Variable compleja

Los números complejos

Definición 1.1 Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y i es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{R}$. Así, definimos $i = \sqrt{-1}$. Si $z \in \mathbb{C} = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$ son la parte **real** e **imaginaria** de z.

Definición 1.2 La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$$

Y con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$.

Definición 1.3 Dado un complejo $z = x + yi$, llamamos **conjugado** de z, $\overline{z}$ a $x - yi$.

Proposición 1.3.1 Se verifica que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

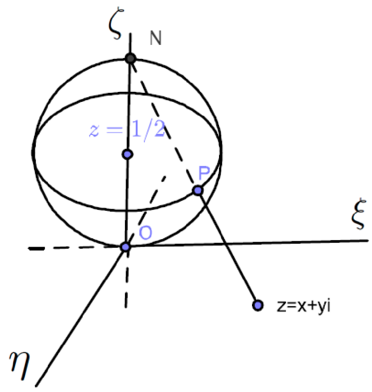
Definición 1.4.1 Se denomina **módulo** de un complejo $z = x + yi$, $|z|$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se cumple que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. El módulo cumple que (1) $|z| \geq 0$, (2) $|z| = 0 \iff z = 0$, (3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

Definición 1.5 Dado un $z = a + bi$, aplicando $u = p + iq = z/|z|$, entonces $|u| = 1 = p^2 + q^2$. El ángulo tal que $p = \cos\alpha, q = \sin\alpha$ se denomina **argumento**, $\arg z$. Así, z puede representarse como $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como $z = |z|e^{i\alpha}$.x

El argumento cumple que (1) $\arg\overline{z} = -\arg z$ y (2) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Definición 1.7 / 1.8 El espacio topológico $(\mathbb{C}, \delta_E)$ con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**, $\mathbb{S}$, es la representación del conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ en una esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ con ecuación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$.



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos z_1, z_2 es la distancia euclídea entre los puntos P_1, P_2 de la esfera de la esfera de Riemman.

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Funciones complejas

Definición 2.0 Una función puede ser de tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. real) o $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (f. compleja de var. compleja).

Definición 2.1.1 $f = f(z)$ es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f es **uniformemente continua** en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B$ y para todo z tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Si f es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

Teorema 2.1.1 Si $f_1(z), f_2(z)$ están definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, $\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2$ y $\mathrm{f}_1/\mathrm{f}_2$ son continuas en z_0. Así, los polinomios complejos son continuos.

Definición 2.1.2 Una función $f(z)$ en $A \subset \mathbb{S}$ es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $z \in A$ donde $\delta(z, z_0) < \eta$ entonces $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$.

Definición 2.2.1, 2.2.2 Una función $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ y es finito. Si $z_0 = \infty$, consideramos $g(z) = f(1/z)$ y f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en todo A se llama función **holomorfa** o **analítica.**

Proposición 2.3.2 Si f es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena) Sean $g : A \to \mathbb{C}$ y $f : B \to \mathbb{C}$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Definición 2.4.1 Una función $f : A \to \mathbb{C}$ es conforme en z_0 si existe exsite $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en t_0, $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma'(t_0) \neq 0$ se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en t_0 tal que $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$. Si α es el ángulo en el punto de cruce z_0 entre γ_1, γ_2, entonces el ángulo de $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ es α.

Teorema 2.4.1 Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ entonces f es conforme en z_0 y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa, es conforme. Demostración. Por la regla de la cadena, $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

Definición 2.5.1 Una función de variable compleja puede transformarse a una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemman) Sea f. $f'(z_0)$ existe sii f es diferenciable como función de dos variables y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos f derivable en z_0 complejo, con derivada $\lambda = f'(z_0)$. Si tomamos la aplicación lineal $l_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \eta \to \lambda\eta$. Entonces $\lim_{\eta\to 0} \left|\frac{f(z_0+\eta)-f(z_0)}{\eta} - \lambda\right| = \lim_{\eta\to 0} \frac{|f(z_0+\eta)-f(z_0)-l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$. Escribiendo $f(z_0)$ y $l_c(\eta)$ como componentes reales: (1) $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ su jacobiano es $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ y (2) $l_c(\eta) = \lambda\eta = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$, que como aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Como el jacobiano la derivada de f en los reales, y A es también la diferencial de f en z_0, $D = A$, y se dan las ecuaciones.

Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa) Sea f analítica con derivada continua en A. Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existen U, V abiertos tal que $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$ y $f : U \to V$ es biyectiva. Además, f^{-1} es analítica en V y para todo $z \in U$, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Series de potencias. Funciones elementales

Definición 3.0.1 Una **sucesión** de complejos es una aplicación $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se le corresponde $a_n \in \mathbb{C}$.

Definición 3.0.2 Una **serie** es una sucesión de complejos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Definición 3.0.3 Una sucesión es de **Cauchy** o **fundamental** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_1, n_2 \geq n_0$, se tiene que $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$.

Definición 3.0.4 Se dice que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente** a a si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|a_n - a| < \epsilon$, y diremos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Asimismo, A_n es convergente a A si $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Definición 3.0.5 Una serie A_n es absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Teorema 3.1.1 (Criterio de la raíz) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, sea $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $\lambda < 1$ la serie converge y si $\lambda > 1$ diverge.

Teorema 3.1.2 (Criterio del cociente) Dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sea $\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$, si $\beta < 1$ la serie converge, y si $\beta > 1$ diverge.

Definición 3.2.0 Una **sucesión de variable compleja** es una aplicación de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde una función $f_n : A \to \mathbb{C}$. Representamos la sucesión por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Asimismo, una **serie de funciones de variable compleja** es el resultado de sumar dichas funciones: $F_n(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Definición 3.2.1 Una sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ converge en $z_0 \in A$ cuando converge la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Diremos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** cuando converge para todo $z \in A$.

