# Topología

## 1 Espacios topológicos

Se dice que $p$ es el límite de una sucesión de reales $a_1, \cdots, a_n$ cuando, para todo abierto $p - \epsilon, p + \epsilon$, existe un $m$ tal que para todo $n \geq m$ se cumple que $a_n \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$.

Esta noción de intervalo se unifica en el concepto **bola**, y se define la familia de intervalos de un punto $p$, $B(p)$. Sea $X$ no vacío, para cada $p \in X$ existe una familia $B(p)$. Se dice que $B(p)$ es una **base de entornos abiertos** de $p$ si todas las familias $B(p)$ verifican:

- B1: si $U \subset B(p)$, entonces $p \in U$.
- B2: si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, existe $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$.
- B3: si $U \in B(p)$, para todo $q \in U$ existe $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$.

Esta generalización de conjuntos $(p - \epsilon, p + \epsilon$ nos simplifica y permite expandir la definición de topología, independientemente de una métrica o distancia.

Se llama un **espacio métrico** $(X, d)$ a un conjunto $X$ con una distancia $d$ definida en él. En un espacio métrico se llama **bola abierta** de centro $p$ y radio $r$ al conjunto $E(p, r) = \{t \in X \mid d(p, t) < r\}$. Las familias $B(p)$ de todas las bolas con radios reales cumplen los puntos B1, B2 y B3, por lo que constituyen base de entornos abiertos en $(X, d)$.

Si $X$ es un conjunto en el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$, un subconjunto $A \subset X$ es un **conjunto abierto** cuando es $\emptyset$ o cuando para cada $t \in A$ existe un subconjunto $U \in B(t)$ tal que $U \subset A$.

En $\mathbb{R}$ la topología usual $(T_u)$ viene dada por $B(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$. En esta topología, $(\mathbb{R}, T_u)$, cada intervalo abierto $(a, b)$ viene dado como $B(t)$, $t = \frac{a+b}{2}$. El intervalo $[a, b)$ no es abierto, pues para $a$ no existe ningún conjunto $U \in B(a)$ tal que $U \subset [a, b)$.

Dos sistemas de bases de entornos abiertos, $B(p), B'(p)$ son **equivalentes** cuando determinan la misma topología $T$ en $X$; es decir, que para cada $U \in B(p)$ existe un $U' \in B'(p)$ tal que $U \subset U'$ y que para cada $V' \in B'(p)$ exista un $V \in B(p)$ tal que $V' \subset V$.

### 1.1 Propiedades de una topología

Sea un conjunto $X$. La topología $T$ determinada en $X$ cumple:

- P1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$.
- P2: Dada una familia de abiertos $U_\lambda, \lambda \in L$ de $T$, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda U_\lambda$ es un elemento de $T$.
- P3: Dada una familia **finita** $U_i, i = 1, \cdots, n$ de elementos de $T$, la intersección de los elementos, $\bigcap_{i=1}^n U_i$ es un elemento de $T$.

Un **espacio topológico** $(X, T)$ es un conjunto no vacío con una topología definida en él. Una familia de subconjuntos de $X$, $H(p)$ para cada $p \in X$ [SEAN DISCRETOS O CONTINUOS], si cumple P1, P2, P3 entonces, las familias $H$ forman una topología $T$ en $X$. Si para esa topología existe una métrica $d$, entonces decimos que es una **topología metrizable**.

Si $T, T'$ son dos topologías de $X$, y $T \subset T'$, entonces se dice que $T$ es menos **fina** que $T'$. La topología más fina de todas es la **topología trivial**, dada por $\{\emptyset, X\}$, y la menos fina, o **discreta**, está dada por $\mathcal{P}(X)$, es decir, el conjunto partición de $X$.

En $(X, T)$ se llama **conjunto cerrado** a un conjunto $M \subset X$ tal que $X - M$ es abierto. Una familia de conjuntos cerrados es $(X, T)$ verifica:

- C1: $\emptyset \in T$ y $X \in T$ son cerrados.
- C2: Dada una familia **finita** de cerrados $M_\lambda$, $\lambda \in L$ de $T$, la unión de los elementos, $\bigcup_\lambda M_\lambda$ es un cerrado.
- C3: Dada una familia $M_\lambda$, $\lambda \in L$ de elementos de $T$, la intersección de los elementos, $\bigcap_L U_\lambda$ es un elemento de $T$.

Si $(X, T)$ es un estacio topológico y $M \subset X$, la topología $T_M = \{M \cap U\}$ de las intersecciones de $M$ con abiertos $U$ de $(X, T)$ se llama **topología inducida o subordinada** de $T$. Así, el espacio $M, T_M$ es un subespacio de $(X, T)$.

