

La(s) hoja(s) de Chema

1. Espacios métricos

Definición 1.1 $\delta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x, y) > 0$ si $x \neq y$, o $\delta(x, x) = 0$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$

Ejercicio 1.1 Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a: $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \dots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

Teorema 1.4 Si $M' \subset M$ y existe el espacio métrico (M, δ) , entonces también existe (M', δ) , y se llama **métrica inducida** por (M, δ) .

Definición 1.5 Sean $(M, \delta), (M', \delta')$ y $g : M \rightarrow M'$. Se dice que g conserva las distancias si $\delta'(g(x), g(y)) = \delta(x, y) \quad \forall x, y \in M$. Si además g es biyectiva, entonces es una **isometría**.

Teorema 1.7 Si existen $(M, \delta), (M', \delta'), (M'', \delta'')$ y $g : M \rightarrow M'$ y $h : M' \rightarrow M''$ son isometrías, entonces $h \circ g$ y g^{-1} también son isometrías.

Definición 1.8 La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si $g \in \text{Isom}(M)$ entonces $g^{-1} \in \text{Isom}(M)$
- La isometría identidad, $\text{id}_M \in \text{Isom}(M)$

Definición 1.12 Si (M, δ) , para $a, b \in M$ se llama **segmento** de extremos a y b y se representa por $[a, b]$ al conjunto $[a, b] = \{x \in M \mid \delta(a, x) + \delta(x, b) = \delta(a, b)\}$. Asimismo, $x, y, z \in M$ están alineados si $(x < y < z) \vee (z < y < x)$.

Ejercicio 1.5 Para $\sigma \in \{1, -1\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $f(x) = \sigma x + \tau$ es una isometría para $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

Page intentionally left in blank

2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

Axioma P1 Si tenemos el conjunto \mathbb{P} , denominado **plano**, y la aplicación $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ llamada **distancia**, entonces (\mathbb{P}, d) es un espacio métrico.

Definición 2.2 Una **recta** $r \subset \mathbb{P}$ satisface

- r contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos A, B, C , están alineados si están en r .

Axioma P2 \mathbb{P} contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos, A y B de \mathbb{P} pasa una recta, r_{AB} .

Definición 2.6 / Teorema 2.7 Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por $a \parallel b$. Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

⚠ **Axioma P3** Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ existe una biyección $\gamma : r \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(X) - \gamma(Y)| = |x - y| = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in r$

Observación 2.8 Si $A, B \in r$ son distintos, entonces existe un punto $M \in r : d(A, M) = d(M, B)$ que denotamos por $\text{medio}[A, B]$ y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto $B \in r$ tal que $B = \text{medio}[A, M]$.

Observación 2.9 Si r es una recta y $P \in r$, entonces r se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$ y $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$.

Axioma P4 Para toda recta $r \subset \mathbb{P}$ hay dos subconjuntos H^1 y H^2 , denominados **semiplanos** de r , que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si $X, Y \in H^i$ entonces $[X, Y] \subset H^i$
- Si $X \in H^1$ y $Y \in H^2$ entonces $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$.

Definición 2.15 Sean P, Q, R no alineados, entonces el triángulo $\triangle[P, Q, R]$, o $\triangle PQR$ está formado por los segmentos $[P, Q]$, $[Q, R]$, $[P, R]$, llamados **lados**, y los vértices P, Q, R .

Teorema 2.16 [Axioma de Pasch] Dado un triángulo $\triangle PQR$ y una recta r ; si r corta a $[P, Q]$, entonces o corta a $[P, R]$ o a $[Q, R]$.

Definición 2.17 = 1.5 Una **isometría** en \mathbb{P} es

una biyección $g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ que cumple que $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{P}$.

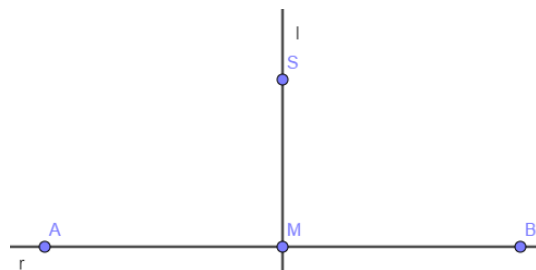
Teorema 2.18 Si $A, B \in \mathbb{P}$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

Axioma P5 Si $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$ y $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$ son dos pares de puntos que cumplen $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$ entonces existe $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ tal que $g(A_i) = B_i$. Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

Axioma P6 Para toda recta r existe una isometría σ llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$

Definición 2.23 / Teorema 2.25 / Corolario 2.30 Una recta l es **ortogonal** a r si para todo $S \in l$ y para todo par de puntos A, B que cumple que $M = \text{medio}[A, B]$, de modo que $l \cap r = M$, entonces se da que $d(A, S) = d(S, B)$. Se denota $l \perp_M r$. En estas condiciones, $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S, A) = d(S, B)\}$, se denomina **mediatriz** de $[A, B]$.



Lema 2.21 Si σ_r entonces, para todo X , $\text{medio}[X, \sigma_r(X)] \in r$.

Observación 2.24 Si $l \perp r$ y $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ entonces $g(l) \perp g(r)$.

⚠ **Teorema 2.26** Si $l, r \subset \mathbb{P}$ cortan en M y σ_l, σ_r son dos reflexiones de l y r , entonces se cumple que $l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$.

⚠ **Teorema 2.27 / 2.29** Para toda recta r y todo punto $S \in \mathbb{P} - r$, existe una recta l ortogonal a r , que pasa por S . Si r es una recta, y $M \in r$, entonces existe l tal que $l \perp_M r$.

Axioma P7 Para toda recta r y todo punto P existe sólo una recta **paralela** a r que pase por P .

Teorema 2.31 / 2.33 Si $a \perp l$ y $b \perp l$ entonces $a \parallel b$. Sean $a \parallel b$. Entonces, para todo $A \in a$, la única recta $l \perp_A a$ también es ortogonal a b .

Teorema 2.32 Las rectas paralelas forman una relación de equivalencia.

- Reflexividad: $a \parallel a$
- Simetría: $a \parallel b \rightarrow b \parallel a$
- Transitividad $a \parallel b$ y $b \parallel c \rightarrow a \parallel c$

Ejercicio 2.6 Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. Para todo t , existe un único $P_t \in r$ que cumple $d(P_t, A) = |t|$ y $d(P_t, B) = |t - d(A, B)|$. En definitiva, la posición de P_t está sólomente determinada por las distancias $d(A, P_t)$ y $d(P_t, B)$.

3. Isometrías del plano

Definición 3.1 Para una aplicación $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $P \in \mathcal{M}$ es un **punto fijo** de ϕ si $\phi(P) = P$; y $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ es un **subconjunto invariante** de ϕ si $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Lema 3.2 Si $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ y $A \neq B$ son dos puntos fijos de g , entonces todo $X \in r_{AB}$ es punto fijo de g .

Definición 3.3 Si $g, g' \in \text{Isom}(\mathbb{P})$, g y g' son **conjugadas** si existe una isometría h tal que $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$.

Teorema 3.4 Un punto P es fijo de g sii $h^{-1}(P)$ es un punto fijo de g' . Es decir

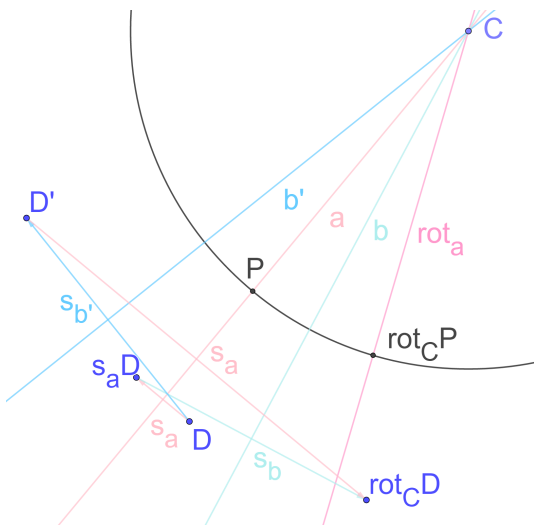
Demostración. Si $h^{-1}(P)$ es punto fijo de g' , entonces $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$. Por tanto, $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$, luego $g(P) = P$.

