

# Thesis

Manuel Alejandro Matías Astorga

23 de noviembre de 2024



---

# ABSTRACT

## **Resumen**

Este es el resumen en español

## **Abstract**

This is the abstract



---

# AGRADECIMIENTOS

CONAHCYT, CINVESTAV, Dr Gerardo H. C.



---

# CONTENTS

<b>Abstract</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>List of Figures</b>	<b>VII</b>
<b>List of Tables</b>	<b>IX</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1. Estadística de Tsallis</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Presión dentro del hadrón . . . . .	7
1.2.1. Presión de gluones, un gas ideal de Bose - Einstein ultrarelativista . . . . .	8
1.2.2. Presión de quarks, un gas ideal de Fermi - Dirac ultrarelativista . . . . .	11
1.3. El protón en el modelo de Tsallis . . . . .	17
1.3.1. La entropía en el modelo de Tsallis . . . . .	17
1.3.2. La presión en el modelo de Tsallis . . . . .	19
<b>2. Modelo de bolsa</b>	<b>21</b>
2.1. Modelo de bolsa . . . . .	21
2.1.1. ¿Por qué un modelo de bolsa? . . . . .	21
2.2. La aproximación de la cavidad esférica . . . . .	22
<b>3. Características de estructura del protón</b>	<b>25</b>
<b>4. Significado físico del parámetro <math>q</math> de Tsallis</b>	<b>29</b>
<b>5. Distribución de presión total y presión de gluones</b>	<b>31</b>
<b>6. Resultados y conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>7. NOTAS</b>	<b>35</b>
7.1. Notas de DeGrand sobre masas y otros parámetros de hadrones ligeros . . . . .	35
7.2. Notas sobre <i>Baryon structure in the bag theory</i> . . . . .	36
7.2.1. Cálculos . . . . .	36

<b>8. Notas sobre New Extended Model Of Hadrons de A. Chodos</b>	<b>41</b>
8.1. Campos escalares . . . . .	41
8.1.1. Formulación del problema clásico . . . . .	41
8.1.2. Invariancia de Poincaré del problema clásico . . . . .	42
8.1.3. Mecánica clásica en dos dimensiones . . . . .	43
8.2. Campos fermiónicos . . . . .	45
8.2.1. Declaración de las condiciones de frontera . . . . .	45
<b>9. Notas sobre Masses and other parameters of the light hadrons DeGrand</b>	<b>47</b>
9.1. Introducción . . . . .	47
<b>A. Appendix On Collisions</b>	<b>49</b>
A.1. On collisions . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



---

# LIST OF FIGURES

1.	Red LQCD . . . . .	3
2.	Diagrama de bolsa . . . . .	4
1.1.	Número de partículas para un gas de electrones a $T = 0$ . . . . .	12
2.1.	Diagrama de bolsa con condiciones de frontera . . . . .	22
3.1.	Temperatura como función del radio del protón . . . . .	25
3.2.	Posibles estructuras del modelo de bolsa . . . . .	26
3.3.	Presión de bolsa como función del radio del protón . . . . .	26
5.1.	Presión total en el modelo T-MIT bag model . . . . .	31
5.2.	Presión total, de quarks y de gluones . . . . .	32
6.1.	MIT-Bag model . . . . .	33



---

# LIST OF TABLES







---

# INTRODUCCIÓN

De acuerdo con el modelo de Quantum Chromodynamics (QCD) las partículas hadrónicas están formadas de quarks los cuales se encuentran confinados dentro de la dichos hadrones.

xd

Por años, varias descripciones fenomenológicas de las estructuras del protón han sido propuestas, tales como modelos de cuerdas [1, 2] [1, 2], que describe hadrones como cuerdas oscilantes, modelos de bolsa [3, 4], que considera quarks confinados en una cavidad, y modelos de valones [5].

Con el fin de explorar la física de materia quark, se han desarrollado varias técnicas que permiten vislumbrar los efectos de ese tipo de interacciones como por ejemplo Lattice QCD (LQCD); y por otro lado, se han desarrollado modelos que pueden bosquejar este tipo de interacciones a partir de simplificaciones como sucede en el modelo de bolsa (Bag Model (BM)), el modelo de cuerdas, el modelo de partones y un largo etcétera[4], puesto que ocurren interacciones no lineales dentro de los hadrones.

Cálculos de LQCD proporcionan resultados confiables de estructuras hadrónicas que contienen quarks pesados y ha sido recientemente usadas como cálculos de estado de arte por la colaboración HAL-QCD [6, 7]. La descripción obtenida por HAL QCD de los estados finales de interacciones fuertes entre sistemas protón-neutrón y protón hiperones fue comparado a los resultados experimentales publicados por la colaboración ALICE [8, 9]

LQCD consiste en una técnica numérica que lleva a cabo gran cantidad de cálculos en una red espacio - temporal Euclídea muy grande (los parámetros de red  $a$  son del orden de  $fm$  o como se menciona en [INTRO A LQCD], en un rango de  $2 GeV \leq a^{-1} \leq 5 GeV$ ), figura 1. Debido a que ocupa redes con millones de nodos, la dificultad de este tipo de modelos recae en la cantidad de cálculos necesarios para resolver dichos modelos. Partiendo de esto, se tiene un nuevo problema: *el problema del signo* [más referencias], el cual surge en simulaciones Monte Carlo como las que se ocupan para resolver LQCD, esto consiste en que el peso de las configuraciones de simulaciones cuánticas Monte Carlo se vuelven negativas o incluso complejas, y por lo tanto, no pueden ser interpretadas como probabilidades clásicas[Sign problem in QMC simulation].

NOTA: Hablar acerca del operador de Dirac no hermitiano

Los cálculos de LQCD han conseguido resultados fiables acerca de las estructuras de hadrones

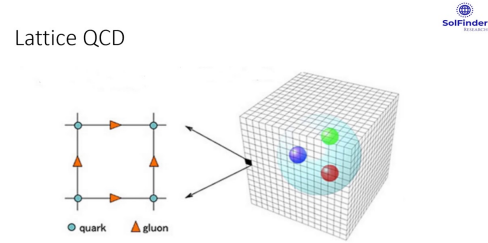


Figure 1: *Diagrama de red tipo LQCD en donde los nodos se encuentran donde los quarks y las aristas representan campos gluónicos*

que contienen quarks pesados [HAL QCD]

NOTA: Hablar acerca de resultados obtenidos con LQCD

Hemos propuesto un modelo que se basa en el modelo de bolsa (BM) del Massachusetts Institute of Technology (MIT) [add ref] y estadística no extensiva de Tsallis. Para simplificarlo lo llamaremos T-MIT bag model. Por un lado hemos considerado el marco teórico del modelo de bolsa el cual consiste en que los hadrones son considerados como recipientes cerrados en donde se hallan un mar de quarks y gluones que interaccionan y están encerrados dentro de los límites del hadrón que es la bolsa por una presión dirigida hacia adentro que contrarresta los efectos de la presión debida a los quarks, los gluones y su fuerza de interacción (figura 2) [referencias al modelo de bolsa].

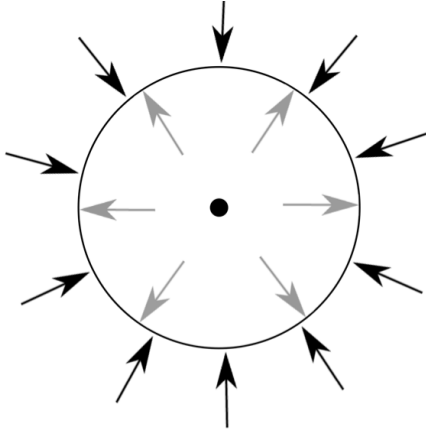


Figure 2: *Diagrama de bolsa, en el interior de la bolsa tenemos la presión generada por un plasma de quarks y gluones que considera tanto la presión dada por los quarks, por los gluones y por la interacción entre estos (dentro) y por otro lado la presión hacia el interior dada por la bolsa que coincide con los límites del hadrón.*

De esta manera, en nuestro modelo consideramos una simplificación de todos los cálculos que se ocupan en QCD, con el fin de reducir esas interacciones a la contribución de una presión de bolsa  $B$ .

Por otro lado, consideramos la estadística no extensiva de Tsallis ya que proporciona el modelo necesario para representar al plasma de quarks y gluones (visto como gases de Fermi y Dirac por simplificación) con un parámetro que considera la interacción entre los quarks y los gluones. Este modelo se ha escogido por sus varias aplicaciones en otras áreas de investigación [más referencias] y que se ajusta muy bien a este modelo por tratarse de partículas que interaccionan y con ello simplifican la no linealidad propia de esto [más referencias]. Cabe mencionar, que en este marco se pueden considerar gases con potencial químico,  $\mu$ , no nulo lo cual es una ventaja a la hora de estudiar los diversos escenarios en los que los hadrones se encuentran.

Aquí proponemos una descripción fenomenológica basada en el modelo de bolsa del MIT [10, 11] y una aproximación estadística no extensiva. Esta podría ser referida como T-MIT bag model para abreviar la unión de la estadística no extensiva de Tsallis y el MIT BM [12]

De esta manera, el modelo T-MIT bag model es un modelo que introduce un potencial químico,  $\mu$ , distinto de cero para estudiar el modelo hadrónico un poco más extendido. Hemos comparado estos resultados con los obtenidos en [Nature], donde se ha obtenido la distribución de presión de quarks dentro del protón usando Deep Virtual Compton Scattering (DVCS), lo cual consiste en dispersar fotones virtuales de altas energías radiadas por electrones y la emisión subsecuente de un protón real. El fotón en el estado final permite la estimación de transferencia de momento al protón, que permanece intacto. El análisis recae en métodos desarrollados para extraer información a partir de Generalized Parton Distributions (GPD) y Compton Form Factors (CFFs). Así se obtuvo una presión repulsiva de los quarks cerca del centro del protón y una presión de atadura a distancias por encima de  $0.6 fm$  del centro. Sin embargo, hay que recordar que esto solo corresponde a los quarks, la presión debido a los gluones no se considera.

NOTA: Agregar referencias respecto a resultados experimentales acerca de la presión dentro del protón y la estructura del hadron.

