La(s) hoja(s) de Chema

1. Espacios métricos

Definición 1.1 $\delta : M \times M \to \mathbb{R}$ es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x, y) > 0$ si $x \neq y$, o $\delta(x, x) = 0$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$

Ejercicio 1.1 Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a: $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \cdots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

Teorema 1.4 Si $M' \subset M$ y existe el espacio métrico (M, δ), entonces también existe (M', δ), y se llama **métrica inducida** por (M, δ).

Definición 1.5 Sean $(M, \delta), (M', \delta')$ y $g : M \to M'$. Se dice que g conserva las distancias si $\delta'(g(x), g(y)) = \delta(x, y) \;\; \forall \;\; x, y \in M$. Si además g es biyectiva, entonces es una **isometría**.

Teorema 1.7 Si existen $(M, \delta), (M', \delta'), (M'', \delta'')$ y $g : M \to M'$ y $h : M \to M'$ son isometrías, entonces $h \circ g$ y g^{-1} también son isometrías.

Definición 1.8 La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si $g \in \mathrm{Isom}(M)$ entonces $g^{-1} \in \mathrm{Isom}(M)$
- La isometría identidad, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Isom}(M)$

Definición 1.12 Si (M, δ), para $a, b \in M$ se llama **segmento** de extremos a y b y se representa por $[a, b]$ al conjunto $[a, b] = \{x \in M \mid \delta(a, x) + \delta(x, b) = \delta(a, b)\}$. Asimismo, $x, y, z \in M$ están alineados si $(x < y < z)$ $y \in [x, z]$.

Ejercicio 1.5 Para $\sigma \in \{1, -1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría para $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

Page intentionally left in blank

2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

Axioma P1 Si tenemos el conjunto $\mathbb{P}$, denominado **plano**, y la aplicación $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ llamada **distancia**, entonces$(\mathbb{P}, d)$ es un espacio métrico.

Definición 2.2 Una **recta** $r \subset \mathbb{P}$ satisface

- r contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos A, B, C, están alineados si están en r.

Axioma P2 $\mathbb{P}$ contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos, A y B de $\mathbb{P}$ pasa una recta, r_{AB}.

Definición 2.6 / **Teorema 2.7** Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por $a \parallel b$. Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

⚠ **Axioma P3** Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ existe una biyección $\gamma : r \to \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(X) - \gamma(Y)| = |x - y| = d(X, Y) \ \forall \ X, Y \in r$

Observación 2.8 Si $A, B \in r$ son distintos, entonces existe un punto $M \in r : d(A, M) = d(M, B)$ que denotamos por medio$[A, B]$ y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto $B \in r$ tal que $B =$ medio$[A, M]$.

Observación 2.9 Si r es una recta y $P \in r$, entonces r se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$ y $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$.

Axioma P4 Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ hay dos subconjuntos H^1 y H^2, denominados **semiplanos** de r, que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si $X, Y \in H^i$ entonces $[X, Y] \subset H^i$
- Si $X \in H^1$ y $Y \in H^2$ entonces $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$.

Definición 2.15 Sean P, Q, R no alineados, entonces el triángulo $\triangle\{P, Q, R\}$, o $\triangle PQR$ está formado por los segmentos $[P, Q]$, $[Q, R]$, $[P, R]$, llamados lados, y los vértices P, Q, R.

Teorema 2.16 [Axioma de Pasch]a Dado un triángulo $\triangle PQR$ y una recta r; si r corta a $[P, Q]$, entonces o corta a $[P, R]$ o a $[Q, R]$.

Definición 2.17 = 1.5 Una **isometría** en $\mathbb{P}$ es una biyección $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ que cumple que $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y) \ \forall \ X, Y \in \mathbb{P}$.

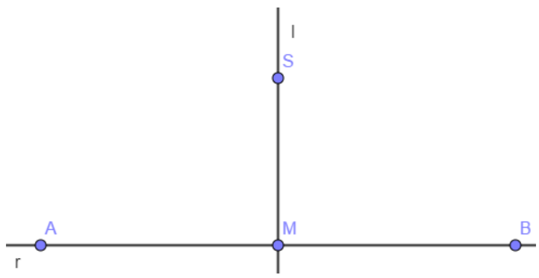
Teorema 2.18 Si $A, B \in \mathbb{P}$ y $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

Axioma P5 Si $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$ y $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$ son dos pares de puntos que cumplen $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$ entonces existe $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ tal que $g(A_i) = B_i$. Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

Axioma P6 Para toda recta r existe una isometría σ llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$

Definición 2.23 / **Teorema 2.25** / **Corolario 2.30** Una recta l es **ortogonal** a r si para todo $S \in l$ y para todo par de puntos A, B que cumple que $M =$ medio$[A, B]$, de modo que $l \cap r = M$, entonces se da que $d(A, S) = d(S, B)$. Se denota $l \perp_M r$. En estas condiciones, $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S, A) = d(S, B)\}$, se denomina **mediatriz** de $[A, B]$.