Definición 3.2.2 La serie $f_0 + \cdots + f_n + \cdots$ converge en un punto $z_0 \in A$, A abierto en $\mathbb{C}$ si la sucesión $\{F_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $F_n = f_0 + \cdots + f_n$ converge. La serie converge puntualmente en A si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en A.

Definición 3.2.3 La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in N}$ converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A, n \geq n_0$.

Definición 3.2.4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A si la sucesión $\{F_n\}_{n\in N}$ converge uniformemente en A.

Teorema 3.2.1 Criterio de la mayorante de Weierstrass) Una condición suficiente para que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ es que exista una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq a_n$ para todo z y $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 3.3.0 Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, con $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ para todo n. Los a_n se llaman **coeficientes** de la serie. Si $z_0 = 0$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ decimos que la serie está **centrada en el origen**.

Definición 3.3.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ considerando $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$; si llamamos $R = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

- La serie converge absolutamente en el interior del círculo $D_R = \{z||z - z_0| < R\}$ y diverge en el exterior $\overline{D_R} = \{z||z - z_0| > R\}$
- La convergencia es uniforme en todo circulo de radio $0 \leq r < R$

R se llama **radio de convergencia** de la serie.

Teorema 3.3.2 La función definida por la suma de serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

.

Definición 3.4.1 La función exponencial compleja es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

. Su radio de convergencia es $R = \infty$. Cumple también que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. El exponente puede reescribirse como $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Definición 3.4.2 La función logaritmo se obtiene desde la exponencial. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ tenemos que $\log z = \log|r| + i\theta = \log|r| + i\arg(z)$. Como $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, el logaritmo principal es $\theta \in [0, 2\pi] = \operatorname{Arg} z$.

Definición 3.4.3 Las funciones seno y coseno se definen a través de sus series de potencias con $R = \infty$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

La derivación es como con los números reales, y las identidades de Euler son idénticas:

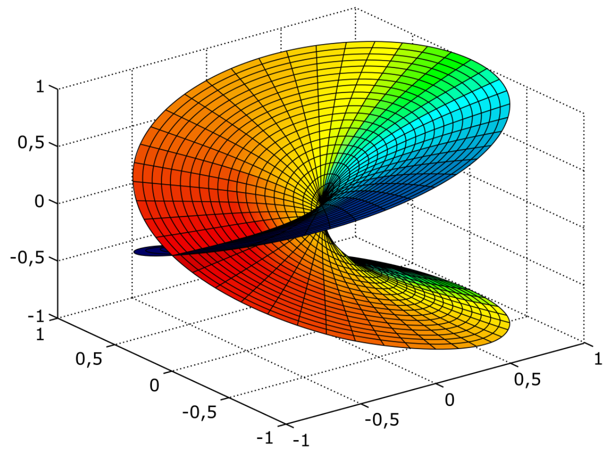
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ ,\ \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Definición 3.4.4 La función potencial con exponente complejo, $z^\zeta, \zeta \in \mathbb{C}$ es $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$

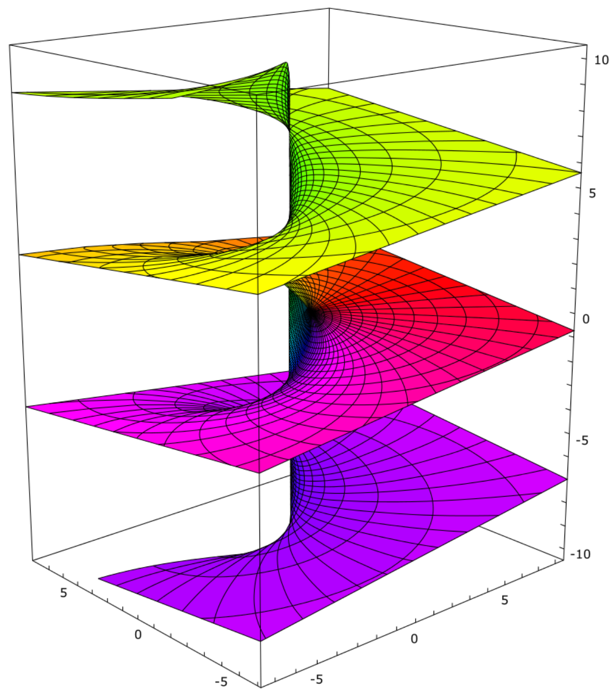
Definición 3.5.1 (Funciones multiformes) Una función f es multiforme cuando $w = f(z)$ puede tomar diferentes valores para el mismo z. Por ejemplo, para $f = \sqrt{z}$, $f(2i) = 1 + i$ y $f(2i) = -1 - i$. Esto se debe a que $z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i\arg(z))} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$.

Observamos que como k puede tomar dos valores, entonces la función tiene dos ramas, es decir, $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $w_2 = -\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}$. Por tanto, para completar un ciclo en w necesitamos completar dos ciclos en z (uno por rama). Esto genera una **superficie de Riemann** como la siguiente figura:



En este caso los ejes X e Y representan el plano complejo de z. El eje Z representa la parte real de $f(z)$, y el color representa la imaginaria. El punto de corte del plano es el caso $\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R} = 0 + i\sqrt{a}$. Sin embargo, el corte es un artefacto de la visualización tridimensional de 4 dimensiones.

Debajo se muestra el ejemplo de $f = \log z$, donde el eje X representa el argumento, y el color representa la parte real.



Vemos que el el plano "cae" de nivel en cada vuelta. Esto es el equivalente a cada rama del logaritmo.

Integración en el campo complejo

Definición 4.0.1 Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es **rectificable** cuando presenta una longitud finita.

Definición 4.0.2 Una **partición** de un intervalo es el conjunto $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$. La **norma** de la partición es $|\Delta| = \max\{|t_{k-1} - t_k|, k = 0, 1, \cdots, n-1\}$. Una partición Δ' es **más fina** que otra partición Δ cuando $\Delta \subset \Delta'$.

