplicación $g : (X^*, S) \to (M, T_M)$ es continua sii la aplicación $j \circ g : (X^*, S) \to (X, T)$ es continua.
- Transitividad: Si (M, T_M) es un subespacio de (X, T) y M' es un subconjunto de M, se verifica que la topología subordinada en M' por (M, T_M) coincide con la subordinada por (X, T).

Sea M, T_M subespacio de (X, T). Para que todo abierto / cerrado A de (M, T_M) sea abierto / cerrado en (X, T), es condición necesaria y suficiente que M sea abierto / cerrado en (X, T).

Si $f : (X, T) \to (Y, S)$ es una aplicación continua, la restricción $f|_M$ de (M, T_M) a (X, T) es continua. Sin embargo, que $f|_M$ sea continua no implica que f sea continua.

Se llama **propiedad hereditaria** una propiedad topológica que si un espacio la tiene, la tienen todos sus subespacios. Propiedades hereditarias son la separación T_2, o los axiomas de numerabilidad.

También es hereditario el ser un espacio metrizable. Si (X, d) es un espacio métrico, con T la topología de X correspondiente a la distancia d, la topología inducida por T en M coincide con la topología definida en M por d_M.

Un espacio es T_1 separable cuando cada conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado.

9 Topología producto

Dados dos espacios (X_1, T_1) y (X_2, T_2), una base para la topología producto $T_1 \times T_2$ es la familia de abiertos $B = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in T_1, U_2 \in T_2\}$. Estos abiertos $U_1 \times U_2$ se llaman **abiertos elementales** de la Topología producto. Así, un abierto $A \in T_1 \times T_2$ es abierto sii es unión de abiertos de B: $A = \cup_{\lambda \in L}\{U_1^\lambda \times U_2^\lambda\}$.

Las propiedades de la Topología producto son las siguientes:

- Las propiedades $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ son aplicaciones continuas, y $X_1 \times X_2$ es la Topología menos fina de $X_1 \times X_2$ para las que son continuas.
- Propiedad universal: una aplicación $f : (Y, S) \to (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es continua sii $p_1 \circ f$ y $p_2 \circ f$ son continuas.

Las aplicaciones $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$ se llaman **componentes de** f. Un punto $y \in (Y, S)$ se representa como $(x_1, x_2) = f(y)$ o como $x_1 = f_1(y), x_2 = f_2(y)$.

Una aplicación $f : (X, T) \to (Y, S)$ es abierta si para cada abierto $U \in T$, $f(U)$ es abierto de S. Entonces, en el espacio producto, p_1, p_2 son aplicaciones abiertas.

Para cada punto $a \in X_1$, el subespacio $p_1^{-1}(a) = \{a\} \times X_2$ es homeomorfo a (X_2, T_2) y viceversa.

Si una aplicación $f : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \to (Y, S)$ es continua, sus restricciones a subespacios $f_a : \{a\} \times X_2 \to (Y, S)$ y $f_b : X_1 \times \{b\} \to (Y, S)$ también son continuas. También son continuas las aplicaciones por composición $g_a : (X_2, T_2) \to (Y, S)$, $g_b : (X_1 \to T_1) \to (Y, S)$. Sin embargo, aunque las aplicaciones por cada una de las variables (f_a, f_b) garanticen la continuidad, no se deduce que sea continua la aplicación en $y = f(x_1, x_2)$.

Sea $p(x_1, x_2)$ un punto del espacio producto $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2$. Si $\{V_j\}$ es una base de entornos de x_1 en (X_1, T_1) y $\{W_k\}$ es una base de entornos de x_2 en (X_2, T_2), entonces $\{V_j \times W_k\}$ constituyen una base de entornos en $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$.

Una propiedad topológica es **finito-multiplicativa** sii verifica que la poseen los espacios (X_1, T_1), (X_2, T_2), (X_n, T_n) entonces la posee su producto. Si la cantidad de espacios es infinito, entoces es multiplicativa. Los axiomas de numerabilidad, la separación T_2 y la metricabilidad son proiedades finito-multiplicativas.

Para dos puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, las distancias $d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, d'(x, y) = max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, d^*(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ cumplen que $d' \leq d \leq d^* \leq 2d'$, luego todas las métricas resultan equivalentes, y con ello sus bases de entornos. Por tanto, las 3 métricas determinan la misma topología métrica en $X_1 \times X_2$.

