

# La(s) hoja(s) de Chema

## 1. Espacios métricos

**Definición 1.1**  $\delta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una métrica o **distancia** si cumple que

- $\delta(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ , o  $\delta(x, x) = 0$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$

**Ejercicio 1.1** Por inducción, la desigualdad triangular se puede generalizar a:  $\delta(p^1, p^n) \leq \delta(p^1, p^2) + \dots + \delta(p^{n-1}, p^n)$

**Teorema 1.4** Si  $M' \subset M$  y existe el espacio métrico  $(M, \delta)$ , entonces también existe  $(M', \delta)$ , y se llama **métrica inducida** por  $(M, \delta)$ .

**Definición 1.5** Sean  $(M, \delta), (M', \delta')$  y  $g : M \rightarrow M'$ . Se dice que  $g$  conserva las distancias si  $\delta'(g(x), g(y)) = \delta(x, y) \quad \forall x, y \in M$ . Si además  $g$  es biyectiva, entonces es una **isometría**.

**Teorema 1.7** Si existen  $(M, \delta), (M', \delta'), (M'', \delta'')$  y  $g : M \rightarrow M'$  y  $h : M' \rightarrow M''$  son isometrías, entonces  $h \circ g$  y  $g^{-1}$  también son isometrías.

**Definición 1.8** La composición de isometrías forma un **grupo** pues

- $(g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$
- Si  $g \in \text{Isom}(M)$  entonces  $g^{-1} \in \text{Isom}(M)$
- La isometría identidad,  $\text{id}_M \in \text{Isom}(M)$

**Definición 1.12** Si  $(M, \delta)$ , para  $a, b \in M$  se llama **segmento** de extremos  $a$  y  $b$  y se representa por  $[a, b]$  al conjunto  $[a, b] = \{x \in M \mid \delta(a, x) + \delta(x, b) = \delta(a, b)\}$ . Asimismo,  $x, y, z \in M$  están alineados si  $(x < y < z) \vee (z < y < x)$ .

**Ejercicio 1.5** Para  $\sigma \in \{1, -1\}$  y  $\tau \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $f(x) = \sigma x + \tau$  es una isometría para  $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$

*Page intentionally left in blank*

## 2. Axiomas para la geometría euclidiana plana

**Axioma P1** Si tenemos el conjunto  $\mathbb{P}$ , denominado **plano**, y la aplicación  $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  llamada **distancia**, entonces  $(\mathbb{P}, d)$  es un espacio métrico.

**Definición 2.2** Una **recta**  $r \subset \mathbb{P}$  satisface

- $r$  contiene al menos dos puntos.
- Para toda terna de puntos  $A, B, C$ , están alineados si están en  $r$ .

**Axioma P2**  $\mathbb{P}$  contiene al menos tres puntos no alineados; y por dos puntos distintos,  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{P}$  pasa una recta,  $r_{AB}$ .

**Definición 2.6 / Teorema 2.7** Dos rectas se cortan si sólo tienen un punto en común, y si no tienen ningún punto en común, entonces se denominan **paralelas**, y se denota por  $a \parallel b$ . Dos rectas, o se cortan o son paralelas.

⚠ **Axioma P3** Para toda recta  $r \subset \mathbb{P}$  existe una biyección  $\gamma : r \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\gamma(X) - \gamma(Y)| = |x - y| = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in r$

**Observación 2.8** Si  $A, B \in r$  son distintos, entonces existe un punto  $M \in r : d(A, M) = d(M, B)$  que denotamos por  $\text{medio}[A, B]$  y se llama **punto medio**. Asimismo sólo existe un punto  $B \in r$  tal que  $B = \text{medio}[A, M]$ .

**Observación 2.9** Si  $r$  es una recta y  $P \in r$ , entonces  $r$  se puede dividir en dos **semirrectas**, que son los conjuntos  $\{X \in r \mid \gamma(X) > \gamma(P)\}$  y  $\{X \in r \mid \gamma(X) < \gamma(P)\}$ .

**Axioma P4** Para toda recta  $r \subset \mathbb{P}$  hay dos subconjuntos  $H^1$  y  $H^2$ , denominados **semiplanos** de  $r$ , que verifican:

- $H^1 \cup H^2 = \mathbb{P} - r$
- Si  $X, Y \in H^i$  entonces  $[X, Y] \subset H^i$
- Si  $X \in H^1$  y  $Y \in H^2$  entonces  $[X, Y] \cap r \neq \emptyset$ .

**Definición 2.15** Sean  $P, Q, R$  no alineados, entonces el triángulo  $\triangle[P, Q, R]$ , o  $\triangle PQR$  está formado por los segmentos  $[P, Q]$ ,  $[Q, R]$ ,  $[P, R]$ , llamados **lados**, y los vértices  $P, Q, R$ .

**Teorema 2.16 [Axioma de Pasch]** Dado un triángulo  $\triangle PQR$  y una recta  $r$ ; si  $r$  corta a  $[P, Q]$ , entonces o corta a  $[P, R]$  o a  $[Q, R]$ .

**Definición 2.17 = 1.5** Una **isometría** en  $\mathbb{P}$  es

una biyección  $g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  que cumple que  $d(g(X), g(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{P}$ .

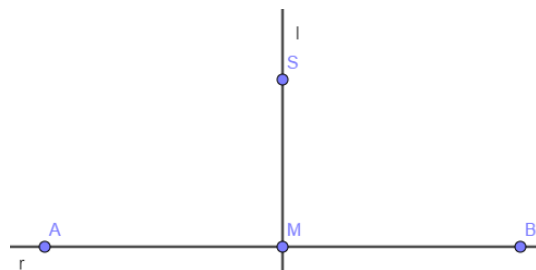
**Teorema 2.18** Si  $A, B \in \mathbb{P}$  y  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  entonces  $g([A, B]) = [g(A), g(B)]$  y  $g(r_{AB}) = r_{g(A)g(B)}$

**Axioma P5** Si  $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$  y  $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$  son dos pares de puntos que cumplen  $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$  entonces existe  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  tal que  $g(A_i) = B_i$ . Se dice que esos pares de puntos son **congruentes**.

**Axioma P6** Para toda recta  $r$  existe una isometría  $\sigma$  llamada **reflexión** tal que

- $\sigma(X) = X \iff X \in r$
- $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$

**Definición 2.23 / Teorema 2.25 / Corolario 2.30** Una recta  $l$  es **ortogonal** a  $r$  si para todo  $S \in l$  y para todo par de puntos  $A, B$  que cumple que  $M = \text{medio}[A, B]$ , de modo que  $l \cap r = M$ , entonces se da que  $d(A, S) = d(S, B)$ . Se denota  $l \perp_M r$ . En estas condiciones,  $l = \{X \in \mathbb{P} \mid d(S, A) = d(S, B)\}$ , se denomina **mediatriz** de  $[A, B]$ .



**Lema 2.21** Si  $\sigma_r$  entonces, para todo  $X$ ,  $\text{medio}[X, \sigma_r(X)] \in r$ .

**Observación 2.24** Si  $l \perp r$  y  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  entonces  $g(l) \perp g(r)$ .

⚠ **Teorema 2.26** Si  $l, r \subset \mathbb{P}$  cortan en  $M$  y  $\sigma_l, \sigma_r$  son dos reflexiones de  $l$  y  $r$ , entonces se cumple que  $l \perp_M r \iff r \perp_M l \iff \sigma_r(l) = l \iff \sigma_l(r) = r$ .

⚠ **Teorema 2.27 / 2.29** Para toda recta  $r$  y todo punto  $S \in \mathbb{P} - r$ , existe una recta  $l$  ortogonal a  $r$ , que pasa por  $S$ . Si  $r$  es una recta, y  $M \in r$ , entonces existe  $l$  tal que  $l \perp_M r$ .

**Axioma P7** Para toda recta  $r$  y todo punto  $P$  existe sólo una recta **paralela** a  $r$  que pase por  $P$ .

**Teorema 2.31 / 2.33** Si  $a \perp l$  y  $b \perp l$  entonces  $a \parallel b$ . Sean  $a \parallel b$ . Entonces, para todo  $A \in a$ , la única recta  $l \perp_A a$  también es ortogonal a  $b$ .

**Teorema 2.32** Las rectas paralelas forman una relación de equivalencia.

- Reflexividad:  $a \parallel a$
- Simetría:  $a \parallel b \rightarrow b \parallel a$
- Transitividad  $a \parallel b$  y  $b \parallel c \rightarrow a \parallel c$

**Ejercicio 2.6** Sean  $A, B \in r$ ,  $A \neq B$ . Para todo  $t$ , existe un único  $P_t \in r$  que cumple  $d(P_t, A) = |t|$  y  $d(P_t, B) = |t - d(A, B)|$ . En definitiva, la posición de  $P_t$  está sólomente determinada por las distancias  $d(A, P_t)$  y  $d(P_t, B)$ .