Ejemplo 3.5 Una reflexión sobre r cumple que

- $\sigma_r \circ \sigma_r = \text{id}_{\mathbb{P}}$ y $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$ (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$ y viceversa.
- X y $\sigma_r(X)$ se encuentran en una recta ortogonal a r .

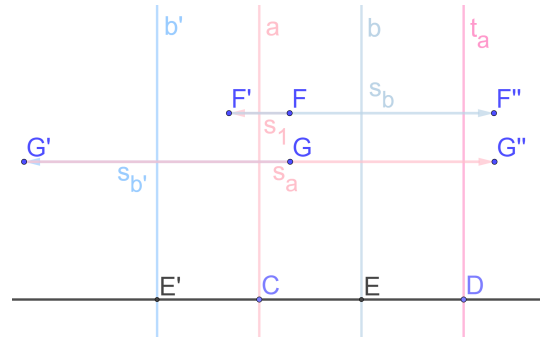
⚠ **Teorema 3.6** Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ y sea r_{AB} . Si A, B son puntos fijos en g , entonces o bien $g = \sigma_r$ o bien $g = \text{id}_{\mathbb{P}}$.

Teorema 3.9 Llamamos ρ una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo C . Para toda recta a pasando por C existen dos rectas b, b' únicas tales que $\rho = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$.



Ejercicio 3.1 Llamamos τ una **traslación** a una

isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta c invariante, es decir, $\tau(c) = c$. entonces para toda recta $a \perp c$ existen dos rectas $b, b' \perp c$ que cumplen $\tau = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$. Además, si $\tau(l) = l$, entonces $l \parallel c$.



Ejercicio 3.2 Si $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{P}) \mid g \text{ es rotación de centro } P\} \cup \{\text{id}_{\mathbb{P}}\}$ entonces

- Si a es una recta que pasa por P , entonces $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$.
- $gh = hg$ para todo $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$.
- Para $X \in \mathbb{P} - \{P\}$ y $g(X) = h(X)$ entonces $g = h$.

Ejercicio 3.3 Si h es una isometría

- Si $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ entonces $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si r es una recta entonces $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

Ejercicio 3.3 Si a, b son rectas en \mathbb{P}

- $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a \iff a \perp b$

Ejemplo 3.12 Sean a, b tales que $a \perp_P b$. Entonces la rotación es de 180° y se llama **reflexión central** si se denota como σ_P . Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P \sigma_P = \text{id}_{\mathbb{P}}$
- Para todo X , $\sigma_P(X)$ es el único punto que cumple $P = \text{medio}[X, \sigma_P(X)]$.
- σ_P es independiente de la elección de rectas $a \perp b$.

Teorema 3.13 Las rectas r y $\sigma_P(r)$ son paralelas.

Ejemplo 3.14 Una **reflexión con deslizamiento** ϕ es una composición de una reflexión σ_c y una traslación τ : $\phi = \tau \sigma_c$. ϕ deja invariante sólo la recta c , y no tiene ningún punto invariante.

Teorema 3.15 Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones σ :

	Con puntos fijos	Sin puntos fijos
par	ρ	τ
impar	σ	ϕ

Teorema 3.16 Si g, g' son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

4. Ángulos

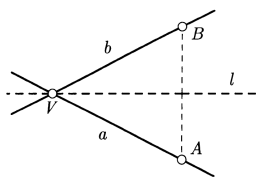
Definición 4.1 Sean r, l dos rectas con un punto V en común. Sean \bar{r} y \bar{l} dos semirrectas determinadas por V en r y l . El par $\{\bar{l}, \bar{r}\}$ es un **ángulo**. V es el vértice del ángulo y \bar{l} y \bar{r} son los lados del ángulo. El ángulo se designa por $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ o, si no hay lugar a confusión, $\angle V$. Así, por ejemplo, dado un triángulo $\triangle PQR$, $\angle P$ es el ángulo formado por P con $[P, Q]$ y $[P, R]$.

Observación 4.4 Si $r = l$, y \bar{r}_1 y \bar{r}_2 son las semirrectas determinadas por V , entonces, en estas circunstancias, el ángulo $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ se denomina **ángulo llano** y $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_1\}$ se denomina **ángulo nulo**.

Definición 4.5 Un ángulo $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ y un ángulo $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$ son **congruentes** si existe una isometría g tal que $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$. Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como $\angle A = \angle B$.

Observación 4.6/4.8 Si $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ tiene vértice V y $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$ tiene vértice V' , y g es una isometría tal que $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$, entonces $g(V) = V'$. Asimismo, si existe una isometría h que hace $h(V) = V'$, entonces $h(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$.

Ejemplo 4.9 Consideramos las rectas $a \neq b$ que cortan en V , con sus respectivas semirrectas $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2$. Consideramos $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$ y elegimos los puntos $A \in \bar{a}_1, B \in \bar{b}_1$ a igual distancia, $d(V, A) = d(V, B)$. Existe una recta $l \perp r_{AB}$ que pasa por V (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**). La bisectriz l cumple que $\sigma_l(A) = B, \sigma_l(\bar{a}_1) = \bar{b}_1$ y viceversa. Además, si \bar{l} es la semirrecta que corta a $[A, B]$, entonces $\angle\{\bar{a}_1, \bar{l}\} = \angle\{\bar{b}_1, \bar{l}\}$.

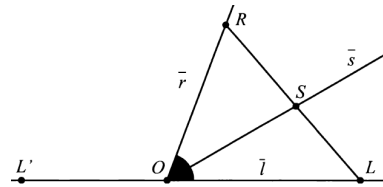


Teorema 4.11 Sean a, b que cortan en V . El ángulo $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$ es congruente con $\angle\{\bar{a}_2, \bar{b}_2\}$ y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

Teorema 4.13/Definición 4.23 Sean $l \perp_V r$ y $l' \perp_{V'} r'$. Entonces $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ y $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$ son congruentes. En este caso, los ángulos $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ y $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$ son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

Definición 4.15 Si $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ no es ni nulo ni llano, y H_l^1 es el semiplano que contiene a \bar{r} , y H_r^1 es el semiplano que contiene a \bar{l} , entonces el ángulo $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ y $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ viene determinado como el conjunto $H_l^1 \cap H_r^1$.

Teorema 4.18 [De la barra transversal] Sea $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ con vértice V y sean $L \in \bar{l}, R \in \bar{r}$. Una semirrecta $\bar{s}, V \in \bar{s}$ está dentro de $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$ si corta a $[L, R] - \{L, R\}$.



Definición 4.19 (Comparación de ángulos) Dados $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ y $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, se dice que $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es menor que $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, si existe una isometría g tal que $g(\bar{a}) = \bar{c}$ y que $g(\bar{b})$ está en el interior de $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$.

Teorema 4.21 Si existen 4 ángulos tales que $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{a}', \bar{b}'\}$ y $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\} = \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$, y $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, entonces $\angle\{\bar{a}', \bar{b}'\} < \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$.

Teorema 4.22 Dados $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ y $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, entonces $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$, o $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} > \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$.

Definición 4.25 Sea $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ con vértice V y \bar{b} una semirrecta en el interior de $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$. Entonces $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ es la **suma** de $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ y $\angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$, o $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\} = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\} + \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$.

Definición 4.26 Para tres ángulos $\angle U, \angle V, \angle W$, decimos que $\angle V = \angle U + \angle W$ si existe una descomposición $\angle V = \angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$, $\angle U = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$, $\angle W = \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$.

Definición 4.28 Dado $\triangle PQR$, el lado $[R, Q]$ y el

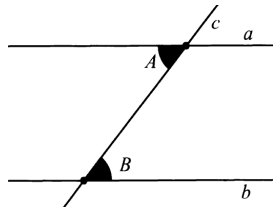
ángulo $\angle P$ son **opuestos**.

gruentes.

Definición 4.29 / Teorema 4.30 Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si $\triangle PQR$ es isósceles y $[P, Q]$ es congruente con $[P, R]$, existe una reflexión σ tal que $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$, la bisectriz de $\angle P$. Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

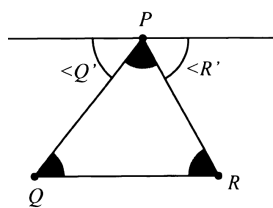
Definición 4.34 / Teorema 4.35 Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación ρ tal que $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$.

Definición 4.39 / Teorema 4.40 Sean $a \parallel b$ y c una recta que corta a a en A y a b en B . El par de ángulos $\angle A, \angle B$ de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.