# 2 Base de una topología

Dada una topología $T$ en $X$, la **base de la topología**, $B$, es una familia de conjuntos tal que cualquier abierto no vacío $U \subset T$ es una unión de elementos de $B$. $\forall U \subset T\ ,\ U = \cup_i B_i$

Sea $X$ un conjunto y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de $X$. Una condución necesaria y suficiente para que $F$ sea base de $X$ es:

- I: $\bigcup_\lambda \{A_\lambda\} = X$
- II: Si $A_\lambda, A_\mu$ son dos elementos de $F$, y $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$, para cualquier punto $t \in A_\lambda \cap A_\mu$ existe $A_\nu \in F$ tal que $t \in A_\nu$

## 2.1 1er y 2º axioma de numerabilidad

Un espacio $(X, T)$ verifica el 1er axioma de numerabilidad si para todo $x \in X$ existe una base de entornos de $x$ que sea numerable. Un espacio $(X, T)$ verifica el 2º axioma de numerabilidad cuando su topología tiene una base numerable.

## 2.2 Topología engendrada for una familia de subconjuntos

Cualquier familia $\{A_\lambda\}$ de $X$ que cumpla I es una subase de una topología de $X$. Si $H = \{A_\lambda\}$ cumple I y II, la familia $B$ formada por las intersecciones (y uniones) finitas de $H$ es base para alguna topología de $X$ y se llama **topología engendrada**.

# 3 Entornos en un espacio topológico

Sea $(X, T)$ un espacio topológico, y $p \in X$. $A \subset X$ es entorno de $p$ si existe un abierto $U$ de la topología $T$ tal que $p \in U \subset A$. No todo entorno ha de ser abierto. Por ejemplo, $[0, 1)$ es entorno de $1/2$ (existe $U = (1/2 - 1/4, 1/2 + 1/4) \subset [0, 1)$, pero no de 0 (ningún abierto en $T$ cumple $U \subset [0, 1)$.

Los sistemas de entornos $E(p)$ para $X$ cumplen:

- E1: Si $A \in E(p)$, entonces $p \in A$.
- E2: Si $A \in E(p)$, todo subconjunto $A' \subset X$ tal que $A' \supset A$ pertenece a $E(p)$ [porque $p \in A'$].
- E3: Si $A, A' \in E(p)$, entonces $A \cap A' \in E(p)$. Esto es aplicable a un número finito de intersecciones.
- E4: Si $A \in E(p)$, $A$, existe $U \in E(p)$ tal que para todo $q \in U, A \in E(q)$.

Sea $p \in (X, T)$, y $E(p)$ su sistema de entornos. Una subfamilia $A(p)$ de $E(p)$ es un sistema fundamental de entornos (abiertos o no) de $p$ [base de entornos] si todo entorno de $p$ contiene un elemento de $A(p)$.

Los sistemas de bases de entornos $B(p)$ resultan ser sistemas fundamentales de entornos. P. ej. en $(\mathbb{R}, T_u)$ cada punto $x$ tiene una base de entornos numerable, los intervalos abiertos de radio racional: $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q})}$.

Un espacio topológico métrico verifica el primer axioma de numerabilidad, pues $\{(x - r, x + r)\}_{0<r\in\mathbb{Q})}$ es un sistema de entornos numerable.

# 4 Subconjuntos en un espacio topológico

Todo punto en un espacio topológico puede ser de 3 tipos distintos. Si consideramos el espacio $(X, T)$ y $M \subset T$, entonces

- $t \in X$ es un punto **interior** a $M$ ($t \in int(M)$) si existe algún entorno $V \subset M$ [$V \cap M \neq \emptyset$].
- $t \in X$ es un punto **exterior** a $M$ ($t \in ext(M)$) si existe un entorno $V$ de $t$ que no corta a $M$ [$V \cap M = \emptyset$].
- $t \in X$ es un punto **frontera** ($t \in front(M)$) si para todo entorno $V$, $V \cap M \neq \emptyset$ y $V \cap (X - M) \neq \emptyset$.

El interior de $M$, $int(M)$ es el mayor abierto contenido en $M$. $ext(M)$ también es un conjunto abierto, y $front(M)$ es siempre cerrado.

De esta clasificación pueden crearse más definiciones.

- $t \in X$ es **adherente** a $M$ si para todo entorno $V(t)$ es $V \cap M \neq \emptyset$. $adh(M) = \overline{M} = int(M) \cup front(M)$.
  - $t \in X$ es un punto de **acumulación** de $M$ si todo entorno $V(t)$ corta a $M$ en algún punto distinto de $t$; es decir, $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación se denomina **derivado** de $M$, o $der(M)$.
  - $t \in X$ es **aislado** cuando existe algún entorno $V(t)$ tal que $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$.