Lema 2.21 Si σ_r entonces, para todo X, medio$[X, \sigma_r(X)] \in r$.

Observación 2.24 Si $l \perp r$ y $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g(l) \perp g(r)$.

⚠ **Teorema 2.26** Si $l, r \subset \mathbb{P}$ cortan en M y σ_l, σ_r son dos reflexiones de l y r, entonces se cumple que $l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$.

⚠ **Teorema 2.27 / 2.29** Para toda recta r y todo punto $S \in \mathbb{P} - r$, existe una recta l ortogonal a r, que pasa por S. Si r es una recta, y $M \in r$, entonces existe l tal que $l \perp_M r$.

Axioma P7 Para toda recta r y todo punto P existe sólo una recta **paralela** a r que pase por P.

Teorema 2.31 / 2.33 Si $a \perp l$ y $b \perp l$ entonces $a \parallel b$. Sean $a \parallel b$. Entonces, para todo $A \in a$, la única recta $l \perp_A a$ también es ortogonal a b.

Teorema 2.32 Las rectas parallelas forman una relación de equivalencia.

- Reflexividad: $a \parallel a$
- Simetría: $a \parallel b \to b \parallel a$
- Transitividad $a \parallel b$ y $b \parallel c \to a \parallel c$

Ejercicio 2.6 Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. Para todo t, existe un único $P_t \in r$ que cumple $d(P_t, A) = |t|$ y $d(P_t, B) = \left|t - d(A, B)\right|$. En definitiva, la posición de P_t está sólamente determinada por las distancias $d(A, P_t)$ y $d(P_t, B)$.

3. Isometrías del plano

Definición 3.1 Para una aplicación $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $P \in \mathcal{M}$ es un **punto fijo** de ϕ si $\phi(P) = P$; y $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ es un **subconjunto invariante** de ϕ si $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{M}$.

Lema 3.2 Si $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ y $A \neq B$ son dos puntos fijos de g, entonces todo $X \in r_{AB}$ es punto fijo de g.

Definición 3.3 Si $g, g' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$, g y g' son **conjugadas** si existe una isometría h tal que $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$.

Teorema 3.4 Un punto P es fijo de g sii $h^{-1}(P)$ es un punto fijo de g'. Es decir

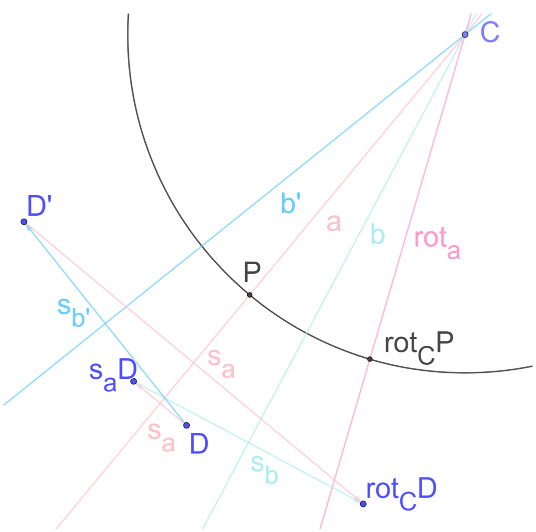
Demostración. Si $h^{-1}(P)$ es punto fijo de g', entonces $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$. Por tanto, $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$, luego $g(P) = P$.

Ejemplo 3.5 Una reflexión sobre r cumple que

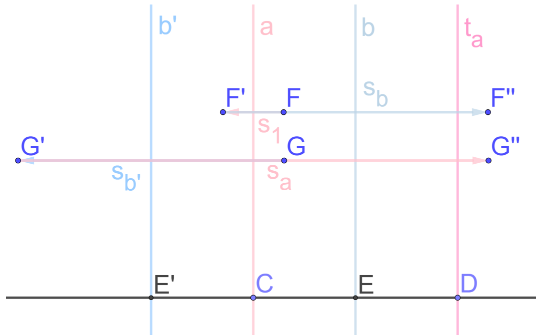
- $\sigma_r \circ \sigma_r = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$ y $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$ (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$ y viceversa.
- X y $\sigma_r(X)$ se encuentran en una recta ortogonal a r.

