# La(s) hoja(s) de Chema

## 1. Espacios métricos

**Definición 1.1** $\delta : M \times M \to \mathbb{R}$ es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x, y) > 0$ si $x \neq y$, o $\delta(x, x) = 0$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$

**Ejercicio 1.1** Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a: $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \cdots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

**Teorema 1.4** Si $M' \subset M$ y existe el espacio métrico $(M, \delta)$, entonces también existe $(M', \delta)$, y se llama **métrica inducida** por $(M, \delta)$.

**Definición 1.5** Sean $(M, \delta), (M', \delta')$ y $g : M \to M'$. Se dice que $g$ conserva las distancias si $\delta'(g(x), g(y)) = \delta(x, y) \ \ \forall \ \ x, y \in M$. Si además $g$ es biyectiva, entonces es una **isometría**.

**Teorema 1.7** Si existen $(M, \delta), (M', \delta'), (M'', \delta'')$ y $g : M \to M'$ y $h : M \to M'$ son isometrías, entonces $h \circ g$ y $g^{-1}$ también son isometrías.

**Definición 1.8** La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si $g \in \mathrm{Isom}(M)$ entonces $g^{-1} \in \mathrm{Isom}(M)$
- La isometría identidad, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Isom}(M)$

**Definición 1.12** Si $(M, \delta)$, para $a, b \in M$ se llama **segmento** de extremos $a$ y $b$ y se representa por $[a, b]$ al conjunto $[a, b] = \{x \in M \mid \delta(a, x) + \delta(x, b) = \delta(a, b)\}$. Asimismo, $x, y, z \in M$ están alineados si $(x < y < z)$ $y \in [x, z]$.

**Ejercicio 1.5** Para $\sigma \in \{1, -1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría para $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

*Page intentionally left in blank*

## 2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

**Axioma P1** Si tenemos el conjunto $\mathbb{P}$, denominado **plano**, y la aplicación $d : \mathbb{P}\times\mathbb{P} \to \mathbb{R}$ llamada **distancia**, entonces$(\mathbb{P}, d)$ es un espacio métrico.

**Definición 2.2** Una **recta** $r \subset \mathbb{P}$ satisface

- $r$ contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos $A, B, C$, están alineados si están en $r$.

**Axioma P2** $\mathbb{P}$ contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos, $A$ y $B$ de $\mathbb{P}$ pasa una recta, $r_{AB}$.

**Definición 2.6** / **Teorema 2.7** Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por $a \parallel b$. Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

⚠ **Axioma P3** Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ existe una biyección $\gamma : r \to \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(X) - \gamma(Y)| = |x - y| = d(X, Y)\ \forall\ X, Y \in r$

**Observación 2.8** Si $A, B \in r$ son distintos, entonces existe un punto $M \in r : d(A, M) = d(M, B)$ que denotamos por medio$[A, B]$ y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto $B \in r$ tal que $B = \text{medio}[A, M]$.

☻ Demostración. Tomamos una biyección $\gamma : r \to \mathbb{R}$ y suponemos $\gamma(A) = a, \gamma(B) = b$. Para $X \in r$ tomamos $\gamma(X) = t$. Si suponemos $A \neq B$ entonces $d(A, X) = d(X, B) \iff \big|(t-a)\big| = \big|(t-b)\big| \iff t = \frac{a+b}{2}$. Por tanto, $M$ sólo puede ser $\gamma^{-1}(t)$. Si definimos, por tanto $M = \gamma^{-1}(\frac{a+b}{2})$ se tiene que

$$d(A, M) = \big|\gamma(M) - \gamma(A)\big| = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{1}{2}\big|b - a\big| = \frac{1}{2}d(A, B)$$

**Observación 2.9** Si $r$ es una recta y $P \in r$, entonces $r$ se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$ y $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$.

**Axioma P4** Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ hay dos subconjuntos $H^1$ y $H^2$, denominados **semiplanos** de $r$, que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si $X, Y \in H^i$ entonces $[X, Y] \subset H^i$
- Si $X \in H^1$ y $Y \in H^2$ entonces $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$.

**Definición 2.15** Sean $P, Q, R$ no alineados, entonces el triángulo $\triangle\{P, Q, R\}$, o $\triangle PQR$ está formado por los segmentos $[P, Q]$, $[Q, R]$, $[P, R]$, llamados lados, y los vértices $P, Q, R$.

**Teorema 2.16 [Axioma de Pasch]a** Dado un triángulo $\triangle PQR$ y una recta $r$; si $r$ corta a $[P, Q]$, entonces o corta a $[P, R]$ o a $[Q, R]$.

**Definición 2.17 = 1.5** Una **isometría** en $\mathbb{P}$ es una biyección $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ que cumple que $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y)\ \forall\ X, Y \in \mathbb{P}$.

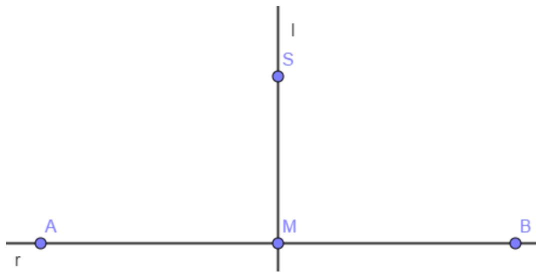
**Teorema 2.18** Si $A, B \in \mathbb{P}$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

**Axioma P5** Si $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$ y $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$ son dos pares de puntos que cumplen $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$ entonces existe $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ tal que $g(A_i) = B_i$. Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

**Axioma P6** Para toda recta $r$ existe una isometría $\sigma$ llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$

**Definición 2.23** / **Teorema 2.25** / **Corolario 2.30** Una recta $l$ es **ortogonal** a $r$ si para todo $S \in l$ y para todo par de puntos $A, B$ que cumple que $M = \text{medio}[A, B]$, de modo que $l \cap r = M$, entonces se da que $d(A, S) = d(S, B)$. Se denota $l \perp_M r$. En estas condiciones, $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S, A) = d(S, B)\}$, se denomina **mediatriz** de $[A, B]$.




**Lema 2.21** Si $\sigma_r$ entonces, para todo $X$, medio$[X, \sigma_r(X)] \in r$.

**Observación 2.24** Si $l \perp r$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g(l) \perp g(r)$.

⚠ **Teorema 2.26** Si $l, r \subset \mathbb{P}$ cortan en $M$ y $\sigma_l, \sigma_r$ son dos reflexiones de $l$ y $r$, entonces se cumple que $l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$.

⚠ **Teorema 2.27 / 2.29** Para toda recta $r$ y todo punto $S \in \mathbb{P} - r$, existe una recta $l$ ortogonal a $r$, que pasa por $S$. Si $r$ es una recta, y $M \in r$, entonces existe $l$ tal que $l \perp_M r$.

**Axioma P7** Para toda recta $r$ y todo punto $P$ existe sólo una recta **paralela** a $r$ que pase por $P$.

**Teorema 2.31 / 2.33** Si $a \perp l$ y $b \perp l$ entonces $a \parallel b$. Sean $a \parallel b$. Entonces, para todo $A \in a$, la única recta $l \perp_A a$ también es ortogonal a $b$.

**Teorema 2.32** Las rectas parallelas forman una relación de equivalencia.

- Reflexividad: $a \parallel a$
- Simetría: $a \parallel b \to b \parallel a$
- Transitividad $a \parallel b$ y $b \parallel c \to a \parallel c$

**Ejercicio 2.6** Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. Para todo $t$, existe un único $P_t \in r$ que cumple $d(P_t, A) = |t|$ y $d(P_t, B) = \left|t - d(A,B)\right|$. En definitiva, la posición de $P_t$ está sólamente determinada por las distancias $d(A, P_t)$ y $d(P_t, B)$.

## 3. Isometrías del plano

**Definición 3.1** Para una aplicación $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $P \in \mathcal{M}$ es un **punto fijo** de $\phi$ si $\phi(P) = P$; y $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ es un **subconjunto invariante** de $\phi$ si $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{M}$.

**Lema 3.2** Si $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ y $A \neq B$ son dos puntos fijos de $g$, entonces todo $X \in r_{AB}$ es punto fijo de $g$.

**Definición 3.3** Si $g, g' \in \text{Isom}(\mathbb{P})$, $g$ y $g'$ son **conjugadas** si existe una isometría $h$ tal que $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$.

**Teorema 3.4** Un punto $P$ es fijo de $g$ sii $h^{-1}(P)$ es un punto fijo de $g'$. Es decir

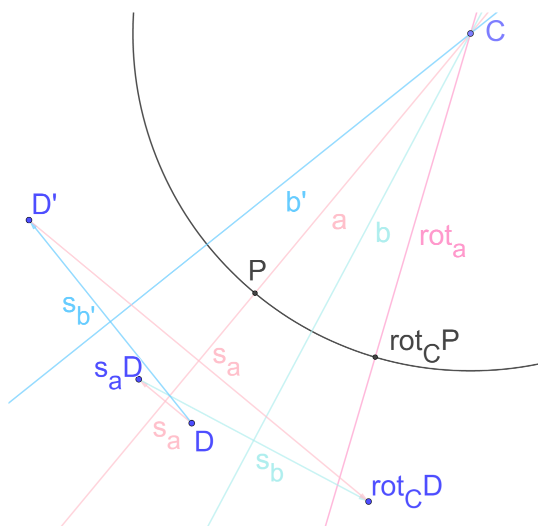
Demostración. Si $h^{-1}(P)$ es punto fijo de $g'$, entonces $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$. Por tanto, $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$, luego $g(P) = P$.

**Ejemplo 3.5** Una reflexión sobre $r$ cumple que

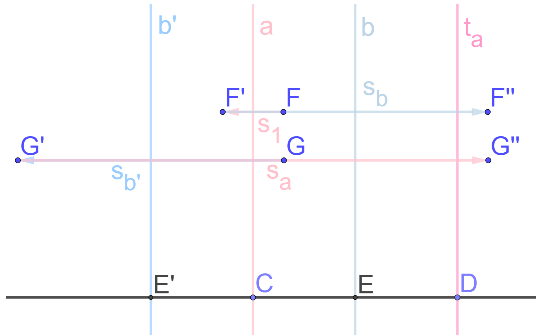
- $\sigma_r \circ \sigma_r = \text{id}_\mathbb{P}$ y $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$ (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$ y viceversa.
- $X$ y $\sigma_r(X)$ se encuentran en una recta ortogonal a $r$.

⚠ **Teorema 3.6** Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ y sea $r_{AB}$. Si $A, B$ son puntos fijos en $g$, entonces o bien $g = \sigma_r$ o bien $g = \text{id}_\mathbb{P}$.

**Teorema 3.9** Llamamos $\rho$ una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo $C$. Para toda recta $a$ pasando por $C$ existen dos rectas $b, b'$ únicas tales que $\rho = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$.