La estadística de Tsallis fue introducida como una generalización de la aproximación de BG [13–17]. La estadística de Tsallis ha sido ampliamente usada en física de altas energías. Fue introducida por primera vez para describir producción de partículas en colisiones electrón



positrón. Las distribuciones diferenciales de momento transversal para hadrones cargados con respecto al eje de jet en varias energías de centro de masa fueron ajustadas existosamente con una función de Tsallis [18, 19]. Las distribuciones de Tsallis también han sido usadas en colisiones protón protón[20–23] y iones pesados [24, 25] para describir los datos experimentales.

Aquí, incorporamos la estadística no extensiva de Tsallis en el T-MIT bag model para describir fermiones y bosones como componentes no independientes de los hadrones. En el nuevo T-MIT bag model, uno puede estimar la distribución de presión total dentro de los nucleones. Comparamos el perfil resultante con la distribución de presión extraída de quarks publicada recientemente [26].

Por el lado experimental, los proyectos están ahora implementando técnicas para ganar más conocimiento en la estructura del hadrón[27] así como los efectos residuales de interacciones fuertes nucleon nucleon y nucleon hiperon [28, 29]. El colisionador de iones de electrones

En el trabajo que se describe a continuación tenemos la siguiente estructura: En el capítulo 2 se explica a detalle el modelo de bolsa que hemos ocupado en este trabajo, se explica por qué es útil el modelo de bolsa, sus limitaciones y se desarrollan las ecuaciones necesarias para hallar la presión de bolsa y una breve explicación de cómo es que se puede interpretar, en una sección posterior se busca darle otra interpretación; el capítulo 1 hace una explicación detallada de cómo se tratan los quarks y los gluones dentro de los hadrones y cómo es que la no extensividad produce un parámetro de Tsallis  $q$ , tal que sustituye la interacción entre quarks y gluones y explica por qué es una extensión de la estadística de Boltzmann - Gibbs (BG): el capítulo 4 trata de un último preámbulo y es que hemos considerado que la temperatura, parámetro necesario para hallar la presión dentro de la estadística de Tsallis, es función de la distancia respecto al origen de nuestro hadrón; el capítulo 5 explica primeramente los resultados obtenidos en [Nature] y cómo se obtiene la distribución de presión de quarks usando DVCS, y a partir de nuestro marco T-MIT bag model encontramos la presión de gluones, se muestran algunos ejemplos de cómo varía a distintos valores de potencial químico,  $\mu$ , y se compara con la presión de quarks de nature y la presión total; el capítulo 6 habla de una posible interpretación física del parámetro de Tsallis  $q$ , y su relación con la presión de bolsa; finalmente en el capítulo 7 comparamos nuestros resultados obtenidos con el modelo T-MIT bag model y esos de [Nature]



---

---

# CHAPTER 1

---

## ESTADÍSTICA DE TSALLIS

### 1.1. Introducción

La mecánica estadística estándar está basada en la entropía de Boltzmann - Gibbs (BG)

$$S_{\text{BG}} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (1.1)$$

donde  $W$  es el número de configuraciones microscópicas del sistema y  $p_i$  es la probabilidad de acceder a la  $i$ -ésima configuración. Sin embargo, sistemas de no lineales dinámicos de muchos cuerpos requieren *ergodicidad* (que su valor esperado sea igual a su promedio a largo plazo). Para sistemas no ergódicos, que sucede con sistemas complejos, no existe razón para usar estadística BG. Por esta razón se ha requerido de una extensión para sistemas de este tipo, llamados *no extensivos* (pues no son proporcional al número total de elementos del sistema), una de ellas es la siguiente, que extiende la entropía de BG como

$$S_q = k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathbb{R}; S_{q=1} = S_{\text{BG}}) \quad (1.2)$$

Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilísticamente independientes  $A$  y  $B$  (i.e., si  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (1.3)$$

(más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de BG,  $k$ ) de donde se observa claramente que cuando  $q = 1$  se regresa a la estadística de BG [ref Tsallis statistics].

NOTA: En la misma referencia se agrega la obtención de la energía de Tsallis para las masas

### 1.2. Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (1.3), podemos obtener la entropía dentro de un hadrón que consiste en una mezcla de gases quarks y gluon. De esta manera empezamos por considerar el cálculo de cada contribución, los quarks vistos como un gas ideal de Fermi ultrarelativista y los gluones vistos como un gas ideal de Bose - Einstein (BE) ultrarelativista, ambos sin masa y no interactuantes, la interacción vendrá al final del parámetro  $q$  de Tsallis

### 1.2.1. Presión de gluones, un gas ideal de Bose - Einstein ultrarelativista

Los niveles de energía de un bosón visto como un gas ideal de BE están dados por  $\epsilon_k = cp = \hbar ck$ ,  $p$  es la magnitud del momento de las partículas del gas, y  $k$  la magnitud del vector de onda. Y la función de partición para un gas ideal de BE está determinada por:

$$\Xi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_k}}, \quad (1.4)$$

donde  $\beta = \frac{1}{kT}$ , y  $\xi = e^{\beta \mu}$  es la fugacidad del gas,  $T$  es la temperatura del gas,  $V$  el volumen del gas y  $\mu$  el potencial químico del gas. El número de partículas promedio en cada estado de energía  $\epsilon_k$  se calcula a través de la ecuación:

$$\langle n_k \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \ln \Xi^{\text{BE}} \Big|_{\xi, V, \epsilon_{i \neq k}}, \quad (1.5)$$

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (1.6)$$

De tal manera que el número total de partículas promedio y energía se pueden calcular como

$$N(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (1.7)$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle \epsilon_k = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1}. \quad (1.8)$$

Para una gran cantidad de partículas, podemos sustituir la suma por una integral, considerando el número total de estados en el espacio fase clásico tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} \\ &= V \int \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \end{aligned} \quad (1.9)$$

Usando la relación  $\epsilon_k = cp$  obtenemos

$$\Sigma = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 d\epsilon \quad (1.10)$$

De esta forma, sustituyendo (1.10) en (1.7) y (1.8), obtenemos

$$N(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon} - 1} \quad (1.11)$$

$$E(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon} - 1} \quad (1.12)$$

Dado que tratamos con partículas sin masa, es posible tener infinitas partículas con energía  $\epsilon_0 = 0$ . De esta manera, el potencial químico  $\mu$  debe ser cero pues es posible crear infinitas partículas con energía 0 sin afectar a nuestros resultados puesto que no contribuyen a la energía

total del sistema. Así, si  $\mu = 0$ , entonces  $\xi = 1$ . Y sustituyendo en las ecuaciones (1.11) y (1.12) obtenemos

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (1.13)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (1.14)$$

Para resolver las integrales, consideramos el cambio de variable  $x = \beta\epsilon$ , por lo que  $\epsilon = \frac{x}{\beta}$  y así  $d\epsilon = \frac{dx}{\beta}$  y así, entonces

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \quad (1.15)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (1.16)$$

Con lo cual, obtenemos las funciones especiales  $g_n(\xi)$  con  $0 \leq \xi \leq 1$  tales que

$$g_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{\xi^{-1} e^x - 1} \quad (1.17)$$

Tal que las integrales de (1.15) y (1.16) se vuelven

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3) g_3(1) \quad (1.18)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4) g_4(1) \quad (1.19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.18) y (1.19) en (1.15) y (1.16), respectivamente, y usando la propiedad  $g_n(1) = \zeta(n)$ , con  $\zeta(n)$  representando la función zeta de Riemann, se obtiene

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \Gamma(3) \zeta(3) \quad (1.20)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \Gamma(4) \zeta(4) \quad (1.21)$$

Ya que  $\Gamma(n-1) = n!$  y  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  se llega a

$$N(T, V) = 8\pi V \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \zeta(3) \quad (1.22)$$

$$E(T, V) = \frac{8\pi V}{(hc)^3} (kT)^4 \frac{\pi^4}{30} \quad (1.23)$$

Y usando unidades naturales  $\hbar = k = x = 1$  y  $h = 2\pi\hbar = 2\pi$ , así entonces

$$N(T, V) = \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) VT^3 \quad (1.24)$$

$$E(T, V) = \frac{\pi^2}{30} VT^4 \quad (1.25)$$

Finalmente, dado que hay tres componentes independientes de la carga de color, y consecuentemente  $3 \times 3 - 1$  generadores de  $SU(3)$ , hay 8 diferentes tipos de gluones, y como cada gluón tiene dos proyecciones de espín, el factor de degeneración corresponde a  $g_G = 8 \times 2 = 16$ . Por lo tanto, pasamos a que las expresiones para el número total de gluones y la energía total de gluones como un gas ideal de BE ultrarrelativista son

$$N_G(T, V) = \frac{g_G}{\pi^2} \zeta(3) VT^3 \quad (1.26)$$

$$E_G(T, V) = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4 \quad (1.27)$$

Para calcular la contribución de presión debido a los gluones, partimos de la función de partición  $\Xi^{BE}$  y el potencial macrocanónico o potencial gran canónico  $\phi$

$$\begin{aligned} \phi &= -PV = -kT \ln \Xi^{BE} \\ \Rightarrow P &= \frac{kT}{V} \ln \Xi^{BE} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Calculando el logaritmo de la función de partición (1.4) se tiene

$$\ln \Xi^{BE} = - \sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 - \xi e^{-\beta \epsilon_k}) \quad (1.29)$$

Nuevamente ocupamos el hecho de que son estados energéticos tan cercanos y tal cantidad de partículas en distintos estados energéticos, podemos sustituir la suma por una integral, usando el número total de estados (1.10) y el hecho de que no hay potencial químico ( $\mu = 0 \Rightarrow \xi = 1$ ) para obtener

$$\ln \Xi^{BE} = - \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \epsilon^2 \ln (1 - e^{-\beta \epsilon}) d\epsilon \quad (1.30)$$

Realizando la integral por partes tendremos

$$\begin{aligned} \ln \Xi^{BE} &= - \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[ \frac{1}{3} \epsilon^3 \ln (1 - e^{-\beta \epsilon}) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3} \beta \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1} \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{kT}{3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{-\beta \epsilon} - 1} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Resolviendo la integral, de la misma forma que con la ecuación (1.14), usando (1.19) y simplificando se llega a que la presión ejercida por un gas de partículas ultrarrelativistas tipo BE, usando la expresión (1.28), está dada como

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (1.32)$$

Y dado que existen  $g_G$  estados degenerados para la energía de los gluones, entonces, la presión correspondiente a los gluones es, usando (1.27),

$$P_G = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (1.33)$$

Como cálculo final, hallamos la entropía a partir del potencial gran canónico por medio de la relación

$$\begin{aligned}\phi &= E - TS - \mu N = -PV, \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{T} (E + PV - \mu N)\end{aligned}\tag{1.34}$$

Sustituyendo la ecuación (1.32) en (1.34) y considerando  $\mu = 0$ , la entropía del sistema es

$$S = \frac{4}{3} \frac{E}{T}\tag{1.35}$$

Y tomando en cuenta que tratamos con la energía de gluones (1.27), la entropía del gas de gluones está dado como

$$S_G = 4g_G \frac{\pi^2}{90} VT^3.\tag{1.36}$$

### 1.2.2. Presión de quarks, un gas ideal de Fermi - Dirac ultrarrelativista

Las partículas ultrarelativistas tienen una relación energía-momento  $\epsilon = \|\vec{p}\|c$ <sup>1</sup>.