Teorema 4.41 La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Si hacemos una recta p paralela a $[Q, R]$ tenemos que (Q, Q') y (R, R') son pares de ángulos internos y la suma $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$ es un ángulo llano.



Ejercicio 4.9 Sea ρ una rotación de centro C y sea $t = \triangle\{C, P, \rho(P)\}$. Entonces la clase de congruencia del ángulo $\angle_t C$ se denomina ángulo de rotación $\angle \rho$.

Ejercicio 4.11 Un ángulo orientado es un ángulo donde se fija un orden en sus lados. Dos ángulos orientados $\angle(\vec{r}, \vec{l})$ y $\angle(\vec{r}', \vec{l}')$ son congruentes si existe una isometría donde $g(\vec{r}) = \vec{r}'$ y $g(\vec{l}) = \vec{l}'$ y se conserva la orientación del plano. Así $\angle(\vec{r}, \vec{l})$ la clase de congruencia con todos los ángulos con-

5. Teorema de Tales

Definición 5.0 Un **cuadrilátero** es una cuaterna ordenada de puntos [vértices] de \mathbb{P} , (P, Q, R, S) formada por los segmentos $[P, Q], [Q, R], [R, S], [S, P]$ [lados] si dos cualesquiera segmentos son disjuntos o tienen un extremo en común. Dos vértices extremos del mismo lado son adyacentes y, si no, son opuestos.

Definición 5.1 Un cuadrilátero $\square PABC$ es un **paralelogramo** si $\text{medio}[P, B] = \text{medio}[A, C] = M$, donde los segmentos $[P, B]$ y $[A, C]$ son las diagonales, y M es el centro.

Observación 5.2 Sea $\square PABC$ con centro M . Por las propiedades de las reflexiones centrales, se tiene que $\sigma_M(P) = B$ y $\sigma_M(A) = C$ [y viceversa]. Además, por tales propiedades, se tiene que $r_{PA} \parallel r_{BC}$ y $r_{PC} \parallel r_{AB}$; y $d(P, A) = d(B, C)$ y $d(P, C) = d(A, B)$.

Observación 5.3 Si existen tres puntos P, A, C no alineados, se puede construir un paralelogramo de varias maneras. Una forma es aplicar el axioma de las paralelas y proyectar r_{PA} en C , y r_{PC} en A . Otra forma es obtener $M = \text{medio}[C, A]$, crear la recta r_{PM} y proyectar el punto B como el que $PM = d(P, M) = d(M, B) = MB$.

⊕ **Teorema 5.5 [Tales]** Sea $\triangle PAB$ y sean $A' \in [P, A]$, $B' \in [P, B]$ dos puntos tales que $r_{AB} \parallel r_{A'B'}$. En estas condiciones se tiene que $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$.



Demostración. Vamos a basar la demostración en la figura de arriba. Diseñamos el paralelogramo $\square PABC$ y dividimos el lado $[P, A]$ en n segmentos con puntos de división A_1, A_2, \dots, A_n , de modo que $d(A_i, A_{i+1}) = \frac{d(P, A)}{n}$. El mismo proceso se realiza con el lado $[P, C]$. Además, introducimos las rectas $a_k \parallel r_{PC}$ y $c_k \parallel r_{PA}$, de modo que el punto P_{kl} es la intersección de a_k con c_l . Vemos

que $B_i = P_{ii}$. También observamos que existen los paralelogramos $\square A_k A_{k+1} P_{k+1, l} P_{k, l}$ y $\square C_l C_{l+1} P_{k, l+1} P_{k, l}$, de modo que $P_{kl} P_{k+1, l} = \frac{PA}{n}$ y $P_{kl} P_{k, l+1} = \frac{PC}{n}$. Ahora consideramos B_k . Sabemos que $\sigma_{B_k}(r) \parallel r$, $\sigma_{B_k}(c_k) = c_k$ y $\sigma_{B_k}(P_{k-1, k}) = P_{k+1, k}$. También, como $a_{k-1} \parallel a_{k+1}$, $\sigma_{B_k}(a_{k-1}) = a_{k+1}$, y por el mismo criterio, $\sigma_{B_k}(c_{k-1}) = c_{k+1}$. Con esto demostramos que

$$\sigma_{B_k}(B_{k-1}) = \sigma_{B_k}(P_{k-1, k-1}) = P_{k+1, k+1} = B_{k+1}$$

Por tanto, los puntos B_{k-1}, B_k, B_{k+1} están alineados y $B_{k-1} B_k = B_k B_{k+1}$. Por tanto, $B_k B_{k+1} = \frac{PB}{n}$. Es decir, hemos demostrado que

$$P_{kl} P_{k+1, l} = \frac{PA}{n} \quad P_{kl} P_{k, l+1} = \frac{PC}{n} \quad P_{kl} P_{k+1, l+1} = \frac{PB}{n}$$

Si reordenamos, tenemos que

$$\frac{PA_k}{PA} = \frac{P_{0,0} P_{k,0}}{PA} = \frac{k}{n} = \frac{P_{0,0} P_{k,k}}{PB} = \frac{PB_k}{PB}$$

Y con esto demostramos el teorema para los puntos k . Si tenemos A' y B' en la figura tales que $A' \in [A_k, A_{k+1}]$, de modo que $a' = r_{A'B'}$ está entre a_k y a_{k+1} , y es paralelo a estas, haciendo que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$. Por ser $A' \in [A_k, A_{k+1}]$ entonces $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k + \frac{1}{n}}{PA}$ y, como $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$, entonces $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n}$. Dado que $B' \in [B_k, B_{k+1}]$ entonces

$$\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$$

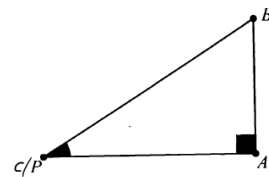
Si nos fijamos en los elementos de azul, vemos que n puede hacerse tan pequeño como queramos, de modo que, en el límite

$$\frac{PB'}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} \iff \frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA}$$

Corolario 5.6 En base al teorema de Tales, se tiene que

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

Definición 5.7 Dado un triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces la **hipotenusa** es el lado opuesto a $\angle A$, $[P, B]$. Los lados adyacentes, $[P, A]$, $[B, A]$, son los **catetos**.

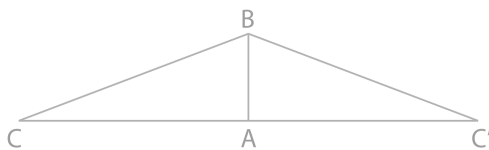


Definición 5.8 Sea el triángulo rectángulo $\triangle PAB$ con $\angle A$ recto, entonces se definen las relaciones

- seno: $\text{sen} \angle P = \frac{BA}{PB}$
- coseno: $\text{cos} \angle P = \frac{PA}{PB}$
- tangente: $\text{tan} \angle P = \frac{BA}{PA}$
- cotangente: $\text{cot} \angle P = \frac{PA}{BA}$

Teorema 5.10 Las razones trigonométricas para $\angle P$ no dependen del triángulo $\triangle PAB$, sólo de la clase de congruencia de $\angle P$.

Teorema 5.12 Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, la medida de los catetos, AB, AC , es menor que la de la hipotenusa BC .



Demostración. Con la construcción anterior, vemos que los puntos B, C, C' no están alineados, pues $C \in r_{AC}$ y $r_{AB} \perp r_{AC}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $2AC = CC' < BC + BC' = 2BC$.

Definición 5.13 La **medida de un ángulo agudo** $\angle P$ es el número real:

$$\angle P = \arccos(\cos \angle P)$$

Teorema 5.14 / 5.19 Si $\angle P = \angle Q$ entonces $\angle P = \angle Q$, sean $\angle P$ y $\angle Q$ agudos y obtusos.

Definición 5.15 Dado un ángulo $\angle \bar{a}, \bar{b}_1 = \angle V$, un **ángulo suplementario** $\angle \bar{a}, \bar{b}_2$ es aquel donde \bar{b}_1 y \bar{b}_2 son las dos semirrectas de b en V , y $\angle V$ y $\angle \bar{V}$ comparten \bar{a} . La suma de $\angle V$ y $\angle \bar{V}$ es un ángulo llano.

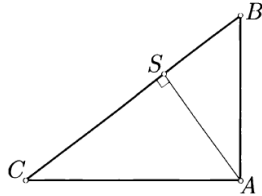
Teorema 5.17 Si dos ángulos son congruentes, sus suplementarios lo son.