10 Topología final para una o varias aplicaciones

Sea una aplicación $f : (X, T) \to Y$. La familia de conjuntos de Y tales que sus imágenes inversas son abietos de T constituyen una topología de Y. Esta topología, la **topología final**, $S = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in T\}$ es la topología más fina de Y para la que f es continua. Si S contiene algún conjunto U tal que $f^{-1}(U) \notin T$, entonces f no es continua. x

En la topología final de $f : (X, T) \to (Y, S)$ un conjunto M es cerrado sii $f^{-1}(M)$ es cerrado en (X, T). Si f no es sobreyectiva, $f(X)$ es abierto y cerrado en la topología final de f, pues $f^{-1}(f(X)) = X$, que es cerrado y abierto en (X, T) por definición. Si $q \in f(X)$ es un punto de Y, tal que $f(p) = q$, $V(q) \in S$ es un entorno de q en (Y, S) sii $f^{-1}(V)$ es entorno de p en (X, T).

La Topología final cumple la composición. Sea (X, T) y los conjuntos Y, Y^*; y las aplicaciones $f : (X, T) \to Y$, $g : Y \to Y^*$. Si S es la topología final para f, S^* es la topología para g sii S^* es la topología final para $g \circ f$.

Dada una familia de aplicaciones $f_\lambda : (X_\lambda, T_\lambda) \to Y$ con espacios topológicos iguales o distintos, la topología final de Y es la topología más fina que hace continua toda f_λ. Un conjunto $A \subset Y$ es abierto en esta topología sii para todo λ, $f_\lambda^{-1}(A) \in T_\lambda$. Hay que considerar que la topología menos fina de Y es siempre la trivial: $\{\emptyset, Y\}$.

La topología final también cumple la propiedad universal. Para las aplicaciones $f_\lambda : (X_\lambda, T_\lambda) \to Y$ continuas, para el espacio topológico (Y^*, T^*) y la aplicación $g : (Y, S) \to (Y^*, T^*)$ se cumple que g es continua sii cada una de las aplicaciones $g \circ f_\lambda$ lo es.

11 Topología cociente

Conceptos a recordar:

- Si X es un conjunto y E es una relación de equivalencia, $\overline{x}$, también llamado $E(x)$ es la clase de x por E.
- $A \subset X$ es un **conjunto saturado** si $\forall x \in A, E(x) \subset A \iff A = \cup_{x \in A}\{E(x)\}$.
- El saturado de A es el mínimo conjunto saturado que contiene a A: $E(A) = \cup_{x\in A}\{E(x)\}$. Si $p : X \to X/E$ es la aplicación canónica, A es saturado sii $E(A) = p^{-1}(p(A)) = A$.
- Una aplicación $f : X \to Y$ es **compatible** con la relación E de X cuando $xEy \to f(x) = f(y)$ o cuando $p(x) = p(y) \to f(x) = f(y)$.
- Si E, E' son dos relaciones de equivalencia, E es más fina que E' cuando si xEy, entonces $xE'y$. De otro modo, si E es más fina, si la aplicación canónica $p' : X \to X/E$ es compatible con E, $xEy \to p'(x) = p'(y)$.

Si E es la relación de equivalencia en (X, T) y X/E es el conjunto cociente se dota a este conjunto la **topología cociente** T_E basado en la proyección canónica $p : (X, T) \to (X/E, T_E)$. T_E es la topología final de esta aplicación. A es abierto en (X, T_E) si $p^{-1}(A)$ es abierto en (X, T).

Si $f : (X, T) \to Y$ es una aplicación sobreyectiva, f determina la relación de equivalencia $E(f)$ en X tal que $xE(f)y \iff f(x) = f(y)$. Entonces, la aplicación $f^* : (X/E(f), T_f) \to (Y, S)$, con T_f la topologia cociente para $E(f)$ y S la topología final para f, es un homeomorfismo.

La topología cociente presenta las siguientes propiedades:

- Un conjunto M de X/E es cerrado en T_E sii $p^{-1}(M)$ es cerrado en (X, T).
- Propiedad universal: Para todo espacio (Y, S) y para cualquier aplicación $g : (X/E, T_E) \to (Y, S)$ g es continua sii $g \circ p : (X, T) \to (Y, S)$ lo es.
- La aplicación canónica p es abierta sii el saturado de un abierto es abierto.
- La aplicación canónica p es cerrada sii el saturado de un cerrado es cerrado.

