Topología

1 Espacios topológicos

Se dice que p es el límite de una sucesión de reales $a_1, \cdots, a_n$ cuando, para todo abierto $p - \epsilon, p + \epsilon$, existe un m tal que para todo $n \geq m$ se cumple que $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto p, $B(p)$. Sea X no vacío, para cada $p \in X$ existe una familia $B(p)$. Se dice que $B(p)$ es una **base de entornos abiertos** de p si todas las familias $B(p)$ verifican:

- B1: si $U \subset B(p)$, entonces $p \in U$.
- B2: si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, existe $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$.
- B3: si $U \in B(p)$, para todo $q \in U$ existe $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$.

Esta generalización de conjuntos $(p - \epsilon, p + \epsilon$ nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico** (X, d) a un conjunto X con una distancia d definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro p y radio r al conjunto $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$. Las familias $B(p)$ de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en (X, d).

Si X es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$, un subconjunto $A \subset X$ es un **conjunto abierto** cuando es $\emptyset$ o cuando para cada $t \in A$ existe un subconjunto $U \in B(t)$ tal que $U \subset A$.

En $\mathbb{R}$ la topología usual (T_u) viene dada por $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$. En esta topología, $(\mathbb{R}, T_u)$, cada intervalo abierto (a, b) viene dado como $B(t)$, $t = \frac{a+b}{2}$. El intervalo $[a, b)$ no es abierto, pues para a no existe ningún conjunto $U \in B(a)$ tal que $U \subset [a, b)$.

Dos sistemas de bases de entornos abiertos, $B(p), B'(p)$ son **equivalentes** cuando determinan la misma topología T en X; es decir, que para cada $U \in B(p)$ existe un $U' \in B'(p)$ tal que $U \subset U'$ y que para cada $V' \in B'(p)$ exista un $V \in B(p)$ tal que $V' \subset V$.

1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto X. La topología T determinada en X cumple:

- P1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$.
- P2: Dada una familia de abiertos $U_\lambda, \lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda U_\lambda$ es un elemento de T.
- P3: Dada una familia **finita** $U_i, i = 1, \cdots, n$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un elemento de T.

Un **espacio topológico** (X, T) es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de X, $H(p)$ para cada $p \in X$ [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias H forman una topología T en X. Si para esa topología existe una métrica d, entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si T, T' son dos topologías de X, y $T \subset T'$, entonces se dice que T es menos **fina** que T'. La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por $\{\emptyset, X\}$, y la menos fina, o **discreta**, está dada por $\mathcal{P}(X)$, es decir, el conjunto partición de X.

En (X, T) se llama **conjunto cerrado** a un conjunto $M \subset X$ tal que $X - M$ es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es (X, T) verifica:

- C1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$ son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados M_λ, $\lambda \in L$ de T, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda M_\lambda$ es un cerrado.
- C3: Dada una familia M_λ, $\lambda \in L$ de elementos de T, la intersección de los elementos, $\bigcap_L U_\lambda$ es un elemento de T.

Si (X, T) es un estacio topológico y $M \subset X$, la topología $T_M = \{M \cap U\}$ de las intersecciones de M con abiertos U de (X, T) se llama **topología inducida o subordinada** de T. Así, el espacio M, T_M es un subespacio de (X, T).

2 Base de una topología

Dada una topología T en X, la **base de la topología**, B, es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío $U \subset T$ es una unión de elementos de B. $\forall U \subset T \ , \ U = \cup_i B_i$

Sea X un conjunto y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de X. Una condución necesaria y suficiente para que F sea base de X es:

- I: $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si A_λ, A_μ son dos elementos de F, y $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$, para cualquier punto $t \in A_\lambda \cap A_\mu$ existe $A_\nu \in F$ tal que $t \in A_\nu$

2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio (X, T) verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo $x \in X$ existe una base de entornos de x que sea numerable. Un espacio (X, T) verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

2.2 Topología engendrada for una familia de subconjuntos

Cualquier familia $\{A_\lambda\}$ de X que cumpla I es una subase de una topología de X. Si $H = \{A_\lambda\}$ cumple I y II, la familia B formada por las intersecciones (y uniones) finitas de H es base para alguna topología de X y se llama **topología engendrada**.

