

# **Pressure Distribution Inside Nucleons in a Tsallis-MIT Bag Model**

Física de partículas

Presenta: **Manuel Alejandro Matías Astorga**  
Director de tesis: **Dr. Gerardo Herrera Corral**

A thesis presented for the degree of  
Doctor of Philosophy



**Cinvestav**

Departamento de física

CINVESTAV

CDMX, México

April 4, 2025



# ABSTRACT

## Resumen

Resumen en español

## Abstract

This is the abstract



# AGRADECIMIENTOS

CONAHCYT, CINVESTAV, Dr Gerardo H. C.  
Agradezco y acredito a [Josh Cassidy](#) por la plantilla de la portada de mi tesis.



# CONTENIDO





# LISTA DE FIGURAS



# LISTA DE TABLAS

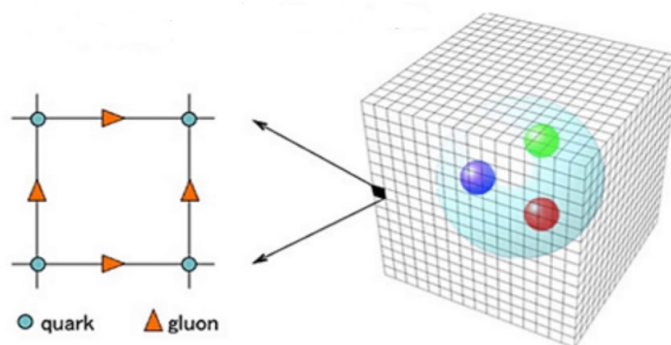


# INTRODUCCIÓN

Entender la estructura interna de los hadrones es fundamental para descifrar las interacciones fuertes descritas por la [Cromodinámica Cuántica \(QCD\)](#). Este conocimiento no solo es crucial para la física de partículas, sino que también tiene implicaciones en la comprensión de la materia en condiciones extremas, como las que existieron en los primeros momentos del universo. Según el modelo de [QCD](#), las partículas hadrónicas están compuestas por quarks, los cuales permanecen confinados dentro de los hadrones. Este confinamiento es una de las características fundamentales de la [QCD](#) y explica por qué no se han observado quarks libres en la naturaleza.



## Lattice QCD

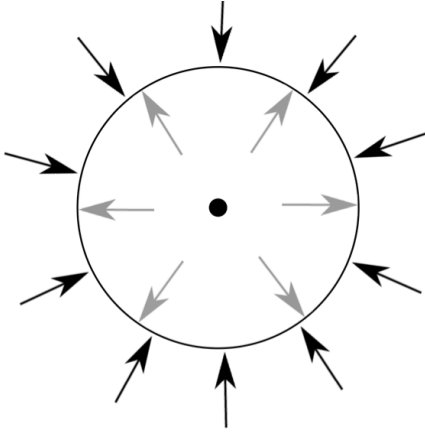


**Fig. 1:** Diagrama de una red tipo LQCD, donde los nodos representan quarks y las aristas simbolizan campos gluónicos. Fuente: Adaptado de Autor (Año).

A lo largo de los años, se han propuesto diversos modelos fenomenológicos para describir la estructura del protón. Entre ellos destacan los modelos de cuerdas [? ?], que representan hadrones como cuerdas oscilantes; los modelos de bolsa [? ?], que describen quarks confinados en una cavidad; y los modelos de valones [?]. Cada uno de estos enfoques ofrece una perspectiva única sobre la naturaleza de los hadrones, pero todos enfrentan limitaciones al tratar de capturar la complejidad de las interacciones no lineales entre quarks y gluones.

Para explorar la física de la materia quark, se han desarrollado técnicas avanzadas que permiten estudiar estas interacciones. Una de ellas es la [Lattice QCD \(LQCD\)](#), que utiliza simulaciones numéricas en redes espacio-temporales. Sin embargo, la complejidad de estos cálculos, que involucran millones de nodos, lleva a un problema conocido como *el problema del signo*. Este problema surge en simulaciones Monte Carlo, donde los pesos de las configuraciones cuánticas pueden volverse negativos o incluso complejos, imposibilitando su interpretación como probabilidades clásicas

Recientemente, la colaboración [Hadron to Atomic nuclei from Lattice QCD \(HAL-QCD\)](#) ha utilizado técnicas de [LQCD](#) para realizar cálculos de vanguardia en el estudio de interacciones fuertes entre hadrones [? ?]. Sus resultados, que describen sistemas protón-neutrón y protón-hiperón, han sido comparados con datos experimentales publicados por la colaboración [A Large Ion Collider Experiment \(ALICE\)](#) [? ?]. Estos avances han sentado las bases para el desarrollo de modelos fenomenológicos más simples, como el que proponemos en este trabajo.



**Fig. 2:** Diagrama que ilustra el modelo de bolsa. En el interior, la presión es generada por un plasma de quarks y gluones, mientras que la presión externa mantiene confinados estos componentes dentro del hadrón. Fuente: Adaptado de Autor (Año).

En este trabajo, proponemos un modelo basado en el modelo de bolsa del [Massachusetts Institute of Technology \(MIT\)](#) [? ?] y la estadística no extensiva de [Tsallis](#). A este modelo lo denominamos [Tsallis-MIT Bag Model \(T-MIT Bag Model\)](#). El modelo de bolsa del MIT describe hadrones como recipientes cerrados que contienen un mar de quarks y gluones, los cuales interactúan dentro de los límites del hadrón (ver Fig. ??). Sin embargo, este modelo tradicional no captura completamente las interacciones no lineales entre quarks y gluones. Aquí es donde la estadística de [Tsallis](#), una generalización de la estadística de [Boltzmann - Gibbs \(BG\)](#) [? ? ? ? ?], juega un papel crucial.

La estadística de [Tsallis](#) introduce un parámetro  $q$  que captura las interacciones entre quarks y gluones, simplificando la no linealidad inherente a estas interacciones. Este enfoque ha demostrado ser exitoso en la descripción de sistemas complejos en física de altas energías, desde colisiones electrón-positrón [? ?] hasta colisiones de iones pesados [? ?]. En nuestro

modelo, combinamos el modelo de bolsa del MIT con la estadística de [Tsallis](#) para estimar la distribución de presión total dentro de los nucleones.

El objetivo principal de este trabajo es proponer un modelo fenomenológico que combine el modelo de bolsa del MIT con la estadística no extensiva de [Tsallis](#) para estudiar la distribución de presión dentro de los nucleones. Comparamos nuestros resultados con la distribución de presión de quarks obtenida recientemente mediante técnicas de [Deep Virtual Compton Scattering \(DVCS\)](#) [?]. Estas técnicas, que involucran la dispersión de fotones virtuales de altas energías, han permitido medir la presión repulsiva de los quarks cerca del centro del protón y una presión de confinamiento a distancias mayores de 0.6.

En los siguientes capítulos, describiremos en detalle el marco teórico del [T-MIT Bag Model](#), los resultados obtenidos y las comparaciones con datos experimentales. En el Capítulo ??, explicamos el modelo de bolsa y sus limitaciones. En el Capítulo ??, presentamos la estadística no extensiva de [Tsallis](#) y su aplicación al plasma de quarks y gluones. En el Capítulo 5, comparamos nuestros resultados con los datos experimentales de presión de quarks, y en el Capítulo 6, discutimos una posible interpretación física del parámetro de [Tsallis](#)  $q$ . Finalmente, en el Capítulo 7, presentamos las conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo.

# CAPÍTULO

## 1

# MODELO DE BOLSA

## 1.1 Modelo de bolsa: descripción preliminar

El modelo de bolsa es una extensión del modelo de quarks que incorpora un tratamiento relativista de los quarks. En este enfoque, se introduce explícitamente un grado de libertad asociado a la *bolsa*, lo que establece una distinción clara entre la física dentro y fuera de la bolsa.

Dentro de la bolsa, los quarks se comportan como partículas sin masa, mientras que fuera de ella se consideran infinitamente masivos. Además, existe una diferencia finita en la densidad de energía entre el interior y el exterior: el *vacío de bolsa* tiene una energía más alta que el vacío normal. Este desequilibrio energético es fundamental para entender la formación de hadrones, ya que el tamaño de la bolsa está determinado por un balance entre:

- La *energía cinética* necesaria para localizar los quarks dentro de la bolsa (debido al principio de incertidumbre).
- La *energía volumétrica* asociada al vacío de bolsa.

En este marco teórico [? ], es posible calcular propiedades hadrónicas como las masas de mesones y bariones, así como sus momentos magnéticos y otras cantidades estáticas. Los resultados obtenidos son generalmente satisfactorios, aunque se ha observado que las masas de los mesones pseudoescalares tienden a ser sobreestimadas.

