

# Variable compleja

## Los números complejos

**Definición 1.1** Un número complejo es una expresión  $a + bi$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $i$  es la unidad imaginaria, fruto de resolver la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  en  $\mathbb{R}$ . Así, definimos  $i = \sqrt{-1}$ . Si  $z \in \mathbb{C} = a + bi$ ,  $a = \operatorname{Re} z$  y  $b = \operatorname{Im} z$  son la parte **real** e **imaginaria** de  $z$ .

**Definición 1.2** La **suma** y **multiplicación** están definidas en los complejos así:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$(x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Y con estas operaciones  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo, con  $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$  y  $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$ .

**Definición 1.3** Dado un complejo  $z = x + yi$ , llamamos **conjugado** de  $z$ ,  $\bar{z}$  a  $x - yi$ .

**Proposición 1.3.1** Se verifica que  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  y  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

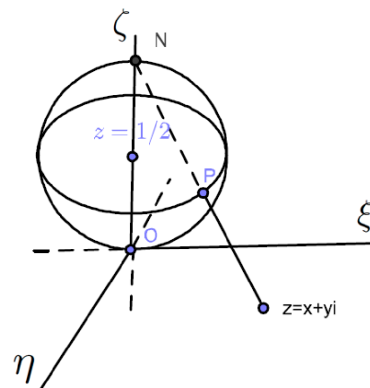
**Definición 1.4.1** Se denomina **módulo** de un complejo  $z = x + yi$ ,  $|z|$  a  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Se cumple que  $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$ . El módulo cumple que (1)  $|z| \geq 0$ , (2)  $|z| = 0 \iff z = 0$ , (3)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  y (4)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración. (4)  $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

**Definición 1.5** Dado un  $z = a + bi$ , aplicando  $u = p + iq = z/|z|$ , entonces  $|u| = 1 = p^2 + q^2$ . El ángulo tal que  $p = \cos \alpha$ ,  $q = \sin \alpha$  se denomina **argumento**,  $\arg z$ . Así,  $z$  puede representarse como  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Esta forma es la **forma polar**, y también se representa como  $z = |z|e^{i\alpha}$ .

El argumento cumple que (1)  $\arg \bar{z} = -\arg z$  y (2)  $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ .

**Definición 1.7 / 1.8** El espacio topológico  $(\mathbb{C}, \delta_E)$  con distancia euclídea no es compacto. Sin embargo, si tomamos  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  entonces sí es compacto, y lo denominamos **plano complejo ampliado**. La **esfera de Riemann**,  $\mathbb{S}$ , es la representación del conjunto  $\hat{\mathbb{C}}$  en  $\mathbb{R}_{(\xi, \eta, \zeta)}^3$  en una esfera con centro  $(0, 0, 1/2)$  con ecuación  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$ .



La relación entre la esfera y el plano es

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

La **distancia cordal** entre dos puntos  $z_1, z_2$  es la distancia euclídea entre los puntos  $P_1, P_2$  de la esfera de la esfera de Riemann.

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}$$

Para un punto en el infinito, la distancia es  $\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

## Funciones complejas

**Definición 2.0** Una función puede ser de tipo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (f. compleja de var. real) o  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (f. compleja de var. compleja).

**Definición 2.1.1**  $f = f(z)$  es **continua** en  $z_0 \in \mathbb{C}$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ .  $f$  es **uniformemente continua** en  $B \subset \mathbb{C}$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $z_0 \in B$  y para todo  $z$  tal que  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . Si  $f$  es uniformemente continua es continua, pero no siempre a la inversa.

**Teorema 2.1.1** Si  $f_1(z), f_2(z)$  están definidas en  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $A$  abierto, y son continuas en  $z_0 \in A$ ,  $f_1 + f_2$  y  $f_1/f_2$  son continuas en  $z_0$ . Así, los polinomios complejos son continuos.

**Definición 2.1.2** Una función  $f(z)$  en  $A \subset \mathbb{C}$  es continua en  $z_0$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que para todo  $z \in A$  donde  $\delta(z, z_0) < \eta$  entonces  $\delta(f(z_0), f(z)) < \epsilon$ .

