

Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en \mathbb{R} . Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z .

Definición 1.2 La suma y multiplicación están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$(x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de z , z a $x - yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

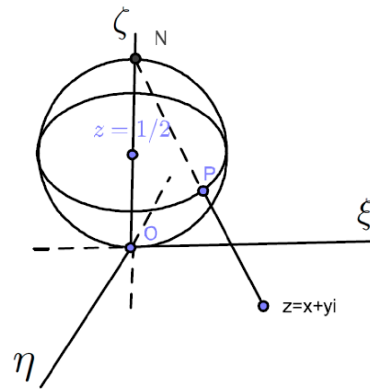
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z \overline{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

Definición 1.5 Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos \alpha$, $q = \sin \alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.

El argumento cumple que (1) $\arg \overline{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico (\mathbb{C}, δ_E) con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, \mathbb{S} , es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemman.

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Funciones complejas

Definición 2.0 Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

Definición 2.1.1 $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si f es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

Teorema 2.1.1 Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $f_1 + f_2$ y f_1/f_2 son continuas en z_0 . Así, los polinomios complejos son continuos.

Definición 2.1.2 Una función $f(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$ es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

Definición 2.2.1, 2.2.2 Una función $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable en todo A se llama función **holomorfa** o **analítica**.

Proposición 2.3.2 Si f es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena) Sean $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Definición 2.4.1 Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es **conforme** en z_0 si existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en t_0 , $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$ se transforma por f en una curva

$\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en t_0 tal que $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$. Si α es el ángulo en el punto de cruce z_0 entre γ_1, γ_2 , entonces el ángulo de $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ es α .

Teorema 2.4.1 Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa, es conforme. *Demostración.* Por la regla de la cadena, $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

Definición 2.5.1 Una función de variable compleja puede transformarse a una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea f . $f'(z_0)$ existe sii f es diferenciable como función de dos variables y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos f derivable en z_0 complejo, con derivada $\lambda = f'(z_0)$. Si tomamos la aplicación lineal $l_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \eta \rightarrow \lambda\eta$. Entonces $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - \lambda \right| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$. Escribiendo $f(z_0)$ y $l_c(\eta)$ como componentes reales:

(1) $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$

su jacobiano es $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ y (2) $l_c(\eta) = \lambda\eta =$

$(\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$, que como aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$.

Como el jacobiano la derivada de f en los reales, y A es también la diferencial de f en z_0 , $D = A$, y se dan las ecuaciones.

Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa)

Sea f analítica con derivada continua en A . Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existen U, V abiertos tal que $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ y $f : U \rightarrow V$ es biyectiva. Además, f^{-1} es analítica en V y para todo $z \in U$, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.