**Ejercicio 3.1** Llamamos $\tau$ una **traslación** a una isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta $c$ invariante, es decir, $\tau(c) = c$. entonces para toda recta $a \perp c$ existen dos rectas $b, b' \perp c$ que cumplen $\tau = \sigma_b\sigma_a = \sigma_a\sigma_{b'}$. Además, si $\tau(l) = l$, entonces $l \parallel c$.




**Ejercicio 3.2** Si $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{P}) \mid g$ es rotación de centro $P\} \cup \{\text{id}_\mathbb{P}\}$ entonces

- Si $a$ es una recta que pasa por $P$, entonces $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$.
- $gh = hg$ para todo $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$.
- Para $X \in \mathbb{P} - \{P\}$ y $g(X) = h(X)$ entonces $g = h$.

**Ejercicio 3.3** Si $h$ es una isometría

- Si $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ entonces $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si $r$ es una recta entonces $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

**Ejercicio 3.3** Si $a, b$ son rectas en $\mathbb{P}$

- $\sigma_a\sigma_b\sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a\sigma_b = \sigma_b\sigma_a \iff a \perp b$

**Ejemplo 3.12** Sean $a, b$ tales que $a \perp_P b$. Entonces la rotación es de 180° y se llama **reflexión central** si se denota como $\sigma_P$. Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P\sigma_P = \text{id}_\mathbb{P}$
- Para todo $X$, $\sigma_P(X)$ es el único punto que cumple $P = \text{medio}[X, \sigma_P(X)]$.
- $\sigma_P$ es independiente de la elección de rectas $a \perp b$.

**Teorema 3.13** Las rectas $r$ y $\sigma_P(r)$ son paralelas.

**Ejemplo 3.14** Una **reflexión con deslizamiento** $\phi$ es una composición de una reflexión $\sigma_c$ y una traslación $\tau$: $\phi = \tau\sigma_c$. $\phi$ deja invariante sólo la recta $c$, y no tiene ningún punto invariante.

**Teorema 3.15** Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones $\sigma$:

| | Con puntos fijos | Sin puntos fijos |
|---|---|---|
| par | $\rho$ | $\tau$ |
| impar | $\sigma$ | $\phi$ |

**Teorema 3.16** Si $g, g'$ son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

# 4. Ángulos

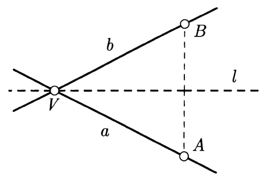
**Definición 4.1** Sean $r, l$ dos rectas con un punto $V$ en común. Sean $\overline{r}$ y $\overline{l}$ dos semirrectas determinadas por $V$ en $r$ y $l$. El par $\{\overline{l}, \overline{r}\}$ es un **ángulo**. $V$ es el vértice del ángulo y $\overline{l}$ y $\overline{r}$ son los lados del ángulo. El ángulo se designa por $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ o, si no hay lugar a confusión, $\angle V$. Así, por ejemplo, dado un triángulo $\triangle PQR$, $\angle P$ es el ángulo formado por $P$ con $[P, Q]$ y $[P, R]$.

**Observación 4.4** Si $r = l$, y $\overline{r}_1$ y $\overline{r}_2$ son las semirrectas determinadas por $V$, entonces, en estas circunstancias, el ángulo $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_2\}$ se denomina **ángulo llano** y $\angle\{\overline{r}_1, \overline{r}_1\}$ se denomina **ángulo nulo**.

**Definición 4.5** Un ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y un ángulo $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **congruentes** si existe una isometría $g$ tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$. Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como $\angle A = \angle B$.

**Observación 4.6/4.8** Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ tiene vértice $V$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ tiene vértice $V'$, y $g$ es una isometría tal que $g(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$, entonces $g(V) = V'$. Asimismo, si existe una isometría $h$ que hace $h(V) = V'$, entonces $h(\{\overline{l}, \overline{r}\}) = \{\overline{l}', \overline{r}'\}$.

**Ejemplo 4.9** Consideramos las rectas $a \neq b$ que cortan en $V$, con sus respectivas semirrectas $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2$. Consideramos $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ y elegimos los puntos $A \in \overline{a}_1, B \in \overline{b}_1$ a igual distancia, $d(V, A) = d(V, B)$. Existe una recta $l \perp r_{AB}$ que pasa por $V$ (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**. La bisectriz $l$ cumple que $\sigma_l(A) = B, \sigma_l(\overline{a}_1) = \overline{b}_1$ y viceversa. Además, si $\overline{l}$ es la semirrecta que corta a $[A, B]$, entonces $\angle\{\overline{a}_1, \overline{l}\} = \angle\{\overline{b}_1, \overline{l}\}$.

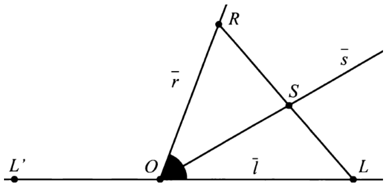



**Teorema 4.11** Sean $a, b$ que cortan en $V$. El ángulo $\angle\{\overline{a}_1, \overline{b}_1\}$ es congruente con $\angle\{\overline{a}_2, \overline{b}_2\}$ y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

**Teorema 4.13/Definición 4.23** Sean $l \perp_V r$ y $l' \perp_{V'} r'$. Entonces $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son congruentes. En este caso, los ángulos $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}', \overline{r}'\}$ son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

**Definición 4.15** Si $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ no es ni nulo ni llano, y $H_l^1$ es el semiplano que contiene a $\overline{r}$, y $H_r^1$ es el semiplano que contiene a $\overline{l}$, entonces el ángulo $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ y $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ viene determinado como el conjunto $H_l^1 \cap H_r^1$.

**Teorema 4.18 [De la barra transversal]** Sea $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ con vértice $V$ y sean $L \in \overline{l}, R \in \overline{r}$. Una semirrecta $\overline{s}, V \in \overline{s}$ está dentro de $\angle\{\overline{l}, \overline{r}\}$ sii corta a $[L, R] - \{L, R\}$.




**Definición 4.19 (Comparación de ángulos)** Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, se dice que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ es menor que $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, si existe una isometría $g$ tal que $g(\overline{a}) = \overline{c}$ y que $g(\overline{b})$ está en el interior de $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$

**Teorema 4.21** Si existen 4 ángulos tales que $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{a}', \overline{b}'\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\} = \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$, y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}', \overline{b}'\} \prec \angle\{\overline{c}', \overline{d}'\}$.

**Teorema 4.22** Dados $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ y $\angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \prec \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} = \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$, o $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\} \succ \angle\{\overline{c}, \overline{d}\}$.

**Definición 4.25** Sea $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ con vértice $V$ y $\overline{b}$ una semirrecta en el interior de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$. Entonces $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ es la **suma** de $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ y $\angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$, o $\angle\{\overline{b}, \overline{c}\} = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\} + \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$

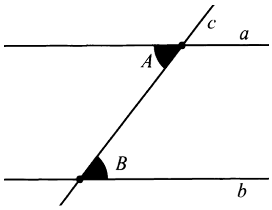
**Definición 4.26** Para tres ángulos $\angle U, \angle V, \angle W$, decimos que $\angle V = \angle U + \angle W$ si existe una descomposición $\angle V = \angle\{\overline{a}, \overline{c}\}$ , $\angle U = \angle\{\overline{a}, \overline{b}\}$ , $\angle W = \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$ .

**Definición 4.28** Dado $\triangle PQR$, el lado $[R, Q]$ y el ángulo $\angle P$ son **opuestos**.

**Definición 4.29** / **Teorema 4.30** Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si $\triangle PQR$ es isósceles y $[P, Q]$ es congruente con $[P, R]$, existe una reflexión $\sigma$ tal que $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$, la bisectriz de $\angle P$. Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

**Definición 4.34** / **Teorema 4.35** Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación $\rho$ tal que $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$.

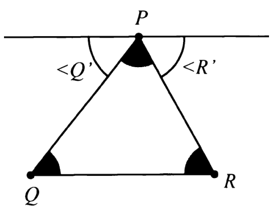
**Definición 4.39** / **Teorema 4.40** Sean $a \parallel b$ y $c$ una recta que corta a $a$ en $A$ y a $b$ en $B$. El par de ángulos $\angle A, \angle B$ de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.




Demostración. Sea $m = \text{medio}[A, B]$. La media vuelta $\sigma_M$ verifica que $\sigma_M(A) = B$ y $\sigma_M(c) = c$. Además, $\sigma_M(a)$ es paralela a $a$ y pasa por $B$, luego por el **Axioma P7**, ha de ser $b$. Por tanto, $\angle\{\overline{a}, \overline{c}\} = \angle\{\overline{b}, \overline{c}\}$ y, por tanto $\angle(A) = \angle(B)$

**Teorema 4.41** La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Si hacemos una recta $p$ paralela a $[Q, R]$ tenemos que $(Q, Q')$ y $(R, R')$ son pares de ángulos internos y la suma $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$ es un ángulo llano.




**Ejercicio 4.9** Sea $\rho$ una rotación de centro $C$ y sea $t = \triangle\{C, P, \rho(P)\}$. Entonces la clase de congruencia del ángulo $\angle_t C$ se denomina ángulo de rotación $\angle\rho$.

**Ejercicio 4.11** Un ángulo orientado es un ángulo donde se fija un orden en sus lados. Dos ángulos orientados $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}, \overline{l})$ y $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}', \overline{l}')$ son congruentes si existe una isometría donde $g(\overline{r}) = \overline{r}'$ y $g(\overline{l}) = \overline{l}'$ y se conserva la orientación del plano. Así $\overrightarrow{\angle}(\overline{r}, \overline{l})$ la clase de congruencia con todos los ángulos congruentes.

## 5. Teorema de Tales

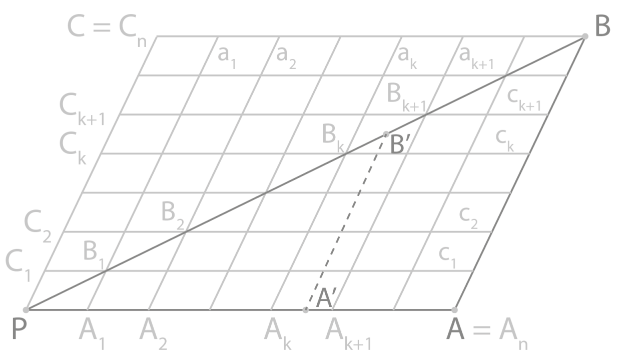
**Definición 5.0** Un **cuadrilátero** es una cuaterna ordenada de puntos [vértices] de $\mathbb{P}$, $(P, Q, R, S)$ formada por los segmentos $[P, Q], [Q, R], [R, S], [S, P]$ [lados] si dos cualesquiera segmentos son disjuntos o tienen un extremo en común. Dos vértices extremos del mismo lado son adyacentes y, si no, son opuestos.