Cuando se tiene la composición $f : (X, T) \to (Y, S)$, existe una **descomposición canónica** de la aplicación así,

$$(X, T) \xrightarrow{p} (X/E(f), T_E) \xrightarrow{f^*} f(X) \xrightarrow{j} (Y, S)$$

Donde p es sobreyectiva, f^* es biyectiva y j es inyectiva; y $f = j \circ f^* \circ p$. En estas condiciones, f^* es homeomorfismo si la imagen por f de todo abierto o cerrado en X que sea saturado por $E(f)$ es abierto o cerrado en $f(X)$.

Transitividad de espacios cocientes: Si en un espacio topológico X existen dos relaciones E, E', E más fina que E', la relación de equivalencia E'/E determina un espacio cociente en X/E homeomorfo a X/E' con el homeomorfismo $\phi : (X/E)/(E'/E) \to X/E'$.

12 Espacios compactos

Dado un conjunto X, una familia $\{A_\lambda\}_\lambda \in L$ de subconjuntos es un **recubrimiento** de X cuando $\cup_{\lambda\in L}\{A_\lambda\} = X$. Si el número de $\{A_\lambda\}$ es finito, entonces es un reubrimiento finito. Un **subrecubrim-**

iento de A es toda subfamilia A^* de A que sea, a su vez, recubrimiento de X.

Si (X, T) es un espacio topológico, $A = \{A_\lambda\}$ es un recubrimiento de X, y cada A_λ es un abierto en T, el recubrimiento es un **recubrimiento abierto** en (X, T). Si además tomamos la topología inducida M, T_M, y $M \subset \cup\{A_\lambda\}$, entonces las intersecciones $\{M \cap A_\lambda\}$ son abiertos en (M, T_M).

Un espacio topológico (X, T) es **compacto** cuando todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito. Equivalentemente, un espacio (X, T) es compacto sii toda familia de cerrados $\{F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de (X, T) de intersección vacia tiene una subfamilia finita de intersección vacía.

Un espacio (X, T) es compacto sii se verifica que toda base de filtro $\{B_\lambda\}_{\lambda\in L}$ tiene algún punto de aglomeracion. Es decir, $\cap_{\lambda\in L}\{B_\lambda\} \neq \emptyset$. Por tanto, toda sucesión en un compacto tiene un punto de aglomeración. Además, en un compacto, si una sucesión tiene un solo punto de aglomeración, la solución converge a ese punto.

Dada la topología $(\mathbb{R}, T_u)$ todo subespacio que no sea cerrado no será compacto en la topología subordinada.

Si (X, T) es compacto, todo subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación en X. De aquí se obtiene que todo espacio discreto ha de ser finito.

Si (X, T) es compacto y $f : (X, T) \to (Y, S)$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ con la topología relativa es compacto. En particular, si f es sobreyectiva, (Y, S) es compacto.

Si $\{(X_\lambda, T_\lambda)\}$ es una familia arbitraria de compactos, el espacio producto $(\prod_{\lambda\in L}^{X_\lambda}, T)$ es compacto.

La compacidad no es hereditaria: si tomamos el espacio $(\{1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots, 0\}, T_u$, éste es compacto porque 0 es un punto de aglomeración. Sin embargo, el subespacio $\{1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$ no es compacto, pues es discreto e infinito. Sin embargo, la compacidad es un **invariante topológico**.

13 Subconjuntos compactos de un espacio topológico

Si (X, T) es un espacio topológico y M un subconjunto de X, M es un subconjunto compacto de (X, T) cuando (M, T_M) es un subespacio de (X, T). (¡Se define el conjunto a partir del espacio, y no al revés!)

Si (X, T) es un espacio topológico compacto, y M un subconjunto cerrado de (X, T), (M, T_M) es compacto.

Sean (X, T) compacto, (Y, S) de Hausdorff y $f : (X, T) \to (Y, S)$ continua. Si f es inyectiva, f es homeomorfismo de (X, T) en $f(X)$.

Un espacio topológico es **regular** cuando para cada cerrado M y cada $p \notin M$, existen abiertos $U, V \in (X, T)$ tales que $M \subset U, \in V, U \cap V = \emptyset$. Todo espacio de Hausdorff y compacto es regular.

En un espacio de Hausdorff, si M_1, M_2 son disjuntos, existen abiertos U_1, U_2 tales que $M_1 \subset U_1, M_2 \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Un espacio topológico es **normal** cuando dos conjuntos cerrados disjuntos tienen abiertos que los separan. Todo espacio topológico de Hausdorff y compacto es normal.