3 Entornos en un espacio topológico

Sea (X, T) un espacio topológico, y $p \in X$. $A \subset X$ es entorno de p si existe un abierto U de la topología T tal que $p \in U \subset A$. No todo entorno ha de ser abierto. Por ejemplo, $[0, 1)$ es entorno de $1/2$ (existe $U = (1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4) \subset [0, 1)$, pero no de 0 (ningún abierto en T cumple $U \subset [0, 1)$.

Los sistemas de entornos $E(p)$ para X cumplen:

- E1: Si $A \in E(p)$, entonces $p \in A$.
- E2: Si $A \in E(p)$, todo subconjunto $A' \subset X$ tal que $A' \supset A$ pertenece a $E(p)$ [porque $p \in A'$].
- E3: Si $A, A' \in E(p)$, entonces $A \cap A' \in E(p)$. Esto es aplicable a un número finito de intersecciones.
- E4: Si $A \in E(p)$, A, existe $U \in E(p)$ tal que para todo $q \in U, A \in E(q)$.

Sea $p \in (X, T)$, y $E(p)$ su sistema de entornos. Una subfamilia $A(p)$ de $E(p)$ es un sistema fundamental de entornos (abiertos o no) de p [base de entornos] si todo entorno de p contiene un elemento de $A(p)$.

Los sistemas de bases de entornos $B(p)$ resultan ser sistemas fundamentales de entornos. P. ej. en $(\mathbb{R}, T_u)$ cada punto x tiene una base de entornos numerable, los intervalos abiertos de radio racional: $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q}}$.

Un espacio topológico métrico verifica el primer axioma de numerabilidad, pues $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q}}$ es un sistema de entornos numerable.

4 Subconjuntos en un espacio topológico

Todo punto en un espacio topológico puede ser de 3 tipos distintos. Si consideramos el espacio (X, T) y $M \subset T$, entonces

- $t \in X$ es un punto **interior** a M ($t \in int(M)$) si existe algún entorno $V \subset M$.
- $t \in X$ es un punto **exterior** a M ($t \in ext(M)$) si existe un entorno V de t que no corta a M [$V \cap M = \emptyset$].
- $t \in X$ es un punto **frontera** ($t \in front(M)$) si para todo entorno V, $V \cap M \neq \emptyset$ y $V \cap (X - M) \neq \emptyset$.

El interior de M, $int(M)$ es el mayor abierto contenido en M. $ext(M)$ también es un conjunto abierto, y $front(M)$ es siempre cerrado.

De esta clasificación pueden crearse más definiciones.

- $t \in X$ es **adherente** a M si para todo entorno $V(t)$ es $V \cap M \neq \emptyset$. $adh(M) = \overline{M} = int(M) \cup front(M)$.
  - $t \in X$ es un punto de **acumulación** de M si todo entorno $V(t)$ corta a M en algún punto distinto de t; es decir, $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación se denomina **derivado** de M, o $der(M)$.
  - $t \in X$ es **aislado** cuando existe algún entorno $V(t)$ tal que $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$.

En $((X, T)$, un conjunto M es cerrado sii contiene todos sus puntos de acumulación.

En un espacio (X, T) un subconjunto M es denso en X si $adh(M) = X$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en

$\mathbb{R}$, porque para todo entorno de $\mathbb{R}$ siempre hay un racional. Un subconjunto es denso sii para todo abierto no vacío $U \subset X$ se tiene que $U \cap M \neq \emptyset$.

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto numerable y denso.

5 Sucesiones, límites de sucesiones

Una **sucesión** en un conjunto X es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$; $s(i) \mapsto a_i$. Cuando se tiene una aplicación $f : X \to Y$ y una sucesión $s : \mathbb{N} \to X$, definimos la sucesión $s' : \mathbb{N} \to Y$ a la composición $s' = f \circ s$ de modo que $s'(i) = f$ o $s(i) = f(a_i) \in Y$. La sucesión $s(i) = a_i$ se representa por $\{a_i\}$.