**Definición 5.1** Un cuadrilátero $\square PABC$ es un **paralelogramo** si medio$[P, B]$ = medio$[A, C] = M$, donde los segmentos $[P, B]$ y $[A, C]$ son las diagonales, y $M$ es el centro.

**Observación 5.2** Sea $\square PABC$ con centro $M$. Por las propiedades de las reflexiones centrales, se tiene que $\sigma_M(P) = B$ y $\sigma_M(A) = C$ [y viceversa]. Además, por tales propiedades, se tiene que $r_{PA} \parallel r_{BC}$ y $r_{PC} \parallel r_{AB}$; y $d(P, A) = d(B, C)$ y $d(P, C) = d(A, B)$.

**Observación 5.3** Si existen tres puntos $P, A, C$ no alineados, se puede construir un paralelogramo de varias maneras. Una forma es aplicar el axioma de las paralelas y proyectar $r_{PA}$ en $C$, y $r_{PC}$ en $A$. Otra forma es obtener $M$ = medio$[C, A]$, crear la recta $r_{PM}$ y proyectar el punto $B$ como el que $PM = d(P, M) = d(M, B) = MB$.

☻ **Teorema 5.5 [Tales]** Sea $\triangle PAB$ y sean $A' \in [P, A]$, $B' \in [P, B]$ dos puntos tales que $r_{AB} \parallel r_{A'B'}$. En estas condiciones se tiene que $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$.




Demostración. Vamos a basar la demostración en la figura de arriba. Diseñamos el paralelogramo $\square PABC$ y dividimos el lado $[P, A]$ en $n$ segmentos con puntos de división $A_1, A_2, \cdots, A_n$, de modo que $d(A_i, A_{i+1}) = \frac{d(P,A)}{n}$. El mismo proceso se realiza con el lado $[P, C]$. Además, introducimos las rectas $a_k \parallel r_{PC}$ y $c_k \parallel r_{PA}$, de modo que el punto $P_{kl}$ es la intersección de $a_k$ con $c_l$. Vemos que $B_i = P_{ii}$. También observamos que existen los paralelogramos $\square A_k A_{k+1} P_{k+1,l} P_{k,l}$ y $\square C_l C_{l+1} P_{k,l+1} P_{k,l}$, de modo que $P_{kl} P_{k+1,l} = \frac{PA}{n}$ y $P_{kl} P_{k,l+1} = \frac{PC}{n}$. Ahora consideramos $B_k$. Sabemos que $\sigma_{B_k}(r) \parallel r$, $\sigma_{B_k}(c_k) = c_k$ y $\sigma_{B_k}(P_{k-1,k}) = P_{k+1,k}$. También, como $a_{k-1} \parallel a_{k+1}$, $\sigma_{B_k}(a_{k-1}) = a_{k+1}$, y por el mismo criterio, $\sigma_{B_k}(c_{k-1}) = c_{k+1}$. Con esto demostramos que

$$\sigma_{B_k}(B_{k-1}) = \sigma_{B_k}(P_{k-1,k-1}) = P_{k+1,k+1} = B_{k+1}$$

Por tanto, los puntos $B_{k-1}, B_k, B_{k+1}$ están alineados y $B_{k-1}B_k = B_k B_{k+1}$. Por tanto, $B_k B_{k+1} = \frac{PB}{n}$. Es decir, hemos demostrado que

$$P_{kl} P_{k+1,l} = \frac{PA}{n} \qquad P_{kl} P_{k,l+1} = \frac{PC}{n} \qquad P_{kl} P_{k+1,l+1} = \frac{PB}{n}$$

Si reordenamos, tenemos que

$$\frac{PA_k}{PA} = \frac{P_{0,0} P_{k,0}}{PA} = \frac{k}{n} = \frac{P_{0,0} P_{k,k}}{PB} = \frac{PB_k}{PB}$$

Y con esto demostramos el teorema para los puntos $k$. Si tenemos $A'$ y $B'$ en la figura tales que $A' \in [A_k, A_{k+1}]$, de modo que $a' = r_{A'B'}$ está entre $a_k$ y $a_{k+1}$, y es paralelo a estas, haciendo que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$. Por ser $A' \in [A_k, A_{k+1}]$ entonces $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k}{PA} + \frac{1}{n}$ y, como $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$, entonces $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n}$. Dado que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$ entonces

$$\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$$

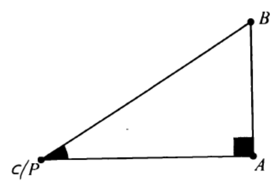
Si nos fijamos en los elementos de azul, vemos que $n$ puede hacerse tan pequeño como queramos, de modo que, en el límite

$$\frac{PB'}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} \iff \frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA}$$

**Corolario 5.6** En base al teorema de Tales, se tiene que

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

**Definición 5.7** Dado un triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces la **hipotenusa** es el lado opuesto a $\angle A$, $[P, B]$. Los lados adyacentes, $[P, A], [B, A]$, son los **catetos**.

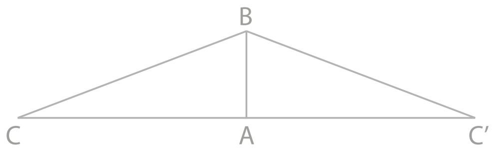



**Definición 5.8** Sea el triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces se definen las relaciones

- seno: $\operatorname{sen}\angle P = \frac{BA}{PB}$
- coseno: $\cos\angle P = \frac{PA}{PB}$
- tangente: $\tan\angle P = \frac{BA}{PA}$
- cotangente: $\cot\angle P = \frac{PA}{BA}$

**Teorema 5.10** Las razones trigonométricas para $\angle P$ no dependen del triángulo $\triangle PAB$, sólo de la clase de congruencia de $\angle P$.

**Teorema 5.12** Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, la medida de los catetos, $AB, AC$, es menor que la de la hipotenusa $BC$.




Demostración. Con la construcción anterior, vemos que los puntos $B, C, C'$ no están alineados, pues $C \in r_{AC}$ y $r_{AB} \perp r_{AC}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $2AC = CC' < BC + BC' = 2BC$.

**Definición 5.13** La **medida de un ángulo** agudo $\angle P$ es el número real:

$$\measuredangle P = \arccos(\cos\angle P)$$

**Teorema 5.14 / 5.19** Si $\angle P = \angle Q$ entonces $\measuredangle P = \measuredangle Q$, sean $\angle P$ y $\angle Q$ agudos y obtusos.

**Definición 5.15** Dado un ángulo $\angle\overline{a},\overline{b}_1 = \angle V$, un **ángulo suplementario** $\overline{\angle V} = \angle\overline{a},\overline{b}_2$ es aquel donde $\overline{b}_1$ y $\overline{b}_2$ son las dos semirrectas de $b$ en $V$, y $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ comparten $\overline{a}$. La suma de $\angle V$ y $\overline{\angle V}$ es un ángulo llano.

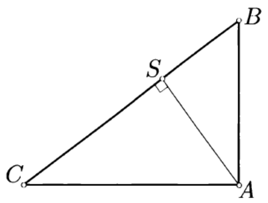
**Teorema 5.17** Si dos ángulos son congruentes, sus suplementarios lo son.

**Definición 5.18** Para un ángulo obtuso $\angle P$ se tiene $\operatorname{sen}\angle P = \operatorname{sen}\overline{\angle P}$ y $\cos\angle P = -\cos\overline{\angle P}$

## 6. Teorema de Pitágoras

**Teorema 6.1 [Pitágoras]** Para todo triángulo rectángulo $\angle ABC$ con $\angle A$ recto, se tiene que

$$BC^2 = AC^2 + AC^2$$




Demostración. Consideramos el punto $S \in r_{BC}$ tal que $r_{SA} \perp r_{CB}$. Pese a que es evidente, hay que demostrar que $S \in [B, C]$. Observamos que $SC < CA < BC$, la primera igualdad por $\cos\angle C = \frac{SC}{CA} < 1 \iff SC < CA$. Del mismo modo, $BS < BC$. Entonces, $S \in [B, C]$. Ahora observamos que

$$\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = \frac{CS}{CA}$$

Por otra parte, también vemos que

$$\cos\angle B = \frac{BS}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

De ambas expresiones tenemos que (1) $CA^2 = CB \cdot CS$ y (2) $AB^2 = BS \cdot BC$. Así, $CB \cdot CS + CB \cdot BS = CB(CS + BS) = CB^2 = CA^2 + BA^2$.

**Corolario 6.3** Sea $\angle C$, entonces

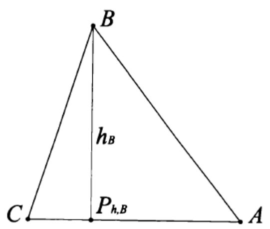
$$\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = 1$$

Demostración. Si tenemos que $BC = 1$, entonces $\cos\angle C = \frac{CA}{CB} = CA$ y $\operatorname{sen}\angle C = \frac{BA}{BC} = BC$. Aplicando el teorema de Pitágoras, entonces $\operatorname{sen}^2\angle C + \cos^2\angle C = BA^2 + CA^2 = BC^2 = 1$.

**Teorema 6.4** Dado $x \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, existe un ángulo $\angle V$ tal que $\measuredangle V = x$.

**Teorema 6.5** $\angle P = \angle Q$ sii $\measuredangle P = \measuredangle Q$

**Definición 6.6** Sea $\triangle ABC$ y $h_B \perp r_{CA}$ y que pasa por $B$, y sea el punto $P_{h,b}$ el punto de corte de $h_B$ y $r_{CA}$. Entonces, $P_{h,b}$ es el **pie de la altura de** $B$, y $[P_{h,b}, B]$ es la **altura** de $\triangle ABC$ desde $B$.




**Teorema 6.7** En el triángulo de la **Definición 6.6**, si $\angle A$ y $\angle C$ son agudos, entonces $P_{h,b} \in [C, A]$. Si $\angle A$ o $\angle C$ es obtuso, entonces $P_{h,b} \notin [C, A]$.

**Teorema 6.8 [Fórmula del coseno]** Sea $\triangle ABC$ un triángulo, entonces se cumple que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

Demostración. Basándonos en la figura de la **Definición 6.6**, y por el **Teorema 6.7** [en el caso de $\triangle$ acutángulo], entonces se forman dos triángulos rectángulos $\triangle P_{hB}BC$ y $\triangle P_{hB}BA$ donde se verifica que $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ Por el **Teorema de Pitágoras** tenemos que

$$AB^2 = P_{hB}A^2 + P_{hB}B^2 \qquad BC^2 = BP_{hB}^2 + P_{hB}C^2$$

Si sustituimos una igualdad en otra tenemos que

$$BC^2 = CP_{hB}^2 + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Como $CA = CP_{hB} + P_{hB}A$ entonces

$$BC^2 = (CA - P_{hB}A)^2 + AB^2 - P_{hB}A^2 =$$

$$CA^2 + P_{hB}A^2 - 2 \cdot CA \cdot P_{hB}A + AB^2 - P_{hB}A^2$$

Si quitamos las partes en azul, y consideramos que $P_{hB}A = AB\cos\angle A$, entonces queda el teorema demostrado.