⚠ **Teorema 3.6** Sea $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P})$ y sea r_{AB}. Si A, B son puntos fijos en g, entonces o bien $g = \sigma_r$ o bien $g = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$.

Teorema 3.9 Llamamos ρ una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo C. Para toda recta a pasando por C existen dos rectas b, b' únicas tales que $\rho = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$.



Ejercicio 3.1 Llamamos τ una **traslación** a una isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta c invariante, es decir, $\tau(c) = c$. entonces para toda recta $a \perp c$ existen dos rectas $b, b' \perp c$ que cumplen $\tau = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$. Además, si $\tau(l) = l$, entonces $l \parallel c$.



Ejercicio 3.2 Si $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{P}) \mid g$ es rotación de centro $P\} \cup \{\mathrm{id}_{\mathbb{P}}\}$ entonces

- Si a es una recta que pasa por P, entonces $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$.
- $gh = hg$ para todo $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$.
- Para $X \in \mathbb{P} - \{P\}$ y $g(X) = h(X)$ entonces $g = h$.

Ejercicio 3.3 Si h es una isometría

- Si $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ entonces $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si r es una recta entonces $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

Ejercicio 3.3 Si a, b son rectas en $\mathbb{P}$

- $\sigma_a\sigma_b\sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a\sigma_b = \sigma_b\sigma_a \iff a \perp b$

Ejemplo 3.12 Sean a, b tales que $a \perp_P b$. Entonces la rotación es de 180° y se llama **reflexión central** si se denota como σ_P. Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P\sigma_P = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$
- Para todo X, $\sigma_P(X)$ es el único punto que cumple $P = \mathrm{medio}[X, \sigma_P(X)]$.
- σ_P es independiente de la elección de rectas $a \perp b$.

Teorema 3.13 Las rectas r y $\sigma_P(r)$ son paralelas.

Ejemplo 3.14 Una **reflexión con deslizamiento** ϕ es una composición de una reflexión σ_c y una traslación τ: $\phi = \tau\sigma_c$. ϕ deja invariante sólo la recta c, y no tiene ningún punto invariante.

Teorema 3.15 Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones σ:

	Con puntos fijos	Sin puntos fijos
par	ρ	τ
impar	σ	ϕ

Teorema 3.16 Si g, g' son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

4. Ángulos

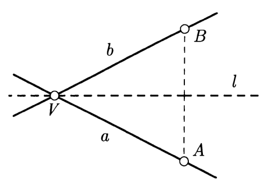
Definición 4.1 Sean r, l dos rectas con un punto V en común. Sean $\overline{r}$ y $\overline{l}$ dos semirrectas determinadas por V en r y l. El par $\{\overline{l}, \overline{r}\}$ es un **ángulo**. V es el vértice del ángulo y $\overline{l}$ y $\overline{r}$ son los lados del ángulo. El ángulo se designa por $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ o, si no hay lugar a confusión, $\angle V$. Así, por ejemplo, dado un triángulo $\triangle PQR$, $\angle P$ es el ángulo formado por P con $[P, Q]$ y $[P, R]$.

Observación 4.4 Si $r = l$, y $\overline{r}_1$ y $\overline{r}_2$ son las semirrectas determinadas por V, entonces, en estas circunstancias, el ángulo $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_2\}$ se denomina **ángulo llano** y $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_1\}$ se denomina **ángulo nulo**.

Definición 4.5 Un ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y un ángulo $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **congruentes** si existe una isometría g tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$. Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como $\angle A = \angle B$.

Observación 4.6/4.8 Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ tiene vértice V y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ tiene vértice V', y g es una isometría tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$, entonces $g(V) = V'$. Asimismo, si existe una isometría h que hace $h(V) = V'$, entonces $h(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$.