Hay ciertos bosones con esta relación energía-momento, pero el número de fermiones con masa en reposo despreciable es muy poca. Para casos prácticos, “despreciable” significa una masa en reposo del orden de los neutrinos ( $m_\nu < 8\text{eV}$ ). El gas ultrarelativístico de Fermi - Dirac (FD) puede ser visto como un gas caliente de fermiones con masa en reposo no despreciable, esto es, si el momento promedio en el gas es grande comparado con  $mc$ , es decir, si la energía térmica promedio  $kT$  es grande comparada con la masa en reposo.

A partir de mecánica cuántica relativista, se sabe que uno puede crear pares de partículas y antipartículas (quarks y antiquarks, en nuestro caso) del vacío con un gasto energético de  $2mc^2$ . Por lo tanto, no debemos considerar un gas de partículas FD solitarias, sino como pares partícula-antipartícula.

Así, trataremos con una mezcla de dos gases ideales FD, entre las cuales, son posibles reacciones “químicas”.

La función de partición para un gas ideal de FD está determinada por:

$$\Xi^{\text{FD}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \xi e^{-\beta\epsilon_k})\tag{1.37}$$

En este caso se considera una mezcla de gases (quarks y antiquarks), entonces la función de partición está dada como

$$\Xi(T, V, \mu_+, \mu_-) = \prod_{\epsilon_+} (1 + \xi_+ e^{-\beta\epsilon_+}) + \prod_{\epsilon_-} (1 + \xi_- e^{-\beta\epsilon_-})\tag{1.38}$$

donde  $\xi_+ = e^{\beta\mu_+}$  y  $\xi_- = e^{\beta\mu_-}$  y el signo  $+$  corresponde a las partículas mientras que el signo  $-$  a las antipartículas. El número promedio de partículas en cada estado de energía se puede calcular usando la ecuación (1.5) y se obtiene

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon_k} + 1}\tag{1.39}$$

por lo que el número total promedio para las partículas se calcularía a través de

$$\begin{aligned}N_+(T, V, \mu_+) &= \sum_{\epsilon_+} \langle n_{\epsilon_+} \rangle \\ &= \sum_{\epsilon_+} \frac{1}{\xi_+^{-1} e^{\beta\epsilon_+} + 1}\end{aligned}\tag{1.40}$$

---

<sup>1</sup>De la fórmula general  $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ , para masa en reposo despreciable.

Y de manera análoga se obtiene el número total promedio de antipartículas

$$\begin{aligned} N_-(T, V, \mu_-) &= \sum_{\epsilon_-} \langle n_{\epsilon_-} \rangle \\ &= \sum_{\epsilon_-} \frac{1}{\xi_-^{-1} e^{\beta \epsilon_-} + 1} \end{aligned} \quad (1.41)$$

En equilibrio termodinámico el número de promedio de partículas y antipartículas cambia constantemente debido al proceso de creación y aniquilación, por lo que no es conveniente fijar el número de ambas y posteriormente determinar los potenciales químicos. En lugar de ello, se realiza el siguiente análisis a fin de fijar el potencial químico.

Los cambios  $dN_+$  y  $dN_-$  de los dos números de partículas están relacionados por la relación

$$dN_+ = dN_-$$

Las reacciones que suceden en el gas de quarks y antiquarks son de la forma

$$q + \bar{q} \rightleftharpoons \text{productos de reacción} + \Delta E$$

observamos que una antipartícula se crea o aniquila con cada partícula. Además, el resto de las partículas generadas por las reacciones creación-aniquilación no juegan un rol en el gas que estamos considerando de quarks antiquarks. Por esta razón, podemos notar que los potenciales químicos de partículas y antipartículas tienen que ser iguales con signos opuestos, ya que los productos de la reacción no contienen potencial químico,

$$\mu_+ + \mu_- = 0, \quad z_+ z_- = 1 \quad (1.42)$$

Los números de partículas  $N_+$  y  $N_-$  no son independientes uno de otro, y por lo tanto no hay dos fugacidades independientes, sino en realidad solo uno. Sin embargo, en vez de  $N_+$  y  $N_-$  uno puede fijar la diferencia  $N = N_+ - N_-$ , el excedente de partículas, yaa que no está influenciada por los procesos de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} N &= N_+ - N_- \\ &= \sum_{\epsilon_+ > 0} \frac{1}{\xi_+^{-1} e^{\beta \epsilon_+} + 1} - \sum_{\epsilon_- > 0} \frac{1}{\xi_-^{-1} e^{\beta \epsilon_-} + 1} \end{aligned} \quad (1.43)$$

A partir de esta ecuación, uno determina la fugacidad tomando en cuenta la ecuación (1.42). En este sistema, el excedente  $N$  de partículas no cambia por creación-aniquilación, pero el número de partículas medio  $N_+$  y  $N_-$  no puede ser controlado.

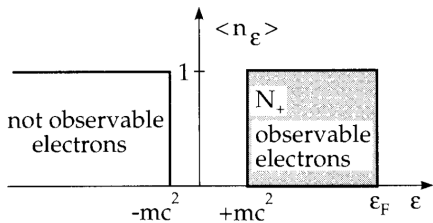


Figure 1.1:  $\langle n_k \rangle$  para un gas de electrones a  $T = 0$

Para explicar lo anterior, tenemos que considerar el espectro de energía de la ecuación libre de Dirac. En el caso ultrarelativista,  $m \rightarrow 0$ . En este espectro también hay estados de energía  $\epsilon \leq -mc^2$  además de los estados de energía positiva  $\epsilon \geq mc^2$ . Uno puede describir ahora partículas y antipartículas en el espectro simultáneamente, si uno asume que en el vacío, sin partículas, todos los estados de energía negativa continua están ocupadas por electrones (inobservables).

En esta imagen de partículas (como son los electrones), en el continuo negativo (agujeros) son interpretados como

antipartículas.

Para un gas de electrones con  $N_+$  electrones y una energía de Fermi  $\epsilon_{FD} > mc^2$  tenemos en  $T = 0$  la situación de la figura 1.1.



Si se aumenta la temperatura del gas de electrones, al principio, los electrones cerca de la energía de Fermi son excitados a estados más altos  $\epsilon > \epsilon_{\text{FD}}$ . Esto ocurre en un rango de energía de anchura aproximada  $kT$  alrededor de la energía de Fermi.

Sin embargo, si la temperatura es del orden de  $2mc^2$ , más y más electrones de un continuo más bajo pueden ser excitados en estados libres  $\epsilon > \epsilon_{\text{FD}}$ . Estos electrones dejan huecos en el continuo más bajo, que representan positrones observables. El número de electrones observables también se incrementa. La diferencia  $N_+ - N_-$  sin embargo es la misma que antes. La energía negativa de los huecos  $\epsilon_{\text{huecos}} < -mc^2$  es simplemente relacionada a la energía positiva del positrón correspondiente como  $\epsilon_{e^+} = -\epsilon_{\text{hueco}}$ .

El número de electrones y positrones observables puede ser calculado como sigue:

$$N_+ = \sum_{\epsilon > 0} \langle n_k \rangle, \quad N_- = \sum_{\epsilon < 0} (1 - \langle n_k \rangle) \quad (1.44)$$

donde  $\langle n_k \rangle$  está dado por (1.39) y  $\mu = \mu_+$  como el potencial químico de los electrones (partículas). La expresión para  $N_-$  puede ser transformada como

$$\begin{aligned} N_- &= \sum_{\epsilon < 0} \left( 1 - \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} \right) \\ &= \sum_{\epsilon < 0} \frac{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon}}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} \\ &= \sum_{\epsilon < 0} \frac{1}{\xi e^{-\beta\epsilon} + 1} \end{aligned} \quad (1.45)$$

El espectro de energía de la ecuación libre de Dirac es simétrica alrededor de  $\epsilon = 0$ . Así, uno puede sustituir  $\epsilon \rightarrow -\epsilon_-$  en (1.45) y entonces consideramos positrones con energía positiva.

$$N_- = \sum_{\epsilon_- > 0} \frac{1}{\xi e^{\beta\epsilon_-} + 1} \quad (1.46)$$

Y por otro lado  $\xi = \xi_-^{-1}$ ; es decir,  $\mu_+ = -\mu_-$ . Ambas interpretaciones llevan a los mismos resultados, pero en algunos casos, la imagen de partícula-hueco de Dirac es más conveniente. Por ejemplo, el exceso de partículas en esta imagen es simplemente

$$\begin{aligned} N &= N_+ - N_- = \sum_{\epsilon > 0} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon < 0} (1 - \langle n_\epsilon \rangle) \\ &= \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon < 0} 1 = \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle^{\text{vac}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ahora procedemos con el cálculo de la presión. Tenemos que reescribir las sumas en la ecuación (1.43)

$$g(\epsilon) = g \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \epsilon^2 \quad (1.48)$$

$$\ln \mathcal{Z} = g \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \epsilon^2 d\epsilon \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)} \right) \right] \quad (1.49)$$

de esta manera, podemos reescribir el número total de partículas

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[ \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} - \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \quad (1.50)$$

Para la primera integral se hace el cambio de variable  $x = \beta(\epsilon - \mu)$  por lo que  $\epsilon = \frac{x}{\beta} + \mu$  y  $d\epsilon = \frac{dx}{\beta}$ . Para la segunda, se hace  $y = \beta(\epsilon + \mu)$  por lo que  $\epsilon = \frac{y}{\beta} - \mu$  y  $d\epsilon = \frac{dy}{\beta}$ . Y haciendo los respectivos cambios en los límites de integración, se obtiene