**Corolario 6.9 [Recíproco del Tma de Pitágoras]** Dado un triángulo donde $BC^2 = AB^2 + AC^2$ entonces es un triángulo rectángulo, con $\angle A$ recto.

Demostración. Si aplicamos el **Teorema del coseno**, entonces, el término $2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 0$, y como $AB \neq 0$, $AC \neq 0$, entonces $\cos\angle A = 0 \iff \angle A$ es recto (**Teorema 6.5**).

**Teorema 6.10 [Fórmula de los senos]** Sea $\triangle ABC$, entones se verifica

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\angle B} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A}$$

Demostración. Seguimos con la figura de la **Definición 6.6**. Vemos que $BP_{hB} = BC\operatorname{sen}\angle C = BA\operatorname{sen}\angle A$. Si el triángulo es obtusángulo también se cumple porque los senos se mantienen. Simplemente, igualando $BP_{hB}$ tenemos que $\frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{BA}{\operatorname{sen}\angle C}$. El resto de igualdades se consiguen con las demás alturas.

**Teorema 6.11** Para $\triangle ABC$...

- Si se conoce $\measuredangle A$ y $AB, AC$ (adyacentes), entonces se pueden hallar $\measuredangle B, \measuredangle C, BC$.
- Si se conocen $AB, AC, BC$ entonces se pueden hallar $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C$.
- Si se conocen $AB, \measuredangle A, \measuredangle B$ entonces se pueden hallar $BC, AC, \measuredangle C$.

**Corolario 6.12 [Criterios de congruencia de $\triangle$]** Dados $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ entonces

- $\measuredangle A = \measuredangle A', AB = A'B', AC = A'C'$ [LAL]
- $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$ [LLL]
- $\measuredangle A = \measuredangle A', \measuredangle B = \measuredangle B', AB = A'B'$ [ALA]

Entonces existe una isometría $\eta$ tal que $\eta(A) = A'$, etc. y $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Hay que considerar que para emplear isometrías pares hay que definir la orientación de los triángulos.

**Corolario 6.14** Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\operatorname{sen}(\angle P + \angle Q) = \operatorname{sen}(\angle P)\cos(\angle Q) + \operatorname{sen}(\angle Q)\cos(\angle P)$$

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\angle P)\cos(\angle Q) - \operatorname{sen}(\angle P)\operatorname{sen}(\angle Q)$$

**Corolario 6.15** Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\measuredangle(\angle P + \angle Q) = \measuredangle P + \measuredangle Q$$

Demostración. Nota: en el punto final se demuestra que

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\measuredangle P + \measuredangle Q)$$

Sabiendo que $\measuredangle P = \arccos(\cos \angle P)$ entonces $\arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \measuredangle(\angle P + \angle Q)$ y, por tanto,

$$\measuredangle(\angle P + \angle Q) = \arccos(\cos(\measuredangle P + \measuredangle Q)) = \measuredangle P + \measuredangle Q$$

**Corolario 6.16** Si $\angle V$ es un ángulo y $n$ es entero, entonces existe $n\angle V$ y $\measuredangle(n\angle V) = n\measuredangle V$.

**Ejercicio 6.10** El centro de Fermat, $F$ es aquel que minimiza la distancia a los vértices del triángulo. Este sucede cuando el ángulo entre dos vértices cualesquiera del triángulo y $F$ es $2\pi/3$.

## 7. Semejanzas

**Definición 7.1** Sea $C$ un punto de $\mathbb{P}$ y $k>0$. Una **homotecia** $\eta_{C,k}:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ es una aplicación tal que a cada punto $P\in r_{CP}$ le hace corresponder un punto $\eta_{C,k}(P)\in r_{CP}$ tal que $C\eta_{C,k}(P)=kCP$. $k$ es la **razón de homotecia**.

**Observación 7.2** Sea $X\in\mathbb{P}$, $\eta_{C,k}$ y $\gamma$ una aplicación del **Axioma P3**. Entonces se cumple que $\gamma(\eta_{C,k}(X))=\gamma(C)+k(\gamma(X)-\gamma(C))$

**Observación 7.3** Toda homotecia es una biyección que tiene

- Identidad: $\eta_{C,1}$
- Inversa: $\eta_{C,1/k}$

**Teorema 7.4**/**Corolario 7.5** Sean $A,B$ y $\eta_{C,k}$, entonces $\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) = kAB$. Además, $\eta_{C,k}[A,B]=[\eta_{C,k}(A),\eta_{C,k}(B)]$.

**Teorema 7.7** Toda homotecia envía un ángulo a un ángulo congruente, y toda recta a una paralela.

**Definición 7.8** Una **semejanza** es una combinación de homotecias e isometrías.

**Corolario 7.10/7.11** / **Teorema 7.19** Toda semejanza envía rectas a rectas, segmentos a segmentos, y conserva los ángulos. Toda biyección $\psi$ que cumpla estas condiciones es una semejanza.

**Teorema 7.12** / **Corolario 7.13** Toda semejanza $\delta$ cumple que $\delta(A)\delta(B)=kAB$, donde $k$ es la razón de semejanza. Dados $A,B,C,D$, entonces se cumple que

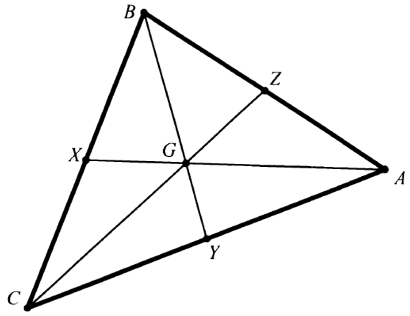
$$\frac{AB}{CD}=\frac{\delta(A)\delta(B)}{\delta(C)\delta(D)}$$

**Teorema 7.15** Si $\angle A=\angle B$, entonces existe $\delta$ tal que $\delta(\angle A)=\angle B$.

**Teorema 7.18** Sean $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ que comparten $\angle A$ y $A,B,B'$ están alineados, así como $A,C,C'$. Entonces si existe $k$ tal que $AB'=kAB$ y $AC'=kAC$ entonces $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ son semejantes, $r_{BC}\parallel r_{B'C'}$ y $B'C'=kBC$.

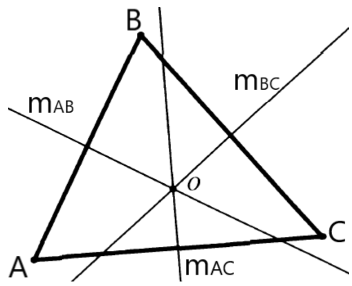
**Definición 7.20** Se llama **mediana** al segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto de un triángulo. Es decir, dado $\triangle ABC$, las medianas son $[A,\text{medio}[B,C]]$, $[B,\text{medio}[A,C]]$ y $[C,\text{medio}[A,B]]$.

**Teorema 7.21** Las tres medianas de un triángulo cortan en un punto $G$, llamado **baricentro**.



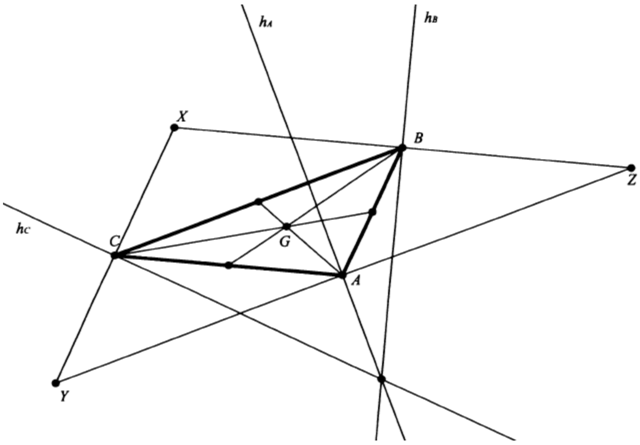

☻ Demostración. Definimos $X=\text{medio}[B,C]$, $Y=\text{medio}[A,C]$, $Z=\text{medio}[A,B]$ y sea $G$ $[B,Y]\cap[C,Z]$. El punto existe porque, si definimos la recta $r_{BY}$, entonces $C$ está en uno de los semiplanos de la recta (pongamos, $H^2$) y, si $A\in H^1$, entonces $Z\in H^1$, $C$ y $Z$ están en distintos semiplanos de $r_BC$. Si tomamos $\triangle ABC$ y $\triangle AZY$ entonces, por ser $Y,Z$ puntos medios, entonces, por el **Teorema 7.18**, $r_{YZ}\parallel r_{BC}$ y $BC=2YZ$. Además, por ser los ángulos entre $[C,Z]$ y $[B,Y]$ alternos internos, los triángulos $\triangle GYZ$ y $\triangle GBC$ son semejantes de razón 2. Por tanto, $GB=2GY$ y $GC=2GZ$. Si repetimos esto con $[A,X]$ y $[B,Y]$, entonces existe un punto $G'$ tal que $G'A=2G'X$ y $G'B=2G'Y$. Como $\frac{G'B}{G'Y}=\frac{GB}{GY}$, entonces $G=G'$ y las tres medianas cortan en $G$.

**Teorema 7.23** Las tres mediatrices de un tríangulo lo cortan en un punto, el **circuncentro**.




☻ Demostración. Si $\triangle ABC$ es un triángulo, las mediatrices $m_{AB}$ y $m_{BC}$ cortan en un punto $O$. Si no cortaran, entonces $m_{AB}\parallel m_{BC}$, y como $r_{AB}\perp m_{AB}$ y $m_{BC}\perp r_{BC}$ entonces $r_{AB}\parallel r_{BC}$, lo cual es absurdo. Por ser $m_{BC}$ mediatriz, entonces $OB=OC$, y $OA=OB$ para $m_{AB}$. Entonces $OA=OC$ y por tanto $O\in m_{AC}$, luego $O$ corta las tres mediatrices.

**Teorema 7.24** Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro**




☻ Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo con baricentro $G$ y sean $h_A, h_B, h_C$ sus alturas. Consideramos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, de modo que $\triangle ABC$ se transforma en $\triangle XYZ$, con $\tau(A) = X, \tau(B) = Y, \tau(C) = Z$. Por las propiedades de las semejanzas, $r_{BC} \parallel r_{YZ}, r_{AC} = r_{XZ}, r_{AB} \parallel r_{XY}$, y se cumple que $A = \text{medio}[Y,Z], B = \text{medio}[X,Z], C = \text{medio}[X,Y]$. Por tanto, ahora $h_A = m_{YZ}, h_B = m_{XZ}, h_C = m_{XY}$ y, por tanto, el ortocentro de $\triangle ABC$ es el circuncentro de $\triangle XYZ$.