### 3. Isometrías del plano

**Definición 3.1** Para una aplicación  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $P \in \mathcal{M}$  es un **punto fijo** de  $\phi$  si  $\phi(P) = P$ ; y  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$  es un **subconjunto invariante** de  $\phi$  si  $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ .

**Lema 3.2** Si  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  y  $A \neq B$  son dos puntos fijos de  $g$ , entonces todo  $X \in r_{AB}$  es punto fijo de  $g$ .

**Definición 3.3** Si  $g, g' \in \text{Isom}(\mathbb{P})$ ,  $g$  y  $g'$  son **conjugadas** si existe una isometría  $h$  tal que  $gh = hg' \iff g = hg'h^{-1}$ .

**Teorema 3.4** Un punto  $P$  es fijo de  $g$  sii  $h^{-1}(P)$  es un punto fijo de  $g'$ . Es decir

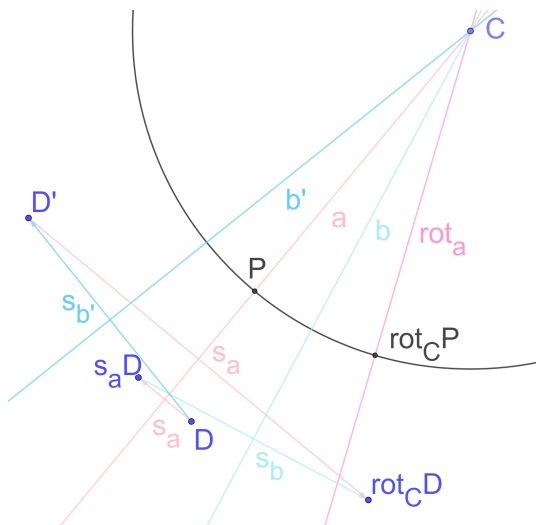
Demostración. Si  $h^{-1}(P)$  es punto fijo de  $g'$ , entonces  $g'(h^{-1}(P)) = h^{-1}(P)$ . Por tanto,  $g(P) = hg'h^{-1}(P) = hh^{-1}(P) = P$ , luego  $g(P) = P$ .

**Ejemplo 3.5** Una reflexión sobre  $r$  cumple que

- $\sigma_r \circ \sigma_r = \text{id}_{\mathbb{P}}$  y  $\sigma_r(X) = X \iff X \in r$  (**Axioma P6**)
- $\sigma_r(H^1) = H^2$  y viceversa.
- $X$  y  $\sigma_r(X)$  se encuentran en una recta ortogonal a  $r$ .

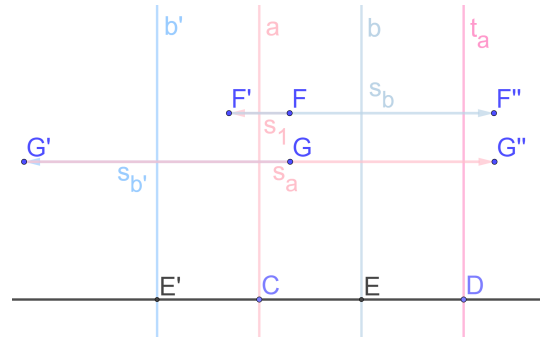
⚠ **Teorema 3.6** Sea  $g \in \text{Isom}(\mathbb{P})$  y sea  $r_{AB}$ . Si  $A, B$  son puntos fijos en  $g$ , entonces o bien  $g = \sigma_r$  o bien  $g = \text{id}_{\mathbb{P}}$ .

**Teorema 3.9** Llamamos  $\rho$  una **rotación** a una isometría que tiene un punto fijo  $C$ . Para toda recta  $a$  pasando por  $C$  existen dos rectas  $b, b'$  únicas tales que  $\rho = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$ .



**Ejercicio 3.1** Llamamos  $\tau$  una **traslación** a una

isometría que no tiene puntos fijos y deja una recta  $c$  invariante, es decir,  $\tau(c) = c$ . entonces para toda recta  $a \perp c$  existen dos rectas  $b, b' \perp c$  que cumplen  $\tau = \sigma_b \sigma_a = \sigma_a \sigma_{b'}$ . Además, si  $\tau(l) = l$ , entonces  $l \parallel c$ .



**Ejercicio 3.2** Si  $\mathcal{R}_P(\mathbb{P}) = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{P}) \mid g \text{ es rotación de centro } P\} \cup \{\text{id}_{\mathbb{P}}\}$  entonces

- Si  $a$  es una recta que pasa por  $P$ , entonces  $g^{-1} = \sigma_a g \sigma_a$ .
- $gh = hg$  para todo  $g, h \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$ .
- Para  $X \in \mathbb{P} - \{P\}$  y  $g(X) = h(X)$  entonces  $g = h$ .

**Ejercicio 3.3** Si  $h$  es una isometría

- Si  $g \in \mathcal{R}_P(\mathbb{P})$  entonces  $hgh^{-1} \in \mathcal{R}_{h(P)}(\mathbb{P})$
- Si  $r$  es una recta entonces  $h\sigma_r h^{-1} = \sigma_{h(r)}$

**Ejercicio 3.3** Si  $a, b$  son rectas en  $\mathbb{P}$

- $\sigma_a \sigma_b \sigma_a = \sigma_{a(b)}$
- $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a \iff a \perp b$

**Ejemplo 3.12** Sean  $a, b$  tales que  $a \perp_P b$ . Entonces la rotación es de  $180^\circ$  y se llama **reflexión central** si se denota como  $\sigma_P$ . Cumple las siguientes propiedades.

- $\sigma_P \sigma_P = \text{id}_{\mathbb{P}}$
- Para todo  $X$ ,  $\sigma_P(X)$  es el único punto que cumple  $P = \text{medio}[X, \sigma_P(X)]$ .
- $\sigma_P$  es independiente de la elección de rectas  $a \perp b$ .

**Teorema 3.13** Las rectas  $r$  y  $\sigma_P(r)$  son paralelas.

**Ejemplo 3.14** Una **reflexión con deslizamiento**  $\phi$  es una composición de una reflexión  $\sigma_c$  y una traslación  $\tau$ :  $\phi = \tau \sigma_c$ .  $\phi$  deja invariante sólo la recta  $c$ , y no tiene ningún punto invariante.

**Teorema 3.15** Una isometría solo puede pertenecer a una de las de la tabla, y es una combinación de un número par o impar de reflexiones  $\sigma$ :

	Con puntos fijos	Sin puntos fijos
par	$\rho$	$\tau$
impar	$\sigma$	$\phi$

**Teorema 3.16** Si  $g, g'$  son isometrías conjugadas, tienen la misma paridad.

## 4. Ángulos

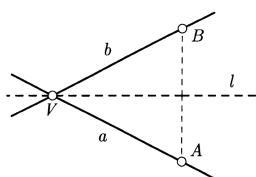
**Definición 4.1** Sean  $r, l$  dos rectas con un punto  $V$  en común. Sean  $\bar{r}$  y  $\bar{l}$  dos semirrectas determinadas por  $V$  en  $r$  y  $l$ . El par  $\{\bar{l}, \bar{r}\}$  es un **ángulo**.  $V$  es el vértice del ángulo y  $\bar{l}$  y  $\bar{r}$  son los lados del ángulo. El ángulo se designa por  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  o, si no hay lugar a confusión,  $\angle V$ . Así, por ejemplo, dado un triángulo  $\triangle PQR$ ,  $\angle P$  es el ángulo formado por  $P$  con  $[P, Q]$  y  $[P, R]$ .

**Observación 4.4** Si  $r = l$ , y  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  son las semirrectas determinadas por  $V$ , entonces, en estas circunstancias, el ángulo  $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$  se denomina **ángulo llano** y  $\angle\{\bar{r}_1, \bar{r}_1\}$  se denomina **ángulo nulo**.

**Definición 4.5** Un ángulo  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y un ángulo  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son **congruentes** si existe una isometría  $g$  tal que  $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ . Todos los ángulos que son congruentes forman una **clase de congruencia** de ángulos. Empleando la notación de vértices, la congruencia se denota como  $\angle A = \angle B$ .

**Observación 4.6/4.8** Si  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  tiene vértice  $V$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  tiene vértice  $V'$ , y  $g$  es una isometría tal que  $g(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ , entonces  $g(V) = V'$ . Asimismo, si existe una isometría  $h$  que hace  $h(V) = V'$ , entonces  $h(\{\bar{l}, \bar{r}\}) = \{\bar{l}', \bar{r}'\}$ .

**Ejemplo 4.9** Consideramos las rectas  $a \neq b$  que cortan en  $V$ , con sus respectivas semirrectas  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ . Consideramos  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$  y elegimos los puntos  $A \in \bar{a}_1, B \in \bar{b}_1$  a igual distancia,  $d(V, A) = d(V, B)$ . Existe una recta  $l \perp r_{AB}$  que pasa por  $V$  (**Teorema 2.25/2.29**, que denominamos **bisectriz**). La bisectriz  $l$  cumple que  $\sigma_l(A) = B$ ,  $\sigma_l(\bar{a}_1) = \bar{b}_1$  y viceversa. Además, si  $\bar{l}$  es la semirrecta que corta a  $[A, B]$ , entonces  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{l}\} = \angle\{\bar{b}_1, \bar{l}\}$ .