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta} \left[ \int_{-\beta\mu}^{\infty} \frac{(\frac{x}{\beta} + \mu)^2}{e^x + 1} dx - \int_{\beta\mu}^{\infty} \frac{(\frac{y}{\beta} - \mu)^2}{e^y + 1} dy \right] \quad (1.51)$$

Factorizando el término  $\beta$  en los numeradores de (1.51) y reacomodando los límites de integración, podemos reescribir

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \left[ \int_{-\beta\mu}^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx - \int_{\beta\mu}^{\infty} \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \left[ \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\beta\mu}^0 \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy - \int_0^{\infty} \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy \right] \end{aligned} \quad (1.52)$$

Juntando las integrales que van de cero a infinito en (1.52), y reemplazando  $y \rightarrow x$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx - \int_0^{\infty} \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy &= \int_0^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2 - (x - \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx \\ &= 4\beta\mu \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Podemos juntar el resto de las integrales si trabajamos una de ellas con un cambio de variable para ajustar los límites integrales a los mismos  $y \rightarrow -x$ , como

$$\begin{aligned} - \int_{\beta\mu}^0 \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy &= \int_0^{\beta\mu} \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy \\ &= - \int_0^{-\beta\mu} \frac{(-x - \beta\mu)^2}{e^{-x} + 1} dx \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^{-x} + 1} dx \end{aligned} \quad (1.54)$$

Y de esta manera

$$\begin{aligned} \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx - \int_{\beta\mu}^0 \frac{(y - \beta\mu)^2}{e^y + 1} dy &= \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^x + 1} dx + \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x + \beta\mu)^2}{e^{-x} + 1} dx \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 (x + \beta\mu)^2 \left[ \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} \right] dx \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 (x + \beta\mu)^2 dx \end{aligned} \quad (1.55)$$

Dado que en el paréntesis cuadrado de (1.55), al multiplicar por  $e^x$  el segundo término, se llega a que los dos términos dentro del paréntesis dan la unidad. De esta manera, el número de partículas, sustituyendo (1.53) y (1.55) en (1.52)

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \left[ 4\beta\mu \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx + \int_{-\beta\mu}^0 (x + \beta\mu)^2 dx \right] \quad (1.56)$$

Haciendo el cambio de variable  $z = x + \beta\mu$  en la última integral se obtiene

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \left[ 4\beta\mu \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx + \int_0^{\beta\mu} z^2 dz \right] \quad (1.57)$$

Y de manera análoga a lo que es la función (1.17), tenemos las funciones especiales  $f_n(\xi)$  con  $0 \leq \xi \leq 1$ :

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{\xi^{-1} e^x + 1} \quad (1.58)$$

Entonces la primera integral de (1.57) se vuelve

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx = \Gamma(2) f_2(1) = f_2(1) \quad (1.59)$$

Por último, las funciones  $f_n(\xi)$  cumplen con la propiedad:

$$f_n(1) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \zeta(n) \quad (1.60)$$

Usando la ecuación (1.60) y que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  en la primera integral de (1.57), se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad (1.61)$$

Y para la segunda integral, se obtiene simplemente

$$\int_0^{\beta\mu} z^2 dz = \frac{(\beta\mu)^3}{3} \quad (1.62)$$

Sustituyendo (1.61) y (1.62) en (1.57) se llega a la expresión

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^3} \left[ 4\beta\mu \frac{\pi^2}{12} + \frac{(\beta\mu)^3}{3} \right] \\ &= 4\pi V \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \left[ \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\mu}{kT} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (1.63)$$

Y ahora, analógamente con el gas ideal de BE, la expresión se reescribe en unidades naturales usando  $c = \hbar = k = 1$  y  $h = 2\pi$ , y se agrega el factor de degeneración de los quarks  $g_Q$

$$N_Q = \frac{g_Q}{6} \left[ \frac{\mu}{T} + \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^3 \right] VT^3 \quad (1.64)$$

El factor de degeneración de los quarks se compone del producto del número de proyecciones de espín ( $N_s$ ), el número de colores,  $N_c$ , y el número de sabores,  $N_f$ , a consideración  $g_Q = N_s N_c N_f$ . Para este caso, se tienen  $N_s = 2$  proyecciones de espín,  $N_c = 3$  colores y  $N_f = 2$  sabores,  $u$  y  $d$ , dado que bajo este esquema, analizamos materia nuclear ordinaria. Por tanto  $g_Q = 12$ .

Para calcular la contribución de los quarks y antiquarks a la energía del sistema, se considera

$$E = E_+ + E_- = \sum_{\epsilon_+ > 0} \langle n_{\epsilon_+} \rangle \epsilon_+ + \sum_{\epsilon_- > 0} \langle n_{\epsilon_-} \rangle \epsilon_- \quad (1.65)$$

donde  $E_+$  es la energía de los quarks y  $E_-$  de los antiquarks. Usando la ecuación (1.39), y la relación entre las fugacidades explicada con anterioridad (1.42), podemos establecer que

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\epsilon_+ > 0} \frac{\epsilon_+}{e^{\beta(\epsilon_+ - \mu)} + 1} + \sum_{\epsilon_- > 0} \frac{\epsilon_-}{e^{\beta(\epsilon_- + \mu)} + 1} \\ &\Rightarrow \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[ \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon + \mu)} + 1} \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

Donde se ha usado el número total de estados en el espacio fase clásico (1.10). A partir de aquí, se procede a hacer el mismo procedimiento que para el cálculo del número total de partículas para resolver las integrales (1.66), de lo que se llega fácilmente a que

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[ 2 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx + 6(\beta\mu)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx + \int_{-\beta\mu}^0 (x + \beta\mu)^3 dx \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[ 2 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx + 6(\beta\mu)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx + \int_0^{\beta\mu} z^3 dz \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

Donde se ha usado el cambio de variable  $z = x + \beta\mu$  para la última integral. Para resolver las primeras integrales, hacemos uso de las funciones (1.58)

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \Gamma(4) f_4(1) = \frac{7\pi^4}{120} \quad (1.68)$$

La segunda integral se obtuvo con anterioridad (1.61), y la tercera se calcula directamente como

$$\int_0^{\beta\mu} z^3 dz = \frac{(\beta\mu)^4}{4} \quad (1.69)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (1.68), (1.61) y (1.69) en (1.67), obtenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[ 2 \left( \frac{7\pi^4}{120} \right) + 6(\beta\mu)^2 \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} (\beta\mu)^4 \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} (kT)^4 \left[ \frac{7\pi^4}{60} + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (1.70)$$

Finalmente, usando unidades naturales como con el número de partículas, y agregando el factor de degeneración, obtenemos la energía del gas de quarks - antiquarks

$$E_Q = g_Q \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] VT^4 \quad (1.71)$$

Para finalizar el cálculo de cantidades termodinámicas en este modelo, calculamos la presión producida por los quarks y antiquarks de manera análoga como con los gluones. La presión está definida por la ecuación (1.28), entonces para este caso, tenemos la función de partición que está dada como

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \sum_{\epsilon_+} \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_+ - \mu)} \right) + \sum_{\epsilon_-} \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_- + \mu)} \right) \\ &\Rightarrow \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[ \int_0^\infty \epsilon^2 \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)} \right) d\epsilon + \int_0^\infty \epsilon^2 \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon + \mu)} \right) d\epsilon \right] \end{aligned} \quad (1.72)$$

donde se han reemplazado las sumas por las integrales. Para resolver las integrales, ocupamos integración por partes, para la primera integral tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)} \right) d\epsilon &= \frac{\epsilon^3}{3} \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)} \right) \Big|_0^\infty + \frac{\beta}{3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \\ &= \frac{\beta}{3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \end{aligned} \quad (1.73)$$

En el cual, después de evaluar en los límites en la ecuación (1.73), se llega a que se cancela el primer término. Para la segunda integral de (1.72) se procede similarmente y se obtiene

$$\int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)}) = \frac{\beta}{3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \quad (1.74)$$

Y, sustituyendo las ecuaciones (1.73) y (1.74) en (1.72), obtenemos

$$\ln \Xi = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{\beta}{3} \left[ \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \quad (1.75)$$

Y, volviendo con la expresión (1.28), podemos reescribirla aprovechando la expresión integral (1.66), para obtener la expresión de presión total de gluones con unidades naturales como

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (1.76)$$

Y sustituyendo para el caso de la energía de quarks  $E_Q$  (1.71) en la expresión anterior, obtenemos

$$P_Q = \frac{g_Q}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 \quad (1.77)$$

La entropía se puede calcular a partir de una expresión similar a (1.34), la cual es

$$\phi = E - TS - \sum_i \mu_i N_i = -PV \quad (1.78)$$

$$S = \frac{1}{T} \left( E + PV - \sum_i \mu_i N_i \right) \quad (1.79)$$

donde la suma es sobre todas las especies de partículas, en este caso quarks y antiquarks. Por tanto, para el caso del gas de Fermi, tenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T} (E + PV - \mu_+ N_+ - \mu_- N_-) \\ &= \frac{1}{T} (E + PV - \mu V) \\ &= \frac{4}{3} \frac{E}{T} - \mu \frac{N}{T} \end{aligned} \quad (1.80)$$

donde se ha usado el hecho de que  $\mu_+ = \mu$  y  $\mu_- = -\mu$ . Y sustituyendo las ecuaciones (1.71) y (1.64) en (1.80), obtenemos la entropía de los quarks

$$S_Q = g_Q \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 \quad (1.81)$$

donde se ha considerado el factor de degeneración  $g_Q = 12$  correspondiente de este gas de quarks.

## 1.3. El protón en el modelo de Tsallis

### 1.3.1. La entropía en el modelo de Tsallis

Consideramos protones como un gas de quarks y gluones. En esta formulación de sistemas no extensivos con dos componentes. La correlación entre las dos especies son representadas por el valor del parámetro de Tsallis  $q$ . La entropía no extensiva para un sistema constituido de dos subsistemas  $A$  y  $B$  está dada por la ecuación (1.3). En este caso, los subsistemas son

los dos gases constituidos de quarks (Q) y gluones (G), donde el gas de quarks es una mezcla conjunta de quarks y antiquarks como se ha explicado en la sección 1.2.2. Con todo esto en consideración, la entropía del protón está dada, considerando unidades naturales, como

$$S_q(Q + G) = S_q(Q) + S_q(G) + (1 - q)S_q(Q)S_q(G) \quad (1.82)$$

donde  $S_q(Q)$  representa la entropía de Tsallis de los quarks,  $S_q(G)$  es la entropía de Tsallis de los gluones y  $S_q(Q + G)$  es la entropía del sistema conjunto, considerando que el último término, ese con el factor de Tsallis  $q$ , es el que contiene toda la información de la interacción de los subsistemas (las autointeracciones se excluyen en esta primera aproximación).

La interacción fuerte entre los subsistemas debe tener efectos sobre las propiedades físicas del sistema quark-gluon. Las correlaciones deben modificar el comportamiento de las propiedades termodinámicas. Ello conlleva a cambiar la forma de calcular estas propiedades. Es así que, en analogía con la entropía de Tsallis para dos subsistemas probabilísticamente independientes, proponemos la entropía del sistema como

$$S_q(Q + G) = S_1(Q) + S_1(G) + (1 - q)S_1(Q)S_1(G) \quad (1.83)$$

donde, como podrá notarse, se ha hecho que ambos subsistemas se consideran como esos de BG convencional, esto equivale a excluir la interacción dentro de cada subsistema, de tal manera que el parámetro  $q$  de Tsallis es el que introduce toda la interacción entre los subsistemas en el término cruzado de (1.83). Así, cuando  $q = 1$  en (1.83), se recuperará la entropía total correspondiente a la suma de las ecuaciones (1.36) y (1.81)

$$\begin{aligned} S_{Q+G} &= S_Q + S_G \\ &= g_Q \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + 4g_G \frac{\pi^2}{90} VT^3 \\ &= \left[ \frac{74\pi^2}{45} + 2 \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 \end{aligned} \quad (1.84)$$

Donde la última igualdad de (1.84), se obtiene al sustituir los valores de los factores de degeneración correspondientes de quarks y gluones. Cabe notar que  $S_{Q+G}$  corresponderá igualmente a la entropía en un marco de BG.

De esta manera, podemos reescribir la ecuación (1.83) como

$$S_q = S_Q + S_G + (1 - q)S_Q S_G \quad (1.85)$$

donde las entropías de los subsistemas de quarks y de gluones ya se han definido por las ecuaciones (1.36) y (1.81) así que

$$\begin{aligned} S_q &= g_Q \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + 4g_G \frac{\pi^2}{90} VT^3 \\ &\quad + (1 - q) g_Q g_G \frac{4\pi^2}{90} \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6 \end{aligned} \quad (1.86)$$

Luego de reordenar y sustituir los factores de degeneración se llega a que

$$S_q = \left[ \frac{74\pi^2}{45} + 2 \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6 \quad (1.87)$$

De donde fácilmente se puede comprobar que cuando  $q = 1$ , devolvemos a la expresión (1.84)

### 1.3.2. La presión en el modelo de Tsallis

Partimos de la relación de Maxwell

$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{V,\mu} = \left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V,\mu} \quad (1.88)$$

Donde se ha considerado que el volumen y la temperatura se mantienen como cantidades extensivas, pero la entropía ni la presión son extensivas, es decir, podemos aplicarles estadística de Tsallis. Así, derivando (1.87) con respecto de  $V$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{V,\mu} &= [7g_Q + 4g_G] \frac{\pi^2}{90} T^3 + \frac{1}{6} g_Q \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 T^3 \\ &+ \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1-q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^6 \end{aligned} \quad (1.89)$$

Considerando que la expresión anterior cumple con la relación de Maxwell (1.88), podemos hallar la presión de Tsallis  $P_q$ , integrando la expresión anterior con respecto a la temperatura,  $T$ , y así obtenemos

$$\begin{aligned} P_q &= \left[ \frac{7}{4} g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12} g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4 \\ &+ \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7 + C(V, \mu, q). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Ya que el parámetro  $q \neq 1$  de alguna forma incluye las interacciones entre los quarks y los gluones, para  $q = 1$  se debe cumplir que  $P_{q=1} = P_Q + P_G$ . Esta condición se utiliza para determinar la constante de integración  $C(V, \mu, q)$ . Por lo tanto, para  $q = 1$  se debería cumplir que, usando las ecuaciones (1.33) y (1.77)

$$\begin{aligned} P_{q=1} &= P_Q + P_G \\ &= \frac{g_Q}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 + g_G \frac{\pi^2}{90} T^4 \\ &= \left[ \frac{37\pi^2}{90} + \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 \\ &= \left[ \frac{7}{4} g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12} g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4 + C(V, \mu, q). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Tal, que al despejar la constante de integración de la expresión anterior, podemos encontrar que

$$C(V, \mu, q) = \frac{1}{3} g_Q \left[ \frac{1}{8\pi^2} \mu^4 \right] \quad (1.92)$$

Y sustituyendo en (1.90), llegamos a que

$$\begin{aligned} P_q &= \left[ \frac{7}{4} g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{3} g_Q \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 \\ &+ \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7 \end{aligned} \quad (1.93)$$

Y sustituyendo los valores de los factores de degeneración, se llega a que la presión en la estadística de Tsallis de un sistema de quarks y gluones está dada como

$$P_q = \left[ \frac{37\pi^2}{90} + \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 + \frac{256\pi^2}{15} (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7 \quad (1.94)$$

De donde es fácil corroborar que, viendo la tercera línea de (1.91), se cumple para el caso trivial  $q = 1$ .





---

## CHAPTER 2

---

# MODELO DE BOLSA

### 2.1. Modelo de bolsa

El modelo de bolsa es una forma mejorada del modelo de quarks, en que los quarks son tratados relativísticamente. Un grado de libertad de “bolsa” es introducido explícitamente, tal que la física dentro de la bolsa es diferente de la de afuera. Dentro los quarks de la bolsa no tienen masa, fuera son infinitamente vacíos. Hay también una diferencia finita entre densidad de energía dentro y fuera; el “vacío de bolsa” tiene energía más alta que el vacío normal. El tamaño de la bolsa es determinado por un balance entre la energía cinética que requiere localizar los quarks dentro (de acuerdo al principio de incertidumbre) y la energía volumétrica asociada con el vacío de bolsa [ref bag model].

En este marco, uno puede calcular masas de mesones y bariones así como sus momentos magnéticos y otras cantidades estáticas.

Las ideas de QCD contribuyen al modelo de bolsa en dos formas esenciales [30]:

1. En conjunto con los quarks, los campos gluónicos también se desvanecen fuera de la región de bolsa. De acuerdo a la ley de Gauss, es sólo posible si el contenido de la bolsa forma un singlete de color general, por lo cual las bolsas hadrónicas deberían ser estados  $\bar{q}q$  o  $qqq$
2. Además, uno podría intentar incluir el intercambio de gluones como una corrección para la propagación libre de quarks en la bolsa. Si esto es hecho, la descripción de los detalles del espectro de meson y barion mejora.

Cabe mencionar que la libertad asintótica sugiere la casi libre propagación de quarks a cortas distancias asumida en el modelo de bolsa.

#### 2.1.1. ¿Por qué un modelo de bolsa?

Durante el desarrollo temprano del modelo de quarks de hadrones ligeros fueron tratados como estados ligados de quarks moviéndose no relativísticamente en un potencial confinante. Sistemas no relativísticos tienen energías que son pequeños comparados a las masas componentes. En mesones y bariones estas energías son comparables a las masas de quarks de estos modelos. A pesar que se esperaba que la espectroscopía, estructura e interacción de hadrones podría ser deducida de primeros principios, las complejidades de QCD conllevaron a modelos aproximados, tales como el modelo de bolsa del *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*

[31], el modelo de bolsa del *Stanford Linear Accelerator Center (SLAC)* y el modelo de bolsa de soliton. Estos modelos de bolsa intentan incorporar tres características deseables de estructura hadrónica que fueron omitidos desde la aproximación QCD no relativística temprana:

- a) la propiedad de QCD de libertad asintótica de distancia corta, que por un lado permite el uso de teoría de perturbación en descripción de interacción de quark-gluon a corta distancia, y por otro lado prohíbe la propagación de campos colorados a grandes distancias;
- b) la introducción de gluones como constituyentes hadrónicos y los mediadores de la interacción a corta distancia entre quarks; y
- c) un marco relativístico e invariante de norma.

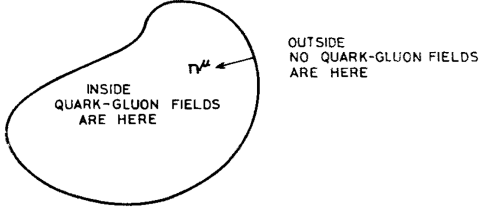
## 2.2. La aproximación de la cavidad esférica

Consideramos la bolsa con sólo cuarks presentes, la acción está dada por

$$W = \int dt \left[ \int_V d^3x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right] \quad (2.1)$$

donde  $V$  es el volumen ocupado en la bolsa con superficie  $S$ ,  $\psi$  es el espinor de campo de quark ( $\gamma^\mu$  son las matrices gamma),  $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$  es la derivada sobre lo de la derecha menos la derivada sobre lo de la izquierda,  $m$  es la masa de los quarks que se mueven en la cavidad esférica que es la bolsa y  $B$  es la presión de bolsa. El término superficial es agregado tal que los quarks se mueven como si tuvieran una masa infinita fuera de la bolsa justo este es el modelo del MIT.