Definición 5.18 Para un ángulo obtuso $\angle P$ se tiene $\text{sen} \angle P = \text{sen} \angle \bar{P}$ y $\text{cos} \angle P = -\text{cos} \angle \bar{P}$

6. Teorema de Pitágoras

Teorema 6.1 [Pitágoras] Para todo triángulo rectángulo $\angle ABC$ con $\angle A$ recto, se tiene que

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$



☺ Demostración. Consideramos el punto $S \in r_{BC}$ tal que $r_{SA} \perp r_{CB}$. Pese a que es evidente, hay que demostrar que $S \in [B, C]$. Observamos que $SC < CA < BC$, la primera igualdad por $\cos \angle C = \frac{SC}{CA} < 1 \iff SC < CA$. Del mismo modo, $BS < BC$. Entonces, $S \in [B, C]$. Ahora observamos que

$$\cos \angle C = \frac{CA}{CB} = \frac{CS}{CB}$$

Por otra parte, también vemos que

$$\cos \angle B = \frac{BS}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

De ambas expresiones tenemos que (1) $CA^2 = CB \cdot CS$ y (2) $AB^2 = BS \cdot BC$. Así, $CB \cdot CS + CB \cdot BS = CB(CS + BS) = CB^2 = CA^2 + BA^2$.

Corolario 6.3 Sea $\angle C$, entonces

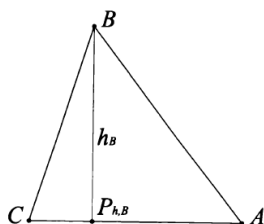
$$\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1$$

Demostración. Si tenemos que $BC = 1$, entonces $\cos \angle C = \frac{CA}{CB} = CA$ y $\sin \angle C = \frac{BA}{BC} = BA$. Aplicando el teorema de Pitágoras, entonces $\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = BA^2 + CA^2 = BC^2 = 1$.

Teorema 6.4 Dado $x \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, existe un ángulo $\angle V$ tal que $\angle V = x$.

Teorema 6.5 $\angle P = \angle Q$ sii $\angle P = \angle Q$

Definición 6.6 Sea $\triangle ABC$ y $h_B \perp r_{CA}$ y que pasa por B , y sea el punto $P_{h,b}$ el punto de corte de h_B y r_{CA} . Entonces, $P_{h,b}$ es el **pie de la altura de B**, y $[P_{h,b}, B]$ es la **altura** de $\triangle ABC$ desde B .



Teorema 6.7 En el triángulo de la Definición 6.6, si $\angle A$ y $\angle C$ son agudos, entonces $P_{h,b} \in [C, A]$. Si $\angle A$ o $\angle C$ es obtuso, entonces $P_{h,b} \notin [C, A]$.

Teorema 6.8 [Fórmula del coseno] Sea $\triangle ABC$ un triángulo, entonces se cumple que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

Demostración. Basándonos en la figura de la Definición 6.6, y por el Teorema 6.7 [en el caso de \triangle acutángulo], entonces se forman dos triángulos rectángulos $\triangle P_{h,b}BC$ y $\triangle P_{h,b}BA$ donde se verifica que $CA = CP_{h,b} + P_{h,b}A$. Por el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$AB^2 = P_{h,b}A^2 + P_{h,b}B^2 \quad BC^2 = BP_{h,b}^2 + P_{h,b}C^2$$

Si sustituimos una igualdad en otra tenemos que

$$BC^2 = CP_{h,b}^2 + AB^2 - P_{h,b}A^2$$

Como $CA = CP_{h,b} + P_{h,b}A$ entonces

$$BC^2 = (CA - P_{h,b}A)^2 + AB^2 - P_{h,b}A^2 =$$

$$CA^2 + P_{h,b}A^2 - 2 \cdot CA \cdot P_{h,b}A + AB^2 - P_{h,b}A^2$$

Si quitamos las partes en azul, y consideramos que $P_{h,b}A = AB \cos \angle A$, entonces queda el teorema demostrado.

Corolario 6.9 Dado un triángulo donde $BC^2 = AB^2 + AC^2$ entonces es un triángulo rectángulo, con $\angle A$ recto. Demostración. Si aplicamos el Teorema del coseno, entonces, el término $2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A = 0$, y como $AB \neq 0, AC \neq 0$, entonces $\cos \angle A = 0 \iff \angle A$ es recto (Teorema 6.5).

Teorema 6.10 [Fórmula de los senos] Sea $\triangle ABC$, entonces se verifica

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A}$$

Demostración. Seguimos con la figura de la Definición 6.6. Vemos que $BP_{h,b} = BC \sin \angle C = BA \sin \angle A$. Si el triángulo es obtusángulo también se cumple porque los senos se mantienen. Simplemente, igualando $BP_{h,b}$ tenemos que $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{BA}{\sin \angle C}$. El resto de igualdades se consiguen con las demás alturas.

Teorema 6.11 Para $\triangle ABC \dots$

- Si se conoce $\angle A$ y AB, AC (adyacentes), entonces se pueden hallar $\angle B, \angle C, BC$.

- Si se conocen AB, AC, BC entonces se pueden hallar $\angle A, \angle B, \angle C$.
- Si se conocen $AB, \angle A, \angle B$ entonces se pueden hallar $BC, AC, \angle C$.

Corolario 6.12 [Criterios de congruencia de \triangle]

Dados $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ entonces

- $\angle A = \angle A', AB = A'B', AC = A'C'$ [LAL]
- $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$ [LLL]
- $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', AB = A'B'$ [ALA]

Entonces existe una isometría η tal que $\eta(A) = A'$, etc. y $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Hay que considerar que para emplear isometrías pares hay que definir la orientación de los triángulos.

Corolario 6.14 Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\sin(\angle P + \angle Q) = \sin(\angle P) \cos(\angle Q) + \sin(\angle Q) \cos(\angle P)$$

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\angle P) \cos(\angle Q) - \sin(\angle P) \sin(\angle Q)$$

Corolario 6.15 Sean $\angle P$ y $\angle Q$ no nulos, y sumables. Entonces

$$\angle(\angle P + \angle Q) = \angle P + \angle Q$$

Demostración. Nota: en el punto final se demuestra que

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\angle P + \angle Q)$$

Sabiendo que $\angle P = \arccos(\cos \angle P)$ entonces $\arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \angle(\angle P + \angle Q)$ y, por tanto,

$$\angle(\angle P + \angle Q) = \arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \angle P + \angle Q$$

Corolario 6.16 Si $\angle V$ es un ángulo y n es entero, entonces existe $n\angle V$ y $\angle(n\angle V) = n\angle V$.

Ejercicio 6.10 El centro de Fermat, F es aquel que minimiza la distancia a los vértices del triángulo. Este sucede cuando el ángulo entre dos vértices cualesquiera del triángulo y F es $2\pi/3$.

7. Semejanzas

Definición 7.1 Sea C un punto de \mathbb{P} y $k > 0$. Una **homotecia** $\eta_{C,k} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ es una aplicación tal que a cada punto $P \in r_{CP}$ le hace corresponder un punto $\eta_{C,k}(P) \in r_{CP}$ tal que $C\eta_{C,k}(P) = kCP$. k es la **razón de homotecia**.

Observación 7.2 Sea $X \in \mathbb{P}$, $\eta_{C,k}$ y γ una aplicación del **Axioma P3**. Entonces se cumple que $\gamma(\eta_{C,k}(X)) = \gamma(C) + k(\gamma(X) - \gamma(C))$

Observación 7.3 Toda homotecia es una biyección que tiene

- Identidad: $\eta_{C,1}$
- Inversa: $\eta_{C,1/k}$

Teorema 7.4/Corolario 7.5 Sean A, B y $\eta_{C,k}$, entonces $\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) = kAB$. Además, $\eta_{C,k}[A, B] = [\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$.

Teorema 7.7 Toda homotecia envía un ángulo a un ángulo congruente, y toda recta a una paralela.

Definición 7.8 Una **semejanza** es una combinación de homotecias e isometrías.

Corolario 7.10/7.11 / Teorema 7.19 Toda semejanza envía rectas a rectas, segmentos a segmentos, y conserva los ángulos. Toda biyección ψ que cumpla estas condiciones es una semejanza.

Teorema 7.12 / Corolario 7.13 Toda semejanza δ cumple que $\delta(A)\delta(B) = kAB$, donde k es la razón de semejanza. Dados A, B, C, D , entonces se cumple que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\delta(A)\delta(B)}{\delta(C)\delta(D)}$$

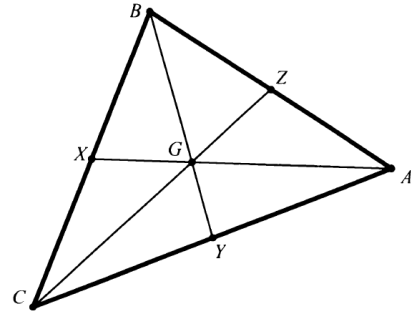
Teorema 7.15 Si $\angle A = \angle B$, entonces existe δ tal que $\delta(\angle A) = \angle B$.

Teorema 7.18 Sean $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ que comparten $\angle A$ y A, B, B' están alineados, así como A, C, C' . Entonces si existe k tal que $AB' = kAB$ y $AC' = kAC$ entonces $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ son semejantes, $r_{BC} \parallel r_{B'C'}$ y $B'C' = kBC$.

Definición 7.20 Se llama **mediana** al segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto de un triángulo. Es decir, da-

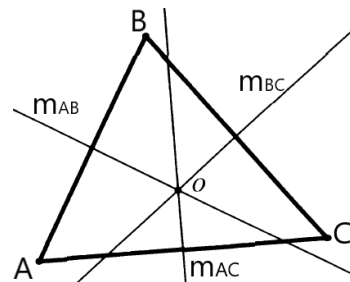
do $\triangle ABC$, las medianas son $[A, \text{medio}[B, C]]$, $[B, \text{medio}[A, C]]$ y $[C, \text{medio}[A, B]]$.

Teorema 7.21 Las tres medianas de un triángulo cortan en un punto G , llamado **baricentro**.



☺ **Demostración.** Definimos $X = \text{medio}[B, C]$, $Y = \text{medio}[A, C]$, $Z = \text{medio}[A, B]$ y sea $G = [B, Y] \cap [C, Z]$. El punto existe porque, si definimos la recta r_{BY} , entonces C está en uno de los semiplanos de la recta (pongamos, H^2) y, si $A \in H^1$, entonces $Z \in H^1$, C y Z están en distintos semiplanos de r_{BY} . Si tomamos $\triangle ABC$ y $\triangle AZY$ entonces, por ser Y, Z puntos medios, entonces, por el **Teorema 7.18**, $r_{YZ} \parallel r_{BC}$ y $BC = 2YZ$. Además, por ser los ángulos entre $[C, Z]$ y $[B, Y]$ alternos internos, los triángulos $\triangle GYZ$ y $\triangle GBC$ son semejantes de razón 2. Por tanto, $GB = 2GY$ y $GC = 2GZ$. Si repetimos esto con $[A, X]$ y $[B, Y]$, entonces existe un punto G' tal que $G'A = 2G'X$ y $G'B = 2G'Y$. Como $\frac{G'B}{G'Y} = \frac{GB}{GY}$, entonces $G = G'$ y las tres medianas cortan en G .

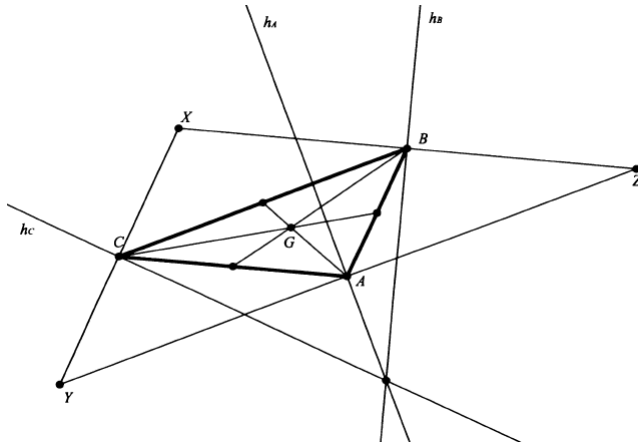
Teorema 7.23 Las tres mediatrices de un triángulo cortan en un punto, el **circuncentro**.



☺ **Demostración.** Si $\triangle ABC$ es un triángulo, las mediatrices m_{AB} y m_{BC} cortan en un punto O . Si no cortaran, entonces $m_{AB} \parallel m_{BC}$, y como $r_{AB} \perp m_{AB}$ y $m_{BC} \perp r_{BC}$ entonces $r_{AB} \parallel r_{BC}$, lo cual es absurdo. Por ser m_{BC} mediatriz, entonces $OB = OC$, y $OA = OB$ para m_{AB} . Entonces $OA = OC$ y por tanto $O \in m_{AC}$, luego O corta las tres mediatrices.

Teorema 7.24 Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro** X, Y, Z están alineados se cumple que

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1$$



☺ Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo con baricentro G y sean h_A, h_B, h_C sus alturas. Consideramos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, de modo que $\triangle ABC$ se transforma en $\triangle XYZ$, con $\tau(A) = X, \tau(B) = Y, \tau(C) = Z$. Por las propiedades de las semejanzas, $r_{BC} \parallel r_{YZ}, r_{AC} \parallel r_{XZ}, r_{AB} \parallel r_{XY}$, y se cumple que $A = \text{medio}[Y, Z], B = \text{medio}[X, Z], C = \text{medio}[X, Y]$. Por tanto, ahora $h_A = m_{YZ}, h_B = m_{XZ}, h_C = m_{XY}$ y, por tanto, el ortocentro de $\triangle ABC$ es el circuncentro de $\triangle XYZ$.

Teorema 7.25 [Recta de Euler] Dado un triángulo, su baricentro G , ortocentro O y circuncentro H pertenecen a una misma recta (si el triángulo no es equilátero). Además, $OH = 2OG$.

☺ Demostración. Si partimos del triángulo con baricentro G y aplicamos la semejanza $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$, como en el **Teorema 7.24**, entonces se cumple que $\tau(O) = H$. Por ser σ_G , entonces $H \in r_{OG}$ y por ser $\eta_{G,2}$, entonces $OH = 2OG$.

Corolario 7.26 El **incentro** del triángulo es el punto donde se cortan las tres bisectrices del triángulo.

Ejercicio 7.7 [Teorema de Ceva] En $\triangle ABC$ sean $X \in [B, C], Y \in [C, A], Z \in [A, B]$. Si X, Y, Z no coinciden con ninguno de los vértices del triángulo, entonces los segmentos $[A, X], [B, Y], [C, Z]$ se cortan en un punto sii

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1$$

Ejercicio 7.8 [Teorema de Menelao] Sea $\triangle ABC$ y sean $X \in r_{BC}, Y \in r_{CA}, Z \in r_{AB}$. Entonces, sii

8. Circunferencias

Definición 8.1 Sea $O \in \mathbb{P}$ y $\rho > 0$. Entonces una **circunferencia** \mathcal{C} es el conjunto de puntos a una distancia ρ de O . O es el **centro** y ρ el **radio**.

Teorema 8.3 Una circunferencia corta a una recta en a lo sumo dos puntos.

Definición 8.4 Dada \mathcal{C} una recta que corta en dos puntos se llama **secante**, que corta en un punto se llama **tangente** y que no corta se llama **exterior**. Si para un punto $X \in \mathbb{P}$, $d(O, X) > d(O, \rho)$ el punto es exterior, y si $d(O, X) < d(O, \rho)$ entonces es interior.

Teorema 8.5 Sea \mathcal{C} con centro O . Si t es tangente a \mathcal{C} en P_t , entonces $t \perp r_{O, P_t}$.

Definición 8.6 Sean P, P' dos puntos tales que $O = \text{medio}[P, P']$. Entonces, si los puntos están en \mathcal{C} , se denominan **diametralmente opuestos en \mathcal{C}** , y $[P, P']$ es un diámetro de \mathcal{C} .

Teorema 8.7/Definición 8.9 Dados tres puntos no alineados, entonces existe una única circunferencia que pase por estos puntos, la **circunferencia circunscrita**.

Corolario 8.8 Dos circunferencias tienen a lo sumo dos puntos en común. Si sólo tienen un punto en común se llaman **tangentes**.