**Definición 2.2.1, 2.2.2** Una función  $f(z)$  es **derivable** en  $z_0$  si existe el límite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  y es finito. Si  $z_0 = \infty$ , consideramos  $g(z) = f(1/z)$  y  $f$  es derivable en  $\infty$  si  $g$  es derivable en  $z = 0$ . Una función  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en todo  $A$  se llama función **holomorfa** o **analítica**.

**Proposición 2.3.2** Si  $f$  es derivable en un punto, también es continua en ese punto.

**Proposición 2.3.4 (Regla de la cadena)** Sean  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $g(A) \subset B$ . Si  $g$  es derivable en  $z_0$  y  $f$  es derivable en  $g(z_0)$  entonces  $f \circ g'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$ .

**Definición 2.4.1** Una función  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme en  $z_0$  si existe  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que cualquier curva  $\gamma(t)$  diferenciable en  $t_0$ ,  $\gamma(t_0) = z_0$  y  $\gamma'(t_0) \neq 0$  se transforma por  $f$  en una curva  $\sigma(t) = f(\gamma(t))$  diferenciable en  $t_0$  tal que  $\sigma'(t_0) = \gamma'(t_0) + \theta$ . Si  $\alpha$  es el ángulo en el punto de cruce  $z_0$  entre  $\gamma_1, \gamma_2$ , entonces el ángulo de  $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$  es  $\alpha$ .

**Teorema 2.4.1** Si  $f$  es derivable en  $z_0$  y  $f'(z_0) \neq 0$  entonces  $f$  es conforme en  $z_0$  y  $\theta = \arg f'(z_0)$ . Si  $f$  es holomorfa, es conforme. Demostración. Por la regla de la cadena,  $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$  y  $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$

**Definición 2.5.1** Una función de variable compleja puede transformarse a una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :  $f(x, y) = (u(x, y) + v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i$

**Teorema 2.5.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemman)**

Sea  $f$ .  $f'(z_0)$  existe sii  $f$  es diferenciable como función de dos variables y las funciones  $u(x, y), v(x, y)$  satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Suponemos  $f$  derivable en  $z_0$  complejo, con derivada  $\lambda = f'(z_0)$ . Si tomamos la aplicación lineal  $l_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \eta \rightarrow \lambda\eta$ . Entonces  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - \lambda \right| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0$ . Escribiendo  $f(z_0)$  y  $l_c(\eta)$  como componentes reales: (1)  $f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  su jacobiano es  $D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$  y (2)  $l_c(\eta) = \lambda\eta = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\eta_1 + \eta_2 i) = (\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2, \lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)$ , que como aplicación lineal  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ . Como el jacobiano la derivada de  $f$  en los reales, y  $A$  es también la diferencial de  $f$  en  $z_0$ ,  $D = A$ , y se dan las ecuaciones.

**Teorema 2.6.1 (Teorema de la función inversa)**

Sea  $f$  analítica con derivada continua en  $A$ . Sea  $z_0 \in A$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ . Entonces, existen  $U, V$  abiertos tal que  $z_0 \in U$ ,  $f(z_0) \in V$  y  $f : U \rightarrow V$  es biyectiva. Además,  $f^{-1}$  es analítica en  $V$  y para todo  $z \in U$ ,  $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ .

## Series de potencias. Funciones elementales

**Definición 3.0.1** Una **sucesión** de complejos es una aplicación  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se le corresponde  $a_n \in \mathbb{C}$ .

**Definición 3.0.2** Una **serie** es una sucesión de complejos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$ .

**Definición 3.0.3** Una sucesión es de **Cauchy** o **fundamental** si dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n_1, n_2 \geq n_0$ , se tiene que  $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \epsilon$ .

**Definición 3.0.4** Se dice que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **convergente** a  $a$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene  $|a_n - a| < \epsilon$ , y diremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Asimismo,  $A_n$  es convergente a  $A$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**Definición 3.0.5** Una serie  $A_n$  es absolutamente convergente si la serie  $\sum |a_n|$  es convergente.

**Teorema 3.1.1 (Criterio de la raíz)** Dado  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ , sea  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Si  $\lambda < 1$  la serie converge y si  $\lambda > 1$  diverge.

**Teorema 3.1.2 (Criterio del cociente)** Dado  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  sea  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$ , si  $\beta < 1$  la serie converge, y si  $\beta > 1$  diverge.