En $((X, T)$, un conjunto $M$ es cerrado sii contiene todos sus puntos de acumulación.

En un espacio $(X, T)$ un subconjunto $M$ es denso en $X$ si $adh(M) = X$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en

$\mathbb{R}$, porque para todo entorno de $\mathbb{R}$ siempre hay un racional. Un subconjunto es denso sii para todo abierto no vacío $U \subset X$ se tiene que $U \cap M \neq \emptyset$.

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto numerable y denso.

## 5 Sucesiones, límites de sucesiones

Una **sucesión** en un conjunto $X$ es una aplicación $s : \mathbb{N} \to X$ ; $s(i) \mapsto a_i$. Cuando se tiene una aplicación $f : X \to Y$ y una sucesión $s : \mathbb{N} \to X$, definimos la sucesión $s' : \mathbb{N} \to Y$ a la composición $s' = f \circ s$ de modo que $s'(i) = f$ o $s(i) = f(a_i) \in Y$. La sucesión $s(i) = a_i$ se representa por $\{a_i\}$.

Dada una sucesión $\{a_i\}$ en $X$, se define $A_m = \{a_i \in s \mid i \geq m\}$. Se tiene que $A_m \neq \emptyset$ y $A_k \subset A_m \cap A'_m \iff k = max(m, m')$.

Si $X$ es un conjunto, una **base de filtro X** es una familia $\mathcal{B} = \{A_\lambda\} \subset X$ que verifica que (1) $A_\lambda \neq \emptyset$ y (2) dados $A_\lambda, A_\mu$ existe $A_\nu \in \mathcal{B}$ tal que $A_\nu \subset A_\lambda \cap A_\mu$. En un espacio $(X, T)$, una base de entornos $E(p)$ es una base $\mathcal{B}$.

Dadas dos bases de filtro $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, se dice que $\mathcal{B}'$ es **más fina** que $\mathcal{B}$ cuando para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $A' \in \mathcal{B}'$ tal que $A' \subset A$.

Si $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$, las imágenes $\{f(A_\lambda)\}$ forman una base de filtro en $Y$, y se representa por $f(\mathcal{B})$. Si $\mathcal{B}' = \{A'_\lambda\}$ es una base de filtro en $Y$ y $\forall\lambda\ A'_\lambda \cap f(X) \neq \emptyset$, entonces $\{f^{-1}(A'_\lambda)\}$ forman una base de filtro en $X$ y se representa por $f^{-1}(\mathcal{B}')$.

Si consideramos la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{N}_m = \{i \in N \mid i \geq m\}$ forman una base de filtro $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$, llamada **base de filtro de Fréchet**.

$p$ es el **punto límite** de $\{a_i\}$ si dado un entorno $U$ de $p$, existe $m$ tal que $A_m \subset U$. Asimismo, $p$ es un punto límite de $\mathcal{B}$ en un espacio topológico $(X, T)$ si dado un entorno $U$ de $p$, existe un $A_\lambda \in \mathcal{B}$ tal que $A_\lambda \subset U$.

Un espacio topológico $(X, T)$ verifica el **axioma de separación** $T_2$ cuando, dados $p, q \in X$ existen dos entornos $U(p), V(q)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Este espacio se denomina también **espacio de Hausdorff**. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, T_u)$ es de Hausdorff, porque si se toman $p, q \in \mathbb{R}$, y $d = |p - q|$, entonces $U = (p - \frac{d}{2}, p + \frac{d}{2})$ y $V = (q - \frac{d}{2}, q + \frac{d}{2})$ son disjuntos.

Sea $\mathcal{B} = \{A_\lambda\}$ una base en un espacio de Hausdorff. Si $\mathcal{B}$ es convergente a $p$, éste es el único punto límite de $\mathcal{B}$.

Sea $s = \{a_i\}$. $p \in X$ es un **punto de aglomeración** de $s$ si se verifica que para todo entorno $U$ de $p$ y para todo $A_m$ de la base de filtro de Fréchet de la sucesión, es $A_m \cap U \neq \emptyset$.

Si $s = \{a_i\}$ es una sucesión en $(X, T)$, el conjunto de puntos de aglomeración de $s$ es $\bigcap_{m \in \mathbb{N}}\{adh(A_m)\}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en $(X, T)$, $p$ es de aglomeración cuando para todo entorno $U$ de $p$ y para todo $A_\lambda \in \mathcal{B}$, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$. El conjunto $\cap_\lambda\{adh(A_m)\}$ es el conjunto de puntos de aglomeración de $\mathcal{B}$.