**Teorema 7.25 [Recta de Euler]** Dado un triángulo, su baricentro $G$, ortocentro $O$ y circuncentro $H$ pertenecen a una misma recta (si el triángulo no es equilátero). Además, $OH = 2OG$.

☻ Demostración. Si partimos del triánguo con baricentro $G$ y aplicamos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, como en el **Teorema 7.24**, entonces se cumple que $\tau(O) = H$. Por ser $\sigma_G$, entonces $H \in r_{OG}$ y por ser $\eta_{G,2}$, entonces $OH = 2OG$.

**Corolario 7.26** El **incentro** del triángulo es el punto donde se cortan las tres bisectrices del triángulo.

**Ejercicio 7.7 [Teorema de Ceva]** En $\triangle ABC$ sean $X \in [B,C], Y \in [C,A], Z \in [A,B]$. Si $X, Y, Z$ no coinciden con ninguno de los vértices del triángulo, entonces los segmentos $[A,X], [B,Y], [C,Z]$ se cortan en un punto sii

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = 1$$

**Ejercicio 7.8 [Teorema de Menelao]** Sea $\triangle ABC$ y sean $X \in r_{BC}, Y \in r_{CA}, Z \in r_{AB}$. Entonces, sii $X, Y, Z$ están alineados se cumple que

$$\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA} = 1$$

## 8. Circunferencias

**Definición 8.1** Sea $O \in \mathbb{P}$ y $\rho > 0$. Entonces una **circunferencia** $\mathcal{C}$ es el conjunto de puntos a una distancia $\rho$ de $O$. $O$ es el **centro** y $\rho$ el **radio**.

**Teorema 8.3** Una circunferencia corta a una recta en a lo sumo dos puntos.

**Definición 8.4** Dada $\mathcal{C}$ una recta que corta en dos puntos se llama **secante**, que corta en un punto se llama **tangente** y que no corta se llama **exterior**. Si para un punto $X \in \mathbb{P}$, $d(O,X) > d(O,\rho)$ el punto es exterior, y si $d(O,X) < d(O,\rho)$ entonces es interior.

**Teorema 8.5** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$. Si $t$ es tangente a $\mathcal{C}$ en $P_t$, entonces $t \perp r_{O,P_t}$.

**Definición 8.6** Sean $P, P'$ dos puntos tales que $O = \text{medio}[P,P']$. Entonces, si los puntos están en $\mathcal{C}$, se denominan **diametralmente opuestos en** $\mathcal{C}$, y $[P,P']$ es un diámetro de $\mathcal{C}$.

**Teorema 8.7/Definición 8.9** Dados tres puntos no alineados, entonces existe una única circunferencia que pase por estos puntos, la **circunferencia circunscrita**.

**Corolario 8.8** Dos circunferencias tienen a lo sumo dos puntos en común. Si sólo tienen un punto en común se llaman **tangentes**.

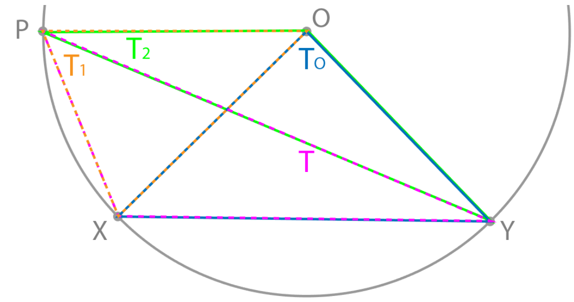
⚠ **Teorema 8.10** Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ con centros $O, O'$ y radios $\rho, \rho'$ respectivamente. Si las dos circunferencias cortan en dos puntos, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$OO' < \rho + \rho' \qquad \rho < OO' + \rho' \qquad \rho' < OO' + \rho$$

Y si las circunferencias son tangentes, entonces se verifica una de estas igualdades:

$$OO' = \rho + \rho' \qquad \rho = OO' + \rho' \qquad \rho' = OO' + \rho$$

**Teorema 8.11 [Arco capaz]** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$ y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en $\mathcal{C}$ y $P, P', O$ están en el mismo semiplano determinado por $r_{XY}$. Si $X$ e $Y$ no son diametralmente opuestos, entonces $\measuredangle P = \measuredangle P' = \frac{1}{2}\measuredangle O$. Todo este arco, así como el arco surgido de la reflexión $\sigma_{r_{XY}}$ cumplen $\measuredangle P = \measuredangle P'$, y se denomina **arco capaz**.




☻ Demostración. Sea $\mathcal{T} = \triangle PXY$ y $\mathcal{T}_O = \triangle OXY$. Construimos también $\mathcal{T}_1 = \triangle POX$ y $\mathcal{T}_2 = \triangle POY$, isósceles, de modo que $\measuredangle_{\mathcal{T}_1} X = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}_2} Y = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$. Como la suma de los ángulos de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ es llano, entonces

$$2\measuredangle_{\mathcal{T}_1} P = \pi - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} O \qquad 2\measuredangle_{\mathcal{T}_2} P = \pi - \measuredangle_{\mathcal{T}_2} O$$

Vamos a suponer ahora que $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P - \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$. Para $2\measuredangle_{\mathcal{T}} P$ entonces se cumple que

$$2\measuredangle_{\mathcal{T}} P = 2\measuredangle_{\mathcal{T}_1} P - 2\measuredangle_{\mathcal{T}_2} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} O - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} O = \measuredangle_{\mathcal{T}_O} O = \measuredangle O$$

La misma demostración sucede para $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P + \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}} P = \measuredangle_{\mathcal{T}_2} P - \measuredangle_{\mathcal{T}_1} P$

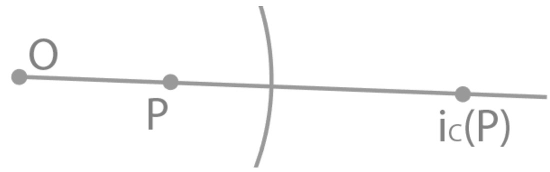
**Ejercicio 8.2** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$ y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en $\mathcal{C}$ y $P, P', O$ están en distinto semiplano determinado por $r_{XY}$. Entonces $\measuredangle P = \pi - \measuredangle P'$

**Definición 8.13** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$ y radio $\rho$. Se denomina **inversión** del plano con respecto a $\mathcal{C}$ a una aplicación $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbb{P} - \{O\} \to \mathbb{P} - \{O\}$ que a cada punto $P$ le hace corresponder otro punto $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ tal que $O, P, \iota_{\mathcal{C}}(P)$ están alineados, $O \notin [P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$ y se verifica que

$$OP \cdot O_{\iota_{\mathcal{C}}}(P) = \rho^2$$

Esta aplicación verifica que

- $\iota_{\mathcal{C}} \circ \iota_{\mathcal{C}}(P) = P$ para todo $P \in \mathbb{P} - O$.
- Para todo $P \in \mathcal{C}$ se cumple $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$. A todo punto fuera del circulo, $\iota_{\mathcal{C}}$ lo manda dentro, y viceversa.
- Si $r$ pasa por $O$, $\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$.




**Teorema 8.16/8.17** Sea $\mathcal{C}$ y $P \in \mathbb{P}$. Sean $a, b$ rectas que cortan a $P$ y secantes a $\mathcal{C}$. Sean $A_1$ y $A_2$ los

puntos de corte de $a$ con $\mathcal{C}$ y $B_1, B_2$ los de $b$ con $\mathcal{C}$. Entonces se verifica que

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$

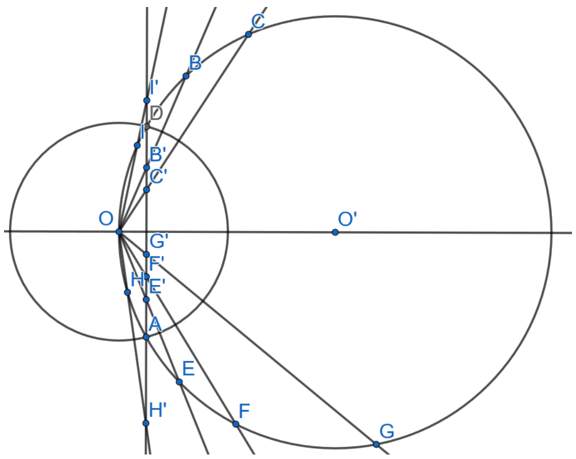
Si $a$ es tangente, entonces

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

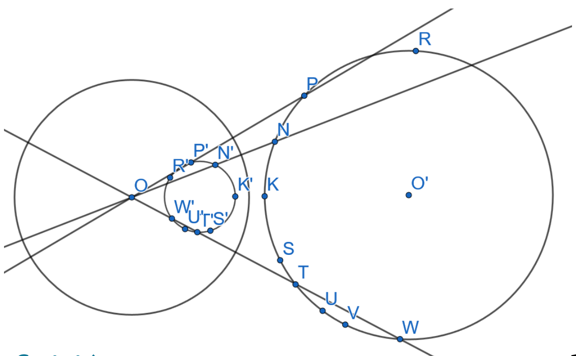
Ese producto, por tanto, es invariante de la recta, y se denomina **potencia de $P$ con respecto a $\mathcal{C}$**.

**Teorema 8.18** Sea $\mathcal{C}$ de radio $\rho$ y centro $O$.

- Sea $\mathcal{C}'$ una circunferencia de centro $O'$ que pasa por $O$, entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$ es una recta ortogonal a $r_{O,O'}$. Sea $r$ que no pasa por $O$, entonces $\iota_{\mathcal{C}}(r) = \mathcal{C}' - \{O\}$, donde $\mathcal{C}'$ es una circunferencia que pasa por $O$.




- Si $\mathcal{C}'$ no pasa por $O$ entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es otra circunferencia que no pasa por $O$. Si $O$ es exterior a $\mathcal{C}'$ entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es la imagen de $\mathcal{C}'$ por la homotecia de centro $O$ y razón $\rho^2/t$, donde $t$ es la potencia de $O$ con respecto a $\mathcal{C}'$. Si $O$ es interior a $\mathcal{C}'$ entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \sigma_O \circ \eta_{O,\rho^2/t}(\mathcal{C})$.




**Definición 8.19** Sea $A, B, C, D$ una cuaterna ordenada de puntos distintos del plano. Se define **razón doble** como

$$(A, B : C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

. Si $A, B, C, D$ están alineados, entonces la razón doble es una razón de las dos razones simples: $\frac{CA}{CB}\frac{DB}{DA}$.

Por convenio se tiene que

$$(A, B : C, \infty) = \frac{CA}{CB}$$

**Teorema 8.20** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$ y sean $A, B \neq O$ y que no estén alineados a $O$. Si $\iota_{\mathcal{C}}(A) = A'$ y $\iota_{\mathcal{C}}(B) = B'$, los triángulos $(T)_1 = \triangle OAB$ y $(T)_2 = \triangle OA'B'$ son semejantes, y $\angle A = \angle B'$ y $\angle B = \angle A'$.