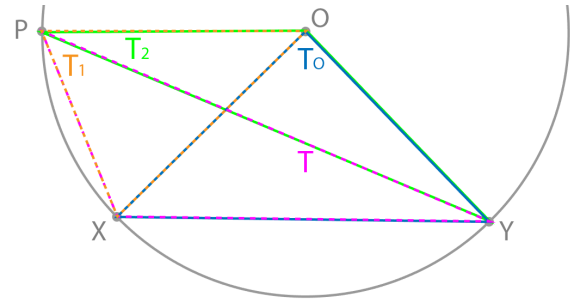
Teorema 8.10 Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ con centros O, O' y radios ρ, ρ' respectivamente. Si las dos circunferencias cortan en dos puntos, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$OO' < \rho + \rho' \quad \rho < OO' + \rho' \quad \rho' < OO' + \rho$$

Y si las circunferencias son tangentes, entonces se verifica una de estas igualdades:

$$OO' = \rho + \rho' \quad \rho = OO' + \rho' \quad \rho' = OO' + \rho$$

Teorema 8.11 [Arco capaz] Sea \mathcal{C} con centro O y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en \mathcal{C} y P, P', O están en el mismo semiplano determinado por r_{XY} . Si X e Y no son diametralmente opuestos, entonces $\angle P = \angle P' = \frac{1}{2}\angle O$. Todo este arco, así como el arco surgido de la reflexión $\sigma_{r_{XY}}$ cumplen $\angle P = \angle P'$, y se denomina **arco capaz**.



Demostración. Sea $\mathcal{T} = \triangle PXY$ y $\mathcal{T}_O = \triangle OXY$. Construimos también $\mathcal{T}_1 = \triangle POX$ y $\mathcal{T}_2 = \triangle POY$, isósceles, de modo que $\angle_{\mathcal{T}_1} X = \angle_{\mathcal{T}_1} P$ y $\angle_{\mathcal{T}_2} Y = \angle_{\mathcal{T}_2} P$. Como la suma de los ángulos de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 es llano, entonces

$$2\angle_{\mathcal{T}_1} P = \pi - \angle_{\mathcal{T}_1} O \quad 2\angle_{\mathcal{T}_2} P = \pi - \angle_{\mathcal{T}_2} O$$

Vamos a suponer ahora que $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_1} P - \angle_{\mathcal{T}_2} P$. Para $2\angle_{\mathcal{T}} P$ entonces se cumple que

$$2\angle_{\mathcal{T}} P = 2\angle_{\mathcal{T}_1} P - 2\angle_{\mathcal{T}_2} P = \angle_{\mathcal{T}_2} O - \angle_{\mathcal{T}_1} O = \angle_{\mathcal{T}_O} O = \angle O$$

La misma demostración sucede para $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_1} P + \angle_{\mathcal{T}_2} P$ y $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_2} P - \angle_{\mathcal{T}_1} P$

Ejercicio 8.2 Sea \mathcal{C} con centro O y sean $\triangle PXY$ y $\triangle P'XY$ dos triángulos con vértices en \mathcal{C} y P, P', O están en distinto semiplano determinado por r_{XY} . Entonces $\angle P = \pi - \angle P'$

Definición 8.13 Sea \mathcal{C} con centro O y radio ρ . Se denomina **inversión** del plano con respecto a \mathcal{C} a una aplicación $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbb{P} - \{O\} \rightarrow \mathbb{P} - \{O\}$ que a cada punto P le hace corresponder otro punto $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ tal que $O, P, \iota_{\mathcal{C}}(P)$ están alineados, $O \notin [P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$ y se verifica que

$$OP \cdot O_{\iota_{\mathcal{C}}}(P) = \rho^2$$

Esta aplicación verifica que

- $\iota_{\mathcal{C}} \circ \iota_{\mathcal{C}}(P) = P$ para todo $P \in \mathbb{P} - O$.
- Para todo $P \in \mathcal{C}$ se cumple $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$. A todo punto fuera del círculo, $\iota_{\mathcal{C}}$ lo manda dentro, y viceversa.
- Si r pasa por O , $\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$.



Teorema 8.16/8.17 Sea \mathcal{C} y $P \in \mathbb{P}$. Sean a, b rectas que cortan a P y secantes a \mathcal{C} . Sean A_1 y A_2 los

puntos de corte de a con \mathcal{C} y B_1, B_2 los de b con \mathcal{C} . Entonces se verifica que

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$

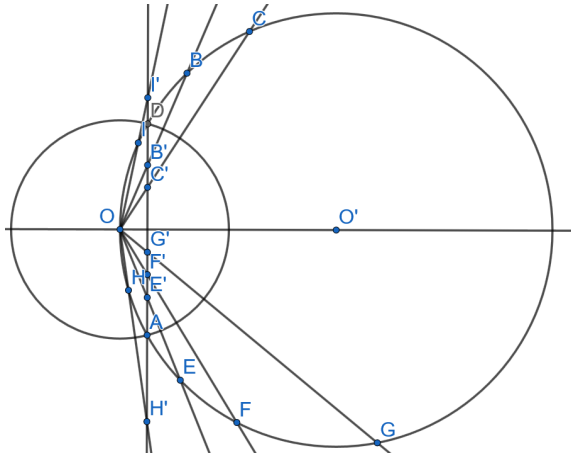
Si a es tangente, entonces

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

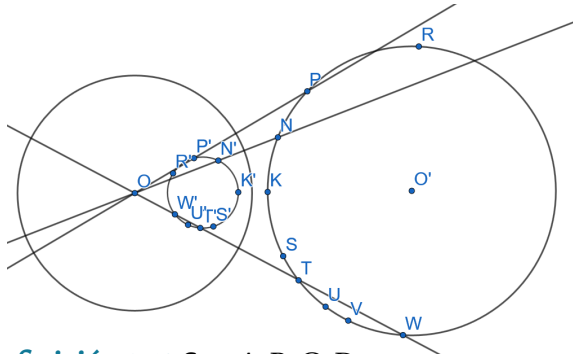
Ese producto, por tanto, es invariante de la recta, y se denomina **potencia de P con respecto a \mathcal{C}** .

Teorema 8.18 Sea \mathcal{C} de radio ρ y centro O .

- Sea \mathcal{C}' una circunferencia de centro O' que pasa por O , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$ es una recta ortogonal a $r_{O,O'}$. Sea r que no pasa por O , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(r) = \mathcal{C}' - \{O\}$, donde \mathcal{C}' es una circunferencia que pasa por O .



- Si \mathcal{C}' no pasa por O entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es otra circunferencia que no pasa por O . Si O es exterior a \mathcal{C}' entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es la imagen de \mathcal{C}' por la homotecia de centro O y razón ρ^2/t , donde t es la potencia de O con respecto a \mathcal{C}' . Si O es interior a \mathcal{C}' entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \sigma_O \circ \eta_{O,\rho^2/t}(\mathcal{C})$.



Definición 8.19 Sea A, B, C, D una cuaterna ordenada de puntos distintos del plano. Se define **razón doble** como

$$(A, B : C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

. Si A, B, C, D están alineados, entonces la razón doble es una razón de las dos razones simples: $\frac{CA}{CB} \frac{DB}{DA}$.

Por convenio se tiene que

$$(A, B : C, \infty) = \frac{CA}{CB}$$

Teorema 8.20 Sea \mathcal{C} con centro O y sean $A, B \neq O$ y que no estén alineados a O . Si $\iota_{\mathcal{C}}(A) = A'$ y $\iota_{\mathcal{C}}(B) = B'$, los triángulos $(T)_1 = \triangle OAB$ y $(T)_2 = \triangle OA'B'$ son semejantes, y $\angle A = \angle B'$ y $\angle B = \angle A'$.

Teorema 8.21 Sea \mathcal{C} con centro O y sean $A, B, C, D \neq O$. Entonces

$$(A, B : C, D) = (\iota_{\mathcal{C}}(A), \iota_{\mathcal{C}}(B) : \iota_{\mathcal{C}}(C), \iota_{\mathcal{C}}(D))$$

9. Geometría hiperbólica

Definición 9.0 Para describir la geometría hiperbólica se fija una recta l_∞ y uno de los semiplanos de la recta l_∞ como \mathbb{H} . La distancia hiperbólica sigue la lógica de para que dos pares de puntos A, A' y B, B' sobre $r \perp l_\infty$ y $d(A, A') = d(B, B')$, pero A, A' están más cerca de l_∞ que B, B' , entonces $d_{\mathbb{H}}(A, A') > d_{\mathbb{H}}(B, B')$.