La ecuación de Dirac (y condiciones de frontera) para el caso de una bolsa con solo quarks presentes se consigue como un extremo de la acción (2.1) bajo variaciones en  $\psi$  y  $V$



$$(i\not{\partial}_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{en } V, \quad (2.2)$$

donde  $\not{\partial}_\mu = \partial_\mu \gamma^\mu$  y con las condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned} i n^\mu \gamma_\mu \psi &= \psi \\ \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) &= B \end{aligned} \right\} \quad \text{sobre } S, \quad (2.3)$$

Figure 2.1: Dentro de la bolsa se encuentran los quarks encerrados por la presión de la bolsa.

donde  $n_\mu$  es la normal interior covariante a la superficie. La primera condición de frontera (2.3) requiere que la componente normal del vector corriente  $J_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  se elimine en la superficie. La otra condición requiere que la presión exterior del campo de quarks se equilibre con la presión de bolsa (figura 2.1)[referencia MIT BM]. 50 Years of Quantum Chromodynamics

La solución general a las ecuaciones (2.2) y (2.3) es una superposición (con coeficientes  $a_\alpha$ ) de soluciones a la ecuación de Dirac libre:

$$\psi_\alpha(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa j}) a_\alpha(n\kappa jm) \psi_{n\kappa km}(x, t). \quad (2.4)$$

$j$  y  $m$  etiquetan el modo del momento angular y su z-componente  $z$ .  $\kappa$  es el número cuántico de Dirac<sup>1</sup>, que diferencia los dos estados de paridad opuesta para cada valor de  $j$ . El índice  $n$  etiqueta frecuencias que están a ser determinadas por las condiciones de frontera lineales. La

<sup>1</sup> $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ ,

condición de frontera cuadrática (3b) restringe los modos que pueden ser excitados. Entre otras cosas, 3b permite sólo soluciones para la ecuación de Dirac. Para  $j = \frac{1}{2}$ , ya sea  $\kappa = -1$ ,

$$\psi_{n-1\frac{1}{2}m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_0(\omega_{n,-1}r/R_0)U_m \\ -j_1(\omega_{n,-1}r/R_0)\sigma \cdot \hat{r}U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,-1}t/R_0} \quad (2.5)$$

o  $\kappa = 1$

$$\psi_{n1\frac{1}{2}m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_1(\omega_{n,1}r/R_0)\sigma \cdot \hat{r}U_m \\ j_0(\omega_{n,1}r/R_0)U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,1}t/R_0} \quad (2.6)$$

$U_m$  es un espino de Pauli bidimensional y  $j_\ell(z)$  son las funciones de Bessel esféricas. Hemos omitido los índices  $j$  sobre  $\omega_{n\kappa}$  ya que solo  $j = \frac{1}{2}$  es de interés en el presente.  $N(\omega_{n\kappa})$  es una constante de normalización escogida para conveniencia futura:

$$N(\omega_{n\kappa}) \equiv \left( \frac{\omega_{n\kappa}^3}{2R_0^3(\omega_{n\kappa} + \kappa) \sin^2 \omega_{n\kappa}} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

La condición de frontera lineal (3a) genera una condición eigenvalor para los modos de frecuencias  $\omega_{n\kappa}$

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}),$$

o

$$\tan \omega_{n\kappa} = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa} \quad (2.8)$$

[Por convención escogemos  $n$  positiva (negativa) secuencialmente para etiquetar las raíces positivas (negativas) de la eq 7] Las primeras soluciones a (2.8) son

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : \quad \omega_{1-1} &= 2.04; \quad \omega_{2-1} = 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{11} &= 3.81; \quad \omega_{21} = 7.00. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La condición de frontera cuadrática requiere que  $\sum_\alpha (\partial/\partial r) \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x)$  sea independiente de tiempo y dirección para  $r = R_0$ . La independencia angular requiere que  $j = \frac{1}{2}$ . Para obtener independencia temporal, ajustamos

$$\sum_\alpha a_\alpha^*(n\kappa j = \frac{1}{2}m) a_\alpha(n'\kappa' j = \frac{1}{2}m') = 0, \quad (2.10)$$

a menos que  $n = n'$ ,  $\kappa = \kappa'$  o  $n = -n'$ ,  $\kappa = -\kappa'$  en cuyos casos no hay restricción ya que los términos dependientes del tiempo se cancela. La ecuación anterior es una restricción severa sobre los modos que deben ser ocupados. Deberíamos implementar la ecuación anterior requiriendo que para cada grado de libertad interno  $\alpha$  sólo un modo normal,  $a_\alpha(n\kappa j = \frac{1}{2}m)$  es excitado. Esto automáticamente será el caso para bariones de tres quarks si son requeridos a ser singletes de color.

Una vez que (2.10) es satisfecho, los términos independientes del tiempo en (2.6) pueden ser coleccionados,

$$\sum_{\alpha n \kappa m} \omega_{n\kappa} a_\alpha^*(n\kappa \frac{1}{2}m) a_\alpha(n\kappa \frac{1}{2}m) = 4\pi B R_0^4, \quad (2.11)$$

$$xd \quad (2.12)$$

## Conclusiones

- a) El campo en la bolsa se comporta sobre el promedio como un gas relativista perfecto; que es, la traza del tensor energía momento asociado con el campo, cuando es promediado sobre tiempo y espacio, es cero:

$$\left\langle \int_R d^3x (\Theta^\mu_\mu)_{\text{campo}} \right\rangle = 0 \quad (2.13)$$

- b) El volumen promediado en el tiempo de una bolsa es proporcional a su energía:

$$E = 4B \langle V \rangle \quad (2.14)$$

- c) El estado base y estados excitados más bajos de la bolsa contienen pocos partones de momento promedio de orden  $B^{1/4}$  encerrados en un volumen de orden  $B^{-3/4}$ . [ $B$  tiene la dimensión (longitud) $^{-4}$  con  $\hbar = c = 1$ ]
- d) En el límite termodinámico la bolsa tiene una temperatura fija,  $T_0$ , independiente de su energía.  $T_0$  es de orden  $B^{-1/4}$ . Esto es equivalente a las siguientes declaraciones

- La energía cinética promedio de los partones es de orden  $T_0$  independiente de la energía de bolsa  $E$  proporcionado el último es más grande que  $T_0$ :  $E \gg T_0$ .
- La densidad de nivel asintótico  $\zeta(E)$  del sistema es una función exponencial de  $E$ :

$$\zeta \sim e^{E/T_0}$$

- El número,  $N$ , de partones más antipartones presente en el hadrón es proporcional a su energía:

$$N \propto E/T_0$$

- e) Si la dinámica clásica es tal que hay un máximo momento angular del hadrón en una energía total dada  $E$ , ese máximo debe ser

$$J_{\text{máx}} = \kappa B^{-1/3} E^{4/3},$$

donde  $\kappa$  es una constante adimensional determinada por la dinámica detallada. Si el límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) existe, las correcciones cuánticas a esta fórmula se reducirían por potencias de  $E$ . Si no hay trayectoria clásica a seguir, un argumento plausible sugiere que la trayectoria guía podría ser (para un gran  $E$ )

$$J_{\text{máx}} = \kappa' B^{-1/2} E^2 \quad (\hbar = 1).$$

- f) El momento angular más probable para una  $E$  grande está dada por

$$\bar{J} \propto (B^{-1/4} E)^{5/6}$$

---

## CHAPTER 3

---

# CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA DEL PROTÓN

El protón, al ser considerado compuesto por quarks y gluones independientes entre sí, puede separar sus contribuciones energéticas por cada una de las partes. El BM describe a los quarks como siendo confinados dentro del hadrón. Aunque hay varias versiones del modelo de bolsa, la característica principal es la fenomenología de confinamiento de quarks. Los gluones son bosones mediadores que transfieren las interacciones entre quarks. Como ya hemos detallado en la sección 1.2, la energía y el número total de partículas para un sistema de quarks y gluones sin masa dentro de un hadrón están dadas por

$$N = N_Q + N_G = \frac{16\zeta(3)}{\pi^2} VT^3 \quad (3.1)$$

$$E = E_Q + E_G = \frac{37}{30} \pi^2 VT^4. \quad (3.2)$$

Tomando la masa de un nucleón como la energía total  $E_t = M$ , y siendo este como un sistema local en equilibrio térmico y despreciando el potencial químico, podemos calcular los cambios de temperatura con el radio del protón. De acuerdo con [Some characteristic parameters], se tiene una fórmula simulada numéricamente para la temperatura en función de la distancia al centro del protón,  $r$ , como

$$T = 0.109 \left[ \frac{\text{GeV}}{\text{fm}} \right] r^{-3/4}, \quad (r \text{ en fm}) \quad (3.3)$$

A alrededor de 1 fm, la temperatura es alrededor de 105 MeV. Cuando el radio de un protón es menor de 0.6 fm, la temperatura probablemente será aproximada a 170 MeV, cercana a la temperatura crítica a la que el hadron se rompe a quarks.

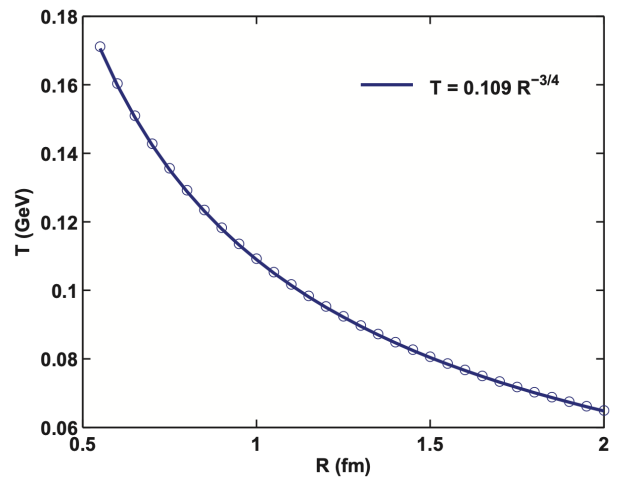


Figure 3.1: *Ajuste realizado a una simulación numérica de la temperatura dentro del protón como función del radio*

Como vimos antes, en el capítulo 2, las soluciones a la ecuación (2.8), nos dan los límites de los radios de los hadrones considerando la relación  $\omega_{n\kappa} = p_{n\kappa}R$ , tenemos que para el estado más bajo accesible del sistema (que notaremos como  $\omega_{1-1} = \omega_0 = 2.04$ ) y así para un protón, tenemos que la máxima energía cinética accesible para los quarks y gluones en el interior está dado por

$$p_{0m} = \frac{2.04}{R} \quad (3.4)$$

Si tomamos  $p_{0m}$  como el límite superior, podemos separar la energía de quarks del total de un protón

$$E_Q = \frac{(g_Q + g_{\bar{Q}}) V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_{0m}} \frac{p^3 dp}{1 + e^{p/T(r)}} \quad (3.5)$$

Por simplicidad, despreciamos el potencial químico,  $\mu = 0$ , tratamos los quarks como sin masa y  $g_Q = g_{\bar{Q}} = N_c N_s N_f = 3 \times 2 \times 2 = 12$ , con  $N_c$  es el número de colores (3 colores disponibles),  $N_s$  el número de espín (2 espines accesibles), y  $N_f$  es el número de sabores (2 por ser *up* y *down*).