**Teorema 8.21** Sea $\mathcal{C}$ con centro $O$ y sean $A, B, C, D \neq O$. Entonces

$$(A, B : C, D) = (\iota_{\mathcal{C}}(A), \iota_{\mathcal{C}}(B) : \iota_{\mathcal{C}}(C), \iota_{\mathcal{C}}(D))$$

# 9. Geometría hiperbólica

**Definición 9.0** Para describir la geometría hiperbólica se fija una recta $l_\infty$ y uno de los semiplanos de la recta $l_\infty$ como $\mathbb{H}$. La distancia hiperbólica sigue la lógica de para que dos pares de puntos $A, A'$ y $B, B'$ sobre $r \perp l_\infty$ y $d(A, A') = d(B, B')$, pero $A, A'$ están más cerca de $l_\infty$ que $B, B'$, entonces $d_{\mathbb{H}}(A, A') > d_{\mathbb{H}}(B, B')$.

Si $R = r \cap l_\infty$, definimos la **distancia hiperbólica** como

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left|\log \frac{RP}{RQ}\right| = |\log(P, Q : R, \infty)|$$

**Teorema 9.1** Sean $P, Q, S$ en $\mathbb{H}$ sobre $r \perp l_\infty$ tal que $Q \in [P, S]$. Entonces:

- $d_H(P, Q) + d_H(Q, S) = d_H(P, S)$.
- Sea $\mathcal{C}$ con centro $R = r \perp l_\infty$, entonces

$$d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = d_H(P, Q)$$

**Teorema 9.2** Sean $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$. Existe una única circunferencia $\mathcal{C}_{PQ}$ con centro $l_\infty$ y que pasa por $P$ y $Q$.

**Definición 9.0-cont** Queremos que la distancia anterior sea invariante a inversiones respecto a circunferencias. Si tenemos $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$ y $X, Y = \mathcal{C}_{PQ} \cap l_\infty$, podemos crear $\mathcal{C}_X$. Entonces, se tiene que la recta $r_{\iota_{\mathcal{C}_X}(P)\iota_{\mathcal{C}_X}(Q)} \perp l_\infty$, y definimos

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = |\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)|$$

Sin embargo, por el **Teorema 8.21** la razón doble conserva las inversiones, luego

$$|\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)| =$$

$$|\log(\iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(Q) : \iota_{\mathcal{C}}(R), \infty)| =$$

$$|\log(P, Q : \iota_{\mathcal{C}}(R), \iota_{\mathcal{C}}(\infty))|$$

Si tomamos como convención $\iota_{\mathcal{C}}(\infty) = X$, y por el **Teorema 8.18**, $\iota_{\mathcal{C}}(R) = Y$ entonces

$$d_H(P, Q) = |\log(P, Q : Y, X)|$$

**Teorema 9.3** Sea $\mathcal{C}$ con centro $l_\infty$, entonces $\iota_{\mathcal{C}}$ preserva las distancias hiperbólicas para todo $P, Q$:

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q))$$

**Teorema 9.4** Si $\mathcal{C}$ tiene centro en $l_\infty$, entonces $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica.

**Definición 9.5** Dos rectas hiperbólicas son paralelas si son disjuntas o coinciden.

**Teorema 9.6** Sea $r_H$ hiperbólica y $P$ un punto de $\mathbb{H}$ que no está en $r_H$. Existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a $r_H$ que pasan por $P$.

## 10. Polígonos

**Definición 10.1** Un polígono $\mathcal{P}$ es un conjunto finito $\{\cdots, [V,W], \cdots\}$ de $r$ segmentos llamados lados del polígono. Los extremos de los lados, vértices, forman el conjunto $\{V_1, \cdots, V_r\}$. $\mathcal{P}$ cumple

- Dos lados de $\mathcal{P}$ o bien no se cortan o tienen únicamente un extremo común (son lados adyacentes).
- Los lados de $\mathcal{P}$ pueden escribirse como una sucesión finita de vértices $[V_1, V_2], [V_2, V_3], \cdots, [V_r, V_1]$.

**Definición 10.4** Une **diagonal** es un segmento cuyos extremos son dos vértices que no pertenecen al mismo lado.

**Definición 10.6** Sea $V$ un vértice de $\mathcal{P}$ y sean $[V, W_1]$ y $[V, W_2]$ dos lados. El ángulo con vértice $V$ y semirrectas que contienen a ambos lados forman el ángulo $\angle V$ de $\mathcal{P}$.

**Definición 10.8** Un polígono es **convexo** si toda recta que no contiene a ninguno de los lados del polígono corta a lo sumo en dos lados de éste.

**Teorema 10.10** Un polígono $\mathcal{P}$ es convexo sii para todo lado $[V,W]$ de $\mathcal{P}$ los vértices de $\mathcal{P}$ distintos de $V$ y $W$ están todos en el mismo de los dos semiplanos determinados por $r_{VW}$.

**Definición 10.11** Un punto $P$ está en el **interior** de un polígono convexo $\mathcal{P}$ si cualquier recta que pase por $P$ corta a los lados del polígono en dos puntos. Si $P$ no está ni en el interior ni en los lados del polígono, entonces está en el exterior.

**Observación 10.12** Un punto $P$ está en el interior de un polígono $\mathcal{P}$ si existe una recta $r$ que pasa por $P$ de modo que si $\overline{s}$ es una de las semirrectas, $\overline{s}$ corta a $\mathcal{P}$ en un número $n$ impar de puntos que no son vértices.

**Definición 10.13** Un polígono convexo es **regular** si todos sus lados y ángulos son congruentes.

**Lema 10.14** Sean $r$ y $s$ rectas que al cortarse forman un ángulo $\pi/n$. Sean $\sigma_r$ y $\sigma_s$. Si $V$ es un punto en $r$, definimos los puntos $V_{i+1} = (\sigma_s \circ \sigma_r)^i(V), \quad i = 1, \cdots, n-1$, es decir, las imágenes de $V$ por rotaciones. Entonces, si $V_1 = V$, el polígono

$$\mathcal{P} = \{[V_1, V_2], \cdots, [V_{n-1}, V_n], [V_n, V_1]\}$$

es regular.

**Teorema 10.15** Sea $n$ entero mayor que 2. Sea $[V,W]$ un segmento del plano, y $H$ uno de los semiplanos determinados por $r_{VW}$. Existe un polígono regular de $n$ lados contenido en $H \cup r_{VW}$ y uno de los lados es $[V,W]$. **Corolario 10.17** En estas condiciones $\mathcal{P}$ es único.

**Teorema 10.16/10.19** Sea $\mathcal{P}$ regular con $n$ vértices. $\mathcal{P}$ admite $n$ reflexiones distintas, que son simetrías de $\mathcal{P}$. También existe una rotación con ángulo $2\pi/n$ que es simetría de $\mathcal{P}$. Análogamente, si $\mathcal{P}$ es convexo con $n$ vértices y tiene como simetría una rotación $2\pi/n$, entonces es regular.

**Corolario 10.18** Todo $\mathcal{P}$ regular permite una circunferencia $\mathcal{C}$ que pase por todos sus vértices. Entonces $\mathcal{P}$ está **inscrito** en $\mathcal{C}$.

### Construcciones con regla y compás

**Teorema 10.24/Definición 10.26** Dados dos puntos $A$ y $B$ se puede construir un punto $C \in [A,B]$ con regla y compás de modo que $AB \cdot BC = AC^2$. $C$ divide en razón áurea, $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Teorema 10.27, 10.28** Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles tal que $AB = AC$ y $\measuredangle B = \measuredangle C = 2\measuredangle A$. Entonces $\frac{AB}{BC}$ es la razón áurea. Además, este triángulo puede construirse con regla y compás.

**Observación 10.29/Corolario 10.30** El ángulo $\measuredangle A$ del triángulo áureo es $\pi/5$. Por tanto, se puede construir un pentágono regular con lados congruentes a $[A,B]$.

**Teorema 10.31** Un polígono regular de $n$ lados se puede construir con regla y compás sii la factorización de $n$ en números primos tiene la forma $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, con $p_i$ de la forma $2^{2^s}+1$, y son primos distintos. Así, los lados polígonos construibles son $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \cdots$.

## 11. Geometría euclidiana espacial

**Definición 11.0** $\mathbb{E}$ es el conjunto de puntos en un espacio tridimensional. La distancia $d$ es la aplicación $\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}_+$.

**Axioma E1** $(\mathbb{E}, d)$ es un espacio métrico.

**Definición 11.1** Una recta $r$ y su segmento $[A,B]=\{X\in\mathbb{E}\mid d(A,X)+d(X,B)=d(A,B)\}$ son similares que en $\mathbb{P}$. Una recta cumple:

- contiene al menos dos puntos distintos.
- Para toda terna $A,B,C$ en $r$, $A,B,C$ están alineados.
- Si $A,B\in r$ distintos, y $X\in\mathbb{E}$, si $X\in r$, $A,B,X$ están alineados.

**Definición 11.2** Un **plano** $\pi\in\mathbb{E}$ es un subconjunto que, con la distancia $d$ restringida a $\pi$, cumple los axiomas de la geometría euclidiana plana.

**Axioma E2 [de los planos]**

- Al menos existe un plano en $\mathbb{E}$.
- Para todo plano $\alpha$ existe un punto $P\in\mathbb{E}-\alpha$.
- Para $X,Y,Z\in\mathbb{E}$ distintos existe un plano $\alpha\in\mathbb{E}$ que los contiene. Si no están alineados, $\alpha$ es único, y se denota por $\alpha_{XYZ}$.
- Si $\alpha,\beta\in\mathbb{E}$ son planos distintos, cortan en una recta.

**Teorema 11.4** Si $\alpha$ es un plano y $A,B\in\alpha$, entonces $r_{AB}\in\alpha$.

**Observación 11.5** Por dos rectas que cortan, o por una recta y un punto que no pasa por ella, pasa exactamente un plano.

**Definición 11.6**/**Observación 11.7** Dos rectas $r,s$ son **paralelas** si coinciden o están contenidas en un plano y son paralelas en él. Dos rectas disjuntas pueden no ser paralelas, si no están en el mismo plano.

**Definición 11.8** Una recta $l$ es **ortogonal** a un plano $\alpha$ en un punto $P$ ($l\perp_P\alpha$) si $l$ es ortogonal a toda recta de $\alpha$ que pase por $P$.

**Teorema 11.10** Sea $r$ y $P\in r$, entonces existe un plano único $\pi$ que pasa por $P$ y es perpendicular a $r$.

**Teorema 11.12** Sea $\alpha$ un plano y $P\in\alpha$. Existe una única recta ortogonal a $\alpha$ que pase por $P$.

**Teorema 11.13** Sean $r,s$, y $r$ es ortogonal a $\alpha$. Si $s$ es paralela a $r$, entonces es ortogonal a $\alpha$.

**Teorema 11.15** Sea $\alpha$ y $P\in\mathbb{E}$. Existe una única recta $r$ tal que $P\in r$ y $r\perp\alpha$.

**Definición 11.16** Dos planos $\alpha,\beta$ son ortogonales, $\alpha\perp\beta$ si existe al menos una recta $a\in\alpha$ verificando $a\perp\beta$.