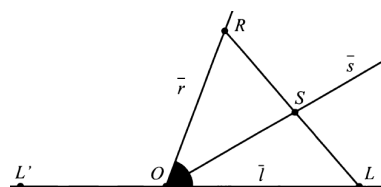


**Teorema 4.11** Sean  $a, b$  que cortan en  $V$ . El ángulo  $\angle\{\bar{a}_1, \bar{b}_1\}$  es congruente con  $\angle\{\bar{a}_2, \bar{b}_2\}$  y se denominan **ángulos opuestos por el vértice**.

**Teorema 4.13/Definición 4.23** Sean  $l \perp_V r$  y  $l' \perp_{V'} r'$ . Entonces  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son congruentes. En este caso, los ángulos  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}', \bar{r}'\}$  son **ángulos rectos**. Un ángulo es **agudo** si es menor que un recto, y **obtuso** si es mayor.

**Definición 4.15** Si  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  no es ni nulo ni llano, y  $H_l^1$  es el semiplano que contiene a  $\bar{r}$ , y  $H_r^1$  es el semiplano que contiene a  $\bar{l}$ , entonces el ángulo  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  y  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  viene determinado como el conjunto  $H_l^1 \cap H_r^1$ .

**Teorema 4.18 [De la barra transversal]** Sea  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  con vértice  $V$  y sean  $L \in \bar{l}, R \in \bar{r}$ . Una semirrecta  $\bar{s}, V \in \bar{s}$  está dentro de  $\angle\{\bar{l}, \bar{r}\}$  si corta a  $[L, R] - \{L, R\}$ .



**Definición 4.19 (Comparación de ángulos)** Dados  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , se dice que  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  es menor que  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ ,  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , si existe una isometría  $g$  tal que  $g(\bar{a}) = \bar{c}$  y que  $g(\bar{b})$  está en el interior de  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ .

**Teorema 4.21** Si existen 4 ángulos tales que  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{a}', \bar{b}'\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\} = \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$ , y  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , entonces  $\angle\{\bar{a}', \bar{b}'\} < \angle\{\bar{c}', \bar{d}'\}$ .

**Teorema 4.22** Dados  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , entonces  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} < \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ ,  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} = \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ , o  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\} > \angle\{\bar{c}, \bar{d}\}$ .

**Definición 4.25** Sea  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$  con vértice  $V$  y  $\bar{b}$  una semirrecta en el interior de  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ . Entonces  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$  es la **suma** de  $\angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$  y  $\angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ , o  $\angle\{\bar{a}, \bar{c}\} = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\} + \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ .

**Definición 4.26** Para tres ángulos  $\angle U, \angle V, \angle W$ , decimos que  $\angle V = \angle U + \angle W$  si existe una descomposición  $\angle V = \angle\{\bar{a}, \bar{c}\}$ ,  $\angle U = \angle\{\bar{a}, \bar{b}\}$ ,  $\angle W = \angle\{\bar{b}, \bar{c}\}$ .

**Definición 4.28** Dado  $\triangle PQR$ , el lado  $[R, Q]$  y el

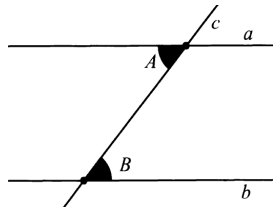
ángulo  $\angle P$  son **opuestos**.

gruentes.

**Definición 4.29 / Teorema 4.30** Un triángulo **isósceles** tiene dos lados congruentes. Si  $\triangle PQR$  es isósceles y  $[P, Q]$  es congruente con  $[P, R]$ , existe una reflexión  $\sigma$  tal que  $\sigma(P) = P, \sigma(Q) = R, \sigma(R) = Q$ , la bisectriz de  $\angle P$ . Esa isometría que deja invariante el triángulo se denomina **simetría**.

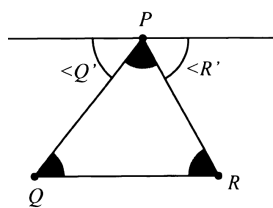
**Definición 4.34 / Teorema 4.35** Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes. En este caso hay una rotación  $\rho$  tal que  $\rho(P) = Q, \rho(Q) = R, \rho(R) = P$ .

**Definición 4.39 / Teorema 4.40** Sean  $a \parallel b$  y  $c$  una recta que corta a  $a$  en  $A$  y a  $b$  en  $B$ . El par de ángulos  $\angle A, \angle B$  de la figura son ángulos **alternos-internos**. Los dos ángulos son congruentes.



**Teorema 4.41** La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.

*Demostración.* Si hacemos una recta  $p$  paralela a  $[Q, R]$  tenemos que  $(Q, Q')$  y  $(R, R')$  son pares de ángulos internos y la suma  $\angle Q' + \angle P' + \angle R' = \angle Q + \angle P + \angle R$  es un ángulo llano.



**Ejercicio 4.9** Sea  $\rho$  una rotación de centro  $C$  y sea  $t = \triangle\{C, P, \rho(P)\}$ . Entonces la clase de congruencia del ángulo  $\angle_t C$  se denomina ángulo de rotación  $\angle \rho$ .

**Ejercicio 4.11** Un ángulo orientado es un ángulo donde se fija un orden en sus lados. Dos ángulos orientados  $\angle(\vec{r}, \vec{l})$  y  $\angle(\vec{r}', \vec{l}')$  son congruentes si existe una isometría donde  $g(\vec{r}) = \vec{r}'$  y  $g(\vec{l}) = \vec{l}'$  y se conserva la orientación del plano. Así  $\angle(\vec{r}, \vec{l})$  la clase de congruencia con todos los ángulos con-



## 5. Teorema de Tales

**Definición 5.0** Un **cuadrilátero** es una cuaterna ordenada de puntos [vértices] de  $\mathbb{P}$ ,  $(P, Q, R, S)$  formada por los segmentos  $[P, Q], [Q, R], [R, S], [S, P]$  [lados] si dos cualesquiera segmentos son disjuntos o tienen un extremo en común. Dos vértices extremos del mismo lado son adyacentes y, si no, son opuestos.

**Definición 5.1** Un cuadrilátero  $\square PABC$  es un **paralelogramo** si  $\text{medio}[P, B] = \text{medio}[A, C] = M$ , donde los segmentos  $[P, B]$  y  $[A, C]$  son las diagonales, y  $M$  es el centro.

**Observación 5.2** Sea  $\square PABC$  con centro  $M$ . Por las propiedades de las reflexiones centrales, se tiene que  $\sigma_M(P) = B$  y  $\sigma_M(A) = C$  [y viceversa]. Además, por tales propiedades, se tiene que  $r_{PA} \parallel r_{BC}$  y  $r_{PC} \parallel r_{AB}$ ; y  $d(P, A) = d(B, C)$  y  $d(P, C) = d(A, B)$ .

**Observación 5.3** Si existen tres puntos  $P, A, C$  no alineados, se puede construir un paralelogramo de varias maneras. Una forma es aplicar el axioma de las paralelas y proyectar  $r_{PA}$  en  $C$ , y  $r_{PC}$  en  $A$ . Otra forma es obtener  $M = \text{medio}[C, A]$ , crear la recta  $r_{PM}$  y proyectar el punto  $B$  como el que  $PM = d(P, M) = d(M, B) = MB$ .

⊕ **Teorema 5.5 [Tales]** Sea  $\triangle PAB$  y sean  $A' \in [P, A]$ ,  $B' \in [P, B]$  dos puntos tales que  $r_{AB} \parallel r_{A'B'}$ . En estas condiciones se tiene que  $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$ .