Definición 4.0.3 Dados f, γ, Δ, definimos la suma de Riemman-Stieljes como $S(\Delta, f, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)[\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)]$, con $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$. f es **integrable** Riemman-Stieljes (RS) si existe un complejo I tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición Δ_ϵ tal que para toda $\Delta_\epsilon \subset \Delta$, $|S(\Delta, f, \gamma) - I| < \epsilon$. I se denota por $\int_a^b f\ d\gamma$.

Definición 4.0.4 Si $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$, entonces $\int_a^b f\ d\gamma = \int_a^b f\ d\phi + i\int_a^b f\ d\psi$.

Proposición 4.1.1 Sean f, γ. Entonces existe la integral RS y $\left|\int_a^b f\ d\gamma\right| \leq ML(\gamma)$, donde $M = \max\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$ y $L(\gamma)$ es la longitud de γ. Demostración. $|S(\Delta, f, \gamma)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(s_k)\right| \left|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\right| \leq (\max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}) \sum_{k=0}^{n-1} \left|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\right| \leq ML(\gamma)$

Proposición 4.1.2 Si f es continua en $[a, b]$ y γ define un camino de clase C^1 entonces la integral RS viene dada por $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f\gamma' dt$ Demostración. Como $\int_a^b f\ d\gamma = \int_a^b f\ d\phi + i\int_a^b f\ d\psi$, vamos a demostrar que $\int_a^b f\ d\phi = \int_a^b f\phi'\ dt$. Por la definición de I existe para todo $\epsilon > 0$ una partición tal que $\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)\left[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)\right] - \int_a^b f d\varphi\right| < \epsilon$ Por el teorema del valor intermedio: $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'\left(s_k'\right)(t_{k+1} - t_k)$, luego $|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(s_k'\right)\varphi'\left(s_k'\right)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f d\varphi| < \epsilon$. Ahora bien, la expresión de sumatorio puede aplicarse a la integral, de modo que $|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(s_k'\right)\varphi'\left(s_k'\right)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f\varphi' dt| < \epsilon$. Por último, si denominamos S al sumatorio anterior, tenemos que $|\int_a^b f\varphi' dt - \int_a^b f d\varphi| \leq |\int_a^b f\varphi' dt - S| + |S - \int_a^b f d\varphi| \leq 2\epsilon$. Repetimos para $\int_a^b f\ d\psi$ y finalmente $\int_a^b f\ d\gamma = \int_a^b f\ d\phi + i\int_a^b f\ d\psi = \int_a^b f\phi'\ dt + i\int_a^b f\psi'\ dt = \int_a^b f\gamma'\ dt$

Definición 4.2.0 Sean f, γ. Se define la **integral de f a lo largo de** γ, $\int_\gamma f dz$ como $\int_a^b f \circ \gamma\ d\gamma$ y, si γ es C^1, entonces $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$. La integral cumple:

- Linealidad: $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2)\ dz = c_1 \int_\gamma f_1\ dz + c_2 \int_\gamma f_2\ dz$
- Si $-\gamma$ es el camino opuesto a γ: $\int_\gamma f\ dz = -\int_{-\gamma} f\ dz$
- Yuxtaposición: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\ dz = \int_{\gamma_1} f\ dz + \int_{\gamma_2} f\ dz$
- Se tiene la siguiente stimación: $|\int_\gamma f\ dz| \leq \int_\gamma |f||\ dz| = \int_a^b |f(t)||\gamma'(t)|\ dt \leq ML(\gamma)$.

Proposición 4.2.1 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, y γ. Si f_n son continuas y $f_n \to f$ entonces $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f dz$. Demostración. Si $|dz|$ es la longitud de la curva, L, entonces $\left|\int_\gamma f dz - \int_\gamma f_n dz\right| \leq \int_\gamma \left|f - f_n\right| |dz| < \epsilon L$.

También, si $\sum f_n$ converge uniformemente a F, entonces $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n\ dz = \int_\gamma F\ dz$. Demostración. $\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) dz = \int_\gamma (\lim_{n\to\infty} F_n)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma F_n dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \left(\sum_{k=1}^n f_k\right) dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_\gamma f_k dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz$

Proposición 4.3.1 Sean f, γ, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de clase $\mathbb{C}^1$. Si F es una frimitiva de F, se tiene que $\int_\gamma f\ dz$ = F(γ(a)) - F(γ(b)). Demostración. Si $\int_\gamma f\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$, como la derivada de $F(\gamma(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$; por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $\int_\gamma f dz = \int_a^b [F(\gamma(t))]' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Proposición 4.3.2 Sea f y γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Entonces $\int_{\gamma_1} f\ dz = \int_{\gamma_2} f\ dz$.

Teorema 4.4.1 (Preliminar del T de Cauchy) Sea f analítica y $\gamma \subset A$ es una curva cerrada y su interior. Entonces $\int_\gamma f\ dz = 0$. Demostración. La fórmula de Green indica que $\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$\iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy$ Con A el interior de γ. Si describimos $f = u(x,y) + iv(x,y)$ operando tenemos que $\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$. Applicando el teorema de Green tenemos que $\int_\gamma f dz = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy + \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy$ y, por las ecs. de Cauchy-Riemman, $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Ídem para la segunda integral.

Teorema 4.4.2 (T de Cauchy-Goursat para el triángulo) Sea $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y f analítica en $A\ \{p\}$. Si T es el triángulo cerrado contenido en A, se tiene $\int_{\partial T} f\ \mathrm{d}z = 0$.

Teorema 4.4.3 (T de Cauchy para un conjunto convexo). Sea f analítica en $A\{p\}$ con $p \in A$ y continua en A. Entonces $\int_{\partial T} f\ \mathrm{d}z = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A.

Consecuencias del Teorema de Cauchy

Definición 5.0 Llamamos **índice** de γ respecto de α, representado por $Ind_\gamma(\alpha)$ a la integral

$$Ind_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}$$

Intuitivamente $Ind_\gamma(\alpha)$ representa el número de vueltas de γ respecto de α. Demostración. La función $\frac{1}{z-\alpha}$ admite la primitiva $\log z-\alpha$ en todo entorno expcepto para α. Subdividimos γ en subarcos suficientemente pequeños $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, tal que $\gamma_i = z_i z_{i+1}; z_i, z_{i+1} \in \gamma$. Así, la integral se puede calcular como $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}[\ln(z_{j+1}-\alpha)-\ln(z_j-\alpha)] = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}[\ln|(z_{j+1}-\alpha)|-\ln|(z_j-\alpha)|]+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}(z_{j+1}-\alpha)-\mathrm{Arg}(z_j-\alpha)]$. La primera suma es 0 por ser teléscopica y $z_1 = z_n$, luego $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}(z_{j+1}-\alpha)-\mathrm{Arg}(z_j-\alpha)]$. Cada elemento de la suma es una variación de la circunferencia, y en conjunto representa el número de vueltas recorrido.

Teorema 5.1.1 Si γ es diferenciable cerrado, γ^* su interior, entonces $Ind_\gamma(\alpha)$ es entero si $\alpha \in \gamma^*$, o es cero si $\alpha \in \mathbb{C}/\gamma^*$.

Teorema 5.2.1 (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f : A \to \mathbb{C}$, y sea γ un camino cerrado en A. Entonces para todo $z \in A$ tal que $z \notin \gamma^*$ se tiene

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Demostración. Definimos $g : A \to \mathbb{C}$ mediante:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{para} \quad \zeta \in A, \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{para} \quad \zeta = z \end{cases}$$

donde $z \in A\backslash\gamma^*$ es un punto fijo. La función g es analítica para $\zeta \neq z$ y $g'(\zeta) = \frac{(\zeta-z)f'(\zeta)-f(\zeta)+f(z)}{(\zeta-z)^2}$ y es continua para $\zeta = z$ pues $\lim_{\zeta\to z} g(\zeta) = f'(z)$. Por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat y $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0$ y como $z \notin \gamma^*$, se puede escribir $0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} \iff \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ es decir $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

Teorema 5.3.1 (Teorema de Taylor) Sea f holomorfa, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y $\alpha \in A$. Sea $d > 0$ la distancia de α a la frontera de A; entonces para todo $z \in B(\alpha, d)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

El radio de convergencia es mayor o igual que d, y en $B(\alpha, d)$ su suma es $f(z)$. Además las derivadas sucesivas $f^{(n)}(\alpha)$ de f en α vienen dadas por

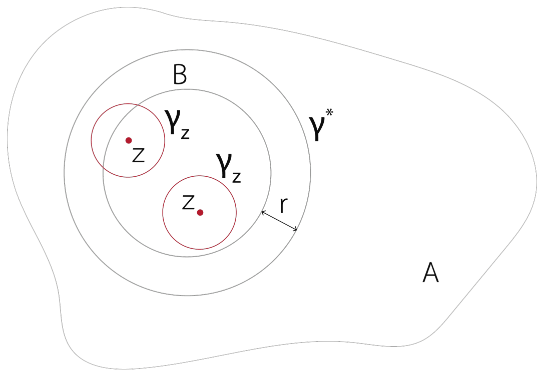
$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

donde γ es una circunferencia de centro α y radio r, con $0 < r < d$.

Teorema 5.4.1 (Desigualdades de Cauchy) Si f es analítica y $B(\alpha, d) \subset A$ entonces $|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$, con $M(r) = \max_{|z|=r<d}|f(z)|$

Teorema 5.4.2 (Teorema de Liouville) Si f es entera (analítica en todo $\mathbb{C}$) y acotada, entonces es constante. Demostración. Por ser f analítica existe un desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia infinito. Sea K una cota de f, es decir $|f(z)| < K$, para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces de las desigualdades de Cauchy se obtiene $|a_n| < \frac{K}{r^n}, n = 1, 2, ..$ para todo r. Como $r \to \infty$, $a_n \to 0$ y $f(z) = a_0$.

Teorema 5.5.1 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en A que converge uniformemente en todo compacto de A. Entonces la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en todo compacto de A. Además, si $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$ para todo $z \in A$.



Demostración. Bastará demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n'\}$ a f' en todo círculo $B \subset$

A, pues todo compacto $K \subset A$ puede ser recubierto por una cantidad finita de círculos. Sea $\gamma^* \subset A$ una circunferencia concéntrica con B con $r = r_\gamma - r_B$. Sea $z \in B$ y γ_z la circunferencia de centro z y radio r. Entonces $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$ de donde $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} \frac{eft|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{M_n}{r}$ donde M_n es $\max(\left|f(\zeta) - f_n(\zeta)\right|)$ en γ_z. Puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre todo círculo cerrado, se tiene que $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ de tal manera que $\frac{M_n}{r} < \epsilon$ para $n \geq n_0$, y $z \in B$.

Definición 5.6 f en $A \subset \mathbb{C}$ tiene la **propiedad de la media** si para todo cerrado $\overline{D}(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| \leq r\} \subset A$, el valor $f(\alpha)$ en el centro es la media de f en la circunferencia:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{it}\right) dt$$

Proposición 5.6.1 Toda función analítica f en A tiene la propiedad de la media.

Teorema 5.6.1 (Principio del módulo máximo) Sea f analítica en A, abierto conexo. Entonces para todo $\alpha \in A$ en cualquier entorno de α existe $\beta \in A$ para el cual $|f(\alpha)| < |f(\beta)|$.

Lema 5.7.1 (Lema de Schwarz) Sea $f : B(0,1) \to B(0,1)$ analítica. $|f(z)| < 1$ para todo $z \in B(0,1)$ y $f(0) = 0$. Entonces se tiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B(0,1)$ y $\left|f'(0)\right| \leq 1$. Además, si para un $z_0 \in B(0,1), z_0 \neq 0$, se tiene $\left|f(z_0)\right| = |z_0|$, o si se verifica $f'(0) = 1$, entonces $f(z)$ es de la forma $f(z) = cz$, con $|c| = 1$

Teorema general de Cauchy

Definición 6.1.1 Dos caminos γ_0, γ_1 con $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset A$ son A-homótopos si existe una aplicación h:

$$\begin{aligned} h : I \times I &\longrightarrow A \\ (s,t) &\longmapsto h((s,t)) = \gamma_s(t) \end{aligned}$$

Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos, se exige que $h(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $h(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finalmente, si los caminos son cerrados, $h(s,0) = h(s,1)$.

γ_0, γ_1 son A-**homotópos** cuando γ_0 se puede deformar a γ_1 continuamente a través de una familia de caminos γ_s. Un camino γ es homotópico a $z_0 \in A$ cuando γ es homotópico al camino constante γ_{z_0}.

Teorema 6.1.1 (Teorema de Cauchy, versión homotópica) Sea $f : A \to \mathbb{C}, A$ abierto una función analitica y sean γ_0, γ_1 dos caminos tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

También si γ_0, γ_1 son cerrados y homotópicos obtenemos la misma conclusión.

Definición 6.2.1 Dos caminos cerrados γ_0, γ_1 contenidos en el mismo abierto A son A-**homólogos** cuando

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

para todo $\alpha \notin A$

Teorema 6.2.1 Si γ_0, γ_1 son cerrados en A, y γ_0, γ_1 son A-homótopos, son también A-homólogos. Si γ_0 es homótopo a un punto en A, entonces es A-homólogo a cero.

Teorema 6.2.2 (Teorema de Cauchy, versión homológica) Sea $f : A \to \mathbb{C}, A$ abierto una función analitica y sean γ_0, γ_1 dos ciclos A homológos, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

Definición 6.3.1/**Teorema 6.3.1** Un abierto conexo no vacío $A \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si todo cerrado $\gamma \subset A$ es A-homótopo a cero. Si f es analítica en A, simplemente conexo, entonces $\int_\gamma f\ dz = 0$ para todo camino cerrado y rectificable en A.

Teorema 6.3.2 Sea $A \in \mathbb{C}$ un dominio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es simplemente conexo
- Todo ciclo γ contenido en A es homólogo a 0.
- $\hat{\mathbb{C}} \backslash A$ es conexo

Desarrollo en serie de Laurent

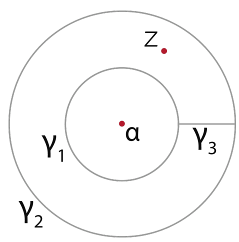
Teorema 6.4.1 (Series de Laurent) Sea $f(z)$ analítica en la corona circular $A = \{z \mid r < |z-\alpha| < R\}$, donde r puede ser 0 y R infinito. Entonces existen dos desarrollos en serie según las potencias de $z - \alpha$ y de $(z-\alpha)^{-1}$ $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-\alpha)^n, \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{(z-\alpha)^n}$ convergentes en A y tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-\alpha)^n}$$

para $z \in A$. Además estas series convergen uniformemente en toda corona cerrada $A' \subset A$ de la forma $A' = \left\{z \,|r < r' \leq |z-\alpha| \leq R' < R\right\}$ y los coeficientes a_n, b_n vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1} d\zeta \end{aligned}$$

donde γ es una circunferencia dada por $\gamma(t) = \alpha + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ siendo ρ un radio cualquiera entre r y R.



Demostración. Sean r_1, r_2 dos radios tales que $r < r_1 < r_2 < R$, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias $\gamma_1(t) = \alpha + r_1 e^{it}, \gamma_2(t) = \alpha + r_2 e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ tal que si z está entre ambas se tiene $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1, \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$.

Sea $r_1 < |z - \alpha| < r_2$, y supongamos que z no pertenece al segmento γ_3 (si no movemos γ_3). Sea $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_3$; entonces z está en el recinto simplemente conexo encerrado por Γ y de la Fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)$$

Utilizaremos ahora desarrollos en serie similares a los de Taylor. Para $\zeta \in \gamma_2$ y z en el interior de γ_2 tendremos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$$

y para $\zeta \in \gamma_1$ y z exterior a γ_1 tendremos

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-\alpha)^{n-1}}{(z-\alpha)^n}$$

siendo convergentes las series geométricas y uniformemente convergentes en $\zeta \in \gamma_2$ y $\zeta \in \gamma_1$ respectivamente. Integrando término a término ambos desarrollos se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\tfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\right)(z-\alpha)^n \\ -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\tfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}d\zeta\right)\frac{1}{(z-\alpha)^n} \end{aligned}$$

Puesto que los caminos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ son A-homótopos y las funciones $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}, f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}$ son analíticas en A, se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta = a_n \\ \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1} &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1} = b_n \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{(z-\alpha)^n}, z \in A$$

Queda por probar la convergencia uniforme en una corona cerrada contenida en A. Sean z_1, z_2 puntos de A tales que $r < |z_1 - \alpha| < r' < R' < |z_2 - \alpha| < R$. Como $z_2 \in A$, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ converge uniformemente en el círculo cerrado de centro α y radio $R' < |z_2|$. Análogamente, puesto que $z_1 \in A$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z_1-\alpha}\right)^n$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)^n$ convergerá uniformemente para $|z-\alpha| \geq r'$ con $r' > |z_1 - \alpha|$, pues en estas condiciones $\left|\frac{1}{z-\alpha}\right| \leq \frac{1}{r'} < \left|\frac{1}{z_1-\alpha}\right|$. Análogamente se comprueba la convergencia uniforme en $|z-\alpha| < R'$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$.