**Teorema 11.17** Para los planos $\alpha,\beta\in\mathbb{E}$ se tiene

- $\alpha\perp\beta \iff \beta\perp\alpha$
- $\alpha\perp\beta$ sii para todo $P\in\alpha$ la única recta $a\perp\beta$ pasando por $P$ esta en $\alpha$.

**Teorema 11.18** Sea $\lambda$ un plano y $c$ una recta en $\mathbb{E}$. Existe un plano $\gamma\perp\lambda$ pasando por $c$. Si $c$ no es ortogonal a $\lambda$, $\gamma$ es único.

**Definición 11.19** Dados dos planos $\pi_1,\pi_2$ en $\mathbb{E}$, $\pi_1$ y $\pi_2$ son **paralelos** si $\pi_1=\pi_2$ o $\pi_1\cap\pi_2=\emptyset$.

**Teorema 11.20** Si $\pi_1\parallel\pi_2$ toda recta ortogonal a $\pi_1$ lo es a $\pi_2$.'

**Ejercicio 11.2** Sean $a,b,c$ tres rectas en $\mathbb{E}$. Si $a\parallel b$ y $b\parallel c$ entonces $a\parallel c$.

**Ejercicio 11.3** Si $a,b$ son dos rectas no paralelas en $\mathbb{E}$, entonces existe una única recta $l$ ortogonal a $a$ y $b$.

**Ejercicio 11.4/11.5** Si $\pi_1$ y $\pi_2$ son paralelos y $\alpha$ es ortogonal a $\pi_1$, entonces $\alpha$ es ortogonal a $\pi_2$. Si $\beta$ no es paralelo a $\pi_1$, entonces $\beta$ tampoco es paralelo a $\pi_2$

*Page intentionally left in blank*

## 12. Isometrías en el espacio

**Definición 12.0** La igual que en $\mathbb{P}$, una **isometría** es una aplicación $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biyectiva que conserva las distancias.

**Teorema 12.1** Sea $g$ una isometría y $A, B \in \mathbb{E}$. Entonces $g([A,B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$.

**Teorema 12.2** Sea $g$ y $\pi \in \mathbb{E}$, entonces $g(\pi) \in \mathbb{E}$.

**Teorema 12.3** Si $A, B, C \in \mathbb{E}$ no son alineados, entonces $g(\pi_{ABC}) = \pi_{g(A)g(B)g(C)}$

**Teorema 12.4** Sea $l$ una recta y $\alpha, \beta$ planos en $\mathbb{E}$.

- $l \perp \alpha \iff g(l) \perp g(\alpha)$
- $\beta \perp \alpha \iff g(\beta) \perp g(\alpha)$

**Definición 12.5 [Reflexión sobre plano]** Sea $\alpha \in \mathbb{E}$. Dado $P \in \mathbb{E}$ sea $t_P$ ortogonal a $\alpha$ que pasa por $P$, y $\pi_\alpha(P) = t_P \cap \alpha$. La **reflexión con base** $\alpha$ de $P$, o $\sigma_\alpha(P)$, es el punto tal que $\pi_\alpha(P) = \text{medio}[P, \sigma_\alpha(P)]$

**Observación 12.6**/**Teorema 12.7** $\sigma_\alpha$ es una biyección, y $\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(P) = P$. Además, $\sigma_\alpha(P) = P \iff P \in \alpha$. $\sigma_\alpha$ es una isometría.

**Teorema 12.8** Sea $\pi$ un plano y $\sigma_r$ una reflexión en $\pi$ respecto a $r$. Existe una reflexión $\sigma_\alpha \in \mathbb{E}$ de modo que $\sigma_\alpha$ restringida a $\pi$ coincide con $\sigma_r$.

**Corolario 12.9** Sea $g$ una isometría de un plano $\pi$. Entonces existe una isometría $\tilde{g}(X) = g(X)$ para todo $X \in \pi$.

**Corolario 12.10** Sean $\pi_1$ y $\pi_2$ dos planos del espacio. Existe una isometría $g$ tal que $g(\pi_1) = \pi_2$, y se puede tomar $g$ como reflexión.

**Lema 12.11** Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $A \neq B$ son fijos en $g$, entonces $r_{AB}$ es fija en $g$.

**Teorema 12.12** Sea $g$, y sea $\alpha$ el plano pasando por $A, B, C$. Si $A, B, C$ son fijos en $g$, entonces $g = \sigma_\alpha$ o $g = \text{id}_\mathbb{E}$.

**Corolario 12.13** Sean $A^1, A^2, A^3, A^4 \in \mathbb{E}$, no situados en el mismo plano; y sean $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $g(A^i) = h(A^i)$ para todo $i$, entonces $g = h$.

**Teorema 12.15**

- Sea $\rho \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ una rotación de eje $r$. Para todo plano $\alpha$ conteniendo a $r$, existen planos $\beta, \beta'$ conteniendo a $r$, únicos, tales que $\rho(\alpha) = \sigma_\beta\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\sigma_{\beta'}$.
- Sea $\tau$ una traslación paralela a una recta $c$. Para todo plano $\alpha \perp c$ existen planos $\beta, \beta'$, únicos, tales que $\tau = \sigma_\beta\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\sigma_{\beta'}$.

**Ejercicio 12.1** Si $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ son rotaciones con ejes ortogonales al mismo plano $\lambda$, entonces $gh$ o bien es una rotación con eje ortogonal a $\lambda$, o una traslación paralela a rectas contenidas en $\lambda$ o la identidad.

**Ejercicio 12.2** Las rotaciones forman una clase de congruencia, con el **ángulo de rotación** $\rho$. Si $\angle V$ es el ángulo formado por la semirrectas de $\alpha \cup \lambda$ y $\beta \cup \lambda$ (siendo $\alpha, \beta$ los planos de reflexión, y $\lambda$ ortogonal a $\alpha, \beta$), entonces $2\angle V$ es el ángulo de rotación. Si el ángulo de rotación es llano, entonces $\rho$ es una **media vuelta**.

**Ejemplo 12.18** Tomando un plano $\pi$ y componiendo la reflexión $\sigma_\pi$ con una rotación $\rho$ de eje $a \perp \pi$, se obtiene la isometría $\phi = \sigma_\pi\rho = \rho\sigma_\pi$

**Ejemplo 12.20** Una **reflexión central** es una isometría entre un plano $\alpha$ y una recta $r \perp \alpha$, en un punto $P = r \cap \alpha$: $\sigma_P = \sigma_\alpha\rho_r$. La reflexión central cumple

- Para todo $X \in \mathbb{E}$, $\text{medio}[X, \sigma_P(X)] = P$.
- $\sigma_P \circ \sigma_P = \text{id}_\mathbb{E}$.
- Para cualquier $\beta, s$ tal que $\beta \perp_P s$, $\sigma_\beta\rho_s = \rho_s\sigma_\beta$.

**Ejercicio 12.4**

- El producto de dos reflexiones centrales $\sigma_P, \sigma_Q$ ($P \neq Q$) es una traslación paralela a la recta $r_{PQ}$.
- Sea $\tau$ una traslación. Para todo $S \in \mathbb{E}$ existen puntos $B, B' \in \mathbb{E}$ únicamente determinados tales que $\tau = \sigma_A\sigma_{B'} = \sigma_B\sigma_A$.

**Ejemplo 12.21** Un **movimiento helicoidal** es una composición de una rotación con eje $r$ y una traslación paralela a dicho eje: $h = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau$.

**Ejemplo 12.22** Una **reflexión con deslizamiento** es una composición de una reflexión $\sigma_\alpha$ y una traslación $\tau$ paralela a la recta $r \subset \alpha$: $d = \tau\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\tau$.

**Teorema 12.19** Las únicas isometrías en $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}) - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ con puntos fijos son las refleiones, rotaciones, o reflexiones-rotaciones.

**Teorema 12.23** Las isometrías de $\mathbb{E}$ sin puntos fijos son las traslaciones, movimientos helicoidales y reflexiones con deslizamiento.

**Ejercicio 12.5** Resumen de isometrías:

| Puntos fijos | $\emptyset$ | $A$ | $a$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| par | $\tau$ / $h$ | | $\rho$ | |
| impar | $d$ | $\phi$ | | $\sigma$ |

## 13. Poliedros

**Definición 13.1** Un **poliedro** $\mathcal{P}$ es un conjunto finito de polígonos $\{C_k w\}$. Los polígonos de $\mathcal{P}$ se llaman caras, los lados del polígono se llaman aristas o lados, y los vértices tienen el mismo nombre. Todo poliedro cumple:

- Dos caras de un poliedro o bien no se cortan, y tienen un único vértice en como, o un lado en común.
- Cada arista es un lado de dos polígonos de $\mathcal{P}$.
- Las caras que comparten un vértice en común $V$ se pueden ordenar en una sucesión $C_1, \cdots, C_r$ de modo que $C_i$ y $C_{i+1}$ son adyacentes.
- Dadas dos caras $C_i, C_j$ existe una sucesión finita de caras $C_1, \cdots, C_r$ tal que $C_i = C_1, C_r = C_j$.

**Definición 13.2** Un poliedro es **convexo** si toda recta no contenida en ninguno de los planos que contienen a las caras corta a lo más en dos puntos a las caras.

**Definición 13.3** Un **ciclo poligonal** $\mathcal{C}$ es un conjunto finito de segmentos (lados) con un conjunto finito de puntos (vértices) que verifican

- Dos segmentos o no se cortan o tienen un extremo en común.
- Los lados de $\mathcal{C}$ se pueden escribir como una sucesión finita de la forma $[V_1, V_2], [V_2, V_3], \cdots, [V_{r-1}, V_r], [V_r, V_1]$.

**Definición 13.4** Sea $\mathcal{L}$ un conjunto formado por algunos lados de $\mathcal{P}$. Dadas dos caras $P$ y $P'$ de $\mathcal{P}$ decimos que están **conectadas** en $\mathcal{P} - \mathcal{L}$ si existe una sucesión de polígonos de $\mathcal{P}$, $P = P_1, \cdots, P_r = P'$ de modo que $P_i$ y $P_{i+1}$ tienen un lado en común que no está en $\mathcal{L}$. Si $C$ es una cara de $\mathcal{P}$, la componente conexa de $\mathcal{P} - \mathcal{L}$ que contiene a $C$ es el subconjunto de $\mathcal{P}$ formado por los polígonos de $\mathcal{P}$ que están conectados con $C$ en $\mathcal{P} - \mathcal{L}$.