**Definición 3.2.0** Una **sucesión de variable compleja** es una aplicación de tal manera que a cada  $n \in \mathbb{N}$  le corresponde una función  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Representamos la sucesión por  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Asimismo, una **serie de funciones de variable compleja** es el resultado de sumar dichas funciones:  $F_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i$ .

**Definición 3.2.1** Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $z_0 \in A$  cuando converge la sucesión numérica  $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Diremos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge puntualmente** cuando converge para todo  $z \in A$ .

**Definición 3.2.2** La serie  $f_0 + \dots + f_n + \dots$  converge en un punto  $z_0 \in A$ ,  $A$  abierto en  $\mathbb{C}$  si la sucesión  $\{F_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $F_n = f_0 + \dots + f_n$  converge. La serie converge puntualmente en  $A$  si  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente en  $A$ .

**Definición 3.2.3** La sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

converge uniformemente a  $f$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  para todo  $z \in A, n \geq n_0$ .

**Definición 3.2.4** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente en  $A$  si la sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en  $A$ .

**Teorema 3.2.1 Criterio de la mayorante de Weierstrass)** Una condición suficiente para que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converja uniformemente en  $A \subset \mathbb{C}$  es que exista una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergente tal que  $|f_n(z)| \leq a_n$  para todo  $z$  y  $n \in \mathbb{N}$ . En tal caso,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una mayorante de  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

**Definición 3.3.0** Una **serie de potencias** es una serie de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , con  $z_0, a_n \in \mathbb{C}$  para todo  $n$ . Los  $a_n$  se llaman **coeficientes** de la serie. Si  $z_0 = 0$ , es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  decimos que la serie está **centrada en el origen**.

**Definición 3.3.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard)** Dada la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  considerando  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ ; si llamamos  $R = \frac{1}{\lambda}$ , tenemos:

- La serie converge absolutamente en el interior del círculo  $D_R = \{z | |z - z_0| < R\}$  y diverge en el exterior  $\overline{D}_R = \{z | |z - z_0| > R\}$
- La convergencia es uniforme en todo círculo de radio  $0 \leq r < R$

$R$  se llama **radio de convergencia** de la serie.

**Teorema 3.3.2** La función definida por la suma de serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo:

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

**Definición 3.4.1** La función exponencial compleja es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Su radio de convergencia es  $R = \infty$ . Cumple

también que  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ . El exponente puede reescribirse como  $e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

**Definición 3.4.2** La función logaritmo se obtiene desde la exponencial. Escribiendo  $z = re^{i\theta}$  tenemos que  $\log z = \log |r| + i\theta = \log |r| + i \arg(z)$ . Como  $\arg(z) = \theta + 2\pi k$ , el logaritmo principal es  $\theta \in [0, 2\pi] = \text{Arg } z$ .

**Definición 3.4.3** Las funciones seno y coseno se definen a través de sus series de potencias con  $R = \infty$ :

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

La derivación es como con los números reales, y las identidades de Euler son idénticas:

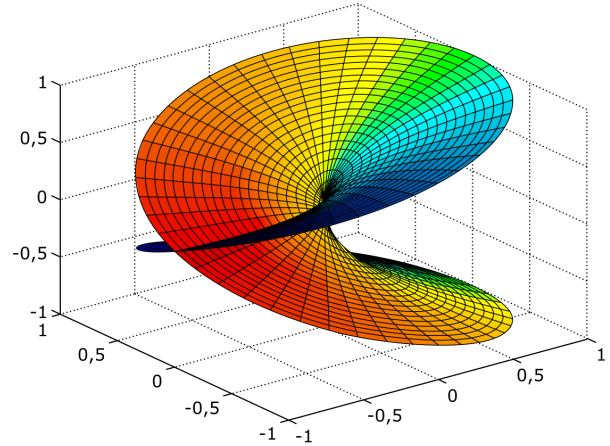
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

**Definición 3.4.4** La función potencial con exponente complejo,  $z^\zeta, \zeta \in \mathbb{C}$  es  $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$