Dada una sucesión $\{a_i\}$ en X, se define $A_m = \{a_i \in s \mid i \geq m\}$. Se tiene que $A_m \neq \emptyset$ y $A_k \subset A_m \cap A'_m \iff k = max(m, m')$.

Si X es un conjunto, una **base de filtro X** es una familia $\mathcal{B} = \{A_\lambda\} \subset X$ que verifica que (1) $A_\lambda \neq \emptyset$ y (2) dados A_λ, A_μ existe $A_\nu \in \mathcal{B}$ tal que $A_\nu \subset A_\lambda \cap A_\mu$. En un espacio (X, T), una base de entornos $E(p)$ es una base $\mathcal{B}$.

Dadas dos bases de filtro $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, se dice que $\mathcal{B}'$ es **más fina** que $\mathcal{B}$ cuando para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $A' \in \mathcal{B}'$ tal que $A' \subset A$.

Si $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$, las imágenes $\{f(A_\lambda)\}$ forman una base de filtro en Y, y se representa por $f(\mathcal{B})$. Si $\mathcal{B}' = \{A'_\lambda\}$ es una base de filtro en Y y $\forall\lambda\ A'_\lambda \cap f(X) \neq \emptyset$, entonces $\{f^{-1}(A'_\lambda)\}$ forman una base de filtro en X y se representa por $f^{-1}(\mathcal{B}')$.

Si consideramos la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{N}_m = \{i \in N \mid i \geq m\}$ forman una base de filtro $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$, llamada **base de filtro de Fréchet**.

p es el **punto límite** de $\{a_i\}$ si dado un entorno U de p, existe m tal que $A_m \subset U$. Asimismo, p es un punto límite de $\mathcal{B}$ en un espacio topológico (X, T) si dado un entorno U de p, existe un $A_\lambda \in \mathcal{B}$ tal que $A_\lambda \subset U$.

Un espacio topológico (X, T) verifica el **axioma de separación** T_2 cuando, dados $p, q \in X$ existen dos entornos $U(p), V(q)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Este espacio se denomina también **espacio de Hausdorff**. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, T_u)$ es de Hausdorff, porque si se toman $p, q \in \mathbb{R}$, y $d = |p - q|$, entonces $U = (p - \frac{d}{2}, p + \frac{d}{2})$ y $V = (q - \frac{d}{2}, q + \frac{d}{2})$ son disjuntos.

Sea $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$ una base en un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{B}$ es convergente a p, éste es el único punto límite de $\mathcal{B}$.

Sea $s = \{a_i\}$. $p \in X$ es un **punto de aglomeración** de s si se verifica que para todo entorno U de p y para todo A_m de la base de filtro de Fréchet de la sucesión, es $A_m \cap U \neq \emptyset$.

Si $s = \{a_i\}$ es una sucesión en (X, T), el conjunto de puntos de aglomeración de s es $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{adh(A_m)\}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en (X, T), p es de aglomeración cuando para todo entorno U de p y para todo $A_\lambda \in \mathcal{B}$, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$. El conjunto $\cap_\lambda\{adh(A_m)\}$ es el conjunto de puntos de aglomeración de $\mathcal{B}$.

6 Aplicaciones continuas. Homeomorfismos

Sea $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$, y $p \in X$. Entonces f es **continua** en p cuando para todo entorno $V \in (Y, S)$ existe un entorno $U \in (X, T)$ tal que $f(U) \subset V$. Si consideramos una base de $\mathcal{B}$, entonces f es continua en p si para toda base de filtro $\mathcal{B}$ convergente a p, $f(\mathcal{B})$ converge a $f(p)$.

Una aplicación f es continua en (X, T) si lo es para todo $p \in X$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua es que para todo abierto V de (Y, S) [o de la base del espacio], $f^{-1}(V)$ sea abierto en (X, T). Análogamente, f es continua si para todo cerrado V, $f^{-1}(V)$ es cerrado en (X, T).