Ejemplo 4.9 Consideramos las rectas $a \neq b$ que cortan en V, con sus respectivas semirrectas $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2$. Consideramos $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ y elegimos los puntos $A \in \overline{a}_1, B \in \overline{b}_1$ a igual distancia, $d(V, A) = d(V, B)$. Existe una recta $l \perp r_{AB}$ que pasa por V (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**. La bisectriz l cumple que $\sigma_l(A) = B, \sigma_l(\overline{a}_1) = \overline{b}_1$ y viceversa. Además, si $\overline{l}$ es la semirrecta que corta a $[A, B]$, entonces $\angle\{\overline{a}_1, \overline{l}\} = \angle\{\overline{b}_1, \overline{l}\}$.

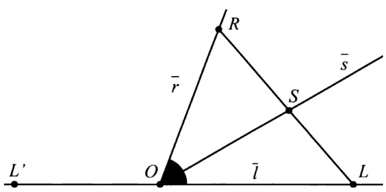


Teorema 4.11 Sean a, b que cortan en V. El ángulo $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ es congruente con $\angle\{\overline{a}_2, \overline{b}_2\}$ y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

Teorema 4.13/Definición 4.23 Sean $l \perp_V r$ y $l' \perp_{V'} r'$. Entonces $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son congruentes. En este caso, los ángulos $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

Definición 4.15 Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ no es ni nulo ni llano, y H_l^1 es el semiplano que contiene a $\overline{r}$, y H_r^1 es el semiplano que contiene a $\overline{l}$, entonces el ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ viene determinado como el conjunto $H_l^1 \cap H_r^1$.

Teorema 4.18 [De la barra transversal] Sea $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ con vértice V y sean $L \in \overline{l}, R \in \overline{r}$. Una semirrecta $\overline{s}, V \in \overline{s}$ está dentro de $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ sii corta a $[L, R] - \{L, R\}$.



Definición 4.19 (Comparación de ángulos) Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, se dice que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ es menor que $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, si existe una isometría g tal que $g(\overline{a}) = \overline{c}$ y que $g(\overline{b})$ está en el interior de $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$

Teorema 4.21 Si existen 4 ángulos tales que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{a}', \overline{b}'\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\} = \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$, y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}', \overline{b}'\} \prec \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$.

Teorema 4.22 Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, o $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \succ \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$.

Definición 4.25 Sea $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ con vértice V y $\overline{b}$ una semirrecta en el interior de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$. Entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ es la **suma** de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$, o $\angle\{\overline{b}, \overline{c}\} = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\} + \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$

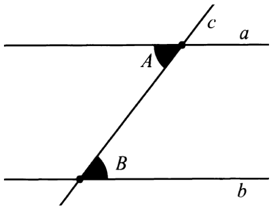
Definición 4.26 Para tres ángulos $\angle U, \angle V, \angle W$, decimos que $\angle V = \angle U + \angle W$ si existe una descomposición $\angle V = \angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$, $\angle U = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$, $\angle W = \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$.

Definición 4.28 Dado $\triangle PQR$, el lado $[R, Q]$ y el ángulo $\angle P$ son **opuestos**.

Definición 4.29 / **Teorema 4.30** Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si $\triangle PQR$ es isósceles y $[P,Q]$ es congruente con $[P,R]$, existe una reflexión σ tal que $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$, la bisectriz de $\angle P$. Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

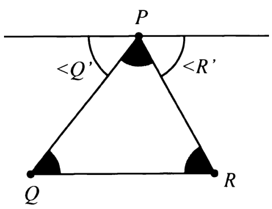
Definición 4.34 / **Teorema 4.35** Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación ρ tal que $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$.

Definición 4.39 / **Teorema 4.40** Sean $a \parallel b$ y c una recta que corta a a en A y a b en B. El par de ángulos $\angle A, \angle B$ de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.



Teorema 4.41 La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Si hacemos una recta p paralela a $[Q,R]$ tenemos que (Q,Q') y (R,R') son pares de ángulos internos y la suma $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$ es un ángulo llano.



Ejercicio 4.9 Sea ρ una rotación de centro C y sea $t = \triangle\{C, P, \rho(P)\}$. Entonces la clase de congruencia del ángulo $\angle_t C$ se denomina ángulo de rotación $\angle\rho$.

Ejercicio 4.11 Un ángulo orientado es un ángulo donde se fija un orden en sus lados. Dos ángulos orientados $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}, \overline{l})$ y $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}', \overline{l}')$ son congruentes si existe una isometría donde $g(\overline{r}) = \overline{r}'$ y $g(\overline{l}) = \overline{l}'$ y se conserva la orientación del plano. Así $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}, \overline{l})$ la clase de congruencia con todos los ángulos congruentes.

5. Teorema de Tales

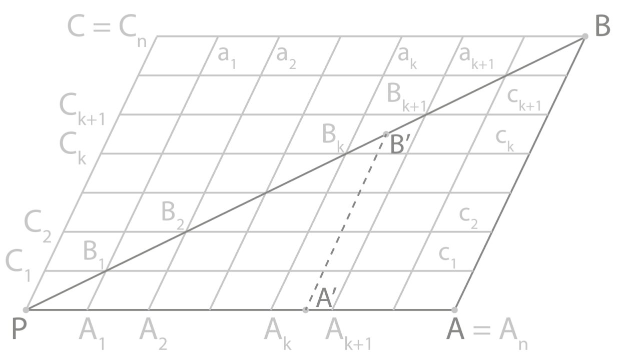
Definición 5.0 Un **cuadrilátero** es una cuaterna ordenada de puntos [vértices] de $\mathbb{P}$, (P,Q,R,S) formada por los segmentos $[P,Q],[Q,R],[R,S],[S,P]$ [lados] si dos cualesquiera segmentos son disjuntos o tienen un extremo en común. Dos vértices extremos del mismo lado son adyacentes y, si no, son opuestos.

Definición 5.1 Un cuadrilátero $\square PABC$ es un **paralelogramo** si medio$[P,B]$ = medio$[A,C] = M$, donde los segmentos $[P,B]$ y $[A,C]$ son las diagonales, y M es el centro.

Observación 5.2 Sea $\square PABC$ con centro M. Por las propiedades de las reflexiones centrales, se tiene que $\sigma_M(P) = B$ y $\sigma_M(A) = C$ [y viceversa]. Además, por tales propiedades, se tiene que $r_{PA} \parallel r_{BC}$ y $r_{PC} \parallel r_{AB}$; y $d(P,A) = d(B,C)$ y $d(P,C) = d(A,B)$.

Observación 5.3 Si existen tres puntos P,A,C no alineados, se puede construir un paralelogramo de varias maneras. Una forma es aplicar el axioma de las paralelas y proyectar r_{PA} en C, y r_{PC} en A. Otra forma es obtener M = medio$[C,A]$, crear la recta r_{PM} y proyectar el punto B como el que $PM = d(P,M) = d(M,B) = MB$.

Teorema 5.5 [Tales] Sea $\triangle PAB$ y sean $A' \in [P,A]$, $B' \in [P,B]$ dos puntos tales que $r_{AB} \parallel r_{A'B'}$. En estas condiciones se tiene que $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$.



Demostración. Vamos a basar la demostración en la figura de arriba. Diseñamos el paralelogramo $\square PABC$ y dividimos el lado $[P,A]$ en n segmentos con puntos de división $A_1, A_2, \cdots, A_n$, de modo que $d(A_i, A_{i+1}) = \frac{d(P,A)}{n}$. El mismo proceso se realiza con el lado $[P,C]$. Además, introducimos las rectas $a_k \parallel r_{PC}$ y $c_k \parallel r_{PA}$, de modo que el punto P_{kl} es la intersección de a_k con c_l. Vemos que $B_i = P_{ii}$. También observamos que existen los paralelogramos $\square A_k A_{k+1} P_{k+1,l} P_{k,l}$ y $\square C_l C_{l+1} P_{k,l+1} P_{k,l}$, de modo que $P_{kl}P_{k+1,l} = \frac{PA}{n}$ y $P_{kl}P_{k,l+1} = \frac{PC}{n}$. Ahora consideramos B_k. Sabemos que $\sigma_{B_k}(r) \parallel r$, $\sigma_{B_k}(c_k) = c_k$ y $\sigma_{B_k}(P_{k-1,k}) = P_{k+1,k}$. También, como $a_{k-1} \parallel a_{k+1}$, $\sigma_{B_k}(a_{k-1}) = a_{k+1}$, y por el mismo criterio, $\sigma_{B_k}(c_{k-1}) = c_{k+1}$. Con esto demostramos que

$$\sigma_{B_k}(B_{k-1}) = \sigma_{B_k}(P_{k-1,k-1}) = P_{k+1,k+1} = B_{k+1}$$

Por tanto, los puntos B_{k-1}, B_k, B_{k+1} están alineados y $B_{k-1}B_k = B_k B_{k+1}$. Por tanto, $B_k B_{k+1} = \frac{PB}{n}$. Es decir, hemos demostrado que

$$P_{kl}P_{k+1,l} = \frac{PA}{n} \qquad P_{kl}P_{k,l+1} = \frac{PC}{n} \qquad P_{kl}P_{k+1,l+1} = \frac{PB}{n}$$

Si reordenamos, tenemos que

$$\frac{PA_k}{PA} = \frac{P_{0,0}P_{k,0}}{PA} = \frac{k}{n} = \frac{P_{0,0}P_{k,k}}{PB} = \frac{PB_k}{PB}$$

Y con esto demostramos el teorema para los puntos k. Si tenemos A' y B' en la figura tales que $A' \in [A_k, A_{k+1}]$, de modo que $a' = r_{A'B'}$ está entre a_k y a_{k+1}, y es paralelo a estas, haciendo que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$. Por ser $A' \in [A_k, A_{k+1}]$ entonces $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k}{PA} + \frac{1}{n}$ y, como $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$, entonces $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n}$. Dado que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$ entonces

$$\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$$

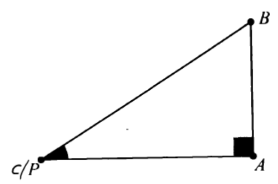
Si nos fijamos en los elementos de azul, vemos que n puede hacerse tan pequeño como queramos, de modo que, en el límite

$$\frac{PB'}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} \iff \frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA}$$

Corolario 5.6 En base al teorema de Tales, se tiene que

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

Definición 5.7 Dado un triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces la **hipotenusa** es el lado opuesto a $\angle A$, $[P,B]$. Los lados adyacentes, $[P,A],[B,A]$, son los **catetos**.

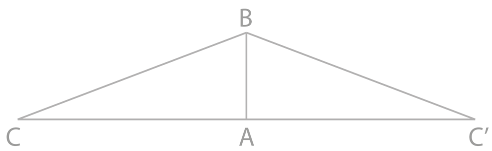


Definición 5.8 Sea el triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces se definen las relaciones

- seno: $\operatorname{sen}\angle P = \frac{BA}{PB}$
- coseno: $\cos\angle P = \frac{PA}{PB}$
- tangente: $\tan\angle P = \frac{BA}{PA}$
- cotangente: $\cot\angle P = \frac{PA}{BA}$

Teorema 5.10 Las razones trigonométricas para $\angle P$ no dependen del triángulo $\triangle PAB$, sólo de la clase de congruencia de $\angle P$.

Teorema 5.12 Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, la medida de los catetos, AB, AC, es menor que la de la hipotenusa BC.



Demostración. Con la construcción anterior, vemos que los puntos B, C, C' no están alineados, pues $C \in r_{AC}$ y $r_{AB} \perp r_{AC}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $2AC = CC' < BC + BC' = 2BC$.

Definición 5.13 La **medida de un ángulo** agudo $\angle P$ es el número real:

$$\measuredangle P = \arccos(\cos\angle P)$$

Teorema 5.14 / 5.19 Si $\angle P = \angle Q$ entonces $\measuredangle P = \measuredangle Q$, sean $\angle P$ y $\angle Q$ agudos y obtusos.

Definición 5.15 Dado un ángulo $\angle\overline{a},\overline{b}_1 = \angle V$, un **ángulo suplementario** $\overline{\angle V} = \angle\overline{a},\overline{b}_2$ es aquel donde $\overline{b}_1$ y $\overline{b}_2$ son las dos semirrectas de b en V, y $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ comparten $\overline{a}$. La suma de $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ es un ángulo llano.

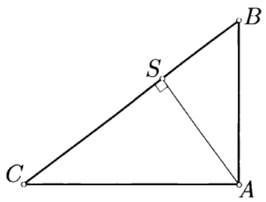
Teorema 5.17 Si dos ángulos son congruentes, sus suplementarios lo son.

Definición 5.18 Para un ángulo obtuso $\angle P$ se tiene $\operatorname{sen}\angle P = \operatorname{sen}\overline{\angle P}$ y $\cos\angle P = -\cos\overline{\angle P}$

6. Teorema de Pitágoras

Teorema 6.1 [Pitágoras] Para todo triángulo rectángulo $\angle ABC$ con $\angle A$ recto, se tiene que

$$BC^2 = AC^2 + AC^2$$



Demostración. Consideramos el punto $S \in r_{BC}$ tal que $r_{SA} \perp r_{CB}$. Pese a que es evidente, hay que demostrar que $S \in [B,C]$. Observamos que $SC < CA < BC$, la primera igualdad por $\cos\angle C = \frac{SC}{CA} < 1 \iff SC < CA$. Del mismo modo, $BS < BC$. Entonces, $S \in [B,C]$. Ahora observamos que

$$\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = \frac{CS}{CA}$$

Por otra parte, también vemos que

$$\cos\angle B = \frac{BS}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

De ambas expresiones tenemos que (1) $CA^2 = CB \cdot CS$ y (2) $AB^2 = BS \cdot BC$. Así, $CB \cdot CS + CB \cdot BS = CB(CS + BS) = CB^2 = CA^2 + BA^2$.

Corolario 6.3 Sea $\angle C$, entonces

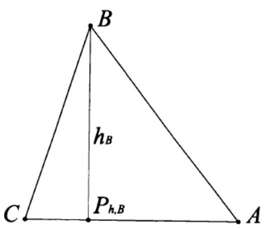
$$\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = 1$$

Demostración. Si tenemos que $BC = 1$, entonces $\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = CA$ y $\operatorname{sen}\angle C = \frac{BA}{BC} = BC$. Aplicando el teorema de Pitágoras, entonces $\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = BA^2 + CA^2 = BC^2 = 1$.

Teorema 6.4 Dado $x \in [0,\pi] \subset \mathbb{R}$, existe un ángulo $\angle V$ tal que $\measuredangle V = x$.

Teorema 6.5 $\angle P = \angle Q$ sii $\measuredangle P = \measuredangle Q$

Definición 6.6 Sea $\triangle ABC$ y $h_B \perp r_{CA}$ y que pasa por B, y sea el punto $P_{h,b}$ el punto de corte de h_B y r_{CA}. Entonces, $P_{h,b}$ es el **pie de la altura de** B, y $[P_{h,b}, B]$ es la **altura** de $\triangle ABC$ desde B.



Teorema 6.7 En el triángulo de la **Definición 6.6**, si $\angle A$ y $\angle C$ son agudos, entonces $P_{h,b} \in [C,A]$. Si $\angle A$ o $\angle C$ es obtuso, entonces $P_{h,b} \notin [C,A]$.

Teorema 6.8 [Fórmula del coseno] Sea $\triangle ABC$ un triángulo, entonces se cumple que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

Demostración. Basándonos en la figura de la **Definición 6.6**, y por el **Teorema 6.7** [en el caso de $\triangle$ acutángulo], entonces se forman dos triángulos rectángulos $\triangle P_{hB}BC$ y $\triangle P_{hB}BA$ donde se verifica que $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ Por el **Teorema de Pitágoras** tenemos que

$$AB^2 = P_{hB}A^2 + P_{hB}B^2 \qquad BC^2 = BP_{hB}^2 + P_{hB}C^2$$

Si sustituimos una igualdad en otra tenemos que

$$BC^2 = CP_{hB}^2 + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Como $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ entonces

$$BC^2 = (CA - P_{hB}A)^2 + AB^2 - P_{hB}A^2 =$$

$$CA^2 + P_{hB}A^2 - 2 \cdot CA \cdot P_{hB}A + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Si quitamos las partes en azul, y consideramos que $P_{hB}A = AB\cos\angle A$, entonces queda el teorema demostrado.

Corolario 6.9 Dado un triángulo donde $BC^2 = AB^2 + AC^2$ entonces es un triángulo rectángulo, con $\angle A$ recto. Demostración. Si aplicamos el **Teorema del coseno**, entonces, el término $2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 0$, y como $AB \neq 0$, $AC \neq 0$, entonces $\cos\angle A = 0 \iff \angle A$ es recto (**Teorema 6.5**).

Teorema 6.10 [Fórmula de los senos] Sea $\triangle ABC$, entones se verifica

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A}$$

Demostración. Seguimos con la figura de la **Definición 6.6**. Vemos que $BP_{hB} = BC\operatorname{sen}\angle C = BA\operatorname{sen}\angle A$. Si el triángulo es obtusángulo también se cumple porque los senos se mantienen. Simplemente, igualando BP_{hB} tenemos que $\frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{BA}{\operatorname{sen}\angle C}$. El resto de igualdades se consiguen con las demás alturas.