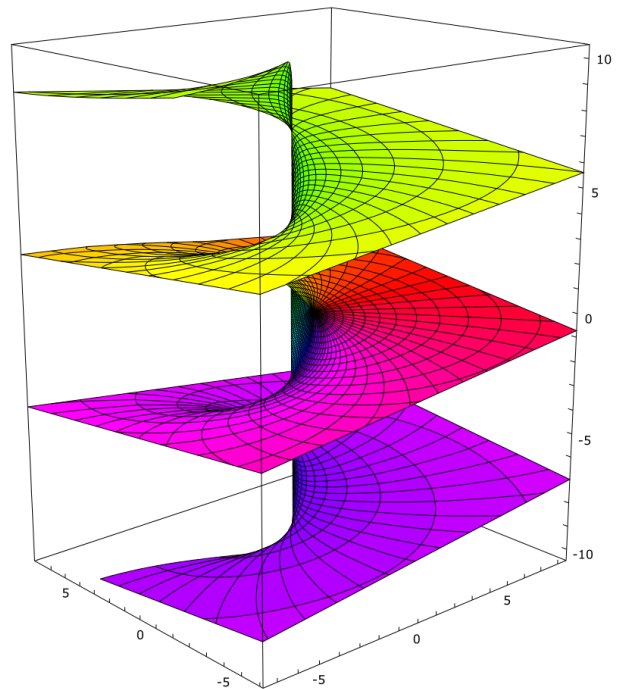
**Definición 3.5.1 (Funciones multiformes)** Una función  $f$  es multiforme cuando  $w = f(z)$  puede tomar diferentes valores para el mismo  $z$ . Por ejemplo, para  $f = \sqrt{z}$ ,  $f(2i) = 1 + i$  y  $f(2i) = -1 - i$ . Esto se debe a que  $z^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\log |z| + i \arg(z))} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$ .

Observamos que como  $k$  puede tomar dos valores, entonces la función tiene dos ramas, es decir,  $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, w_2 = -\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}$ . Por tanto, para completar un ciclo en  $w$  necesitamos completar dos ciclos en  $z$  (uno por rama). Esto genera una **superficie de Riemann** como la siguiente figura:



En este caso los ejes  $X$  e  $Y$  representan el plano complejo de  $z$ . El eje  $Z$  representa la parte real de  $f(z)$ , y el color representa la imaginaria. El punto de corte del plano es el caso  $\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R} = 0 + i\sqrt{a}$ . Sin embargo, el corte es un artefacto de la visualización tridimensional de 4 dimensiones.

Debajo se muestra el ejemplo de  $f = \log z$ , donde el eje  $X$  representa el argumento, y el color representa la parte real.



Vemos que el el plano "cae" de nivel en cada vuelta. Esto es el equivalente a cada rama del logaritmo.

## Integración en el campo complejo

**Definición 4.0.1** Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **rectificable** cuando presenta una longitud finita.

**Definición 4.0.2** Una **partición** de un intervalo es el conjunto  $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ . La **norma** de la partición es  $|\Delta| = \max\{|t_{k-1} - t_k|, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ . Una partición  $\Delta'$  es **más fina** que otra partición  $\Delta$  cuando  $\Delta \subset \Delta'$ .

**Definición 4.0.3** Dados  $f, \gamma, \Delta$ , definimos la suma de Riemman-Stieljes como  $S(\Delta, f, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)[\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)]$ , con  $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$ .  $f$  es **integrable** Riemman-Stieljes (RS) si existe un complejo  $I$  tal que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una partición  $\Delta_\epsilon$  tal que para toda  $\Delta_\epsilon \subset \Delta$ ,  $|S(\Delta, f, \gamma) - I| < \epsilon$ .  $I$  se denota por  $\int_a^b f d\gamma$ .

**Definición 4.0.4** Si  $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ , entonces  $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$ .

**Proposición 4.1.1** Sean  $f, \gamma$ . Entonces existe la integral RS y  $\left| \int_a^b f d\gamma \right| \leq ML(\gamma)$ , donde  $M = \max\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$  y  $L(\gamma)$  es la longitud de  $\gamma$ . Demostración.  $|S(\Delta, f, \gamma)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(s_k)| |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq (\max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}) \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq ML(\gamma)$