La QCD aporta dos contribuciones esenciales al modelo de bolsa [? ]:

1. **Singlete de color:** Los campos gluónicos, al igual que los quarks, deben anularse fuera de la bolsa. De acuerdo con la ley de Gauss, esto solo es posible si el contenido de la bolsa forma un singlete de color. Esta condición explica por qué los hadrones están compuestos por estados de quarks-antiquarks ( $\bar{q}q$ ) o tres quarks ( $qqq$ )
2. **Intercambio de gluones:** La inclusión del intercambio de gluones como una corrección a la propagación libre de los quarks dentro de la bolsa mejora la descripción del espectro de mesones y bariones.



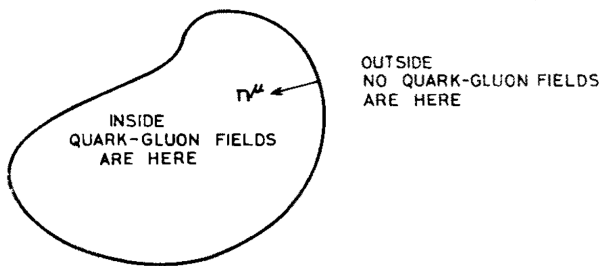
Además, la libertad asintótica de QCD respalda la suposición del modelo de bolsa de que los quarks se propagan casi libremente a distancias cortas. Esta propiedad es crucial para entender el comportamiento de los quarks dentro de la bolsa y su confinamiento en hadrones.

### 1.1.1 Motivación y fundamentos del modelo de bolsa

En las primeras etapas del desarrollo del modelo de quarks, los hadrones ligeros se describían como estados ligados de quarks que se movían de manera no relativística dentro de un potencial confinante. Sin embargo, en sistemas no relativísticos, las energías de excitación suelen ser pequeñas en comparación con las masas de sus componentes. En el caso de los hadrones, estas energías son comparables a las masas de los quarks, lo que sugiere que un tratamiento no relativístico no es suficiente para describir adecuadamente su espectroscopía y estructura.

Aunque inicialmente se esperaba que la espectroscopía, la estructura y las interacciones de los hadrones pudieran deducirse directamente a partir de primeros principios, las complejidades de la QCD llevaron al desarrollo de modelos aproximados. Entre estos modelos destacan el modelo de bolsa del MIT, el modelo de bolsa del Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) y el modelo de bolsa de solitón. Estos modelos buscan incorporar tres características clave de la estructura hadrónica que no estaban presentes en los enfoques no relativísticos iniciales:

- a) **Libertad asintótica:** Una propiedad fundamental de la QCD que permite el uso de la teoría de perturbaciones para describir las interacciones quark-gluón a distancias cortas. Al mismo tiempo, esta propiedad prohíbe la propagación de campos de color a grandes distancias, lo que explica el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones.
- b) **Inclusión de gluones:** A diferencia de los modelos no relativísticos, los modelos de bolsa incorporan los gluones como constituyentes hadrónicos y mediadores de las interacciones a corta distancia entre quarks. Esto permite una descripción más completa de las interacciones fuertes.
- c) **Marco relativístico e invariante de norma:** Los modelos de bolsa proporcionan un marco teórico que es tanto relativístico como invariante bajo transformaciones de norma, lo que los hace consistentes con los principios fundamentales de la QCD.



**Fig. 1.1:** Dentro de la bolsa se encuentran los quarks encerrados por la presión de la bolsa.

Además, algunas variantes del modelo de bolsa, como el modelo de bolsa quiral híbrido, intentan incorporar la simetría quiral, una característica de la QCD que no está presente en los modelos de bolsa tradicionales.

Y a pesar de que el modelo de bolsa ha sido fundamental para entender el confinamiento de quarks, presenta limitaciones en la descripción de sistemas fuera del equilibrio o en condiciones extremas. En este trabajo, proponemos un modelo alternativo que sustituye la presión de bolsa  $B$  y las con-

tribuciones de quarks y gluones por un parámetro de Tsallis  $q$ , lo que permite una descripción más general de sistemas complejos.

En resumen, el modelo de bolsa proporciona un marco teórico para entender el confinamiento de quarks dentro de los hadrones y calcular propiedades hadrónicas como masas y momentos magnéticos. Las contribuciones esenciales de la QCD, como el singlete de color y el intercambio de gluones, son fundamentales para una descripción precisa de las interacciones fuertes.



## 1.2 La aproximación de la cavidad esférica

La aproximación de la cavidad esférica es una simplificación del modelo de bolsa que permite estudiar el comportamiento de los quarks dentro de un hadrón asumiendo que están confinados en una región esférica de radio  $R_0$ . En este enfoque, la dinámica de los quarks se describe mediante la ecuación de Dirac, y las condiciones de frontera en la superficie de la bolsa garantizan que los quarks no puedan escapar de la región confinada. Esta aproximación es fundamental en la física de partículas, ya que proporciona un marco teórico para entender el confinamiento de quarks dentro de los hadrones y calcular propiedades hadrónicas como masas y momentos magnéticos.

La figura ?? muestra un diagrama esquemático de la bolsa, donde los quarks están confinados dentro de una región esférica debido a la *presión de bolsa*.

La acción que describe este sistema está dada por:

$$W = \int dt \left[ \int_V d^3x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right] \quad (1.1)$$

donde:

- $V$  es el *volumen ocupado en la bolsa*,
- $S$  es la *superficie que encierra al volumen*,
- $\psi$  es el *espinor de campo de quark* ( $\gamma^\mu$  son las [Matrices Gamma](#)),
- $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$  es la *derivada sobre lo de la derecha menos la derivada sobre lo de la izquierda*,
- $m$  es la *masa de los quarks* que se mueven en la cavidad esférica que es la bolsa,
- $B$  es *presión de bolsa*.

La acción (??) describe la dinámica de los quarks dentro de la bolsa. Cada término tiene un significado físico específico:

- El primer término,  $\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi$ , representa la *energía cinética* de los quarks. Este término describe el movimiento relativista de los quarks dentro de la bolsa.
- El segundo término,  $\bar{\psi} m \psi$ , corresponde a la *energía de masa* de los quarks. Este término tiene en cuenta la contribución de la masa de los quarks a la energía total del sistema.
- El término  $B$  introduce la *presión de bolsa*, que actúa como una energía de confinamiento que mantiene a los quarks dentro de la región esférica. Este término simula la energía necesaria para mantener a los quarks confinados.
- Finalmente, el término superficial  $\frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi$  garantiza que los quarks no puedan escapar de la bolsa, imponiendo una *condición de frontera efectiva* efectiva para simular que los quarks se comporten como si tuvieran una masa infinita fuera de la bolsa, lo que impide su escape.

Las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera se obtienen al extremizar la acción, ecuación (??), bajo variaciones en  $\psi$  y  $V$ . Este proceso se realiza aplicando el principio de mínima acción, donde se varía la acción con respecto a los campos y se imponen las condiciones necesarias para que la acción sea estacionaria.

**Ecuaciones de movimiento:** La ecuación de Dirac dentro de la bolsa se obtiene al variar la acción (??) con respecto al campo de quarks  $\psi$ . Esto conduce a:

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0 \quad \text{en } V, \quad (1.2)$$

donde  $\rlap{\not{D}} = \partial_\mu \gamma^\mu$ . Esta ecuación describe la dinámica de los quarks dentro de la bolsa.



**Condiciones de frontera:** Las condiciones de frontera en la superficie  $S$  se obtienen al variar la acción (??) con respecto a la superficie que encierra el volumen  $V$ . Estas condiciones garantizan que los quarks no puedan escapar de la bolsa y que la presión externa se equilibre con la *presión de bolsa*  $B$ . Las condiciones de frontera son:

$$\left. \begin{aligned} in^\mu \gamma_\mu \psi &= \psi \\ \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) &= B \end{aligned} \right\} \text{ sobre } S, \quad (1.3a)$$

$$(1.3b)$$

donde  $n_\mu$  es la normal interior covariante a la superficie. La primera condición de frontera, ecuación (??), requiere que la componente normal del vector corriente  $J_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  se anule en la superficie, lo que conserva la corriente. La segunda condición, ecuación (??), requiere que la presión externa del campo de quarks se equilibre con la *presión de bolsa*  $B$ .

La solución general a las ecuaciones (??) y (??) es una superposición de modos normales, cada uno caracterizado por un conjunto de números cuánticos  $n$ ,  $\kappa$ ,  $j$ , y  $m$ .

$$\psi_\alpha(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa j}) a_\alpha(n\kappa jm) \psi_{n\kappa jm}(x, t). \quad (1.4)$$

donde:

- $n$  es el número cuántico principal,
- $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$  es el número cuántico de Dirac,
- $j$  y  $m$  etiquetan el modo del momento angular y su componente  $z$ , respectivamente,
- $N(\omega_{n\kappa j})$  es una constante de normalización,
- $a_\alpha(n\kappa jm)$  son los coeficientes de expansión que determinan la contribución de cada modo,
- y  $\psi_{n\kappa jm}(x, t)$  son los modos normales de la ecuación de Dirac:

$$\psi_{n\kappa jm}(x, t) = \begin{pmatrix} f_{n\kappa j}(r) \Omega_{\kappa jm}(\theta, \phi) \\ i g_{n\kappa j}(r) \Omega_{-\kappa jm}(\theta, \phi) \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n\kappa j} t}, \quad (1.5)$$

donde  $f_{n\kappa j}(r)$  y  $g_{n\kappa j}(r)$  son las funciones radiales, y  $\Omega_{\kappa jm}(\theta, \phi)$  son las funciones angulares [? ]. Las frecuencias  $\omega_{n\kappa j}$  se definen a partir de la expresión

$$\omega_{n\kappa j} = \sqrt{m^2 + R_0^{-2} x_{n\kappa j}^2}, \quad (1.6)$$

donde  $x_{n\kappa j}$  son las soluciones de la ecuación trascendental a la que llegamos a partir de (??). La condición de frontera cuadrática, la que está igualada a la *presión de bolsa*  $B$  en (??), restringe los modos que pueden ser excitados. Entre otras cosas, permite sólo soluciones para la ecuación de Dirac. Para el caso de los quarks,  $j = \frac{1}{2}$ , ya sea  $\kappa = -1$ ,

$$\psi_{n-1 \frac{1}{2} m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0(\omega_{n,-1} r/R_0) U_m \\ -j_1(\omega_{n,-1} r/R_0) \sigma \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,-1} t/R_0} \quad (1.7)$$

o  $\kappa = 1$

$$\psi_{n 1 \frac{1}{2} m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1(\omega_{n,1} r/R_0) \sigma \cdot \hat{r} U_m \\ j_0(\omega_{n,1} r/R_0) U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,1} t/R_0} \quad (1.8)$$



$U_m$  es un espinor de Pauli bidimensional y  $j_\ell(z)$  son las funciones de Bessel esféricas. Hemos omitido los índices  $j$  sobre  $\omega_{n\kappa}$  ya que solo  $j = \frac{1}{2}$  es de interés en el presente (pues tratamos con partículas de *espín*  $\frac{1}{2}$ , la cual es la componente angular total de los quarks).  $N(\omega_{n\kappa})$  es una constante de normalización escogida como

$$N(\omega_{n\kappa}) \equiv \left( \frac{\omega_{n\kappa}^3}{2R_0^3(\omega_{n\kappa} + \kappa) \sin^2 \omega_{n\kappa}} \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

a partir de la restricción de normalización de (??) y la imposición de ortogonalidad sobre los modos normales, ecuación (??), es decir

$$\int_V d^3x \bar{\psi}_{n\kappa jm}(x) \psi_{n'\kappa' j'm'}(x) = \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (1.10)$$

La condición de frontera lineal, ecuación (??), genera una condición eigenvalor para los modos de frecuencias  $\omega_{n\kappa}$

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}),^1$$

o

$$\tan \omega_{n\kappa} = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa} \quad (1.11)$$

Por convención escogemos  $n$  positiva (o negativa en dado caso que se escogieran modos de antipartículas, por ejemplo) secuencialmente para etiquetar las raíces positivas (o negativas) de la ecuación (??) Las primeras soluciones a (??) son

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : \quad \omega_{1-1} &= 2.04; \quad \omega_{2-1} = 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{11} &= 3.81; \quad \omega_{21} = 7.00. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En resumen, la aproximación de la cavidad esférica proporciona un marco teórico para estudiar el confinamiento de quarks dentro de los hadrones. A través de la acción (??), hemos derivado las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera que describen la dinámica de los quarks dentro de la bolsa. La solución general, dada por la superposición de modos normales (??), permite calcular propiedades hadrónicas como masas y momentos magnéticos. Este enfoque es fundamental para entender la estructura y las interacciones de los hadrones en el contexto del modelo de bolsa.

## Conclusiones relevantes del modelo de bolsa

Basándonos en el trabajo de [? ], podemos resumir algunas conclusiones clave del modelo de bolsa que son relevantes para nuestro estudio:

- a) **Relación entre energía y volumen:** El volumen promediado en el tiempo de una bolsa es proporcional a su energía:

$$E = 4B\langle V \rangle. \quad (1.13)$$

Esta relación destaca el papel central de la *presión de bolsa*  $B$  en el modelo tradicional. En nuestro enfoque, proponemos sustituir  $B$  y las contribuciones de quarks y gluones por un parámetro de Tsallis, lo que permite una descripción más general del sistema.

<sup>1</sup>Las funciones  $j_0(x)$  y  $j_1(x)$  son los armónicos esféricos de orden 0 y 1, respectivamente. Sus expresiones son:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$



b) **Temperatura de la bolsa:** En el límite termodinámico, la bolsa tiene una temperatura fija  $T_0$ , independiente de su energía.  $T_0$  es de orden  $B^{-1/4}$ . Esto implica que:

- La energía cinética promedio de los partones es de orden  $T_0$ , independiente de la energía de la bolsa  $E$ , siempre que  $E \gg T_0$ .
- La densidad de niveles asintótica  $\zeta(E)$  del sistema es una función exponencial de  $E$ :

$$\zeta \sim e^{E/T_0}.$$

Estas conclusiones son relevantes para entender cómo la *presión de bolsa*  $B$  influye en las propiedades termodinámicas del sistema, lo que proporciona un contexto teórico para nuestro modelo alternativo.

## CAPÍTULO

### 2

# PRESIÓN DE QUARKS Y GLUONES EN EL MARCO DE LA ESTADÍSTICA DE TSALLIS

## 2.1 Introducción

La mecánica estadística estándar está basada en la entropía de [Boltzmann-Gibbs \(BG\)](#), que se define como

$$S_{\text{BG}} = -k_{\text{B}} \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad (2.1)$$

donde  $W$  es el número de configuraciones microscópicas del sistema y  $p_i$  es la probabilidad de acceder a la  $i$ -ésima configuración. Sin embargo, sistemas no lineales dinámicos de muchos cuerpos, como los que se encuentran en física de partículas o en plasmas, a menudo no cumplen con las condiciones de *ergodicidad* (que su valor esperado sea igual a su promedio a largo plazo) o *extensividad* (que las propiedades del sistema sean proporcionales al número de partículas). Para estos sistemas, la estadística de [BG](#) no es adecuada, lo que ha llevado al desarrollo de extensiones como la estadística de [Tsallis](#).

La estadística de Tsallis generaliza la entropía de [BG](#) mediante la introducción de un parámetro no extensivo  $q$ , definido por:

$$S_q = k_{\text{B}} \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathbb{R}; S_{q=1} = S_{\text{BG}}), \quad (2.2)$$

El parámetro  $q$  mide el grado de no extensividad del sistema. Para  $q = 1$ , se recupera la estadística de [BG](#), mientras que valores de  $q \neq 1$  indican desviaciones de la extensividad, lo que es característico de sistemas con correlaciones de largo alcance, inhomogeneidades o memoria de largo plazo.

Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilísticamente independientes  $A$  y  $B$  (i.e., si  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k_{\text{B}}} = \frac{S_q(A)}{k_{\text{B}}} + \frac{S_q(B)}{k_{\text{B}}} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_{\text{B}}} \frac{S_q(B)}{k_{\text{B}}}, \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de Boltzmann,  $k_{\text{B}}$



de donde se observa claramente que cuando  $q = 1$  se regresa a la estadística de BG

La estadística de Tsallis ha demostrado ser particularmente útil en el estudio de sistemas complejos y fuera del equilibrio, como los que se encuentran en física de altas energías, plasmas o sistemas biológicos. En este trabajo, exploraremos cómo esta generalización de la entropía puede aplicarse al estudio de hadrones y al confinamiento de quarks, proporcionando una descripción más precisa de sistemas que no pueden ser tratados adecuadamente con la estadística de BG.