Si $R = r \cap l_\infty$, definimos la **distancia hiperbólica** como

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{RP}{RQ} \right| = |\log(P, Q : R, \infty)|$$

Teorema 9.1 Sean P, Q, S en \mathbb{H} sobre $r \perp l_\infty$ tal que $Q \in [P, S]$. Entonces:

- $d_H(P, Q) + d_H(Q, S) = d_H(P, S)$.
- Sea \mathcal{C} con centro $R = r \cap l_\infty$, entonces

$$d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = d_H(P, Q)$$

Teorema 9.2 Sean $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$. Existe una única circunferencia \mathcal{C}_{PQ} con centro l_∞ y que pasa por P y Q .

Definición 9.0-cont Queremos que la distancia anterior sea invariante a inversiones respecto a circunferencias. Si tenemos $P, Q \in \mathbb{H}$ de modo que $r_{PQ} \not\perp l_\infty$ y $X, Y = \mathcal{C}_{PQ} \cap l_\infty$, podemos crear \mathcal{C}_X . Entonces, se tiene que la recta $r_{\iota_{\mathcal{C}_X}(P)\iota_{\mathcal{C}_X}(Q)} \perp l_\infty$, y definimos

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = |\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)|$$

Sin embargo, por el **Teorema 8.21** la razón doble conserva las inversiones, luego

$$\begin{aligned} |\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)| &= \\ |\log(\iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(Q) : \iota_{\mathcal{C}}(R), \infty)| &= \\ |\log(P, Q : \iota_{\mathcal{C}}(R), \iota_{\mathcal{C}}(\infty))| & \end{aligned}$$

Si tomamos como convención $\iota_{\mathcal{C}}(\infty) = X$, y por el **Teorema 8.18**, $\iota_{\mathcal{C}}(R) = Y$ entonces

$$d_H(P, Q) = |\log(P, Q : Y, X)|$$

Teorema 9.3 Sea \mathcal{C} con centro l_∞ , entonces $\iota_{\mathcal{C}}$ preserva las distancias hiperbólicas para todo P, Q :

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q))$$

Teorema 9.4 Si \mathcal{C} tiene centro en l_∞ , entonces $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica.

Definición 9.5 Dos rectas hiperbólicas son paralelas si son disjuntas o coinciden.

Teorema 9.6 Sea r_H hiperbólica y P un punto de \mathbb{H} que no está en r_H . Existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a r_H que pasan por P .

10. Polígonos

Definición 10.1 Un polígono \mathcal{P} es un conjunto finito $\{\dots, [V, W], \dots\}$ de r segmentos llamados lados del polígono. Los extremos de los lados, vértices, forman el conjunto $\{V_1, \dots, V_r\}$. \mathcal{P} cumple

- Dos lados de \mathcal{P} o bien no se cortan o tienen únicamente un extremo común (son lados adyacentes).
- Los lados de \mathcal{P} pueden escribirse como una sucesión finita de vértices $[V_1, V_2], [V_2, V_3], \dots, [V_r, V_1]$.

Definición 10.4 Una **diagonal** es un segmento cuyos extremos son dos vértices que no pertenecen al mismo lado.

Definición 10.6 Sea V un vértice de \mathcal{P} y sean $[V, W_1]$ y $[V, W_2]$ dos lados. El ángulo con vértice V y semirrectas que contienen a ambos lados forman el ángulo $\angle V$ de \mathcal{P} .

Definición 10.8 Un polígono es **convexo** si toda recta que no contiene a ninguno de los lados del polígono corta a lo sumo en dos lados de éste.

Teorema 10.10 Un polígono \mathcal{P} es convexo sii para todo lado $[V, W]$ de \mathcal{P} los vértices de \mathcal{P} distintos de V y W están todos en el mismo de los dos semiplanos determinados por r_{VW} .

Definición 10.11 Un punto P está en el **interior** de un polígono convexo \mathcal{P} si cualquier recta que pase por P corta a los lados del polígono en dos puntos. Si P no está ni en el interior ni en los lados del polígono, entonces está en el exterior.

Observación 10.12 Un punto P está en el interior de un polígono \mathcal{P} si existe una recta r que pasa por P de modo que si \bar{s} es una de las semirrectas, \bar{s} corta a \mathcal{P} en un número n impar de puntos que no son vértices.

Definición 10.13 Un polígono convexo es **regular** si todos sus lados y ángulos son congruentes.

Lema 10.14 Sean r y s rectas que al cortarse forman un ángulo π/n . Sean σ_r y σ_s . Si V es un punto en r , definimos los puntos $V_{i+1} = (\sigma_s \circ \sigma_r)^i(V)$, $i = 1, \dots, n-1$, es decir, las imágenes de V por rotaciones. Entonces, si $V_1 = V$, el polí-

gono

$$\mathcal{P} = \{[V_1, V_2], \dots, [V_{n-1}, V_n], [V_n, V_1]\}$$

es regular.

Teorema 10.15 Sea n entero mayor que 2. Sea $[V, W]$ un segmento del plano, y H uno de los semiplanos determinados por r_{VW} . Existe un polígono regular de n lados contenido en $H \cup r_{VW}$ y uno de los lados es $[V, W]$. **Corolario 10.17** En estas condiciones \mathcal{P} es único.

Teorema 10.16/10.19 Sea \mathcal{P} regular con n vértices. \mathcal{P} admite n reflexiones distintas, que son simetrías de \mathcal{P} . También existe una rotación con ángulo $2\pi/n$ que es simetría de \mathcal{P} . Análogamente, si \mathcal{P} es convexo con n vértices y tiene como simetría una rotación $2\pi/n$, entonces es regular.

Corolario 10.18 Todo \mathcal{P} regular permite una circunferencia \mathcal{C} que pase por todos sus vértices. Entonces \mathcal{P} está **inscrito** en \mathcal{C} .

Construcciones con regla y compás

Teorema 10.24/Definición 10.26 Dados dos puntos A y B se puede construir un punto $C \in [A, B]$ con regla y compás de modo que $AB \cdot BC = AC^2$. C divide en razón áurea, $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 10.27, 10.28 Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles tal que $AB = AC$ y $\angle B = \angle C = 2\angle A$. Entonces $\frac{AB}{BC}$ es la razón áurea. Además, este triángulo puede construirse con regla y compás.

Observación 10.29/Corolario 10.30 El ángulo $\angle A$ del triángulo áureo es $\pi/5$. Por tanto, se puede construir un pentágono regular con lados congruentes a $[A, B]$.

Teorema 10.31 Un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás sii la factorización de n en números primos tiene la forma $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$, con p_i de la forma $2^{2^s} + 1$, y son primos distintos. Así, los lados polígonos construibles son 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots .

11. Geometría euclidiana espacial

Definición 11.0 \mathbb{E} es el conjunto de puntos en un espacio tridimensional. La distancia d es la aplicación $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Axioma E1 (\mathbb{E}, d) es un espacio métrico.

Definición 11.1 Una recta r y su segmento $[A, B] = \{X \in \mathbb{E} \mid d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$ son similares que en \mathbb{P} . Una recta cumple:

- contiene al menos dos puntos distintos.
- Para toda terna A, B, C en r , A, B, C están alineados.
- Si $A, B \in r$ distintos, y $X \in \mathbb{E}$, si $X \in r$, A, B, X están alineados.

Definición 11.2 Un **plano** $\pi \in \mathbb{E}$ es un subconjunto que, con la distancia d restringida a π , cumple los axiomas de la geometría euclidiana plana.

Axioma E2 [de los planos]

- Al menos existe un plano en \mathbb{E} .
- Para todo plano α existe un punto $P \in \mathbb{E} - \alpha$.
- Para $X, Y, Z \in \mathbb{E}$ distintos existe un plano $\alpha \in \mathbb{E}$ que los contiene. Si no están alineados, α es único, y se denota por α_{XYZ} .
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ son planos distintos, cortan en una recta.

Teorema 11.4 Si α es un plano y $A, B \in \alpha$, entonces $r_{AB} \in \alpha$.

Observación 11.5 Por dos rectas que cortan, o por una recta y un punto que no pasa por ella, pasa exactamente un plano.

Definición 11.6/Observación 11.7 Dos rectas r, s son **paralelas** si coinciden o están contenidas en un plano y son paralelas en él. Dos rectas disjuntas pueden no ser paralelas, si no están en el mismo plano.