**Proposición 4.1.2** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $\gamma$  define un camino de clase  $C^1$  entonces la integral RS viene dada por  $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f \gamma' dt$  Demostración. Como  $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi$ , vamos a demostrar que  $\int_a^b f d\phi = \int_a^b f \phi' dt$ . Por la definición de  $I$  existe para todo  $\epsilon > 0$  una partición tal que  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) [\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)] - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$  Por el teorema del valor intermedio:  $\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k)$ , luego  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f d\phi \right| < \epsilon$ . Ahora bien, la expresión de sumatorio puede aplicarse a la integral, de modo que  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \phi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f \phi' dt \right| < \epsilon$ . Por último, si denominamos  $S$  al sumatorio anterior, tenemos que  $\left| \int_a^b f \phi' dt - \int_a^b f d\phi \right| \leq \left| \int_a^b f \phi' dt - S \right| + \left| S - \int_a^b f d\phi \right| \leq 2\epsilon$ . Repetimos para  $\int_a^b f d\psi$  y finalmente  $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\phi + i \int_a^b f d\psi = \int_a^b f \phi' dt + i \int_a^b f \psi' dt = \int_a^b f \gamma' dt$

**Definición 4.2.0** Sean  $f, \gamma$ . Se define la **integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$** ,  $\int_\gamma f dz$  como  $\int_a^b f \circ \gamma d\gamma$  y, si  $\gamma$  es  $C^1$ , entonces  $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ . La integral cumple:

- Linealidad:  $\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) dz = c_1 \int_\gamma f_1 dz + c_2 \int_\gamma f_2 dz$
- Si  $-\gamma$  es el camino opuesto a  $\gamma$ :  $\int_{-\gamma} f dz = - \int_\gamma f dz$
- Yuxtaposición:  $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- Se tiene la siguiente estimación:  $\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \int_a^b |f(t)| |\gamma'(t)| dt \leq ML(\gamma)$ .

**Proposición 4.2.1** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones, y  $\gamma$ . Si  $f_n$  son continuas y  $f_n \rightarrow f$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz$ . Demostración. Si  $|dz|$  es la longitud de la curva,  $L$ , entonces  $\left| \int_\gamma f dz - \int_\gamma f_n dz \right| \leq \int_\gamma |f - f_n| |dz| < \epsilon L$ .

También, si  $\sum f_n$  converge uniformemente a  $F$ , entonces  $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma F dz$ . Demostración.  $\int_\gamma (\sum_{n=1}^\infty f_n) dz = \int_\gamma (\lim_{n \rightarrow \infty} F_n) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma F_n dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma (\sum_{k=1}^n f_k) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_\gamma f_k dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n dz$

**Proposición 4.3.1** Sean  $f, \gamma, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^1$ . Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , se tiene que  $\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ . Demostración.

Si  $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ , como la derivada de  $F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ; por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que  $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

**Proposición 4.3.2** Sea  $f$  y  $\gamma_1, \gamma_2$  tales que  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  y  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . Entonces  $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$ .

**Teorema 4.4.1 (Preliminar del T de Cauchy)** Sea  $f$  analítica y  $\gamma \subset A$  es una curva cerrada y su interior. Entonces  $\int_\gamma f dz = 0$ . Demostración. La fórmula de Green indica que  $\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$\iint_A \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$  Con  $A$  el interior de  $\gamma$ .  
 Si describimos  $f = u(x, y) + iv(x, y)$  operando tenemos que  $\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (u dx - v dy) + i \int_\gamma (u dy + v dx)$ . Aplicando el teorema de Green tenemos que  $\int_\gamma f dz = \iint_A \left[ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + \iint_A \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$  y, por las ecs. de Cauchy-Riemann,  $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Ídem para la segunda integral.

**Teorema 4.4.2 (T de Cauchy-Goursat para el triángulo)** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$  abierto, y  $f$  analítica en  $A \setminus \{p\}$ . Si  $T$  es el triángulo cerrado contenido en  $A$ , se tiene  $\int_{\partial T} f dz = 0$ .

**Teorema 4.4.3 (T de Cauchy para un conjunto convexo).** Sea  $f$  analítica en  $A \setminus \{p\}$  con  $p \in A$  y continua en  $A$ . Entonces  $\int_{\partial T} f dz = 0$  para todo camino cerrado y rectificable en  $A$ .