**Demostración.** Vamos a basar la demostración en la figura de arriba. Diseñamos el paralelogramo  $\square PABC$  y dividimos el lado  $[P, A]$  en  $n$  segmentos con puntos de división  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , de modo que  $d(A_i, A_{i+1}) = \frac{d(P, A)}{n}$ . El mismo proceso se realiza con el lado  $[P, C]$ . Además, introducimos las rectas  $a_k \parallel r_{PC}$  y  $c_k \parallel r_{PA}$ , de modo que el punto  $P_{kl}$  es la intersección de  $a_k$  con  $c_l$ . Vemos

que  $B_i = P_{ii}$ . También observamos que existen los paralelogramos  $\square A_k A_{k+1} P_{k+1, l} P_{k, l}$  y  $\square C_l C_{l+1} P_{k, l+1} P_{k, l}$ , de modo que  $P_{kl} P_{k+1, l} = \frac{PA}{n}$  y  $P_{kl} P_{k, l+1} = \frac{PC}{n}$ . Ahora consideramos  $B_k$ . Sabemos que  $\sigma_{B_k}(r) \parallel r$ ,  $\sigma_{B_k}(c_k) = c_k$  y  $\sigma_{B_k}(P_{k-1, k}) = P_{k+1, k}$ . También, como  $a_{k-1} \parallel a_{k+1}$ ,  $\sigma_{B_k}(a_{k-1}) = a_{k+1}$ , y por el mismo criterio,  $\sigma_{B_k}(c_{k-1}) = c_{k+1}$ . Con esto demostramos que

$$\sigma_{B_k}(B_{k-1}) = \sigma_{B_k}(P_{k-1, k-1}) = P_{k+1, k+1} = B_{k+1}$$

Por tanto, los puntos  $B_{k-1}, B_k, B_{k+1}$  están alineados y  $B_{k-1} B_k = B_k B_{k+1}$ . Por tanto,  $B_k B_{k+1} = \frac{PB}{n}$ . Es decir, hemos demostrado que

$$P_{kl} P_{k+1, l} = \frac{PA}{n} \quad P_{kl} P_{k, l+1} = \frac{PC}{n} \quad P_{kl} P_{k+1, l+1} = \frac{PB}{n}$$

Si reordenamos, tenemos que

$$\frac{PA_k}{PA} = \frac{P_{0,0} P_{k,0}}{PA} = \frac{k}{n} = \frac{P_{0,0} P_{k,k}}{PB} = \frac{PB_k}{PB}$$

Y con esto demostramos el teorema para los puntos  $k$ . Si tenemos  $A'$  y  $B'$  en la figura tales que  $A' \in [A_k, A_{k+1}]$ , de modo que  $a' = r_{A'B'}$  está entre  $a_k$  y  $a_{k+1}$ , y es paralelo a estas, haciendo que  $B' \in [B_k, B_{k+1}]$ . Por ser  $A' \in [A_k, A_{k+1}]$  entonces  $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k + \frac{1}{n}}{PA}$  y, como  $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$ , entonces  $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k + \frac{1}{n}}{PB}$ . Dado que  $B' \in [B_k, B_{k+1}]$  entonces

$$\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$$

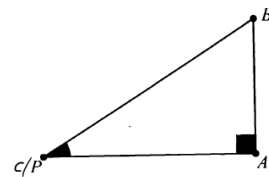
Si nos fijamos en los elementos de azul, vemos que  $n$  puede hacerse tan pequeño como queramos, de modo que, en el límite

$$\frac{PB'}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} \iff \frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA}$$

**Corolario 5.6** En base al teorema de Tales, se tiene que

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{A'B'}{AB}$$

**Definición 5.7** Dado un triángulo rectángulo  $\triangle PAB$  con  $\angle A$  recto, entonces la **hipotenusa** es el lado opuesto a  $\angle A$ ,  $[P, B]$ . Los lados adyacentes,  $[P, A]$ ,  $[B, A]$ , son los **catetos**.

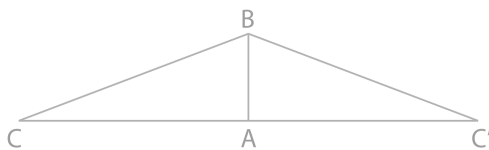


**Definición 5.8** Sea el triángulo rectángulo  $\triangle PAB$  con  $\angle A$  recto, entonces se definen las relaciones

- seno:  $\text{sen} \angle P = \frac{BA}{PB}$
- coseno:  $\text{cos} \angle P = \frac{PA}{PB}$
- tangente:  $\text{tan} \angle P = \frac{BA}{PA}$
- cotangente:  $\text{cot} \angle P = \frac{PA}{BA}$

**Teorema 5.10** Las razones trigonométricas para  $\angle P$  no dependen del triángulo  $\triangle PAB$ , sólo de la clase de congruencia de  $\angle P$ .

**Teorema 5.12** Dado un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con  $\angle A$  recto, la medida de los catetos,  $AB, AC$ , es menor que la de la hipotenusa  $BC$ .



Demostración. Con la construcción anterior, vemos que los puntos  $B, C, C'$  no están alineados, pues  $C \in r_{AC}$  y  $r_{AB} \perp r_{AC}$ . Por la desigualdad triangular tenemos que  $2AC = CC' < BC + BC' = 2BC$ .

**Definición 5.13** La **medida de un ángulo agudo**  $\angle P$  es el número real:

$$\angle P = \arccos(\cos \angle P)$$

**Teorema 5.14 / 5.19** Si  $\angle P = \angle Q$  entonces  $\angle P = \angle Q$ , sean  $\angle P$  y  $\angle Q$  agudos y obtusos.

**Definición 5.15** Dado un ángulo  $\angle \bar{a}, \bar{b}_1 = \angle V$ , un **ángulo suplementario**  $\angle \bar{a}, \bar{b}_2$  es aquel donde  $\bar{b}_1$  y  $\bar{b}_2$  son las dos semirrectas de  $b$  en  $V$ , y  $\angle V$  y  $\angle \bar{V}$  comparten  $\bar{a}$ . La suma de  $\angle V$  y  $\angle \bar{V}$  es un ángulo llano.

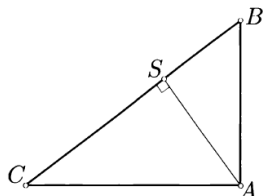
**Teorema 5.17** Si dos ángulos son congruentes, sus suplementarios lo son.

**Definición 5.18** Para un ángulo obtuso  $\angle P$  se tiene  $\text{sen} \angle P = \text{sen} \angle \bar{P}$  y  $\text{cos} \angle P = -\text{cos} \angle \bar{P}$

## 6. Teorema de Pitágoras

**Teorema 6.1 [Pitágoras]** Para todo triángulo rectángulo  $\angle ABC$  con  $\angle A$  recto, se tiene que

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$



☺ Demostración. Consideramos el punto  $S \in r_{BC}$  tal que  $r_{SA} \perp r_{CB}$ . Pese a que es evidente, hay que demostrar que  $S \in [B, C]$ . Observamos que  $SC < CA < BC$ , la primera igualdad por  $\cos \angle C = \frac{SC}{CA} < 1 \iff SC < CA$ . Del mismo modo,  $BS < BC$ . Entonces,  $S \in [B, C]$ . Ahora observamos que

$$\cos \angle C = \frac{CA}{CB} = \frac{CS}{CB}$$

Por otra parte, también vemos que

$$\cos \angle B = \frac{BS}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

De ambas expresiones tenemos que (1)  $CA^2 = CB \cdot CS$  y (2)  $AB^2 = BS \cdot BC$ . Así,  $CB \cdot CS + CB \cdot BS = CB(CS + BS) = CB^2 = CA^2 + BA^2$ .

**Corolario 6.3** Sea  $\angle C$ , entonces

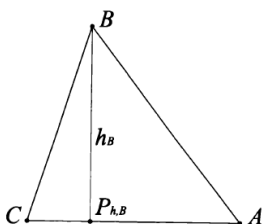
$$\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1$$

Demostración. Si tenemos que  $BC = 1$ , entonces  $\cos \angle C = \frac{CA}{CB} = CA$  y  $\sin \angle C = \frac{BA}{BC} = BA$ . Aplicando el teorema de Pitágoras, entonces  $\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = BA^2 + CA^2 = BC^2 = 1$ .

**Teorema 6.4** Dado  $x \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ , existe un ángulo  $\angle V$  tal que  $\angle V = x$ .

**Teorema 6.5**  $\angle P = \angle Q$  sii  $\angle P = \angle Q$

**Definición 6.6** Sea  $\triangle ABC$  y  $h_B \perp r_{CA}$  y que pasa por  $B$ , y sea el punto  $P_{h,b}$  el punto de corte de  $h_B$  y  $r_{CA}$ . Entonces,  $P_{h,b}$  es el **pie de la altura de B**, y  $[P_{h,b}, B]$  es la **altura** de  $\triangle ABC$  desde  $B$ .



**Teorema 6.7** En el triángulo de la **Definición 6.6**, si  $\angle A$  y  $\angle C$  son agudos, entonces  $P_{h,b} \in [C, A]$ . Si  $\angle A$  o  $\angle C$  es obtuso, entonces  $P_{h,b} \notin [C, A]$ .

**Teorema 6.8 [Fórmula del coseno]** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo, entonces se cumple que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

Demostración. Basándonos en la figura de la **Definición 6.6**, y por el **Teorema 6.7** [en el caso de  $\triangle$  acutángulo], entonces se forman dos triángulos rectángulos  $\triangle P_{h,b}BC$  y  $\triangle P_{h,b}BA$  donde se verifica que  $CA = CP_{h,b} + P_{h,b}A$ . Por el **Teorema de Pitágoras** tenemos que

$$AB^2 = P_{h,b}A^2 + P_{h,b}B^2 \quad BC^2 = BP_{h,b}^2 + P_{h,b}C^2$$

Si sustituimos una igualdad en otra tenemos que

$$BC^2 = CP_{h,b}^2 + AB^2 - P_{h,b}A^2$$

Como  $CA = CP_{h,b} + P_{h,b}A$  entonces

$$BC^2 = (CA - P_{h,b}A)^2 + AB^2 - P_{h,b}A^2 =$$

$$CA^2 + P_{h,b}A^2 - 2 \cdot CA \cdot P_{h,b}A + AB^2 - P_{h,b}A^2$$

Si quitamos las partes en azul, y consideramos que  $P_{h,b}A = AB \cos \angle A$ , entonces queda el teorema demostrado.