**Teorema 13.5** Sea $\mathcal{P}$ un poliedro convexo y $\mathcal{C}$ un ciclo de $\mathcal{P}$, entones hay exactamente dos componentes convexas en $\mathcal{P} - \mathcal{C}$.

**Teorema 13.9 [Descartes-Euler]** Sea $\mathbb{P}$ un poliedro convexo, con $c$ caras, $l$ lados y $v$ vértices, entonces: $c - l + v = 2$

**Definición 13.11** Un **poliedro regular** es un poliedro convexo contodas las caras congruentes a un mismo polígono regular y cada vértice está en un mismo número de caras. Decimos que un poliedro regular tiene tipo $\{n, m\}$ si sus caras son polígonos regulares con $n$ lados y cada vértice es vértice exactamente de $m$ caras.

| Nombre | Tipo | $c$ | $l$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | $\{3,3\}$ | 4 | 6 | 4 |
| Octaedro | $\{3,4\}$ | 8 | 12 | 6 |
| Cubo | $\{4,3\}$ | 6 | 12 | 8 |
| Dodecaedro | $\{3,5\}$ | 20 | 30 | 12 |
| Icosaedro | $\{5,3\}$ | 12 | 30 | 20 |

**Teorema 13.14** Dado un real $l > 0$ existe un poliedro regular de tipo $\{3,3\}, \{3,4\}, \{4,3\}, \{3,5\}, \{5,3\}$, cuya arista mide $l$. Además, si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos poliedros del mismo tipo y con la misma longitud de arista entonces existe una isometría $\eta$ tal que $\eta(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_2$.

**Teorema 13.16** Sea $V, W$ dos vértices de un poliedro regular $\mathcal{P}$, $a, b$ dos aristas, de modo que $a$ tiene por uno de sus extremos $V$ y $b$ tiene por extremo $W$, por último sea $C_1$ una cara que tiene a $a$ como uno de sus lados y $C_2$ una cara que tiene a $b$ como lado. Existe una simetría $\theta$ de $\mathcal{P}$ tal que

$$\theta(V) = W \;\; \theta(a) = b \;\; \theta(C_1) = C_2$$

**Definición** Dado un polígono $\mathcal{P}$ regular, el polígono **dual** de $\mathcal{P}$, o $\mathcal{P}*$, es aquel formado por la unión de los centros de las caras que forman los triedos (tres polígonos que comparten el mismo vértice $V$).

**Definición** Si consideramos el plano $\pi$ ortogonal a $r_{VW}$, siendo $V, W$ los dos vértices de un lado en común entre dos caras$P_1, P_2$ de $\mathcal{P}$. $\pi$ pasa, por ejemplo, por medio$[V, W]$. Llamamos **ángulo diédrico** al ángulo de $\pi$ con vértice en medio$[V, W]$ y cuyos lados contienen a los segmentos que son las intersecciones de $P_1$ y $P_2$ con $\pi$.

Rotaciones de un poliedro regular:

- Rotaciones con eje ortogonal a una cara $C$ de $\mathcal{P}$ y pasa por el el centro de $C$; con ángulos de rotación $2\pi r / n$, $r = 1, \cdots, n-1$.

- Rotaciones cuyo eje pasa por un vértice $V$ de $\mathcal{P}$ y es ortogonal al polígono formado por los centros de las caras de $\mathcal{P}$ que tienen a $V$ como uno de sus vértices; con ángulos de rotación $2\pi r/m$, $r = 1, \cdots, m-1$.
- Medias vueltas con eje $e$ que pasa por el punto medio $M$ de una arista $a$ de $\mathcal{P}$. Además $e$ es ortogonal a $a$, así deja invariante la arista $a$ aunque intercambia sus extremos. $e$ es la bisectriz del ángulo formado por las dos caras $C_1, C_2$ que comparten $a$ y que pasa por $M$; permutando así $C_1$ y $C_2$.

## 14. Geometría analítica

**Definición 14.1** Un paralelogramo $\square PABC$ se llama **rectángulo** si $r_{PA} \perp r_{PC}$

**Observación 14.3** Un sistema de **coordenadas cartesianas** es un par de rectas $l^1$, $l^2 \subset \mathbb{P}$ cortándose ortogonalmente en un punto $O$, llamado **origen**, siendo así $l^1, l^2$ los **ejes** [El sistema es construible porque el **Teorema 2.29** garantiza la existencia de $l_2 \perp l_1$ único pasando por $O$]. Por el **Axioma P3** existen aplicaciones

$$\gamma_k : l^k \to \mathbb{R}, \;\; k = 1, 2$$

tales que

$$X, Y \in l^k \to d(X, Y) = \left|\gamma_k(X) - \gamma_k(Y)\right|$$

Además, podemos elegir puntos $E^k$ tales que $\gamma_k(O) = 0$ y $\gamma_k(E^k) = 1$. Este sistema de coordenadas $OE^1E^2$ es orientado, y a todo punto $A \in \mathbb{P}$ se le pueden asociar dos reales $a_1, a_2$ tales que cada $a^k$ es ortogonal a $l^k$, de modo que $a_k = \gamma_k(A^k)$; y se puede determinar la aplicación de coordenadas $\Gamma(A) = (a_1, a_2)$.

**Observación [Coordenadas en $\mathbb{E}$]** Un sistema de coordenadas en el espacio $\mathbb{E}$ es una terna de rectas $l^1, l^2, l^3$ ortogonales entre sí, los ejes, con un origen $O$; los puntos $E^k$ tales que $d(O, E^k) = 1$ que generan el sistema de coordenadas $OE^1E^2E^3$, y las aplicaciones $\gamma_k$ y $\Gamma$ similares a las de la **Observación 14.3** pero con una dimensión más.

**Teorema 14.4/14.6/14.7** La aplicación $\Gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ es biyectiva. Si $A, B$ son dos puntos, y $\Gamma(A) = (a_1, a_2)$ ; $\Gamma(B) = (b_1, b_2)$, entonces

$$d(A, B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

Para $\mathbb{E}$, $\Gamma : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ también es biyectiva, y la distancia entre $A, B$ viene dada por

$$d(A, B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

**Corolario 14.5/Observación 14.8** El espacio métrico $(\mathbb{P}, d)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, d_E)$ y $\Gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ es una isometría. El espacio métrico $(\mathbb{E}, d)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^3, d_E)$ y $\Gamma : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ es una isometría.

**Definición [Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$]** El espacio $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\mathbb{R}^n = \{X = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R};\ i = 1, \cdots, n\}$. El conjunto tiene una estructura de **espacio vectorial** con las operaciones

$$X + Y \equiv (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \; ; \; X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

**Definición 14.9 [Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$]** Para dos puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ la métrica euclidiana es la aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(X, Y) \equiv \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

**Definición 14.10** El **producto escalar** de $X, Y$ es

$$\langle X, Y \rangle = X \cdot Y \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La **norma** es la operación

$$||X|| \equiv \langle X, X \rangle^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

**Teorema 14.11** Para $X, X', Y, Y' \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\langle X, X \rangle \geq 0$ ; $\langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0$
- $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
- $\langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle = \langle X, \lambda Y \rangle$
- $\langle X + X', Y \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X', Y \rangle$ ; $\langle X, Y + Y' \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$

**Observación 14.12** El producto escalar y la distancia están relacionados:

- $d(X, Y) = ||X - Y|| = \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle}$
- $d(X, -Y) = ||X + Y||$
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(||X + Y||^2 - ||X - Y||^2)$
- $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(||X||^2 + ||Y||^2 - ||X - Y||^2)$

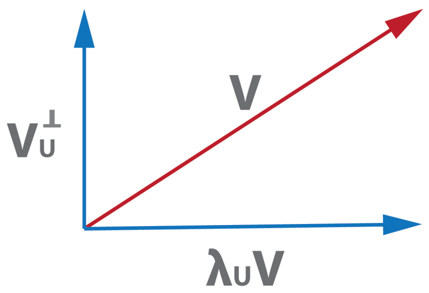
**Teorema 14.13** Sea $V \in \mathbb{R}^n$ , $V \neq 0$. Para todo $U \in \mathbb{R}^n$ existe un único $\lambda_U \in \mathbb{R}$ y un único $V_U^\perp$ tales que

$$U = \lambda_U V + V_U^\perp \; ; \; \langle V, V_U^\perp \rangle = 0$$

Además, $\lambda_U$ y $V_U^\perp$ se expresan como

$$\lambda_U = \frac{\langle U, V \rangle}{||V||^2} = \frac{\langle U, V \rangle}{\langle V, V \rangle} \; ; \; V_U^\perp = U - \lambda_U V$$

Demostración. Por la definición de $U$ tenemos que $\langle U, V \rangle = \langle \lambda_U V + V_U^\perp, V \rangle = \lambda_U \langle V, V \rangle + \cancel{\langle V_U^\perp, V \rangle} \iff \lambda_U = \frac{\langle U, V \rangle}{||V||^2}$
Por otra parte, $\langle V_U^\perp, V \rangle = \langle U - \lambda_U V, V \rangle = \langle U, V \rangle - \lambda_U \langle V, V \rangle = \langle U, V \rangle - \langle U, V \rangle \frac{||V||^2}{||V||^2} = 0$




**Teorema 14.14** $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico: para cada terna $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ se satisface

- $d(X,Y) \geq 0$ ; $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$
- $d(X,Y) = d(Y,X)$
- $d(X,Z) + d(Z,Y) \geq d(X,Y)$

Demostración. Para la tercera afirmación: $V = Y - X$. Segun 14.13, existen $\lambda, W$ tales que $Z - X = \lambda V + W$ ; $\langle V, W \rangle = 0$. Si $Z - Y = Z - X - (Y - X) = (\lambda - 1)V + W$ y manipulamos las distancias:

$$||Z - X||^2 = \langle \lambda V + W, \lambda V + W \rangle = \lambda^2 ||V||^2 + ||W||^2$$

$$||Z - Y||^2 = \langle (\lambda - 1)V + W, (\lambda - 1)V + W \rangle = (\lambda - 1)^2 ||V||^2 + ||W||^2$$

Y, por tanto

$$||Z - X|| + ||Z - Y|| \geq |\lambda| \cdot ||V|| + |\lambda - 1| \cdot ||V|| \geq ||V|| = ||Y - X||$$

**Observación 14.15** Para $A, B \in \mathbb{R}^n$ se llama **segmento de recta**, $[A, B]$ al conjunto

$$[A, B] = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$$

o, empleando el **Teorema 14.14**

$$[A, B] = \{Z \in \mathbb{R}^n \mid Z = A + \lambda(B - A) \text{ , } \lambda \in [0, 1]\}$$

**Ejercicio 14.2 [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]**
Sean $U, V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq 0$. Entonces

$$\langle U, V \rangle^2 \leq ||U||^2 \cdot ||V||^2$$

y se cumple la igualdad sii $U = \lambda V$.