En un espacio topológico, la unión de una familia finita de compactos es compacto. En un espacio de Hausdorff la intersección de una familia arbitraria de compactos es un compacto.

En $(\mathbb{R}, T_u)$ todo intervalo cerrado y acotado es compacto (sii). Esto es extrapolable bolas en $(\mathbb{R}^n, T_u)$. Además, si $f : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_u)$ es continua y (X, T) es compacto, f alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos.

14 Espacios métricos compactos

Sea X un espacio métrico y M un subespacio de X. Si p es un punto de acumulación de M, existe en M una sucesión infinita de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ que converge a p.

Sea X un espacio métrico. El **número** ρ **de Lebesgue** de un recubrimiento abierto $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de X es todo real $\rho > 0$ tal que para cada x del espacio, la bola abierta $E(x, \rho)$ está contenida en algún abierto $\{A_\lambda\}$ del recubrimiento.

Si X es un espacio métrico en el que toda sucesión infinita tiene un punto de acumulación, entonces existe un ρ de Lebesgue para todo recubrimiento abierto $\{A_\lambda\}$ de X.

Propiedad P: a) Toda sucesión infinita de X tiene al menos un punto de acumulación. b) Todo subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación. Todo espacio métrico con propiedad P con topología engendrada por la métrica cumple que existe un ρ de Lebesgue.

Todo espacio métrico compacto cumple la propiedad del número ρ de Lebesgue. Además, si en un espacio métrico toda sucesión infinita tiene un punto de acumulación, X es compacto.

Una sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo real positivo ϵ existe un natural m tal que para dos índices $(i, j) > m$ se verifica $d(x_i, x_j) < \epsilon$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no toda sucesión de Cauchy es convergente ($(1 + 1/n)^n$ en $\mathbb{Q}$).

Un espacio métrico X se dice que es **completo** cuando en él toda sucesión de Cauchy es convergente. Un espacio métrico compacto es completo. Sin embargo, no todo espacio completo es compacto $(\mathbb{R}, T_u)$.

Todo espacio métrico es normal, regular, verifica ANII, y es separable.

Si (X, d) y (Y, d') son espacios métricos, una apicación $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** cuando para cada real positivo ϵ existe otro δ tal que si x_1, x_2 son dos puntos cualesquiera del espacio X cuya distancia es $d(x_1, x_2) < \delta$ entonces la distancia entre sus imágenes es $d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

15 Espacios conexos

Un espacioi topológico (X, T) es **conexo** cuando no existen en él dos abiertos disjuntos distintos del vacío cuya unión es X. Asimismo, (X, T) es conexo si no existe ningún conjunto distinto de X que sea abierto y cerrado a la vez. $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo y un espacio discreto con más de un punto no.

Si $f : (X, T) \to (Y, S)$ es continua y (X, T) es conexo, el subespacio $f(X)$ de (Y,S) es conexo. Si f es homeomorfismo, (Y, S) es conexo, y la conexión es invariante.

Igual que la compacidad, la conexión de un subconjunto está determinada por la topología relativa T_M del subconjunto.

Sea (X, T) un espacio topológico y M un subconjunto de X. Si M es conexo, también es conexo cualquier conjunto A tal que $M \subset A \subset adh(M)$. En particular, $adh(M)$ es conexo.

Un conjunto M de $(mathbbR, T_u)$ es conexo sii M se reduce a un punto o es un intervalo.

Si un espacio (X, T) es conexo, lo es también cualquier espacio cociente $(X/E, T_E)$ obtenido a partir de una relación de equivalencia en él. Si $(X, T), (Y, S)$ son dos espacios topológicos el espacio producto $X \times Y$ es conexo sii son conexos X e Y. Así, $(\mathbb{R}^n, T_u)$ es conexo.

En un espacio (X, T) se llama componente conexa de un punto p al mayor conjunto conexo del espacio que contiene a p. Así, dos componentes conexas no tienen puntos comunes. Además, la componente conexa de un punto es siempre un cerrado.

Un espacio (X, T) es **totalmente desconexo** cuando cada componente conexa se reduce a un solo punto. Un conjunto M es totalmente desconexo cuando su subespacio (M, T_M) lo es. Por ejemplo, para $M \subset \mathbb{Q}$, (M, T_M) es totalmente desconexo, pues M no acepta ningún intervalo.