**Corolario 6.9** Dado un triángulo donde  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  entonces es un triángulo rectángulo, con  $\angle A$  recto. Demostración. Si aplicamos el **Teorema del coseno**, entonces, el término  $2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A = 0$ , y como  $AB \neq 0, AC \neq 0$ , entonces  $\cos \angle A = 0 \iff \angle A$  es recto (**Teorema 6.5**).

**Teorema 6.10 [Fórmula de los senos]** Sea  $\triangle ABC$ , entonces se verifica

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A}$$

Demostración. Seguimos con la figura de la **Definición 6.6**. Vemos que  $BP_{h,b} = BC \sin \angle C = BA \sin \angle A$ . Si el triángulo es obtusángulo también se cumple porque los senos se mantienen. Simplemente, igualando  $BP_{h,b}$  tenemos que  $\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{BA}{\sin \angle C}$ . El resto de igualdades se consiguen con las demás alturas.

**Teorema 6.11** Para  $\triangle ABC$ ...

- Si se conoce  $\angle A$  y  $AB, AC$  (adyacentes), entonces se pueden hallar  $\angle B, \angle C, BC$ .

- Si se conocen  $AB, AC, BC$  entonces se pueden hallar  $\angle A, \angle B, \angle C$ .
- Si se conocen  $AB, \angle A, \angle B$  entonces se pueden hallar  $BC, AC, \angle C$ .

**Corolario 6.12 [Criterios de congruencia de  $\triangle$ ]**

Dados  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  entonces

- $\angle A = \angle A', AB = A'B', AC = A'C'$  [LAL]
- $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$  [LLL]
- $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', AB = A'B'$  [ALA]

Entonces existe una isometría  $\eta$  tal que  $\eta(A) = A'$ , etc. y  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ . Hay que considerar que para emplear isometrías pares hay que definir la orientación de los triángulos.

**Corolario 6.14** Sean  $\angle P$  y  $\angle Q$  no nulos, y sumables. Entonces

$$\sin(\angle P + \angle Q) = \sin(\angle P) \cos(\angle Q) + \sin(\angle Q) \cos(\angle P)$$

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\angle P) \cos(\angle Q) - \sin(\angle P) \sin(\angle Q)$$

**Corolario 6.15** Sean  $\angle P$  y  $\angle Q$  no nulos, y sumables. Entonces

$$\angle(\angle P + \angle Q) = \angle P + \angle Q$$

Demostración. Nota: en el punto final se demuestra que

$$\cos(\angle P + \angle Q) = \cos(\angle P + \angle Q)$$

Sabiendo que  $\angle P = \arccos(\cos \angle P)$  entonces  $\arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \angle(\angle P + \angle Q)$  y, por tanto,

$$\angle(\angle P + \angle Q) = \arccos(\cos(\angle P + \angle Q)) = \angle P + \angle Q$$

**Corolario 6.16** Si  $\angle V$  es un ángulo y  $n$  es entero, entonces existe  $n\angle V$  y  $\angle(n\angle V) = n\angle V$ .

**Ejercicio 6.10** El centro de Fermat,  $F$  es aquel que minimiza la distancia a los vértices del triángulo. Este sucede cuando el ángulo entre dos vértices cualesquiera del triángulo y  $F$  es  $2\pi/3$ .

## 7. Semejanzas

**Definición 7.1** Sea  $C$  un punto de  $\mathbb{P}$  y  $k > 0$ . Una **homotecia**  $\eta_{C,k} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  es una aplicación tal que a cada punto  $P \in r_{CP}$  le hace corresponder un punto  $\eta_{C,k}(P) \in r_{CP}$  tal que  $C\eta_{C,k}(P) = kCP$ .  $k$  es la **razón de homotecia**.

**Observación 7.2** Sea  $X \in \mathbb{P}$ ,  $\eta_{C,k}$  y  $\gamma$  una aplicación del **Axioma P3**. Entonces se cumple que  $\gamma(\eta_{C,k}(X)) = \gamma(C) + k(\gamma(X) - \gamma(C))$

**Observación 7.3** Toda homotecia es una biyección que tiene

- Identidad:  $\eta_{C,1}$
- Inversa:  $\eta_{C,1/k}$

**Teorema 7.4/Corolario 7.5** Sean  $A, B$  y  $\eta_{C,k}$ , entonces  $\eta_{C,k}(A)\eta_{C,k}(B) = kAB$ . Además,  $\eta_{C,k}[A, B] = [\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$ .

**Teorema 7.7** Toda homotecia envía un ángulo a un ángulo congruente, y toda recta a una paralela.

**Definición 7.8** Una **semejanza** es una combinación de homotecias e isometrías.

**Corolario 7.10/7.11 / Teorema 7.19** Toda semejanza envía rectas a rectas, segmentos a segmentos, y conserva los ángulos. Toda biyección  $\psi$  que cumpla estas condiciones es una semejanza.

**Teorema 7.12 / Corolario 7.13** Toda semejanza  $\delta$  cumple que  $\delta(A)\delta(B) = kAB$ , donde  $k$  es la razón de semejanza. Dados  $A, B, C, D$ , entonces se cumple que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\delta(A)\delta(B)}{\delta(C)\delta(D)}$$

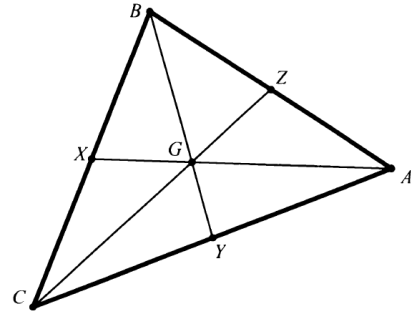
**Teorema 7.15** Si  $\angle A = \angle B$ , entonces existe  $\delta$  tal que  $\delta(\angle A) = \angle B$ .

**Teorema 7.18** Sean  $\triangle ABC$  y  $\triangle AB'C'$  que comparten  $\angle A$  y  $A, B, B'$  están alineados, así como  $A, C, C'$ . Entonces si existe  $k$  tal que  $AB' = kAB$  y  $AC' = kAC$  entonces  $\triangle ABC$  y  $\triangle AB'C'$  son semejantes,  $r_{BC} \parallel r_{B'C'}$  y  $B'C' = kBC$ .

**Definición 7.20** Se llama **mediana** al segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto de un triángulo. Es decir, da-

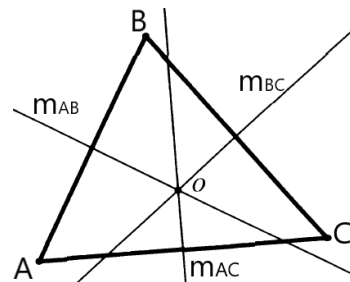
do  $\triangle ABC$ , las medianas son  $[A, \text{medio}[B, C]]$ ,  $[B, \text{medio}[A, C]]$  y  $[C, \text{medio}[A, B]]$ .

**Teorema 7.21** Las tres medianas de un triángulo cortan en un punto  $G$ , llamado **baricentro**.



☺ **Demostración.** Definimos  $X = \text{medio}[B, C]$ ,  $Y = \text{medio}[A, C]$ ,  $Z = \text{medio}[A, B]$  y sea  $G = [B, Y] \cap [C, Z]$ . El punto existe porque, si definimos la recta  $r_{BY}$ , entonces  $C$  está en uno de los semiplanos de la recta (pongamos,  $H^2$ ) y, si  $A \in H^1$ , entonces  $Z \in H^1$ ,  $C$  y  $Z$  están en distintos semiplanos de  $r_{BY}$ . Si tomamos  $\triangle ABC$  y  $\triangle AZY$  entonces, por ser  $Y, Z$  puntos medios, entonces, por el **Teorema 7.18**,  $r_{YZ} \parallel r_{BC}$  y  $BC = 2YZ$ . Además, por ser los ángulos entre  $[C, Z]$  y  $[B, Y]$  alternos internos, los triángulos  $\triangle GYZ$  y  $\triangle GBC$  son semejantes de razón 2. Por tanto,  $GB = 2GY$  y  $GC = 2GZ$ . Si repetimos esto con  $[A, X]$  y  $[B, Y]$ , entonces existe un punto  $G'$  tal que  $G'A = 2G'X$  y  $G'B = 2G'Y$ . Como  $\frac{G'B}{G'Y} = \frac{GB}{GY}$ , entonces  $G = G'$  y las tres medianas cortan en  $G$ .