## Consecuencias del Teorema de Cauchy

**Definición 5.0** Llamamos **índice** de  $\gamma$  respecto de  $\alpha$ , representado por  $Ind_\gamma(\alpha)$  a la integral

$$Ind_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

Intuitivamente  $Ind_\gamma(\alpha)$  representa el número de vueltas de  $\gamma$  respecto de  $\alpha$ . **Demostración.** La función  $\frac{1}{z-\alpha}$  admite la primitiva  $\log z - \alpha$  en todo entorno excepto para  $\alpha$ . Subdividimos  $\gamma$  en subarcs suficientemente pequeños  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , tal que  $\gamma_i = z_i z_{i+1}$ ;  $z_i, z_{i+1} \in \gamma$ . Así, la integral se puede calcular como  $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln(z_{j+1} - \alpha) - \ln(z_j - \alpha)] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln |z_{j+1} - \alpha| - \ln |z_j - \alpha|] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$ . La primera suma es 0 por ser teléscopica y  $z_1 = z_n$ , luego  $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]$ . Cada elemento de la suma es una variación de la circunferencia, y en conjunto representa el número de vueltas recorrido.

**Teorema 5.1.1** Si  $\gamma$  es diferenciable cerrado,  $\gamma^*$  su interior, entonces  $Ind_\gamma(\alpha)$  es entero si  $\alpha \in \gamma^*$ , o es cero si  $\alpha \in \mathbb{C}/\gamma^*$ .

**Teorema 5.2.1 (Fórmula integral de Cauchy)** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , y sea  $\gamma$  un camino cerrado en  $A$ . Entonces para todo  $z \in A$  tal que  $z \notin \gamma^*$  se tiene

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Demostración.** Definimos  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  mediante:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{para } \zeta \in A, \quad \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{para } \zeta = z \end{cases}$$

donde  $z \in A \setminus \gamma^*$  es un punto fijo. La función  $g$  es analítica para  $\zeta \neq z$  y  $g'(\zeta) = \frac{(\zeta-z)f'(\zeta)-f(\zeta)+f(z)}{(\zeta-z)^2}$  y es continua para  $\zeta = z$  pues  $\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = f'(z)$ . Por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat y  $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0$  y como  $z \notin \gamma^*$ , se puede escribir  $0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} \iff \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$  es decir  $f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$

**Teorema 5.3.1 (Teorema de Taylor)** Sea  $f$  holomorfa,  $A \subset \mathbb{C}$  abierto, y  $\alpha \in A$ . Sea  $d > 0$  la

distancia de  $\alpha$  a la frontera de  $A$ ; entonces para todo  $z \in B(\alpha, d)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

El radio de convergencia es mayor o igual que  $d$ , y en  $B(\alpha, d)$  su suma es  $f(z)$ . Además las derivadas sucesivas  $f^{(n)}(\alpha)$  de  $f$  en  $\alpha$  vienen dadas por

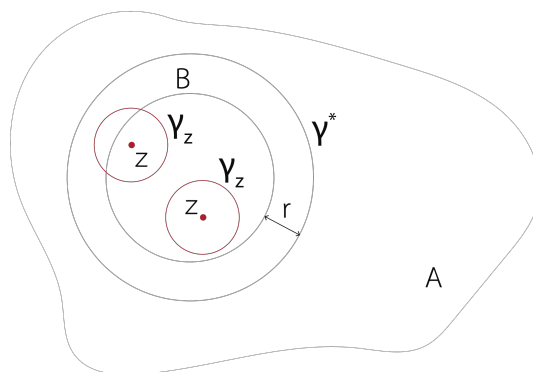
$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

donde  $\gamma$  es una circunferencia de centro  $\alpha$  y radio  $r$ , con  $0 < r < d$ .

**Teorema 5.4.1 (Desigualdades de Cauchy)** Si  $f$  es analítica y  $B(\alpha, d) \subset A$  entonces  $|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$ , con  $M(r) = \max_{|z|=\alpha+d} |f(z)|$

**Teorema 5.4.2 (Teorema de Liouville)** Si  $f$  es entera (analítica en todo  $\mathbb{C}$ ) y acotada, entonces es constante. **Demostración.** Por ser  $f$  analítica existe un desarrollo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  con radio de convergencia infinito. Sea  $K$  una cota de  $f$ , es decir  $|f(z)| < K$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  entonces de las desigualdades de Cauchy se obtiene  $|a_n| < \frac{K}{r^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  para todo  $r$ . Como  $r \rightarrow \infty$ ,  $a_n \rightarrow 0$  y  $f(z) = a_0$ .

**Teorema 5.5.1** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones analíticas en  $A$  que converge uniformemente en todo compacto de  $A$ . Entonces la sucesión  $\{f'_n\}$  converge uniformemente en todo compacto de  $A$ . Además, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z)$  para todo  $z \in A$ .