Ceros de las funciones analíticas. Singularidades aisladas.

Teorema 7.1.1 Sea $f : A \to \mathbb{C}$, con A un dominio. El conjunto $\mathbb{Z}(f)$, los ceros de f, o coincide con A ($f = 0$) o no tiene puntos de acumulación en A. En este último caso, para cada $\alpha \in A$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z-\alpha)^m g(z)$, con $g(\alpha) \neq 0$.

Teorema 7.1.2 (Ppo de Identidad) Si f_1, f_2 son funciones analíticas en A tal que $f_1(z) = f_2(z), z \in B \subset A$; si B tiene punto de acumulación en A entonces $f_1 = f_2$ en A.

Definición 7.2.0 f tiene una **singularidad aislada** en $\alpha \in A$ si f es analítica en $A/\{\alpha\}$ pero desconocemos el comportamiento en α.

Definición 7.2.1 f tiene una **singularidad evitable** en α si tiene una singularidad aislada pero se puede encontrar un valor $b \in \mathbb{C}$ tal que poniendo $f(\alpha) = b$, f es analítica en A.

Teorema 7.2.1 Sea α aislada para f en A, y supongamos f **acotada** en un círculo perforado $B^*(\alpha, r)$ contenido en $A/\{\alpha\}$. Entonces la singularidad es evitable. Demostración. Definamos la función $h : A \to \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \begin{cases} (z-\alpha)^2 f(z) & \text{para} \quad z \in A\backslash\{\alpha\} \\ 0 & \text{para} \quad z = \alpha \end{cases}$$

Por la hipótesis de acotación (pues f es acotada) existe $h'(\alpha)$ y $h'(\alpha) = 0$. Luego h es analítica en A y existe un desarrollo en serie de potencias en un $B(\alpha, r'), r' \geq r$, donde tendremos que $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ para todo z en dicho círculo y, por tanto, también en $B(\alpha, r)$. Se tiene que $a_0 = h(\alpha) = 0, a_1 = h'(\alpha) = 0$ y, considerando entonces la función analítica en $B(\alpha, r)$ definida por $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-\alpha)^n$, vale a_2 en $z = \alpha$ y coincide con f en $B^*(\alpha, r)$, luego concluimos que α es una singularidad evitable para f.

Teorema 7.2.2 (Weierstrass) Sea $\alpha \in A$ una singularidad aislada para f en $A/\{\alpha\}$. Entonces (1) f tiene una singularidad evitable en α, (2) existen complejos $c_1, \cdots, c_m \neq 0$ y la función $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-\alpha)^k}$ tiene una singularidad evitable en α, o (3) para todo $B(\alpha, r) \subset A, r > 0$ la imagen de f en $B^*(\alpha, r)$ es densa en $\mathbb{C}$.

Definición 7.2.2 Sea $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ abierto y f analítica en $A\backslash\{\infty\}$. Se dice que f tiene una singularidad evitable en ∞, un polo de orden m o una singularidad esencial, si la función $\phi : B \to \mathbb{C}, \phi(z) = f(\frac{1}{z})$, con $B = \{z \mid \frac{1}{z} \in A\}$ tiene una singularidad de tal tipo en $z = 0$.

Teorema 7.2.3 Si existe una singularidad aislada en ∞ entonces (1) f tiene una singularidad evitable sii existe un entorno perforado de ∞; (2) f tiene un polo de orden m si existe un polinomio $h(z) = a_1 z + \cdots + a_m z^m \neq 0$ tal que $f(z) - h(z)$ está acotada en $\{z \mid |z| > r\}$; (3) para todo r la imagen de $\{z \mid |z| > r\}$ es densa en $\mathbb{C}$.

Definición 7.3.1 Diremos que $f_A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto es meromorfa si existe un conjunto $P \subset A$, sin puntos de acumulación en A, tal que f es analítica en $A\backslash P$ y f presenta en cada $p \in P$ una singularidad aislada, que es un polo.

Teorema 7.3.1 $f(z)$ tiene un **polo** de orden m en $\alpha \in \mathbb{C}$ sii existe un entero $m > 0$ y un entorno $U_\alpha \subset A$ de definición de f tal que la función $g(z) = f(z)(z-\alpha)^m$ es analítica en U_α y $g(\alpha) \neq 0$. Demostración. Sea

$$p(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_n}{(z-\alpha)^n}$$

la parte principal del polo, de tal forma que $h = f - p$ es analítica en un entorno $U(\alpha)$ de α y por tanto también lo será la función $h(z)(z-\alpha)^m$.
Como $p(z)(z-\alpha)^m = c_m + c_{m-1}(z-\alpha) + \ldots + c_1(z-\alpha)^{m-1}$ es también analítica, también lo será la función $f(z)(z-\alpha)^m = h(z)(z-\alpha)^m + p(z)(z-\alpha)^m$. Llamando $g(z)$ a esta función, obtenemos $g(\alpha) = c_m \neq 0$.
Inversamente, si para un entero $m > 0$ se tiene que $g(z) = f(z)(z-\alpha)^m$ es analítica y $g(\alpha) \neq 0$ en un entorno $U(\alpha)$ de α entonces admitirá un desarrollo en serie de potencias de $z - \alpha$; $f(z)(z-\alpha)^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n$, con $b_0 \neq 0$. De esta igualdad resulta si $z \neq \alpha$

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n = p(z) + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-\alpha)^{n-m}$$

donde

$$p(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{b_{m-n}}{(z-\alpha)^n}, \text{ con } b_0 \neq 0$$

De aquí se deduce que α es un polo de orden m y su parte principal es p.

Teorema 7.3.2 Si $f(z)$ es analítica en el abierto A y si $f(z)$ tiene un cero de orden m en $\alpha \in A$, entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un polo de orden m en α. Repíprocamente, si $f(z)$ tiene un polo de orden m en α, entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analíotica en un entorno de α y tiene un cero de orden m en α.

Definición 7.3.2 Si $f(z)$ es una función con un polo de orden m en α y su parte principal es $p(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_m}{(z-\alpha)^n}$, llamaremos **residuo** de f en α al coeficiente c_1 del término $\frac{1}{z-\alpha}$, y se designa por $Res(f, \alpha)$.

Teorema 7.3.3 (Residuos para funciones meromorfas) Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f(z)$ una función meromorfa con polos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Sea γ un camino cerrado contenido en A que no pasa por ninguno de los polos. Entonces se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha_i) \operatorname{Res}(f, \alpha_i)$$

Demostración. Sean los polos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$ y sean $p_i(z), i = 1, \ldots, r$ sus partes principales con

$$p_i(z) = \sum_{n=1}^{m_i} \frac{c_{i,n}}{(z-\alpha_i)^n}, i = 1, \ldots, r$$

. Entonces la función $f - \sum_{i=1}^{r} p_i$ es analitica en A pues ambas funciones f y $\sum_{i=1}^{r} p_i$ son meromorfas en A, con los mismos polos, cuyas partes principales se cancelan en cada polo. Así pues podemos aplicar el Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos (**Teorema 7.4.1**) y obtenemos

$$\int_\gamma f-(p_1+p_2+\ldots+p_r)\,dz = 0 \rightarrow \int_\gamma f dz = \sum_{i=1}^{r} \int_\gamma p_i dz$$

Por otra parte

$$\int_\gamma p_i(z) = \int_\gamma \frac{c_{i,1}}{z-\alpha_i}dz + \ldots + \int_\gamma \frac{c_{i,m_i}}{(z-\alpha_i)^{m_i}}dz$$
$$= 2\pi i c_{i,1} \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha_i)$$

las últimas $m_i - 1$ integrales son nulas pues las funciones integrando tienen primitiva. De ambas igualdades se concluye el enunciado del teorema.

Observación 7.3.3 Si f es meromorfa con polo en ∞; para el desarrollo en serie $f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z_n}$, $Res(f, \infty) = -b_1$. Demostración. Los residuos pertenecen a los **diferenciales** de las funciones, no a las funciones en sí. Por tanto, dado el diferencial $f(z)dz$ con el cambio de variable $z = 1/w$ tenemos que $f(z)dz = f(1/w)(1/w)'dw = f(1/w)(-1/w^2)dw$. Entonces, $Res(f,\infty) = Res(-\frac{f(1/z)}{z^2}, 0)$. Con este cambio, la representación por series $f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$ con $z \to \infty$ pasa a ser $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})(\sum_{n=0}^{m} a_n (\frac{1}{z})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\frac{1}{z})^n})$ $= -(\sum_{n=0}^{m} a_n (\frac{1}{z})^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-2}$ y $\int_\gamma -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\,dz = -\int_\gamma \frac{b_1}{z}\,dz = -2\pi i b_i = 2\pi i Res(f, \infty)$.

La opción (3) del **Teorema 7.2.2** se puede extender a dos teoremas extra, el segundo más potente que el primero.

Teorema 7.A (Casorati - Weierstrass) Sea α una singularidad esencial de f. Entonces para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una secuencia de complejos $\{z_n\}$ convergente a α tal que $f(\{z_n\}) \rightarrow w$.

Teorema 7.B (Picard) Sea α una singularidad esencial de f. Entonces, para cada $w \in \mathbb{C}$, con una excepción a lo sumo, existe una sucesión $z_n \rightarrow \alpha$ tal que $f(z_n) = w$.
Por ejemplo, para $f(z) = e^{1/z}$, que tiene una singularidad esencial en 0, queremos que $w = 3+i$. Entonces, la sucesión $z_n = \frac{1}{\log 3+i} = \frac{1}{\sqrt{4}+i\cdot Arg(3+i)+2\pi n}$ cumple que para $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow 0$ y $e^{\frac{1}{z_n}} = e^{\sqrt{4}+i\cdot Arg(3+i)+2\pi n} = 3+i$ para todo n. La excepción en este caso es $w = 0$, donde z_n no existe.

Resumen de casos (según series de Laurent)

- Singularidad evitable: $a_0 + a_1(z-\alpha) + \cdots$
- Polo de orden m: $\frac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \cdots$
- Singularidad esencial: $\cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \cdots$

Calculo de residuos para polos

- Polo simple

$$f(z) = \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \cdots$$
$$(z-\alpha)f(z) = b_1 + a_0(z-\alpha) + \cdots$$
$$Res(f,\alpha) = b_1 = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

- Polo de orden m

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-\alpha)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + \cdots$$
$$(z-\alpha)^m f(z) = b_m + \cdots + b_1(z-\alpha)^{m-1} + a_0(z-\alpha)^m + \cdots$$
$$Res(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to\alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-\alpha)^m f(z))$$

Aplicación del método de residuos al cálculo de integrales reales

$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, \mathbf{d}\theta$

Tomamos el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

y obtenemos una integral $\int f(z)\ \mathrm{d}z$ con polos dentro de $\gamma, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, y la resolvemos como

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\ \mathrm{d}\theta = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left(f(z), \alpha_i\right)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathbf{d}x$

Para resolver esta integral requerimos que **no haya polos en el eje real** y, que $Q(x) \neq 0$ **en** $\mathbb{R}$, y que **ord(Q)** $\geq$ **2 + ord(P)**.

En estas condiciones, si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son los polos en el **eje imaginario POSITIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \alpha_i\right)$$

● Tenemos que asegurar la existencia de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathrm{d}x$, porque si no, el resultado será falso.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}\ \mathbf{d}x$

Para resolver esta integral, la **fracción no tiene que tener singularidades en el eje real**.

Entonces,

- si $a > 0$, y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son los polos en el **eje imaginario POSITIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \alpha_i\right)$$

- si $a < 0$, y $\beta_1, \cdots, \beta_n$ son los polos en el **eje imaginario NEGATIVO**, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \beta_i\right)$$

[Extra] $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathbf{d}x$

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{p-1} \int_{x_j+\varepsilon}^{x_{j+1}-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}\right.$$

En este tipo de integral **ord(Q)** $\geq$ **2 + ord(P)** y $Q(x)$ **tiene ceros simples en el eje real**.

Entonces,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j\right)$$

Donde z_j son los ceros de $Q(z)$ en el semiplano superior, y x_j son los ceros en el eje real.

[Extra] $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathbf{d}x$

En este tipo de integral **ord(Q)** $\geq$ **1 + ord(P)** y $Q(x) \neq 0$ **en** $[a, b]$.

Entonces,

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log\frac{z-b}{z-a}, z_j\right)$$

[Extra] $\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\ \mathbf{d}x$

En este tipo de integral **ord(Q)** $\geq$ **2 + ord(P)** y $Q(x) \neq 0$ **en** $[a, +\infty)$.

Entonces,

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = -\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log(z-a), z_j\right)$$

Donde log es el logaritmo complejo.

Transformación conforme

Definición 9.0 una **transformación de Möbius** es una transformación $\phi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ o $\phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$.

$$w = \phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Donde $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ y $ad - bc \neq 0$.

Observación 9.1 Se tiene que $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\phi^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$

Observación 9.2 Casos particulares

- Traslación: $w = z + b$
- Homotecia de centro el origen: $w = az$
- Giros alrededor del origen: $w = az, |a| = 1$
- Inversión: $w = \frac{1}{z}$

Proposición 9.3.1 Una transformación de Möbius transforma el semiplano superior $H^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ en el círculo unidad $D(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$ sii es de la forma

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

donde $\alpha \in H^+$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Proposición 9.3.2 Las transformaciones de Möbius que transforman el círculo unidad sobre sí mismo son aquellas de la forma

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$$

donde $|\alpha| < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Demostración. Topológicamente, toda transformación de Möbius que transforme el círculo unida sobre sí mismo habrá de transformar la circunferencia unidad $C(0,1)$ sobre sí misma. Sea $\alpha \in D(0,1)$ que se transforma en el origen, de modo que el inverso $\frac{1}{\hat{\alpha}}$ se transforma en ∞. Así, la transformación $w = \frac{az+b}{cz+d}$ debe satisfacer $\alpha = -\frac{b}{a}$, $\frac{1}{\alpha} = -\frac{d}{c}$, luego

$$w = \frac{a(z - \alpha)}{c(c - \frac{1}{\hat{\alpha}})} = \frac{a\hat{\alpha}}{c} \frac{z - \alpha}{\hat{\alpha} - 1}$$

Como además la imagen de $z = 1 \in C(0,1)$, $w(1) \in C(0,1)$, entonces $|w(1)| = 1$ y $\left|\frac{a\hat{\alpha}}{c} \frac{z-\alpha}{\hat{\alpha}-1}\right| = \left|\frac{a\hat{\alpha}}{c}\right| = 1$, lo que prueba la proposición.

Teorema 9.4.1 (Tma de Riemann de la transformación conforme) Sea $A \subset \mathbb{C}$ simplemente conexa y distinta a $\mathbb{C}$. Entonces existe una transformación conforme $f : A \to D(0,1)$ analítica y biyectiva en $C(0,1)$. Además, si fijamos $z_0 \in A$ podemos construir f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0 \in \mathbb{R}$. Además, f es única. Demostración. La unicidad es consecuencia del Lema de Schwarz. En efecto supongamos que hubiera dos transformaciones conformes f, g biyectivas $f, g : A \to D(0,1)$ con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0, g'(z_0) > 0$. Entonces podemos definir $h : D(0,1) \to D(0,1)$ mediante $h(w) = g \circ f^{-1}(w)$, de tal forma que $h(0) = g\left(f^{-1}(0)\right) = g(z_0) = 0$, y por tanto por el Lema de Schwarz $|h(w)| \leq |w|$ para $w \in D$. El mismo argumento es aplicable a $h^{-1} = f \circ g^{-1}$, de tal forma que $\left|h^{-1}(\zeta)\right| \leq |\zeta|$ para $\zeta \in D$ con $\zeta = h(w)$. Concluimos que $|h(w)| = |w|$ para todo $w \in D$, pero xen este caso el Lema de Schwarz asegura que $h(w) = e^{i\theta} w$ para $w \in D$ y por tanto tomando $w = f(z), z \in A$ también $e^{i\theta} f(z) = h(f(z)) = g \circ f^{-1}(f(z)) = g(z)$. De aquí se concluye $e^{i\theta} f'(z_0) = g'(z_0)$ y puesto que $f'(z_0), g'(z_0)$ son ambos positivos, obtenemos que $e^{i\theta} = 1$ y por tanto $f(z) \equiv g(z)$.

Teorema 9.4.2 (Fórmula de Schwarz-Christoffel) La transformación confrme del semiplano superior $H^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ sobre el polígono P viene dada por

$$w = f(z) = a\left(\int_{z_0}^{z} (\theta - x_1)^{-\alpha_1} \cdots (\theta - x_n)^{-\alpha_n} \, \mathrm{d}\theta\right) + b$$

donde a, b son parámetros a determinar a partir de los datos del polígono, la integración se realiza a lo largo de cualquier camino $\gamma \in H^+$ comenzando en $z_0 \in H^+$. Los puntos $x_1, \cdots, x_n$ pueden ser elegidos arbitrariamente y se verifica que $f(x_1) = w_1, \cdots, f(x_n) = w_n$.