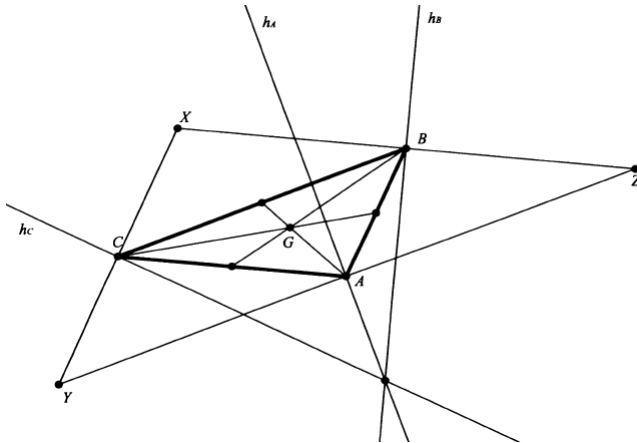
**Teorema 7.23** Las tres mediatrices de un triángulo cortan en un punto, el **circuncentro**.



☺ **Demostración.** Si  $\triangle ABC$  es un triángulo, las mediatrices  $m_{AB}$  y  $m_{BC}$  cortan en un punto  $O$ . Si no cortaran, entonces  $m_{AB} \parallel m_{BC}$ , y como  $r_{AB} \perp m_{AB}$  y  $m_{BC} \perp r_{BC}$  entonces  $r_{AB} \parallel r_{BC}$ , lo cual es absurdo. Por ser  $m_{BC}$  mediatriz, entonces  $OB = OC$ , y  $OA = OB$  para  $m_{AB}$ . Entonces  $OA = OC$  y por tanto  $O \in m_{AC}$ , luego  $O$  corta las tres mediatrices.

**Teorema 7.24** Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro**  $X, Y, Z$  están alineados se cumple que

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1$$



☺ Demostración. Sea  $\triangle ABC$  el triángulo con baricentro  $G$  y sean  $h_A, h_B, h_C$  sus alturas. Consideramos la semejanza  $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$ , de modo que  $\triangle ABC$  se transforma en  $\triangle XYZ$ , con  $\tau(A) = X, \tau(B) = Y, \tau(C) = Z$ . Por las propiedades de las semejanzas,  $r_{BC} \parallel r_{YZ}, r_{AC} \parallel r_{XZ}, r_{AB} \parallel r_{XY}$ , y se cumple que  $A = \text{medio}[Y, Z], B = \text{medio}[X, Z], C = \text{medio}[X, Y]$ . Por tanto, ahora  $h_A = m_{YZ}, h_B = m_{XZ}, h_C = m_{XY}$  y, por tanto, el ortocentro de  $\triangle ABC$  es el circuncentro de  $\triangle XYZ$ .

**Teorema 7.25 [Recta de Euler]** Dado un triángulo, su baricentro  $G$ , ortocentro  $O$  y circuncentro  $H$  pertenecen a una misma recta (si el triángulo no es equilátero). Además,  $OH = 2OG$ .

☺ Demostración. Si partimos del triángulo con baricentro  $G$  y aplicamos la semejanza  $\tau = \sigma_G \eta_{G,2}$ , como en el **Teorema 7.24**, entonces se cumple que  $\tau(O) = H$ . Por ser  $\sigma_G$ , entonces  $H \in r_{OG}$  y por ser  $\eta_{G,2}$ , entonces  $OH = 2OG$ .

**Corolario 7.26** El **incentro** del triángulo es el punto donde se cortan las tres bisectrices del triángulo.

**Ejercicio 7.7 [Teorema de Ceva]** En  $\triangle ABC$  sean  $X \in [B, C], Y \in [C, A], Z \in [A, B]$ . Si  $X, Y, Z$  no coinciden con ninguno de los vértices del triángulo, entonces los segmentos  $[A, X], [B, Y], [C, Z]$  se cortan en un punto sii

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1$$

**Ejercicio 7.8 [Teorema de Menelao]** Sea  $\triangle ABC$  y sean  $X \in r_{BC}, Y \in r_{CA}, Z \in r_{AB}$ . Entonces, sii



## 8. Circunferencias

**Definición 8.1** Sea  $O \in \mathbb{P}$  y  $\rho > 0$ . Entonces una **circunferencia**  $\mathcal{C}$  es el conjunto de puntos a una distancia  $\rho$  de  $O$ .  $O$  es el **centro** y  $\rho$  el **radio**.

**Teorema 8.3** Una circunferencia corta a una recta en a lo sumo dos puntos.

**Definición 8.4** Dada  $\mathcal{C}$  una recta que corta en dos puntos se llama **secante**, que corta en un punto se llama **tangente** y que no corta se llama **exterior**. Si para un punto  $X \in \mathbb{P}$ ,  $d(O, X) > d(O, \rho)$  el punto es exterior, y si  $d(O, X) < d(O, \rho)$  entonces es interior.

**Teorema 8.5** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$ . Si  $t$  es tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P_t$ , entonces  $t \perp r_{O, P_t}$ .

**Definición 8.6** Sean  $P, P'$  dos puntos tales que  $O = \text{medio}[P, P']$ . Entonces, si los puntos están en  $\mathcal{C}$ , se denominan **diametralmente opuestos en  $\mathcal{C}$** , y  $[P, P']$  es un diámetro de  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 8.7/Definición 8.9** Dados tres puntos no alineados, entonces existe una única circunferencia que pase por estos puntos, la **circunferencia circunscrita**.

**Corolario 8.8** Dos circunferencias tienen a lo sumo dos puntos en común. Si sólo tienen un punto en común se llaman **tangentes**.

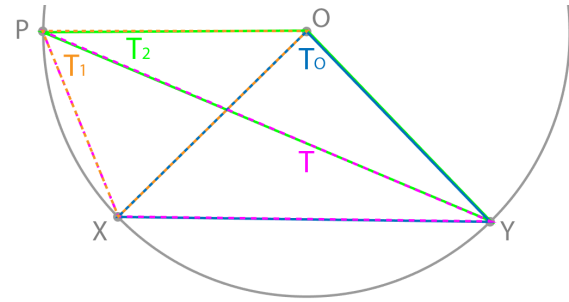
**Teorema 8.10** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  con centros  $O, O'$  y radios  $\rho, \rho'$  respectivamente. Si las dos circunferencias cortan en dos puntos, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$OO' < \rho + \rho' \quad \rho < OO' + \rho' \quad \rho' < OO' + \rho$$

Y si las circunferencias son tangentes, entonces se verifica una de estas igualdades:

$$OO' = \rho + \rho' \quad \rho = OO' + \rho' \quad \rho' = OO' + \rho$$

**Teorema 8.11 [Arco capaz]** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$  y sean  $\triangle PXY$  y  $\triangle P'XY$  dos triángulos con vértices en  $\mathcal{C}$  y  $P, P', O$  están en el mismo semiplano determinado por  $r_{XY}$ . Si  $X$  e  $Y$  no son diametralmente opuestos, entonces  $\angle P = \angle P' = \frac{1}{2}\angle O$ . Todo este arco, así como el arco surgido de la reflexión  $\sigma_{r_{XY}}$  cumplen  $\angle P = \angle P'$ , y se denomina **arco capaz**.



**Demostración.** Sea  $\mathcal{T} = \triangle PXY$  y  $\mathcal{T}_O = \triangle OXY$ . Construimos también  $\mathcal{T}_1 = \triangle POX$  y  $\mathcal{T}_2 = \triangle POY$ , isósceles, de modo que  $\angle_{\mathcal{T}_1} X = \angle_{\mathcal{T}_1} P$  y  $\angle_{\mathcal{T}_2} Y = \angle_{\mathcal{T}_2} P$ . Como la suma de los ángulos de  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  es llano, entonces

$$2\angle_{\mathcal{T}_1} P = \pi - \angle_{\mathcal{T}_1} O \quad 2\angle_{\mathcal{T}_2} P = \pi - \angle_{\mathcal{T}_2} O$$

Vamos a suponer ahora que  $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_1} P - \angle_{\mathcal{T}_2} P$ . Para  $2\angle_{\mathcal{T}} P$  entonces se cumple que

$$2\angle_{\mathcal{T}} P = 2\angle_{\mathcal{T}_1} P - 2\angle_{\mathcal{T}_2} P = \angle_{\mathcal{T}_2} O - \angle_{\mathcal{T}_1} O = \angle_{\mathcal{T}_O} O = \angle O$$

La misma demostración sucede para  $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_1} P + \angle_{\mathcal{T}_2} P$  y  $\angle_{\mathcal{T}} P = \angle_{\mathcal{T}_2} P - \angle_{\mathcal{T}_1} P$

**Ejercicio 8.2** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$  y sean  $\triangle PXY$  y  $\triangle P'XY$  dos triángulos con vértices en  $\mathcal{C}$  y  $P, P', O$  están en distinto semiplano determinado por  $r_{XY}$ . Entonces  $\angle P = \pi - \angle P'$

**Definición 8.13** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$  y radio  $\rho$ . Se denomina **inversión** del plano con respecto a  $\mathcal{C}$  a una aplicación  $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbb{P} - \{O\} \rightarrow \mathbb{P} - \{O\}$  que a cada punto  $P$  le hace corresponder otro punto  $\iota_{\mathcal{C}}(P)$  tal que  $O, P, \iota_{\mathcal{C}}(P)$  están alineados,  $O \notin [P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$  y se verifica que

$$OP \cdot O_{\iota_{\mathcal{C}}}(P) = \rho^2$$

Esta aplicación verifica que

- $\iota_{\mathcal{C}} \circ \iota_{\mathcal{C}}(P) = P$  para todo  $P \in \mathbb{P} - O$ .
- Para todo  $P \in \mathcal{C}$  se cumple  $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$ . A todo punto fuera del círculo,  $\iota_{\mathcal{C}}$  lo manda dentro, y viceversa.
- Si  $r$  pasa por  $O$ ,  $\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$ .