**Demostración.** Bastará demostrar la convergencia uniforme de la sucesión  $\{f'_n\}$  a  $f'$  en todo círculo  $B \subset$

$A$ , pues todo compacto  $K \subset A$  puede ser recubierto por una cantidad finita de círculos. Sea  $\gamma^* \subset A$  una circunferencia concéntrica con  $B$  con  $r = r_\gamma - r_B$ . Sea  $z \in B$  y  $\gamma_z$  la circunferencia de centro  $z$  y radio  $r$ . Entonces  $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$ ,  $f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$  de donde  $|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} \frac{e^{\epsilon} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{M_n}{r}$  donde  $M_n$  es  $\max(|f(\zeta) - f_n(\zeta)|)$  en  $\gamma_z$ . Puesto que  $\{f_n\}$  converge uniformemente sobre todo círculo cerrado, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  de tal manera que  $\frac{M_n}{r} < \epsilon$  para  $n \geq n_0$ , y  $z \in B$ .

**Definición 5.6**  $f$  en  $A \subset \mathbb{C}$  tiene la **propiedad de la media** si para todo cerrado  $\overline{D}(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| \leq r\} \subset A$ , el valor  $f(\alpha)$  en el centro es la media de  $f$  en la circunferencia:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt$$

**Proposición 5.6.1** Toda función analítica  $f$  en  $A$  tiene la propiedad de la media.

**Teorema 5.6.1 (Principio del módulo máximo)**

Sea  $f$  analítica en  $A$ , abierto conexo. Entonces para todo  $\alpha \in A$  en cualquier entorno de  $\alpha$  existe  $\beta \in A$  para el cual  $|f(\alpha)| < |f(\beta)|$ .

**Lema 5.7.1 (Lema de Schwarz)** Sea  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  analítica.  $|f(z)| < 1$  para todo  $z \in B(0, 1)$  y  $f(0) = 0$ . Entonces se tiene  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in B(0, 1)$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Además, si para un  $z_0 \in B(0, 1)$ ,  $z_0 \neq 0$ , se tiene  $|f(z_0)| = |z_0|$ , o si se verifica  $f'(0) = 1$ , entonces  $f(z)$  es de la forma  $f(z) = cz$ , con  $|c| = 1$ .



## Teorema general de Cauchy

**Definición 6.1.1** Dos caminos  $\gamma_0, \gamma_1$  con  $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset A$  son  $A$ -homótopos si existe una aplicación  $h$ :

$$h : I \times I \longrightarrow A$$

$$(s, t) \longmapsto h((s, t)) = \gamma_s(t)$$

Si  $\gamma_0, \gamma_1$  tienen los mismos extremos, se exige que  $h(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  y  $h(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ . Finalmente, si los caminos son cerrados,  $h(s, 0) = h(s, 1)$ .

$\gamma_0, \gamma_1$  son  $A$ -homotópos cuando  $\gamma_0$  se puede deformar a  $\gamma_1$  continuamente a través de una familia de caminos  $\gamma_s$ . Un camino  $\gamma$  es homotópico a  $z_0 \in A$  cuando  $\gamma$  es homotópico al camino constante  $\gamma_{z_0}$ .

**Teorema 6.1.1 (Teorema de Cauchy, versión homotópica)** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  abierto una función analítica y sean  $\gamma_0, \gamma_1$  dos caminos tales que  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ , entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

También si  $\gamma_0, \gamma_1$  son cerrados y homotópicos obtenemos la misma conclusión.

**Definición 6.2.1** Dos caminos cerrados  $\gamma_0, \gamma_1$  contenidos en el mismo abierto  $A$  son  $A$ -homólogos cuando

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

para todo  $\alpha \notin A$

**Teorema 6.2.1** Si  $\gamma_0, \gamma_1$  son cerrados en  $A$ , y  $\gamma_0, \gamma_1$  son  $A$ -homótopos, son también  $A$ -homólogos. Si  $\gamma_0$  es homotopo a un punto en  $A$ , entonces es  $A$ -homólogo a cero.