En el capítulo anterior, se presentó el modelo de bolsa como un marco teórico para entender el confinamiento de quarks dentro de los hadrones. Sin embargo, este modelo tradicional tiene limitaciones en la descripción de sistemas fuera del equilibrio o en condiciones extremas. La estadística de Tsallis, con su parámetro no extensivo  $q$ , ofrece una herramienta poderosa para abordar estas limitaciones y proporcionar una descripción más general de sistemas complejos.

## 2.2 Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (??), podemos obtener la entropía dentro de un hadrón que consiste en una mezcla de gases de quarks y gluones. Para ello, comenzamos considerando el cálculo de cada contribución: los quarks, vistos como un gas ideal de Fermi - Dirac (FD) ultrarrelativista, y los gluones, vistos como un gas ideal de Bose - Einstein (BE) ultrarrelativista. Ambos se consideran sin masa y no interactuantes, ya que la interacción se introduce a través del parámetro  $q$  de Tsallis.

### 2.2.1 Presión de gluones, un gas ideal de Bose - Einstein ultrarrelativista

Los niveles de energía de un bosón en un gas ideal de BE ultrarrelativista están dados por:

$$\epsilon_k = cp = \hbar ck, \quad (2.4)$$

donde  $p$  es la magnitud del momento de las partículas del gas y  $k$  la magnitud del vector de onda. La función de partición para este sistema es:

$$\Xi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_k}}, \quad (2.5)$$

con  $\beta = (k_B T)^{-1}$  y  $\xi = e^{\beta \mu}$  siendo la fugacidad del gas. El número promedio de partículas en cada estado  $\epsilon_k$  es:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (2.6)$$

Las cantidades termodinámicas fundamentales se expresan como:

$$N(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (2.7)$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle \epsilon_k = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (2.8)$$

Para el límite termodinámico, reemplazamos las sumas por integrales usando la densidad de estados:

$$\Sigma = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \epsilon^2 d\epsilon \quad (2.9)$$

Esto nos lleva a:

$$N(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (2.10)$$

$$E(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (2.11)$$

Para gluones (partículas sin masa con  $\mu = 0$ ), estas expresiones se simplifican a:

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (2.12)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (2.13)$$

Mediante el cambio de variable  $x = \beta\epsilon$ , obtenemos:

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \quad (2.14)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (2.15)$$

Estas integrales se resuelven en términos de funciones especiales<sup>2</sup>:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2\zeta(3) \quad (2.16)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad (2.17)$$

Considerando la degeneración de los gluones ( $g_G = 16$  para 8 tipos de gluones con 2 proyecciones de espín), obtenemos<sup>3</sup>:

$$E_G(T, V) = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4 \quad (2.18)$$

La presión se obtiene a partir del potencial gran canónico:

$$P = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi^{BE} \quad (2.19)$$

Desarrollando esta expresión y realizando integración por partes, encontramos la relación fundamental:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (2.20)$$

Lo que nos da la presión de gluones:

$$P_G = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (2.21)$$

Finalmente, la entropía se calcula como:

$$S_G = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3 \quad (2.22)$$

<sup>2</sup>Con  $\Gamma(n)$  como la función gamma ( $\Gamma(n) = (n-1)!$ ) y  $\zeta(n)$  como la función zeta de Riemann ( $\zeta(n) = \sum_{k=1}^\infty k^{-n}$ ), donde  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>3</sup>Usando unidades naturales  $\hbar = k_B = c = 1$  y  $h = 2\pi\hbar = 2\pi$



### Resultados fundamentales

- i. **Energía:**  $E_G(T, V) = \frac{g_G \pi^2}{30} VT^4$  (??)
- ii. **Presión:**  $P_G(T) = \frac{g_G \pi^2}{90} T^4$  (??)
- iii. **Entropía:**  $S_G(T, V) = \frac{2g_G \pi^2}{45} VT^3$  (??)

## 2.2.2 Presión de quarks, un gas ideal de Fermi - Dirac ultrarrelativista

### Descripción del sistema

Para partículas ultrarrelativistas ( $\epsilon = \|\vec{p}\|c$ )<sup>4</sup>, consideramos:

- Sistema mixto de quarks/antiquarks como gases de Fermi-Dirac acoplados
- Relación entre potenciales químicos:  $\mu_+ = -\mu_- = \mu$  (simetría partícula-antipartícula)
- Factor de degeneración:  $g_Q = 12$  (2 spines  $\times$  3 colores  $\times$  2 sabores  $u, d$ )

### Propiedades termodinámicas

La función de partición del sistema combinado es:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\epsilon_+} \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_+ - \mu)}\right) \times \prod_{\epsilon_-} \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_- + \mu)}\right) \quad (2.23)$$

Con las siguientes cantidades fundamentales:

- Número de partículas:

$$N_{\pm} = \sum_{\epsilon_{\pm}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\pm} \mp \mu)} + 1} \quad (2.24)$$

- Exceso neto de quarks:

$$N = N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{6\pi^2} \left( \pi^2 \mu T^2 + \mu^3 \right) \quad (2.25)$$

### Energía y presión

La energía total del sistema:

$$E_Q = g_Q VT^4 \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] \quad (2.26)$$

La presión del gas de quarks:

$$P_Q = \frac{1}{3} \frac{E_Q}{V} = \frac{g_Q T^4}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{\mu^2}{4T^2} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 T^4} \right] \quad (2.27)$$

<sup>4</sup>De la relación energía-momento  $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  con  $m \rightarrow 0$





## Entropía

La entropía del sistema:

$$S_Q = \frac{4}{3} \frac{E_Q}{T} - \mu \frac{N}{T} = g_Q VT^3 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

## Resultados fundamentales

- i. **Energía:** Ecuación (??) (escala con  $T^4$ )
- ii. **Presión:**  $P_Q = E_Q/3V$  (relación ultrarrelativista)
- iii. **Exceso de quarks:** Ecuación (??)
- iv. **Entropía:**  $\propto VT^3$  (comportamiento característico)

**Nota:** Las derivaciones completas se encuentran en el Apéndice ??.

## 2.3 El protón en el modelo de Tsallis

Este apartado desarrolla el modelo no extensivo del protón como sistema quark-gluón, generalizando las propiedades termodinámicas mediante el parámetro  $q$  de Tsallis.

### 2.3.1 La entropía en el modelo de Tsallis

Consideramos el protón como un sistema compuesto por:

- i. Gas de quarks/antiquarks (Q): Estadística Fermi-Dirac
- ii. Gas de gluones (G): Estadística Bose-Einstein

La entropía de Tsallis incorpora correlaciones mediante:

$$S_q = \underbrace{S_1(Q) + S_1(G)}_{\text{Estadística de BG}} + \underbrace{(1 - q)S_1(Q)S_1(G)}_{\text{Correlaciones}} \quad (2.29)$$

donde los términos individuales,  $S_1(Q)$  y  $S_1(G)$ <sup>5</sup>, son las entropías BG de quarks (ecuación ??) y gluones (ecuación ??). La derivación detallada se presenta en el Apéndice ??.

## Interpretación física

- $S_1(Q), S_1(G)$ : Entropías de BG independientes
- $(1 - q)$ :
  - ▷  $q < 1$ : Correlaciones fuertes (superextensividad)
  - ▷  $q > 1$ : Efectos de exclusión (subextensividad)
  - ▷  $q = 1$ : Recupera estadística de BG estándar

<sup>5</sup>**Nota sobre la elección de  $S_1(Q)$  o  $S_1(G)$ :** La utilización de entropías BG para los subsistemas individuales refleja que la no extensividad surge exclusivamente de sus correlaciones mutuas, no de sus propiedades internas. Esto garantiza coherencia con el límite BG cuando  $q = 1$ .



**Caso límite Boltzmann-Gibbs ( $q = 1$ )**

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{Q+G} = g_Q \underbrace{\left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Quarks}} VT^3 + \underbrace{\frac{2g_G\pi^2}{45}}_{\text{Gluones}} VT^3 \quad (2.30)$$

**Forma explícita con degeneración**

Sustituyendo los factores de degeneración ( $g_Q = 12$ ,  $g_G = 16$ ):

$$S_q = \underbrace{\left[ \frac{74\pi^2}{45} + 2 \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Término extensivo}} VT^3 + \underbrace{\frac{128\pi^2}{15} (1-q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Corrección no extensiva}} V^2 T^6 \quad (2.31)$$

$$S_q = g_Q \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + 4g_G \frac{\pi^2}{90} VT^3 + (1-q) g_Q g_G \frac{4\pi^2}{90} \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6 \quad (2.32)$$

Luego de reordenar y sustituir los factores de degeneración se llega a que

$$S_q = \left[ \frac{74\pi^2}{45} + 2 \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1-q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6 \quad (2.33)$$

De donde fácilmente se puede comprobar que cuando  $q = 1$ , devolvemos a la expresión (??)

Como muestra la Figura ??, el parámetro  $q$  no solo controla la entropía del sistema (Ec. ??), sino que a través de su interpretación como medidor de correlaciones (recuadro verde), afecta directamente las propiedades termodinámicas como la presión (Ec. ??).

### 2.3.2 Presión generalizada

Partiendo de la relación de Maxwell:

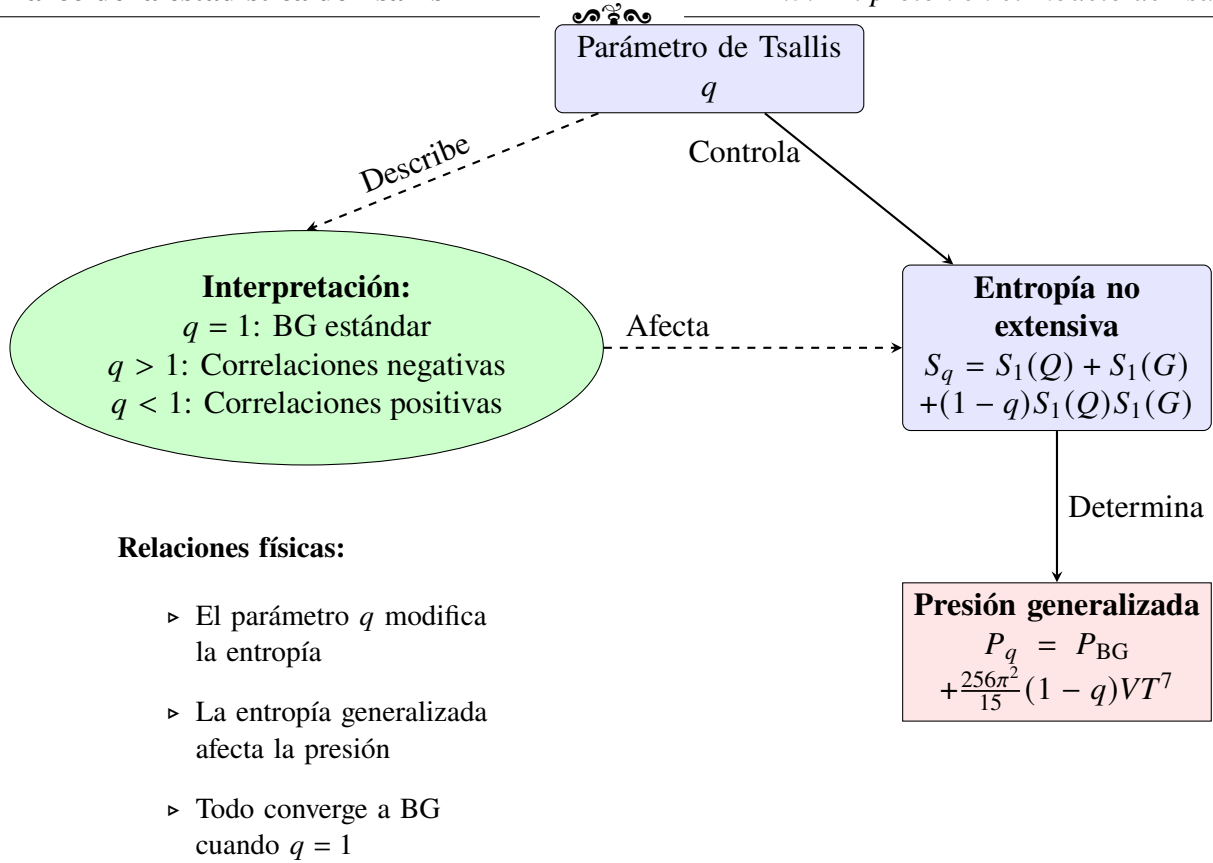
$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T,\mu} = \left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V,\mu} \quad (2.34)$$

La integración sobre  $T$  (ver la derivación completa de  $P_q$  se encuentra en la Sección ??) da:

$$P_q = \underbrace{\left[ \frac{37\pi^2}{90} + \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right]}_{\text{Término extensivo (Presión de BG, } q = 1)} T^4 + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1-q) VT^7 \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Término no extensivo}} \quad (2.35)$$

**Discusión física** El término  $\propto VT^7$  es característico de Tsallis y:

- Domina a altas  $T$ , revelando desviaciones no extensivas
- Escala con el volumen del sistema
- Se anula cuando  $q = 1$  (línea azul en Fig. ??)



**Fig. 2.1:** Jerarquía de relaciones en el modelo: (1) El parámetro  $q$  controla la entropía no extensiva  $S_q$ ; (2) Las interpretaciones físicas de  $q$  (caja verde) justifican su uso; (3) La entropía modificada determina la presión generalizada  $P_q$ . Las flechas punteadas indican relaciones secundarias.

**Discusión física del parámetro  $q$ :** El parámetro  $q$  cuantifica:

- La fuerza del acoplamiento quark-gluón
- Desviaciones del equilibrio termodinámico
- Efectos de memoria a largo alcance

Valores experimentales típicos en QCD:  $q \approx 1.1 - 1.2$  para sistemas de alta energía.

### Verificación de consistencia

- Para  $q = 1$  se recupera exactamente el caso BG
- El término no extensivo escala con  $VT^7$ , dominando a altas temperaturas
- La simetría  $\mu \leftrightarrow -\mu$  se preserva

**Table 2.1:** Comparación entre estadística BG y Tsallis

Propiedad	BG ( $q = 1$ )	Tsallis ( $q \neq 1$ )
Entropía	Aditiva	No aditiva
Presión	$\sim T^4$	$\sim T^4 + (1 - q)VT^7$



## CAPÍTULO

### 3

# CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA DEL PROTÓN

Este capítulo desarrolla un modelo termodinámico de la distribución radial de presión en protones, generalizando los resultados clásicos del modelo de bolsa mediante la estadística de Tsallis. Se analizan dos configuraciones gluónicas posibles y sus implicaciones en los perfiles de temperatura y presión.



## CAPÍTULO

### 4

# SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO $Q$ DE TSALLIS

En el modelo de bolsa, los quarks están confinados en una región por el intercambio de gluones, y el volumen está caracterizado por la presión que previene a los quarks de escapar.

La densidad Lagrangiana puede ser expresada como

$$L_{\text{bag}} = (L_{\text{QCD}} - B) \theta_V \quad (4.1)$$

donde  $\theta_V$  es la función paso definiendo el interior de la bolsa que contiene quarks y gluones. Tiene valor nulo fuera de esta región.

El modelo describe la interacción entre quarks y gluone a pequeñas escalas, reflejando la libertad asintótica del QCD. A mayores escalas, sobre el orden de 1 fermi, los quarks y gluones se vuelven confinados a estados ligados de color neutro. La presión de bolsa, denotada por  $B$ , representa la densidad de energía asociada con fluctuaciones de vacío de los campos QCD dentro de la bolsa.

En el análisis presentado aquí, no asumimos la presión de bolsa constante a través de la región. El concepto de presión de bolsa es de alguna forma, artificial. Se introduce como un parámetro fenomenológico para describir confinamiento y se entiende como la energía por unidad de volumen de las fluctuaciones de vacío dentro de la bolsa. Podemos conceptualizar el mecanismo como un mar de gluones empujando a los quarks o como un mar de quarks y gluones interactuando.

Ahora, exploramos una razón fundamental para la existencia de la presión de bolsa y encontramos que introduciendo una correlación determinada por el  $q$  parámetro proporciona la posibilidad de eliminar la presión de bolsa  $B$  de las ecuaciones. Así, podemos entender al confinamiento sin introducir artificialmente un parámetro de presión de bolsa.

El parámetro de Tsallis  $q$  aparece encapsular la física involucrada en confinamiento como lo hace la presión de bolsa. Podemos omitir la presión de bolsa de este modelo considerando que a un dado  $q_0$  (parámetro de Tsallis inicial), la presión de bolsa puede ser expresada para un sistema hadrónico general.

$$P_{q_0}(T, \mu) - B(r) \rightarrow P_q(T, \mu) \quad (4.2)$$

Donde  $q$  es el parámetro de Tsallis que describe la correlación,  $q_0$  considera para la presión total estimada dentro de los nucleones arriba, con las condiciones iniciales dadas. Después de la extracción

### Capítulo 3. Características de estructura del protón



a partir de los datos  $q_0$  está fija. De esta manera, vemos que el parámetro de Tsallis puede recrear la presión de bolsa en tal forma que  $B$  no se necesita más. Después de algo de álgebra, uno puede obtener una relación entre ambos parámetros de Tsallis y la presión de bolsa como sigue

$$q = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15} \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7} \quad (4.3)$$

El parámetro de Tsallis se vuelve dependiente del radio debido a su relación con  $r$  de la presión de bolsa. La posibilidad de desarrollar un modelo de bolsa de hadrones sin la necesidad de una presión de bolsa será explorada en trabajo futuro. Actualmente, hemos notado que la correlación que surge de los sistemas de quarks y gluones como componentes de nucleones representan la presión de bolsa.



## CAPÍTULO

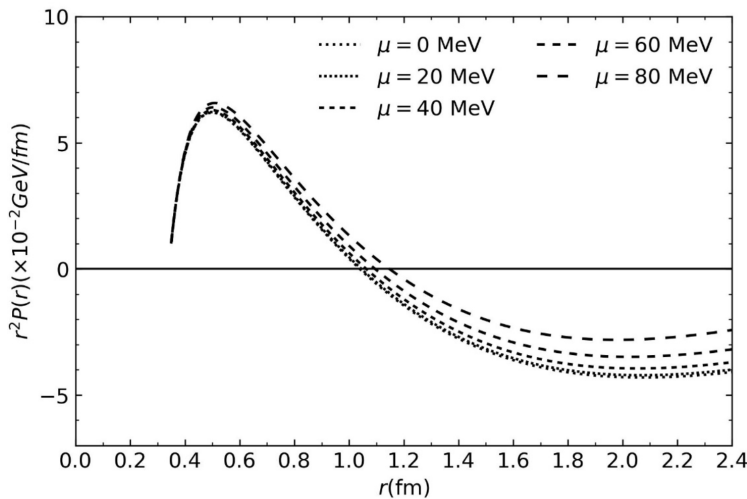
# 5

## DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN TOTAL Y PRESIÓN DE GLUONES

La distribución de presión total está dada por

$$P_q = \left[ \frac{7}{4}g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12}g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4 + \frac{8\pi^2}{90}g_Q g_G (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7 + C(V, \mu, q) \quad (5.1)$$

con  $C(V, \mu, q) = \frac{1}{2\pi^2}\mu^4$ , donde para  $q = 1$  se recupera la presión total convencional de BG es debido a los quarks y gluones y puede ser visto en la figura ?? . La presión está dada como una función del radio para varios potenciales químicos a parámetro  $q$  fijo. Si se incrementa la densidad de las partículas a una temperatura dada, los hadrones eventualmente se “romperán”, es decir, resultará en deconfinamiento. Esto pasa a densidades de aproximadamente  $0.72/\text{fm}^3$  o potenciales químicos por sobre el orden de 430MeV [Referencia 35]. A altas temperaturas, la transición de fase sería alcanzable en densidades más bajas



**Fig. 5.1:** Distribución de presión radial en el protón contra la distancia radial desde el centro para distintos potenciales químicos. El parámetro de Tsallis usado fue  $q = 1.05$ .

Las distribuciones estimadas muestran una presión repulsiva debajo de 1 fermi y luego una presión confinante por encima de esa distancia desde el centro del protón

La distribución de presión que resulta de las interacciones de los quarks en el protón contra la distancia radial desde el centro del protón fue obtenida en [referencia de nature]. usando datos experimentales. Una presión repulsiva fuerte cerca del centro del protón se desvanece a una distancia radial de aproximadamente 0.6fm. Más allá de esa distancia, la presión de ligadura aparece. En ambos casos, el pico de presión promedio extraído cerca del centro es extremadamente alto.

En [26], la distribución de presión de quarks dentro del protón es obtenida considerando un sistema quark aislado sin interacciones de gluones, encontrada usando **Gravitational form factors (GFF)** usando la expresión para

$$d_1(t) = d_1(0) \left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{-\alpha} \quad (5.2)$$

que viene de la expansión de Gegengabauer del término D (uno de los **GFF**)

$$D(z, t) = (1 - z^2) \left[ d_1(t) C_1^{3/2}(z) + \dots \right] \quad (5.3)$$

Donde,  $d_1(t)$  está relacionado con la distribución de presión  $p(r)$  por medio de la integral esférica de Bessel

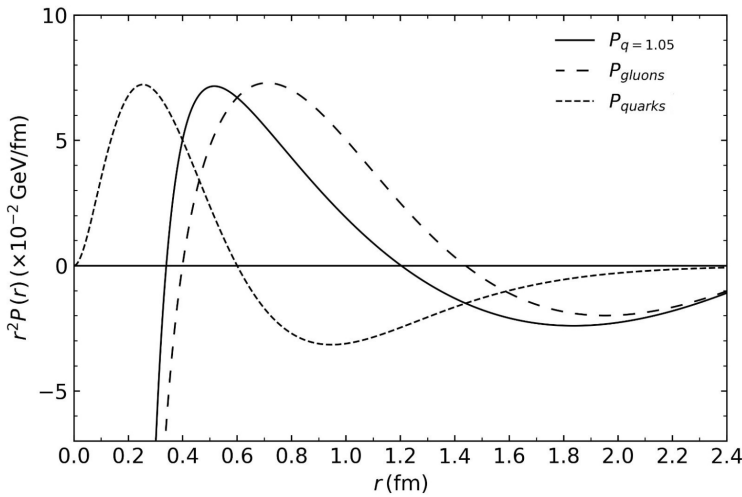
$$d_1(t) \propto \int \frac{j_0(r\sqrt{-t})}{2t} p(r) d^3r, \quad (5.4)$$

donde  $j_0$  es la primera función de Bessel esférica. A partir de (??), podemos encontrar la distribución de presión  $p(r)$  de quarks en términos de  $d_1(t)$ . La presión está dada por

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{1}{k_p \pi^2} \int_0^\infty x^4 j_0(rx) d_1(-x^2) dx \\ &= \frac{M^6 d_0}{16\pi \|M\| k_p} e^{-\|M\|r} (-3 + r\|M\|) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $k_p$  es la constante de proporcionalidad en (??), el parámetro  $\alpha = 3$  y la constante  $d_0 = d_1(0) = -2.04$  están dadas en [nature], mientras que la constante de proporcionalidad  $k_p = 55$  y  $\|M\| = 5$  son propuestos para reproducir los resultados de [Nature]

El perfil resultante se muestra en la figura ?? . Usamos esta distribución de presión de quarks para estimar la contribución de los gluones como una subtracción del total mostrado arriba.



**Fig. 5.2:** Extracción de la distribución de presión de gluones a partir del valor central en la referencia [26]. El potencial químic  $\mu = 100\text{MeV}$  fue usado para el perfil de la presión total.

## CAPÍTULO

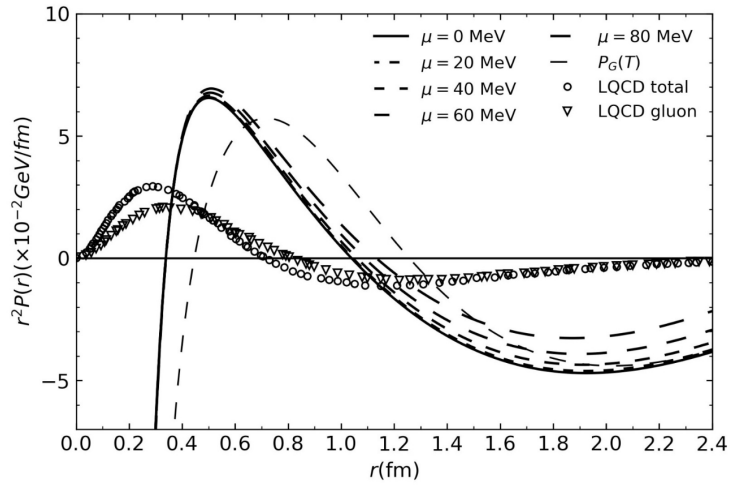
### 6

# RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura ?? muestra las distribuciones de presión obtenidas con el [T-MIT Bag Model](#) junto con las distribuciones de cálculos recientes de [LQCD](#) [33]

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) = x(3x + 2)$$

Como se mencionó arriba, la presión de bolsa y el parámetro  $q$  de Tsallis ambos representan aspectos efectivos de la interacción fuerte mediada por quarks y gluones. No tenemos un significado preciso para ellos, pero sí tenemos una relación específica entre el parámetro  $q$  y la fenomenología real, como se muestra en la ecuación (??). Creemos que la no extensividad del parámetro  $q$  tiene alguna conexión con interacciones de largo alcance.



**Fig. 6.1:** Resultados de Lattice QCD a partir de la referencia [33], y esas obtenidas con el modelo modificado MIT bag model.



## APÉNDICE

### A

## DERIVACIONES MATEMÁTICAS DETALLADAS

### A.1 Derivaciones detalladas del gas de gluones

#### A.1.1 Densidad de estados y función de partición

Para gluones (bosones sin masa), la relación energía-momento es:

$$\epsilon = pc = \hbar ck \quad (\text{A.1})$$

La densidad de estados en el espacio de fases:

$$g(\epsilon)d\epsilon = g_G \frac{V\epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2(\hbar c)^3} \quad (\text{A.2})$$

donde  $g_G = 16$  (8 tipos de gluones  $\times$  2 proyecciones de espín).

#### A.1.2 Integrales fundamentales

Las cantidades termodinámicas requieren evaluar integrales de la forma:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (\text{A.3})$$

Mediante el cambio  $x = \beta\epsilon$ :

$$I_n = \frac{1}{\beta^{n+1}} \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma(n+1)\zeta(n+1)}{(k_B T)^{n+1}} \quad (\text{A.4})$$

Valores particulares:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2.404 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.494 \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3 Energía del sistema (Ecuación ??)

La energía total se obtiene de:

$$E_G = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \frac{\pi^4 (k_B T)^4}{15} \quad (\text{A.7})$$

Y usando unidades naturales<sup>1</sup>

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} V T^4 \quad (\text{A.8})$$

### A.1.4 Presión (Ecuación ??)

Partiendo de la función de partición:

$$\ln \Xi = -\frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (\text{A.9})$$

Integrando por partes:

$$\ln \Xi = \frac{g_G V}{3\pi^2 (hc)^3 \beta} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V \pi^2 (k_B T)^3}{90 (hc)^3} \quad (\text{A.10})$$

La presión resulta:

$$P_G = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi = \frac{g_G \pi^2 (k_B T)^4}{90 (hc)^3} \quad (\text{A.11})$$

Confirmando la relación ultrarrelativista:

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} \quad (\text{A.12})$$

### A.1.5 Entropía (Ecuación ??)

A partir del potencial gran canónico:

$$S_G = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{V,\mu} = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} V T^3 \quad (\text{A.13})$$

### A.1.6 Demostración de $\mu = 0$ para gluones

El potencial químico debe anularse porque:

$$N_G(T, V, 0) = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \propto T^3 \quad (\text{A.14})$$

No hay restricción en el número de gluones (pueden crearse/aniquilarse libremente), por lo que  $\mu_G = 0$  en equilibrio termodinámico.

---

<sup>1</sup>**Nota sobre unidades naturales:** En las ecuaciones finales se ha tomado  $\hbar = c = k_B = 1$ , con  $h = 2\pi$  para consistencia con la literatura [QCD](#).



## A.2 Derivaciones detalladas del gas compuesto de quarks y anti-quarks

### A.2.1 Relación energía-momento y espectro de partículas

Para partículas con masa despreciable ( $m \ll \|\vec{p}\|/c$ ), la energía se aproxima a:

$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc \quad (\text{ultrarrelativista}) \quad (\text{A.15})$$

El número de estados cuánticos en el elemento de volumen  $d^3 p$  es:

$$g(\epsilon)d\epsilon = g_Q \frac{V \epsilon^2 d\epsilon}{(hc)^3 \pi^2} \quad (\text{A.16})$$

donde  $g_Q = 12$  (2 spines  $\times$  3 colores  $\times$  2 sabores).

### A.2.2 Función de partición y número de partículas

Para quarks (+) y antiquarks (−), la función de partición es:

$$\ln \Xi = \sum_{\epsilon} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

El número promedio de partículas se obtiene de  $\langle N_{\pm} \rangle = \partial \ln \Xi / \partial (\beta \mu_{\pm})$ :

$$N_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1} \quad (\text{A.18})$$

### A.2.3 Cálculo del exceso neto de quarks (Ecuación ??)

Transformando las integrales con  $x = \beta\epsilon$ :

$$\begin{aligned} N &= N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{(hc)^3 \pi^2} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} - \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \\ &= \frac{g_Q V (kT)^3}{\pi^2 (hc)^3} \left[ \int_{-\beta\mu}^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2 dx}{e^x + 1} - \int_{\beta\mu}^{\infty} \frac{(x - \beta\mu)^2 dx}{e^x + 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Desarrollando las integrales (ver Sección ??):

$$N = \frac{g_Q V}{6\pi^2} \left( \pi^2 \mu T^2 + \mu^3 \right) \quad (\text{A.20})$$

### A.2.4 Energía del sistema (Ecuación ??)

La energía total incluye contribuciones de quarks y antiquarks:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} \frac{\epsilon \cdot g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon \cdot g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \\ &= \frac{g_Q V}{\pi^2 (hc)^3} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Expandiendo en términos de  $\beta\mu$ :

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[ \underbrace{\frac{7\pi^2}{120}}_{\text{térmico}} + \underbrace{\frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4}_{\text{químico}} \right] \quad (\text{A.22})$$

### A.2.5 Presión y entropía

Usando la relación ultrarrelativista  $P = E/3V$ :

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{\mu^2}{4T^2} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 T^4} \right] \quad (\text{A.23})$$

Para la entropía, partiendo de  $S = (\partial/\partial T)(kT \ln \Xi)$ :

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] \quad (\text{A.24})$$

### A.2.6 Detalles de integración

Las integrales tipo Fermi-Dirac se resuelven mediante:

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1} = \Gamma(n+1) (1 - 2^{-n}) \zeta(n+1) \quad (\text{A.25})$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120} \quad (\text{A.26})$$

Para integrales con  $\mu \neq 0$ , se usa la expansión de Sommerfeld:

$$\int_{-\beta\mu}^\infty f(x) \frac{dx}{e^x + 1} \approx \int_0^{\beta\mu} f(x) dx + \frac{\pi^2}{6} f'(0) + O(e^{-\beta\mu}) \quad (\text{A.27})$$

—

## A.3 Derivaciones de Tsallis

En este apartado desarrollamos los cálculos hechos en la subsección ?? donde se hace la generalización de la presión y la entropía para el caso de un gas de quarks y gluones. En este caso, se considera que los quarks y gluones son dos subsistemas que interactúan entre sí, pero no dentro de cada uno de ellos. La interacción entre los dos subsistemas es representada por el parámetro de Tsallis  $q$ .

### A.3.1 Entropía no extensiva

Partiendo de la definición de Tsallis para dos subsistemas<sup>2</sup>:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (\text{A.28})$$

<sup>2</sup>Notése que esta expresión ya es usando unidades naturales puesto que la expresión original es (ver [? ]):

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}$$





Para quarks (A) y gluones (B):

$$\begin{aligned}
 S_q(Q + G) &= \underbrace{g_Q VT^3 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{S_1(Q)} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{2g_G \pi^2}{45} VT^3}_{S_1(G)} \\
 &\quad + \underbrace{(1 - q) g_Q g_G \frac{4\pi^2}{90} \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6}_{S_1(G)S_1(Q)}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Donde cada subsistema se asume que no tiene autointeracciones, es decir, que son independientes entre sí, por lo que la entropía de cada uno de ellos es la que se obtiene en el límite de BG ( $q = 1$ ).

### A.3.2 Presión no extensiva

De la relación de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_q}{\partial V} &= [7g_Q + 4g_G] \frac{\pi^2}{90} T^3 + \frac{1}{6} g_Q \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 T^3 \\
 &\quad + \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1 - q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^6 \\
 &= \frac{\partial P_q}{\partial T}
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Integrando sobre  $T$ :

$$\begin{aligned}
 P_q &= \int \left( \frac{\partial S_q}{\partial V} \right) dT \\
 &= \underbrace{\frac{37\pi^2}{90} T^4 + \dots}_{\text{BG}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1 - q) VT^7}_{\text{Tsallis}} + C(V, \mu, q)
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
 P_q &= \int \left( \frac{\partial S_q}{\partial V} \right) dT \\
 &= \underbrace{\left[ \frac{7}{4} g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12} g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4}_{\text{BG}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1 - q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7}_{\text{Tsallis}} + C(V, \mu, q).
 \end{aligned}$$

La constante  $C(V, \mu, q)$  se determina imponiendo  $P_{q=1} = P_{\text{BG}}$  (ver el término extensivo de (??)):

$$C = \frac{1}{3} g_Q \left[ \frac{1}{8\pi^2} \mu^4 \right] \tag{A.32}$$

Y sustituyendo los valores de los factores de degeneración, se llega a que la presión en la estadística de Tsallis de un sistema de quarks y gluones está dada como

$$P_q = \left[ \frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] T^4 + \frac{256\pi^2}{15} (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] VT^7 \quad (\text{A.33})$$

como habíamos esperado de (??). — —

—

## APÉNDICE

### B

## APPENDIX ON COLLISIONS

### B.1 On collisions

4

(B.1)

### B.2 Python code

#### Fragmento de código B.1: Python example

```
1 # Scripts/pressure.py
2 import numpy as np
3 from sympy import Symbol, Function, symbols, Pow, Integral, sin, pi,
  oo, lambdify
4
5 class PressureDistribution:
6     def __init__(self, r_min=0., r_max=2.4, n_samples=200, units="GeV
  /fm^3"):
7         self.r_min = r_min
8         self.r_max = r_max
9         self.r = np.linspace(r_min, r_max, n_samples)
10        self.n_samples = n_samples
11        self.units = units
12
13    def p_distr_tex(self):
14        P = self.p_distr_exp()
15        return latex(P)
16
17 class QuarksPressureDistribution(PressureDistribution):
18     def __init__(self, *args, **kwargs):
19         super().__init__(*args, **kwargs)
20         self.units = '\\times 10^{-2} GeV/fm^3'
21
```



```

22     def p_distr_exp(self):
23         d_1 = Function('d_1')
24         t, M, alpha, k_p = symbols('t M alpha k_p', real=True)
25         x = Symbol('x', real=True)
26         r = Symbol('r', real=True)
27         d_1 = Lambda(t, d_1(0) * (1 - (t / Pow(M, 2))) ** -alpha)
28         P = Integral(-d_1(-x**2) * x**3 * sin(r * x) / (pi**2 * k_p *
29             r), (x, 0, oo)) \
30             .subs({alpha: 3, k_p: 0.55, M: 5, d_1(0): -2.04}) \
31             .doit().subs({arg(r): 0}).simplify().factor()
32         return P
33
34     def p_distr(self):
35         r = Symbol('r', real=True)
36         P = lambdify(r, self.p_distr_exp(), 'numpy')
37         return P(self.r)

```

**Fragmento de código B.1:** Python example

# ACRÓNIMOS

**ALICE** A Large Ion Collider Experiment. [2](#)

**BE** Bose - Einstein. [10](#)

**BG** Boltzmann - Gibbs. [2](#), [9](#), [10](#), [13](#), [14](#), [23](#)

**BM** Modelo de Bolsa. [17](#)

**DVCS** Deep Virtual Compton Scattering. [2](#)

**FD** Fermi - Dirac. [10](#)

**GFF** Gravitational form factors. [24](#)

**HAL-QCD** Hadron to Atomic nuclei from Lattice QCD. [2](#)

**LQCD** Lattice QCD. [2](#), [25](#)

**MIT** Massachusetts Institute of Technology. [2](#), [4](#)

**QCD** Cromodinámica Cuántica. [1](#), [3](#), [4](#), [28](#)

**SLAC** Stanford Linear Accelerator Center. [4](#)

**T-MIT Bag Model** Tsallis-MIT Bag Model. [2](#), [25](#)



# GLOSARIO

**Boltzmann-Gibbs** La estadística de Boltzmann-Gibbs es una generalización de la mecánica estadística clásica que describe sistemas termodinámicos en equilibrio. La entropía de Boltzmann-Gibbs se define como:

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i,$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $p_i$  es la probabilidad del estado  $i$ , y  $W$  es el número total de estados posibles. La estadística de Boltzmann-Gibbs es válida para sistemas con interacciones aditivas, como los gases ideales y los sólidos cristalinos. [9](#)

**Matrices Gamma** Las matrices gamma ( $\gamma^\mu$ ) son un conjunto de matrices que cumplen con las relaciones de anticonmutación del álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I,$$

donde  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$  es el anticonmutador,  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski, e  $I$  es la matriz identidad. En la representación de Dirac, las matrices gamma tienen la forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli. Estas matrices son fundamentales en la formulación de la ecuación de Dirac, que describe partículas fermiónicas como los quarks y los electrones. [5](#)

**Tsallis** La estadística de Tsallis, propuesta por Constantino Tsallis en 1988, es una generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs que se utiliza para describir sistemas con propiedades no extensivas, es decir, sistemas donde las interacciones entre partículas no son aditivas. La entropía de Tsallis se define como:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^W p_i^q \right),$$

donde  $q$  es el parámetro de no extensividad,  $p_i$  es la probabilidad del estado  $i$ , y  $W$  es el número total de estados posibles. Para  $q \rightarrow 1$ , la entropía de Tsallis se reduce a la entropía de



Boltzmann-Gibbs:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.$$

La estadística de Tsallis ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo física de altas energías, sistemas complejos, y física de plasmas, entre otros. [2](#), [9](#)



# NOMENCLATURA

La siguiente es la lista de los símbolos matemáticos que fueron usados durante este trabajo

## Constantes Físicas

$k_B$	Boltzmann constant	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$\hbar$	Reduced Planck constant	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}$
$h$	Planck constant	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
$c$	Speed of light in a vacuum	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
$G$	Gravitational constant	$6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

## Conjuntos de Números

$\mathbb{H}$	Quaternions
$\mathbb{C}$	Complex numbers
$\mathbb{R}$	Real numbers

## Otros Símbolos

$V$	Constant volume
-----	-----------------



# BIBLIOGRAFÍA

- [] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70(1): 93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). [Elsevier].
- [] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. [Springer].
- [] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL [http://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_2\\_163\\_0/](http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/). [Numdam].
- [] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315>. [Annual Reviews].
- [] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539>. [APS].
- [] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki.  $N\Omega$  dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050>. [Elsevier].
- [] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki.  $p \Xi^-$  correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967: 856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041>. [Elsevier].
- [] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the lhc. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6>. [Nature].



- [ ] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive p- $\varphi$  interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.172301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301>. [APS].
- [ ] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. [APS].
- [ ] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: doi:10.1103/physrevd.10.2599. [APS].
- [ ] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y>. [Springer].
- [ ] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. [Springer].
- [ ] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). [Elsevier].
- [ ] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. [Springer].
- [ ] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132>. [EPJ].
- [ ] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. [Springer].
- [ ] I. Bediaga, E.M.F. Curado, and J.M. de Miranda. A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in  $e^+ e^- \rightarrow$  hadrons. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 286(1–2):156–163, October 2000. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00368-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00368-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X). [Elsevier].
- [ ] TASSO Collaboration. Jet production and fragmentation in  $e^+ e^-$  annihilation at 12 to 43 GeV. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 22(4):307–340, December 1984. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01547419>. [Springer].
- [ ] CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 105:022002, Jul 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.022002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.022002>. [APS].
- [ ] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy  $pp$  collisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5):054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. [APS].



- [ ] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at lhc energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: 10.1088/1361-6471/aaaea0. [IOPScience].
- [ ] Arvind Khuntia, Sushanta Tripathy, Raghunath Sahoo, and Jean Cleymans. Multiplicity dependence of non-extensive parameters for strange and multi-strange particles in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 7$  s = 7 tev at the lhc. *The European Physical Journal A*, 53(5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8>. [Springer].
- [ ] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, and Venktesh Singh. Transverse momentum spectra of hadrons in high energy pp and heavy ion collisions. *Journal of Physics Communications*, 2(3):035003, March 2018. ISSN 2399-6528. doi: 10.1088/2399-6528/aab00f. [IOPScience].
- [ ] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, Vineet Kumar, and Venktesh Singh. Strange hadron production in pp, ppb and pbpb collisions at lhc energies. *The European Physical Journal A*, 53(5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7>. [Springer].
- [ ] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. [Nature].
- [ ] CLAS Collaboration. Measurement of deeply virtual compton scattering beam-spin asymmetries. *Phys. Rev. Lett.*, 100:162002, Apr 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.162002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.162002>. [APS].
- [ ] CLAS Collaboration. Cross sections for the exclusive photon electroproduction on the proton and generalized parton distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 115:212003, Nov 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.212003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.212003>. [APS].
- [ ] Dimitar Lubomirov Mihaylov. First experimental test of hal qcd lattice calculations for the multi strange hyperon - nucleon interaction with alice. *Nuclear Physics A*, 1005:121760, January 2021. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760>. URL <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760>. [Elsevier].
- [ ] Frank Wilczek. Quantum chromodynamics: The modern theory of the strong interaction. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, (32):177–209, 1982. URL <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141>. <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141>.
- [ ] K. Johnson. The m.i.t bag model. *ACTA PHYSICA POLONICA*, B6(6):1–28, 1975. URL <https://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=6&page=865>.