Sea $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ y $g : (Y, S) \rightarrow (Z, T')$, si f y g son continuas, $g \circ f$ también lo es.

Una aplicación $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son continuas. Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Se llama propiedad topológica o **invariante** topológico a aquella que si la tiene un espacio topológico, la tienen todos los que son homeomorfos a este. Ejemplos de invariantes son los axiomas de numerabilidad, poseer un denso numerable (separabilidad) o ser espacio T_2. Por ejemplo, espacios con topologías T_u y D no son homeomorfos.

7 Topología inducida por una o varias aplicaciones

Dada una aplicación $f : X \rightarrow (Y, T')$, se llama **topología inducida** o **topología inicial** por f en X a la topología $T = \{f^{-1}(V) \mid V \in T'\}$, que es la topología menos fina de X que hace continua a f.

En la topología inducida en X por $f : X \rightarrow (Y, T')$, un conjunto $A \subset X$ es cerrado sii $A = f^{-1}(U)$, siendo U un cerrado de (Y, T'). Lo mismo se aplica si A es abierto o es un entorno.

Topología inducida por la composición. Sean X, X^* conjuntos, (X', T') un espacio topológico y las aplicaciones $h : X^* \rightarrow X$ y $f : X \rightarrow (X', T')$. Si T es la topología inducida por f en X, y T^* es la topología inducida por h en $X*$, entonces T^* es la topología inducida por $f \circ h$ en X^*.

Topología inducida por varias aplicaciones. Sea X un conjunto, y $(Y_1, S_1), (Y_2, S_2), \cdots, (Y_n, S_n)$ diferentes espacios topológicos. Entonces, la topología de X más fina que haga continuas las aplicaciones $f_1, \cdots, f_n$ es aquella que tenga por base la familia de subconjuntos de X de la forma $f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots f_n^{-1}(U_n)$, donde $U_1 \in S_1, \cdots, U_n \in S_n$.

Propiedad universal de la topología inducida (una o varias aplicaciones). Sea (X, T) un espacio topológico con la topología T inducida por las aplicación $f_i : (X, T) \rightarrow (Y_i, T_i)$. Se verifica que para todo espacio (M, S) y cualquier aplicación $g : (M, S) \rightarrow (X, T)$, g es continua sii $f_i \circ g : (M, S) \rightarrow (Y_i, T_i)$ lo es para todo i.

8 Topología relativa. Subespacio topológico

Sea (X, T) un espacio topológico, M un subconjunto de (X, T) y $j : M \longrightarrow (X, T) \; ; \; x \mapsto j(x) = x$. La topología T_M inducida en X for j se llama **topología relativa**, o **topología subordinada** por (X, T) en

M. El espacio (M, T_M) es un subespacio topológico de (X, T).

Sea M un subconjunto del espacio (X, T). Una parte A de M es un abierto en (M, T_M) sii existe un abierto $U \in T$ tal que $A = U \cap M$. Así, $T_M = \{M \cap U\}$.

La topología inducida tiene las siguientes propiedades:

- En el subespacio (M, T_M) de (X, T) un subconjunto W es cerrado sii existe un cerrado W' de (X, T) tal que $W = M \cap W'$.
- Un conjunto $A \subset M$ es entorno de $p \in M$ para el espacio (M, T_M) sii existe un entorno $A' \subset X$ tal que $A = A' \cap M = j^{-1}(A')$.
- Propiedad universal: Para un subespacio (M, T_M) de un espacio (X, T), la aplicación $g : (X^*, S) \to (M, T_M)$ es continua sii la aplicación $j \circ g : (X^*, S) \to (X, T)$ es continua.
- Transitividad: Si (M, T_M) es un subespacio de (X, T) y M' es un subconjunto de M, se verifica que la topología subordinada en M' por (M, T_M) coincide con la subordinada por (X, T).

Sea M, T_M subespacio de (X, T). Para que todo abierto / cerrado A de (M, T_M) sea abierto / cerrado en (X, T), es condición necesaria y suficiente que M sea abierto / cerrado en (X, T).