**Teorema 8.16/8.17** Sea  $\mathcal{C}$  y  $P \in \mathbb{P}$ . Sean  $a, b$  rectas que cortan a  $P$  y secantes a  $\mathcal{C}$ . Sean  $A_1$  y  $A_2$  los

puntos de corte de  $a$  con  $\mathcal{C}$  y  $B_1, B_2$  los de  $b$  con  $\mathcal{C}$ . Entonces se verifica que

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$

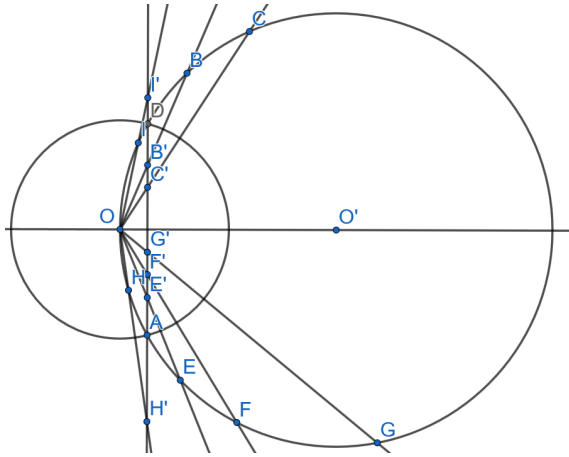
Si  $a$  es tangente, entonces

$$PA^2 = PB_1 \cdot PB_2$$

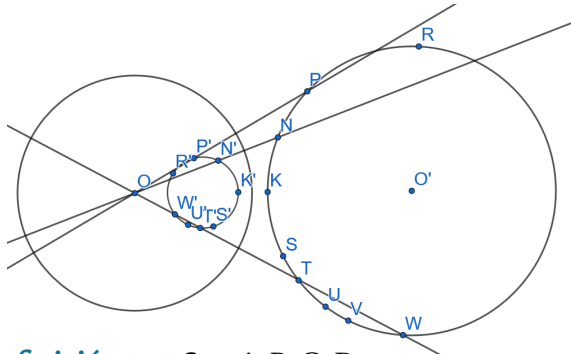
Ese producto, por tanto, es invariante de la recta, y se denomina **potencia de  $P$  con respecto a  $\mathcal{C}$** .

**Teorema 8.18** Sea  $\mathcal{C}$  de radio  $\rho$  y centro  $O$ .

- Sea  $\mathcal{C}'$  una circunferencia de centro  $O'$  que pasa por  $O$ , entonces  $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$  es una recta ortogonal a  $r_{O,O'}$ . Sea  $r$  que no pasa por  $O$ , entonces  $\iota_{\mathcal{C}}(r) = \mathcal{C}' - \{O\}$ , donde  $\mathcal{C}'$  es una circunferencia que pasa por  $O$ .



- Si  $\mathcal{C}'$  no pasa por  $O$  entonces  $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$  es otra circunferencia que no pasa por  $O$ . Si  $O$  es exterior a  $\mathcal{C}'$  entonces  $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$  es la imagen de  $\mathcal{C}'$  por la homotecia de centro  $O$  y razón  $\rho^2/t$ , donde  $t$  es la potencia de  $O$  con respecto a  $\mathcal{C}'$ . Si  $O$  es interior a  $\mathcal{C}'$  entonces  $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \sigma_O \circ \eta_{O, \rho^2/t}(\mathcal{C})$ .



**Definición 8.19** Sea  $A, B, C, D$  una cuaterna ordenada de puntos distintos del plano. Se define **razón doble** como

$$(A, B : C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

. Si  $A, B, C, D$  están alineados, entonces la razón doble es una razón de las dos razones simples:  $\frac{CA}{CB} \frac{DB}{DA}$ .

Por convenio se tiene que

$$(A, B : C, \infty) = \frac{CA}{CB}$$

**Teorema 8.20** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$  y sean  $A, B \neq O$  y que no estén alineados a  $O$ . Si  $\iota_{\mathcal{C}}(A) = A'$  y  $\iota_{\mathcal{C}}(B) = B'$ , los triángulos  $(T)_1 = \triangle OAB$  y  $(T)_2 = \triangle OA'B'$  son semejantes, y  $\angle A = \angle B'$  y  $\angle B = \angle A'$ .

**Teorema 8.21** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $O$  y sean  $A, B, C, D \neq O$ . Entonces

$$(A, B : C, D) = (\iota_{\mathcal{C}}(A), \iota_{\mathcal{C}}(B) : \iota_{\mathcal{C}}(C), \iota_{\mathcal{C}}(D))$$



## 9. Geometría hiperbólica

**Definición 9.0** Para describir la geometría hiperbólica se fija una recta  $l_\infty$  y uno de los semiplanos de la recta  $l_\infty$  como  $\mathbb{H}$ . La distancia hiperbólica sigue la lógica de para que dos pares de puntos  $A, A'$  y  $B, B'$  sobre  $r \perp l_\infty$  y  $d(A, A') = d(B, B')$ , pero  $A, A'$  están más cerca de  $l_\infty$  que  $B, B'$ , entonces  $d_{\mathbb{H}}(A, A') > d_{\mathbb{H}}(B, B')$ .

Si  $R = r \cap l_\infty$ , definimos la **distancia hiperbólica** como

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{RP}{RQ} \right| = |\log(P, Q : R, \infty)|$$

**Teorema 9.1** Sean  $P, Q, S$  en  $\mathbb{H}$  sobre  $r \perp l_\infty$  tal que  $Q \in [P, S]$ . Entonces:

- $d_H(P, Q) + d_H(Q, S) = d_H(P, S)$ .
- Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $R = r \cap l_\infty$ , entonces

$$d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = d_H(P, Q)$$

**Teorema 9.2** Sean  $P, Q \in \mathbb{H}$  de modo que  $r_{PQ} \not\perp l_\infty$ . Existe una única circunferencia  $\mathcal{C}_{PQ}$  con centro  $l_\infty$  y que pasa por  $P$  y  $Q$ .

**Definición 9.0-cont** Queremos que la distancia anterior sea invariante a inversiones respecto a circunferencias. Si tenemos  $P, Q \in \mathbb{H}$  de modo que  $r_{PQ} \not\perp l_\infty$  y  $X, Y = \mathcal{C}_{PQ} \cap l_\infty$ , podemos crear  $\mathcal{C}_X$ . Entonces, se tiene que la recta  $r_{\iota_{\mathcal{C}_X}(P)\iota_{\mathcal{C}_X}(Q)} \perp l_\infty$ , y definimos

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = |\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)|$$

Sin embargo, por el **Teorema 8.21** la razón doble conserva las inversiones, luego

$$\begin{aligned} |\log(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q) : R, \infty)| &= \\ |\log(\iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}\iota_{\mathcal{C}}(Q) : \iota_{\mathcal{C}}(R), \infty)| &= \\ |\log(P, Q : \iota_{\mathcal{C}}(R), \iota_{\mathcal{C}}(\infty))| & \end{aligned}$$

Si tomamos como convención  $\iota_{\mathcal{C}}(\infty) = X$ , y por el **Teorema 8.18**,  $\iota_{\mathcal{C}}(R) = Y$  entonces

$$d_H(P, Q) = |\log(P, Q : Y, X)|$$

**Teorema 9.3** Sea  $\mathcal{C}$  con centro  $l_\infty$ , entonces  $\iota_{\mathcal{C}}$  preserva las distancias hiperbólicas para todo  $P, Q$ :

$$d_H(P, Q) = d_H(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q))$$

**Teorema 9.4** Si  $\mathcal{C}$  tiene centro en  $l_\infty$ , entonces  $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$  es una recta hiperbólica.

**Definición 9.5** Dos rectas hiperbólicas son paralelas si son disjuntas o coinciden.

**Teorema 9.6** Sea  $r_H$  hiperbólica y  $P$  un punto de  $\mathbb{H}$  que no está en  $r_H$ . Existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a  $r_H$  que pasan por  $P$ .