La energía de contribución de gluones proporciona el efecto de presión dirigido desde fuera de la bolsa dada por

$$B = \frac{E_t - E_Q}{V} \quad (3.6)$$

Existen dos posibles escenarios como se muestra en la figura 3.2, el volumen del gas de gluones es ya sea  $\frac{4\pi}{3}R^3$  o  $\frac{4\pi}{3}R_i^3$ .

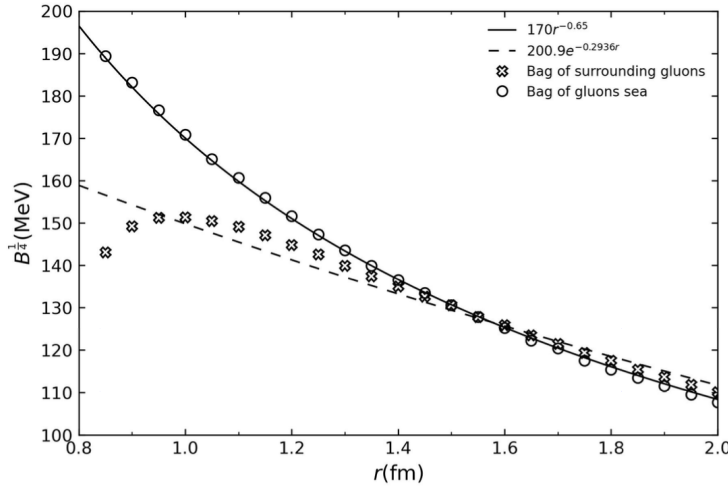


Figure 3.3: Ajuste realizado a una simulación numérica de la presión de bolsa dentro del protón como función del radio. Tenemos dos posibles escenarios: El primero (representado por las cruces) considera a los quarks rodeados por un mar de gluones, mientras que el segundo (círculos) considera a los quarks en un mar de gluones. []

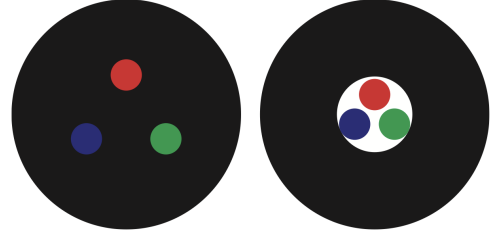


Figure 3.2: Tenemos dos posibilidades, i) que los quarks estén inmersos en un mar de gluones (izquierda) o ii) que los quarks estén **rodeados** por un mar de gluones (derecha)

A partir del hecho de que la presión de bolsa depende del volumen de la misma, podemos pensar que la presión de bolsa cambiara con el radio (como se muestra en la figura (3.3)). Se pueden obtener los ajustes a ambos casos (el ajuste polinomial es el que mejor coeficiente de correlación obtiene para el caso de un mar de gluones),

$$B^{1/4} = 0.17 \left[ \frac{GeV}{fm} \right] r^{-0.65} \quad (3.7)$$

o un ajuste exponencial para el segundo caso, gluones rodeando quarks, que obtiene, de entre varios otros ajustes (lineal, exponencial, logarítmico, polinomial) el mejor coeficiente de correlación

$$B^{1/4} = 0.201 e^{-0.293 \left[ \frac{1}{fm} \right] r} [GeV] \quad (3.8)$$

Como una primera aproximación, usamos una presión de bolsa que es

finita al centro del hadron y se desvanece a grandes distancias. Para este propósito, hemos determinado que una aproximación ajustable para la presión de bolsa es una exponencial de la forma (3.8), esta expresión, contiene el comportamiento que deseamos y esperamos para lo que sucede en el centro del hadrón, que en el centro la presión de la bolsa sea finita pero para grandes distancias se desvanezca.





---

---

## CHAPTER 4

---

# SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO $q$ DE TSALLIS

En el modelo de bolsa, los quarks están confinados en una región por el intercambio de gluones, y el volumen está caracterizado por la presión que previene a los quarks de escapar.

La densidad Lagrangiana puede ser expresada como

$$L_{\text{bag}} = (L_{\text{QCD}} - B) \theta_V \quad (4.1)$$

donde  $\theta_V$  es la función paso definiendo el interior de la bolsa que contiene quarks y gluones. Tiene valor nulo fuera de esta región.

El modelo describe la interacción entre quarks y gluone a pequeñas escalas, reflejando la libertad asintótica del QCD. A mayores escalas, sobre el orden de 1 fermi, los quarks y gluones se vuelven confinados a estados ligados de color neutro. La presión de bolsa, denotada por  $B$ , representa la densidad de energía asociada con fluctuaciones de vacío de los campos QCD dentro de la bolsa.

En el análisis presentado aquí, no asumimos la presión de bolsa constante a través de la región. El concepto de presión de bolsa es de alguna forma, artificial. Se introduce como un parámetro fenomenológico para describir confinamiento y se entiende como la energía por unidad de volumen de las fluctuaciones de vacío dentro de la bolsa. Podemos conceptualizar el mecanismo como un mar de gluones empujando a los quarks o como un mar de quarks y gluones interactuando.

Ahora, exploramos una razón fundamental para la existencia de la presión de bolsa y encontramos que introduciendo una correlación determinada por el  $q$  parámetro proporciona la posibilidad de eliminar la presión de bolsa  $B$  de las ecuaciones. Así, podemos entender al confinamiento sin introducir artificialmente un parámetro de presión de bolsa.

El parámetro de Tsallis  $q$  aparece encapsular la física involucrada en confinamiento como lo hace la presión de bolsa. Podemos omitir la presión de bolsa de este modelo considerando que a un dado  $q_0$  (parámetro de Tsallis inicial), la presión de bolsa puede ser expresada para un sistema hadrónico general.

$$P_{q_0}(T, \mu) - B(r) \rightarrow P_q(T, \mu) \quad (4.2)$$

Donde  $q$  es el parámetro de Tsallis que describe la correlación,  $q_0$  considera para la presión total estimada dentro de los nucleones arriba, con las condiciones iniciales dadas. Después de la extracción a partir de los datos  $q_0$  está fija. De esta manera, vemos que el parámetro de Tsallis puede recrear la presión de bolsa en tal forma que  $B$  no se necesita más. Después de

algo de álgebra, uno puede obtener una relación entre ambos parámetros de Tsallis y la presión de bolsa como sigue

$$q = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15} \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7} \quad (4.3)$$

El parámetro de Tsallis se vuelve dependiente del radio debido a su relación con  $r$  de la presión de bolsa. La posibilidad de desarrollar un modelo de bolsa de hadrones sin la necesidad de una presión de bolsa será explorada en trabajo futuro. Actualmente, hemos notado que la correlación que surge de los sistemas de quarks y gluones como componentes de nucleones representan la presión de bolsa.

---

## CHAPTER 5

---

# DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN TOTAL Y PRESIÓN DE GLUONES

La distribución de presión total está dada por

$$P_q = \left[ \frac{7}{4}g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12}g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4 + \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1 - q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7 + C(V, \mu, q) \quad (5.1)$$

con  $C(V, \mu, q) = \frac{1}{2\pi^2} \mu^4$ , donde para  $q = 1$  se recupera la presión total convencional de BG es debido a los quarks y gluones y puede ser visto en la figura 5.1. La presión está dada como una función del radio para varios potenciales químicos a parámetro  $q$  fijo. Si se incrementa la densidad de las partículas a una temperatura dada, los hadrones eventualmente se “romperán”, es decir, resultará en deconfinamiento. Esto pasa a densidades de aproximadamente  $0.72/\text{fm}^3$  o potenciales químicos por sobre el orden de 430MeV[Referencia 35]. A altas temperaturas, la transición de fase sería alcanzable en densidades más bajas

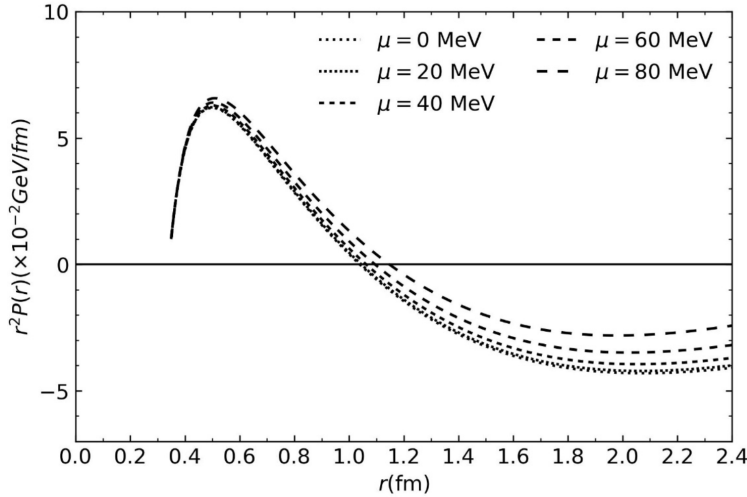


Figure 5.1: *Distribución de presión radial en el protón contra la distancia radial desde el centro para distintos potenciales químicos. El parámetro de Tsallis usado fue  $q = 1.05$ .*

Las distribuciones estimadas muestra una presión repulsiva debajo de 1 fermi y luego una presión confinante por encima de esa distancia desde el centro del protón

La distribución de presión que resulta de las interacciones de los quarks en el protón contra la distancia radial desde el centro del protón fue obtenida en [referencia de nature]. usando datos experimentales. Una presión repulsiva fuerte cerca del centro del protón se desvanece a una distancia radial de aproximadamente 0.6fm. Más allá de esa distancia, la presión de ligadura aparece. En ambos casos, el pico de presión promedio extraído cerca del centro es extremadamente alto.