Si $f : (X, T) \to (Y, S)$ es una aplicación continua, la restricción $f|_M$ de (M, T_M) a (X, T) es continua. Sin embargo, que $f|_M$ sea continua no implica que f sea continua.

Se llama **propiedad hereditaria** una propiedad topológica que si un espacio la tiene, la tienen todos sus subespacios. Propiedades hereditarias son la separación T_2, o los axiomas de numerabilidad.

También es hereditario el ser un espacio metrizable. Si (X, d) es un espacio métrico, con T la topología de X correspondiente a la distancia d, la topología inducida por T en M coincide con la topología definida en M por d_M.

Un espacio es T_1 separable cuando cada conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado.

9 Topología producto

Dados dos espacios (X_1, T_1) y (X_2, T_2), una base para la topología producto $T_1 \times T_2$ es la familia de abiertos $B = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in T_1, U_2 \in T_2\}$. Estos abiertos $U_1 \times U_2$ se llaman **abiertos elementales** de la Topología producto. Así, un abierto $A \in T_1 \times T_2$ es abierto sii es unión de abiertos de B: $A = \cup_{\lambda \in L}\{U_1^\lambda \times U_2^\lambda\}$.

Las propiedades de la Topología producto son las siguientes:

- Las propiedades $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ son aplicaciones continuas, y $X_1 \times X_2$ es la Topología menos fina de $X_1 \times X_2$ para las que son continuas.
- Propiedad universal: una aplicación $f : (Y, S) \to (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es continua sii $p_1 \circ f$ y $p_2 \circ f$ son continuas.

Las aplicaciones $f_1 = p_1 \circ f$ y $f_2 = p_2 \circ f$ se llaman **componentes de** f. Un punto $y \in (Y, S)$ se representa como $(x_1, x_2) = f(y)$ o como $x_1 = f_1(y), x_2 = f_2(y)$.

Una aplicación $f : (X, T) \to (Y, S)$ es abierta si para cada abierto $U \in T$, $f(U)$ es abierto de S. Entonces, en el espacio producto, p_1, p_2 son aplicaciones abiertas.

Para cada punto $a \in X_1$, el subespacio $p_1^{-1}(a) = \{a\} \times X_2$ es homeomorfo a (X_2, T_2) y viceversa.

Si una aplicación $f : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \rightarrow (Y, S)$ es continua, sus restricciones a subespacios $f_a : \{a\} \times X_2 \rightarrow (Y, S)$ y $f_b : X_1 \times \{b\} \rightarrow (Y, S)$ también son continuas. También son continuas las aplicaciones por composición $g_a : (X_2, T_2) \rightarrow (Y, S)$, $g_b : (X_1 \rightarrow T_1) \rightarrow (Y, S)$. Sin embargo, aunque las aplicaciones por cada una de las variables (f_a, f_b) garanticen la continuidad, no se deduce que sea continua la aplicación en $y = f(x_1, x_2)$.

Sea $p(x_1, x_2)$ un punto del espacio producto $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2$. Si $\{V_j\}$ es una base de entornos de x_1 en (X_1, T_1) y $\{W_k\}$ es una base de entornos de x_2 en (X_2, T_2), entonces $\{V_j \times W_k\}$ constituyen una base de entornos en $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$.

Una propiedad topológica es **finito-multiplicativa** sii verifica que la poseen los espacios (X_1, T_1), (X_2, T_2), (X_n, T_n) entonces la posee su producto. Si la cantidad de espacios es infinito, entoces es multiplicativa. Los axiomas de numerabilidad, la separación T_2 y la metricabilidad son proiedades finito-multiplicativas.

Para dos puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, las distancias $d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, d'(x, y) = max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, d^*(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ cumplen que $d' \leq d \leq d^* \leq 2d'$, luego todas las métricas resultan equivalentes, y con ello sus bases de entornos. Por tanto, las 3 métricas determinan la misma topología métrica en $X_1 \times X_2$.