Definición 11.8 Una recta l es **ortogonal** a un plano α en un punto P ($l \perp_P \alpha$) si l es ortogonal a toda recta de α que pase por P .

Teorema 11.10 Sea r y $P \in r$, entonces existe un plano único π que pasa por P y es perpendicular a r .

Teorema 11.12 Sea α un plano y $P \in \alpha$. Existe una única recta ortogonal a α que pase por P .

Teorema 11.13 Sean r, s , y r es ortogonal a α . Si s es paralela a r , entonces es ortogonal a α .

Teorema 11.15 Sea α y $P \in \mathbb{E}$. Existe una única recta r tal que $P \in r$ y $r \perp \alpha$.

Definición 11.16 Dos planos α, β son ortogonales, $\alpha \perp \beta$ si existe al menos una recta $a \in \alpha$ verificando $a \perp \beta$.

Teorema 11.17 Para los planos $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ se tiene

- $\alpha \perp \beta \iff \beta \perp \alpha$
- $\alpha \perp \beta$ si para todo $P \in \alpha$ la única recta $a \perp \beta$ pasando por P esta en α .

Teorema 11.18 Sea λ un plano y c una recta en \mathbb{E} . Existe un plano $\gamma \perp \lambda$ pasando por c . Si c no es ortogonal a λ , γ es único.

Definición 11.19 Dados dos planos π_1, π_2 en \mathbb{E} , π_1 y π_2 son **paralelos** si $\pi_1 = \pi_2$ o $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.

Teorema 11.20 Si $\pi_1 \parallel \pi_2$ toda recta ortogonal a π_1 lo es a π_2 .

Page intentionally left in blank

12. Isometrías en el espacio

Definición 12.0 La igual que en \mathbb{P} , una **isometría** es una aplicación $g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ biyectiva que conserva las distancias.

Teorema 12.1 Sea g una isometría y $A, B \in \mathbb{E}$. Entonces $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$ y $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$.

Teorema 12.2 Sea g y $\pi \in \mathbb{E}$, entonces $g(\pi) \in \mathbb{E}$.

Teorema 12.3 Si $A, B, C \in \mathbb{E}$ no son alineados, entonces $g(\pi_{ABC}) = \pi_{g(A)g(B)g(C)}$

Teorema 12.4 Sea l una recta y α, β planos en \mathbb{E} .

- $l \perp \alpha \iff g(l) \perp g(\alpha)$
- $\beta \perp \alpha \iff g(\beta) \perp g(\alpha)$

Definición 12.5 [Reflexión sobre plano] Sea $\alpha \in \mathbb{E}$. Dado $P \in \mathbb{E}$ sea t_P ortogonal a α que pasa por P , y $\pi_\alpha(P) = t_P \cap \alpha$. La **reflexión con base α** de P , o $\sigma_\alpha(P)$, es el punto tal que $\pi_\alpha(P) = \text{medio}[P, \sigma_\alpha(P)]$

Observación 12.6/Teorema 12.7 σ_α es una biyección, y $\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(P) = P$. Además, $\sigma_\alpha(P) = P \iff P \in \alpha$. σ_α es una isometría.

Teorema 12.8 Sea π un plano y σ_r una reflexión en π respecto a r . Existe una reflexión $\sigma_\alpha \in \mathbb{E}$ de modo que σ_α restringida a π coincide con σ_r .

Corolario 12.9 Sea g una isometría de un plano π . Entonces existe una isometría $\tilde{g}(X) = g(X)$ para todo $X \in \pi$.

Corolario 12.10 Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio. Existe una isometría g tal que $g(\pi_1) = \pi_2$, y se puede tomar g como reflexión.

Lema 12.11 Sea $g \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $A \neq B$ son fijos en g , entonces r_{AB} es fija en g .

Teorema 12.12 Sea g , y sea α el plano pasando por A, B, C . Si A, B, C son fijos en g , entonces $g = \sigma_\alpha$ o $g = \text{id}_{\mathbb{E}}$.

Corolario 12.13 Sean $A^1, A^2, A^3, A^4 \in \mathbb{E}$, no situados en el mismo plano; y sean $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$. Si $g(A^i) = h(A^i)$ para todo i , entonces $g = h$.

Teorema 12.15

- Sea $\rho \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ una rotación de eje r . Para

todo plano α conteniendo a r , existen planos β, β' conteniendo a r , únicos, tales que $\rho(\alpha) = \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_{\beta'}$.

- Sea τ una traslación paralela a una recta c . Para todo plano $\alpha \perp c$ existen planos β, β' , únicos, tales que $\tau = \sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_{\beta'}$.

Ejercicio 12.1 Si $g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ son rotaciones con ejes ortogonales al mismo plano λ , entonces gh o bien es una rotación con eje ortogonal a λ , o una traslación paralela a rectas contenidas en λ o la identidad.

Ejercicio 12.2 Las rotaciones forman una clase de congruencia, con el **ángulo de rotación** ρ . Si $\angle V$ es el ángulo formado por la semirrectas de $\alpha \cup \lambda$ y $\beta \cup \lambda$ (siendo α, β los planos de reflexión, y λ ortogonal a α, β), entonces $2\angle V$ es el ángulo de rotación. Si el ángulo de rotación es llano, entonces ρ es una **media vuelta**.

Ejemplo 12.18 Tomando un plano π y componiendo la reflexión σ_π con una rotación ρ de eje $a \perp \pi$, se obtiene la isometría $\phi = \sigma_\pi \rho = \rho \sigma_\pi$

Ejemplo 12.20 Una **reflexión central** es una isometría entre un plano α y una recta $r \perp \alpha$, en un punto $P = r \cap \alpha$: $\sigma_P = \sigma_\alpha \rho_r$. La reflexión central cumple

- Para todo $X \in \mathbb{E}$, $\text{medio}[X, \sigma_P(X)] = P$.
- $\sigma_P \circ \sigma_P = \text{id}_{\mathbb{E}}$.
- Para cualquier β, s tal que $\beta \perp_P s$, $\sigma_\beta \rho_s = \rho_s \sigma_\beta$.

Ejercicio 12.4

- El producto de dos reflexiones centrales σ_P, σ_Q ($P \neq Q$) es una traslación paralela a la recta r_{PQ} .
- Sea τ una traslación. Para todo $S \in \mathbb{E}$ existen puntos $B, B' \in \mathbb{E}$ únicamente determinados tales que $\tau = \sigma_A \sigma_{B'} = \sigma_B \sigma_A$.

Ejemplo 12.21 Un **movimiento helicoidal** es una composición de una rotación con eje r y una traslación paralela a dicho eje: $h = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau$.

Ejemplo 12.22 Una **reflexión con deslizamiento** es una composición de una reflexión σ_α y una traslación τ paralela a la recta $r \subset \alpha$: $d = \tau \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \tau$.

Teorema 12.19 Las únicas isometrías en $\text{Isom}(\mathbb{E}) - \text{id}_{\mathbb{E}}$ con puntos fijos son las refleiones, rotaciones, o reflexiones-rotaciones.

Teorema 12.23 Las isometrías de \mathbb{E} sin puntos fijos son las traslaciones, movimientos helicoidales y reflexiones con deslizamiento.

Ejercicio 12.5 Resumen de isometrías:

Puntos fijos	\emptyset	A	a	α
par	τ / h		ρ	
impar	d	ϕ		σ

13. Poliedros

Definición 13.1 Un **poliedro** \mathcal{P} es un conjunto finito de polígonos $\{C_k\}$. Los polígonos de \mathcal{P} se llaman caras, los lados del polígono se llaman aristas o lados, y los vértices tienen el mismo nombre. Todo poliedro cumple:

- Dos caras de un poliedro o bien no se cortan, y tienen un único vértice en común, o un lado en común.
- Cada arista es un lado de dos polígonos de \mathcal{P} .
- Las caras que comparten un vértice en común V se pueden ordenar en una sucesión C_1, \dots, C_r de modo que C_i y C_{i+1} son adyacentes.
- Dadas dos caras C_i, C_j existe una sucesión finita de caras C_1, \dots, C_r tal que $C_i = C_1, C_r = C_j$.

Definición 13.2 Un poliedro es **convexo** si toda recta no contenida en ninguno de los planos que contienen a las caras corta a lo más en dos puntos a las caras.

Definición 13.3 Un **ciclo poligonal** \mathcal{C}

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-NoDerivs 3.0 España”.