## 10. Polígonos

**Definición 10.1** Un polígono  $\mathcal{P}$  es un conjunto finito  $\{\dots, [V, W], \dots\}$  de  $r$  segmentos llamados lados del polígono. Los extremos de los lados, vértices, forman el conjunto  $\{V_1, \dots, V_r\}$ .  $\mathcal{P}$  cumple

- Dos lados de  $\mathcal{P}$  o bien no se cortan o tienen únicamente un extremo común (son lados adyacentes).
- Los lados de  $\mathcal{P}$  pueden escribirse como una sucesión finita de vértices  $[V_1, V_2], [V_2, V_3], \dots, [V_r, V_1]$ .

**Definición 10.4** Una **diagonal** es un segmento cuyos extremos son dos vértices que no pertenecen al mismo lado.

**Definición 10.6** Sea  $V$  un vértice de  $\mathcal{P}$  y sean  $[V, W_1]$  y  $[V, W_2]$  dos lados. El ángulo con vértice  $V$  y semirrectas que contienen a ambos lados forman el ángulo  $\angle V$  de  $\mathcal{P}$ .

**Definición 10.8** Un polígono es **convexo** si toda recta que no contiene a ninguno de los lados del polígono corta a lo sumo en dos lados de éste.

**Teorema 10.10** Un polígono  $\mathcal{P}$  es convexo sii para todo lado  $[V, W]$  de  $\mathcal{P}$  los vértices de  $\mathcal{P}$  distintos de  $V$  y  $W$  están todos en el mismo de los dos semiplanos determinados por  $r_{VW}$ .

**Definición 10.11** Un punto  $P$  está en el **interior** de un polígono convexo  $\mathcal{P}$  si cualquier recta que pase por  $P$  corta a los lados del polígono en dos puntos. Si  $P$  no está ni en el interior ni en los lados del polígono, entonces está en el exterior.

**Observación 10.12** Un punto  $P$  está en el interior de un polígono  $\mathcal{P}$  si existe una recta  $r$  que pasa por  $P$  de modo que si  $\bar{s}$  es una de las semirrectas,  $\bar{s}$  corta a  $\mathcal{P}$  en un número  $n$  impar de puntos que no son vértices.

**Definición 10.13** Un polígono convexo es **regular** si todos sus lados y ángulos son congruentes.

**Lema 10.14** Sean  $r$  y  $s$  rectas que al cortarse forman un ángulo  $\pi/n$ . Sean  $\sigma_r$  y  $\sigma_s$ . Si  $V$  es un punto en  $r$ , definimos los puntos  $V_{i+1} = (\sigma_s \circ \sigma_r)^i(V)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , es decir, las imágenes de  $V$  por rotaciones. Entonces, si  $V_1 = V$ , el polí-

gono

$$\mathcal{P} = \{[V_1, V_2], \dots, [V_{n-1}, V_n], [V_n, V_1]\}$$

es regular.

**Teorema 10.15** Sea  $n$  entero mayor que 2. Sea  $[V, W]$  un segmento del plano, y  $H$  uno de los semiplanos determinados por  $r_{VW}$ . Existe un polígono regular de  $n$  lados contenido en  $H \cup r_{VW}$  y uno de los lados es  $[V, W]$ . **Corolario 10.17** En estas condiciones  $\mathcal{P}$  es único.

**Teorema 10.16/10.19** Sea  $\mathcal{P}$  regular con  $n$  vértices.  $\mathcal{P}$  admite  $n$  reflexiones distintas, que son simetrías de  $\mathcal{P}$ . También existe una rotación con ángulo  $2\pi/n$  que es simetría de  $\mathcal{P}$ . Análogamente, si  $\mathcal{P}$  es convexo con  $n$  vértices y tiene como simetría una rotación  $2\pi/n$ , entonces es regular.

**Corolario 10.18** Todo  $\mathcal{P}$  regular permite una circunferencia  $\mathcal{C}$  que pase por todos sus vértices. Entonces  $\mathcal{P}$  está **inscrito** en  $\mathcal{C}$ .

### Construcciones con regla y compás

**Teorema 10.24/Definición 10.26** Dados dos puntos  $A$  y  $B$  se puede construir un punto  $C \in [A, B]$  con regla y compás de modo que  $AB \cdot BC = AC^2$ .  $C$  divide en razón áurea,  $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Teorema 10.27, 10.28** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo isósceles tal que  $AB = AC$  y  $\angle B = \angle C = 2\angle A$ . Entonces  $\frac{AB}{BC}$  es la razón áurea. Además, este triángulo puede construirse con regla y compás.

**Observación 10.29/Corolario 10.30** El ángulo  $\angle A$  del triángulo áureo es  $\pi/5$ . Por tanto, se puede construir un pentágono regular con lados congruentes a  $[A, B]$ .

**Teorema 10.31** Un polígono regular de  $n$  lados se puede construir con regla y compás sii la factorización de  $n$  en números primos tiene la forma  $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$ , con  $p_i$  de la forma  $2^{2^s} + 1$ , y son primos distintos. Así, los lados polígonos construibles son 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17,  $\dots$ .

## 11. Geometría euclidiana espacial

**Definición 11.0**  $\mathbb{E}$  es el conjunto de puntos en un espacio tridimensional. La distancia  $d$  es la aplicación  $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Axioma E1**  $(\mathbb{E}, d)$  es un espacio métrico.

**Definición 11.1** Una recta  $r$  y su segmento  $[A, B] = \{X \in \mathbb{E} \mid d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$  son similares que en  $\mathbb{P}$ . Una recta cumple:

- contiene al menos dos puntos distintos.
- Para toda terna  $A, B, C$  en  $r$ ,  $A, B, C$  están alineados.
- Si  $A, B \in r$  distintos, y  $X \in \mathbb{E}$ , si  $X \in r$ ,  $A, B, X$  están alineados.

**Definición 11.2** Un **plano**  $\pi \in \mathbb{E}$  es un subconjunto que, con la distancia  $d$  restringida a  $\pi$ , cumple los axiomas de la geometría euclidiana plana.

**Axioma E2 [de los planos]**

- Al menos existe un plano en  $\mathbb{E}$ .
- Para todo plano  $\alpha$  existe un punto  $P \in \mathbb{E} - \alpha$ .
- Para  $X, Y, Z \in \mathbb{E}$  distintos existe un plano  $\alpha \in \mathbb{E}$  que los contiene. Si no están alineados,  $\alpha$  es único, y se denota por  $\alpha_{XYZ}$ .
- Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$  son planos distintos, cortan en una recta.

**Teorema 11.4** Si  $\alpha$  es un plano y  $A, B \in \alpha$ , entonces  $r_{AB} \in \alpha$ .

**Observación 11.5** Por dos rectas que cortan, o por una recta y un punto que no pasa por ella, pasa exactamente un plano.

**Definición 11.6/Observación 11.7** Dos rectas  $r, s$  son **paralelas** si coinciden o están contenidas en un plano y son paralelas en él. Dos rectas disjuntas pueden no ser paralelas, si no están en el mismo plano.

**Definición 11.8** Una recta  $l$  es **ortogonal** a un plano  $\alpha$  en un punto  $P$  ( $l \perp_P \alpha$ ) si  $l$  es ortogonal a toda recta de  $\alpha$  que pase por  $P$ .

**Teorema 11.10** Sea  $r$  y  $P \in r$ , entonces existe un plano único  $\pi$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

**Teorema 11.12** Sea  $\alpha$  un plano y  $P \in \alpha$ . Existe una única recta ortogonal a  $\alpha$  que pase por  $P$ .

**Teorema 11.13** Sean  $r, s$ , y  $r$  es ortogonal a  $\alpha$ . Si  $s$  es paralela a  $r$ , entonces es ortogonal a  $\alpha$ .

**Teorema 11.15** Sea  $\alpha$  y  $P \in \mathbb{E}$ . Existe una única recta  $r$  tal que  $P \in r$  y  $r \perp \alpha$ .

**Definición 11.16** Dos planos  $\alpha, \beta$  son ortogonales,  $\alpha \perp \beta$  si existe al menos una recta  $a \in \alpha$  verificando  $a \perp \beta$ .

**Teorema 11.17** Para los planos  $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$  se tiene

- $\alpha \perp \beta \iff \beta \perp \alpha$
- $\alpha \perp \beta$  si para todo  $P \in \alpha$  la única recta  $a \perp \beta$  pasando por  $P$  esta en  $\alpha$ .

**Teorema 11.18** Sea  $\lambda$  un plano y  $c$  una recta en  $\mathbb{E}$ . Existe un plano  $\gamma \perp \lambda$  pasando por  $c$ . Si  $c$  no es ortogonal a  $\lambda$ ,  $\gamma$  es único.

**Definición 11.19** Dados dos planos  $\pi_1, \pi_2$  en  $\mathbb{E}$ ,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son **paralelos** si  $\pi_1 = \pi_2$  o  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ .

**Teorema 11.20** Si  $\pi_1 \parallel \pi_2$  toda recta ortogonal a  $\pi_1$  lo es a  $\pi_2$ .

---

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-NoDerivs 3.0 España”.