**Teorema 6.2.2 (Teorema de Cauchy, versión homológica)** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  abierto una función analítica y sean  $\gamma_0, \gamma_1$  dos ciclos  $A$  homólogos, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

**Definición 6.3.1 / Teorema 6.3.1** Un abierto conexo no vacío  $A \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexo si todo cerrado  $\gamma \subset A$  es  $A$ -homotopo a cero. Si  $f$  es analítica

en  $A$ , simplemente conexo, entonces  $\int_{\gamma} f dz = 0$  para todo camino cerrado y rectificable en  $A$ .

**Teorema 6.3.2** Sea  $A \in \mathbb{C}$  un dominio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $A$  es simplemente conexo
- Todo ciclo  $\gamma$  contenido en  $A$  es homólogo a 0.
- $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$  es conexo

## Desarrollo en serie de Laurent

**Teorema 6.4.1 (Series de Laurent)** Sea  $f(z)$  analítica en la corona circular  $A = \{z \mid r < |z - \alpha| < R\}$ , donde  $r$  puede ser 0 y  $R$  infinito. Entonces existen dos desarrollos en serie según las potencias de  $z - \alpha$  y de  $(z - \alpha)^{-1}$   $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$  convergentes en  $A$  y tales que

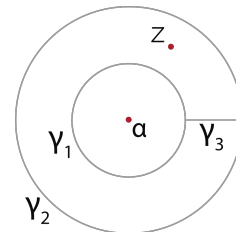
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n}$$

para  $z \in A$ . Además estas series convergen uniformemente en toda corona cerrada  $A' \subset A$  de la forma  $A' = \{z \mid r < r' \leq |z - \alpha| \leq R' < R\}$  y los coeficientes  $a_n, b_n$  vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta$$

donde  $\gamma$  es una circunferencia dada por  $\gamma(t) = \alpha + \rho e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  siendo  $\rho$  un radio cualquiera entre  $r$  y  $R$ .



**Demostración.** Sean  $r_1, r_2$  dos radios tales que  $r < r_1 < r_2 < R$ , y sean  $\gamma_1, \gamma_2$  las circunferencias  $\gamma_1(t) = \alpha + r_1 e^{it}$ ,  $\gamma_2(t) = \alpha + r_2 e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  tal que si  $z$  está entre ambas se tiene  $\text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ ,  $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ .

Sea  $r_1 < |z - \alpha| < r_2$ , y supongamos que  $z$  no pertenece al segmento  $\gamma_3$  (si no movemos  $\gamma_3$ ). Sea  $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_3$ ; entonces  $z$  está en el recinto simplemente conexo encerrado por  $\Gamma$  y de la Fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Utilizaremos ahora desarrollos en serie similares a los de Taylor. Para  $\zeta \in \gamma_2$  y  $z$  en el interior de  $\gamma_2$  tendremos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}$$

y para  $\zeta \in \gamma_1$  y  $z$  exterior a  $\gamma_1$  tendremos

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \alpha} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \alpha)^{n-1}}{(z - \alpha)^n}$$

siendo convergentes las series geométricas y uniformemente convergentes en  $\zeta \in \gamma_2$  y  $\zeta \in \gamma_1$  respectivamente. Integrando término a término ambos desarrollos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \right) (z - \alpha)^n \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta \right) \frac{1}{(z - \alpha)^n} \end{aligned}$$

Puesto que los caminos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$  son A-homótopos y las funciones  $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}, f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1}$  son analíticas en  $A$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = a_n \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta = b_n \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - \alpha)^n}, z \in A$$

Queda por probar la convergencia uniforme en una corona cerrada contenida en  $A$ . Sean  $z_1, z_2$  puntos de  $A$  tales que  $r < |z_1 - \alpha| < r' < R' < |z_2 - \alpha| < R$ . Como  $z_2 \in A$ , la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$  converge uniformemente en el círculo cerrado de centro  $\alpha$  y radio  $R' < |z_2|$ . Análogamente, puesto que  $z_1 \in A$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z_1 - \alpha} \right)^n$  converge y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z - \alpha} \right)^n$  convergerá uniformemente para  $|z - \alpha| \geq r'$  con  $r' > |z_1 - \alpha|$ , pues en estas condiciones  $\left| \frac{1}{z - \alpha} \right| \leq \frac{1}{r'} < \left| \frac{1}{z_1 - \alpha} \right|$ . Análogamente se comprueba la convergencia uniforme en  $|z - \alpha| < R'$  de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ .