Cálculo de Probabilidades

El modelo matemático

El **espacio muestral** de un fenómeno aleatorio, Ω es el conjunto de resultados posibles. Los subconjuntos de un único elemento son los **sucesos simples**, y los sucesos de más de un elemento son los **sucesos compuestos**. El conjunto de todos los posibles sucesos de Ω es el conjunto por partes, $\mathcal{P}(\Omega)$.

Una **probabilidad** es una aplicación

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

tal que se verifica

- Si $A, B \in \Omega$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$

$P(A)$ es la **probabilidad del suceso** A y el par (Ω, P) es el **espacio de probabilidad finito**.

De estas dos propiedades pueden construirse otra serie de propiedades

- Si B ocurre siempre que sucede A, es decir, $A \subset B \subset \Omega$ entonces $P(A) \leq P(B)$. Esto es cierto pues $B = A \cup (B \cap A^c)$, y al ser disjuntos, $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$.
- Como $A \subset B \subset \Omega$ y $B - A = B \cap A^c$, $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
- Si tomamos $B = \Omega$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - 1 = 0$
- Sean $A, B \subset \Omega$. B se puede expresar como $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, y al ser disjuntos, $P(B) = P(B \cup A) + P(B - A)$.
- Como $A \cap B = A \cup (B - A)$, y al ser disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son disjuntos dos a dos, se tiene que $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ de (Ω, P) y $A = \{\omega_{i1}, \cdots, \omega_{ik}\}$ con ω_{ik} un suceso simple, entonces $P(A) = P(\{\omega_{i1}\}) + \cdots + P(\{\omega_{ik}\})$ y $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_n\}) = 1$.

La asignación de probabilidades

El resumen del capítulo culmina con la **Regla de Laplace:** La probabilidad de un suceso A relativo a un fenómeno aleatorio es

$$P(A) = \frac{\text{número de casos probables}}{\text{número de casos posibles}}$$

suponiendo que **todos los casos posibles son equiprobables**.

Un caso donde se falla en pensar es cuando se establece Ω con casos en los que el orden no importa (extraer 3 cartas de una baraja, etc.), pues algunas combinaciones ponderan más que otras y se desvirtuan las probabilidades).Lo ideal es considerar que los sucesos son diferentes ($112 \neq 112$) aludiendo a una propiedad extra (asignar un color, posición, etc. imaginarios).

Las fórmulas de inclusión-exclusión

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son sucesos de un espacio de probabilidad, se cumple

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

donde

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Un ejemplo para $n = 3$: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] + [P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$

Esta fórmula se puede derivar para que se derive a m sucesos. En un espacio de probabilidad, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son sucesos cualesquiera, la probabilidad $P_{[m]}$ de que ocurran exactamente m de ellos, es

$$P[m] = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n$$

Si $m = 0$, es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los n sucesos, que es $P_{[0]} = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^n S_n)$