En [26], la distribución de presión de quarks dentro del protón es

obtenida considerando un sistema quark aislado sin interacciones de gluones, encontrada usando Gravitational form factors (GFF) usando la expresión para

$$d_1(t) = d_1(0) \left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{-\alpha} \quad (5.2)$$

que viene de la expansión de Gegengabauer del término D (uno de los GFF)

$$D(z, t) = (1 - z^2) [d_1(t) C_1^{3/2}(z) + \dots] \quad (5.3)$$

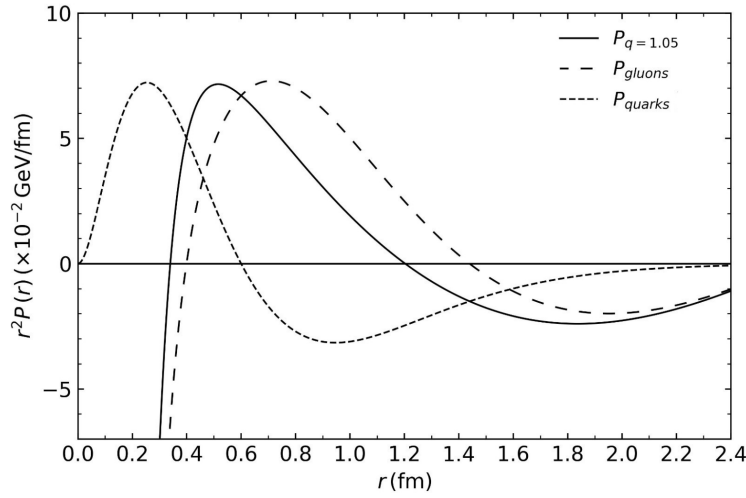
Donde,  $d_1(t)$  está relacionado con la distribución de presión  $p(r)$  por medio de la integral esférica de Bessel

$$d_1(t) \propto \int \frac{j_0(r\sqrt{-t})}{2t} p(r) d^3r, \quad (5.4)$$

donde  $j_0$  es la primera función de Bessel esférica. A partir de (5.4), podemos encontrar la distribución de presión  $p(r)$  de quarks en términos de  $d_1(t)$ . La presión está dada por

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{1}{k_p \pi^2} \int_0^\infty x^4 j_0(rx) d_1(-x^2) dx \\ &= \frac{M^6 d_0}{16\pi \|M\| k_p} e^{-\|M\| r} (-3 + r \|M\|) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $k_p$  es la constante de proporcionalidad en (5.4), el parámetro  $\alpha = 3$  y la constante  $d_0 = d_1(0) = -2.04$  están dadas en [nature], mientras que la constante de proporcionalidad  $k_p = 55$  y  $\|M\| = 5$  son propuestos para reproducir los resultados de [Nature]



El perfil resultante se muestra en la figura 5.2. Usamos esta distribución de presión de quarks para estimar la contribución de los gluones como una substracción del total mostrado arriba.

Figure 5.2: *Extracción de la distribución de presión de gluones a partir del valor central en la referencia [26]. El potencial químico  $\mu = 100\text{MeV}$  fue usado para el perfil de la presión total.*

---

## CHAPTER 6

---

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura 6.1 muestra las distribuciones de presión obtenidas con el T-MIT bag model junto con las distribuciones de cálculos recientes de LQCD [33]

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) = x(3x + 2)$$

Como se mencionó arriba, la presión de bolsa y el parámetro  $q$  de Tsallis ambos representan aspectos efectivos de la interacción fuerte mediada por quarks y gluones. No tenemos un significado preciso para ellos, pero sí tenemos una relación específica entre el parámetro  $q$  y la fenomenología real, como se muestra en la ecuación (4.3). Creemos que la no extensividad del parámetro  $q$  tiene alguna conexión con interacciones de largo alcance.

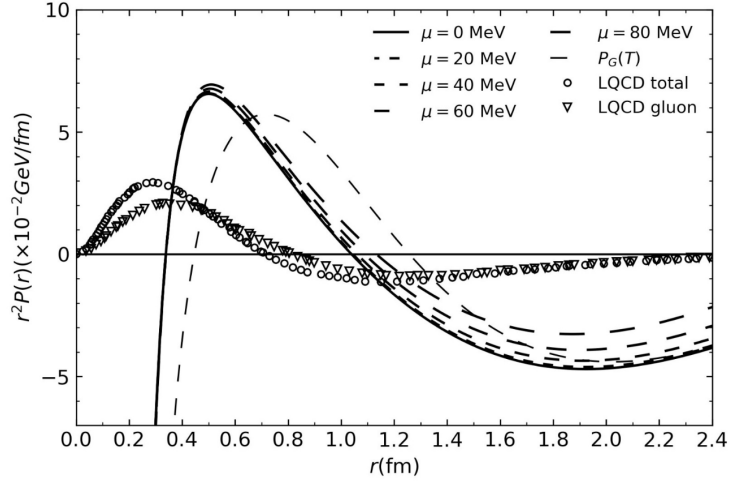


Figure 6.1: *Resultados de Lattice QCD a partir de la referencia [33], y esas obtenidas con el modelo modificado MIT bag model.*



---

---

# CHAPTER 7

---

## NOTAS

### 7.1. Notas de DeGrand sobre masas y otros parámetros de hadrones ligeros

Los efectos de la energía cinética de quarks, energía de bolsa, masa de quarks extraño, intercambio de gluones colorados en más bajo orden, y energía asociada con ciertas fluctuaciones son incluidas. Estos son parametrizados por cuatro constantes que tienen significado fundamental y no cambian a partir de multipletes a multipletes. El ajuste al espectro es bueno. El orden de todos los estados es dado correctamente

En la teoría de quarks de estructura de hadrones tenemos las siguientes ideas fundamentales:

- a) Los hadrones están compuestos de quarks
- b) Los quarks vienen en varios “sabores”, los tres de Gell-Mann y Zweig, aumentado quizá por nuevos quarks para nuevos grados hadrónicos de libertad como encanto, y en tres colores.
- c) Los quarks interactúan entre ellos relativamente débilmente por el intercambio de un octeto de gluones acoplados sin masa, con color en la manera de Yang-Mills para sus índices de colores.
- d) La interacción debe ser débil a cortas distancias para explicar la escala en experimentos de dispersión de leptones; debe ser débil cerca de la transferencia de momento cero para contar para la falta de grandes renormalizaciones de estimaciones ingenuas del modelo de quarks de transmisiones entre bariones ligeros.
- e) La simetría  $SU(3)$  generada por la permutación de índices de color es inquebrantada.
- f) Quarks de diferentes sabores podrían tener masas diferentes para tomar en cuenta para el desglose del observador del  $SU(3)$  de Gell-Mann y para las altas masas de estados compuestas de quarks encantados.
- g) Finalmente, y esencialmente, los quarks colorados y gluones colorados no son ellos mismos parte del espectro físico. Para cumplir esto, asumimos que los campos fenomenológicos que describen la dinámica de quarks y gluones no permean todo el espacio, sino prefieren estar confinados en el interior de hadrones.

La única manera que conocemos para proporcionar la “baja excitación” de materia hadrónica consistente con invariancia de Lorentz es introduciendo un nuevo término,  $-g_{\mu\nu}\theta_s B$ , en el tensor de energía momento de la teoría.  $\theta_s$  es una función que es unidad donde los campos de quark y gluones están definidos, cero donde no lo están.  $B$  es una constante universal con las dimensiones de presión. Es entonces una consecuencia exacta de la simetría de color inquebrantada  $SU(3)$  que todos los estados tienen números cuánticos convencionales. Es tentador especular sobre un origen para este término poco convencional de algún lugar es más convencional parte de la teoría.

## 7.2. Notas sobre *Baryon structure in the bag theory*

Un modelo de hadrón es considerado en que una partícula interactuando fuertemente consiste de campos confinados a una región finita de espacio que llamamos “bolsa”. El confinamiento es logrado en una forma invariante de Lorentz suponiendo que la bolsa posee una energía positiva constante por unidad de volumen,  $B$ .

Para empezar, el efecto de la densidad de energía  $B$  es agregar un término al tensor de energía usual:

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{campos}}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} B \quad (7.1)$$

dentro de la bolsa. Fuera de la bolsa  $T_{\mu\nu}$  se desvanece. Requerir conservación de energía momento lleva a condiciones de frontera sobre los campos en la superficie de la bolsa. Aquí especificamos los campos confinados sean sin masa, campos de espín  $\frac{1}{2}$  llevando números cuánticos de quarks con color e interactuando con gluones vectoriales con color sin masa. Una consecuencia exacta de las condiciones de frontera de bolsa para tal interacción es que sólo estados singletes de color (que tienen triinidad cero) pueden existir. La constante de acoplamiento no necesita ser grande para lograr esto. Incluso cuando los campos de quarks son libres dentro de la bolsa, las ecuaciones de campo más las condiciones de frontera no son resolubles exactamente en tres dimensiones espaciales. En vez de eso las resolvemos en lo que parece ser una aproximación razonable a orden cero que es análoga a la “teoría de Bohr” para el átomo de hidrógeno: Las ecuaciones clásicas de movimiento admiten una clase de soluciones en que la superficie de la bolsa (en su marco de referencia) es una esfera de radio fijo. Las condiciones de frontera requieren que cada quark ocupe un modo con momento angular total  $\frac{1}{2}$ . Tratamos estos modos en una cavidad esférica fija como análoga a las órbitas circulares con radio fijo en la vieja teoría cuántica. El radio es entonces cuantizado por la condición que el operador número quark toma valores enteros. Para estos estados, la energía depende en qué modos están ocupados pero no en la forma del momento angular o isoespines de los quarks individuales son agregados para obtener el momento angular total e isoespín del hadrón. Así, por ejemplo, el estado de más baja energía  $N(\frac{1}{2}+)$  y  $\Delta(\frac{3}{2}+)$  son degenerados. Ya que  $B$  es el único parámetro libre somos capaces de hacer predicciones para cantidades dimensionales tales como el momento magnético del protón y radio de carga y los splittings de masa de orden cero en el espectro bariónico.

### 7.2.1. Cálculos

Las ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera para un campo confinado de espín  $\frac{1}{2}$  y sin masa

$$\not{D}\psi_\alpha(x) = 0 \quad (7.2)$$

dentro de la bolsa y



$$i\not{n}\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x), \quad (7.3)$$

$$\sum_\alpha n \cdot \partial \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) = 2B \quad (7.4)$$

sobre la superficie de la bolsa.  $n_\mu$  es la 4-normal interior covariante a la superficie de la bolsa.  $\alpha$  es un índice de simetría interna que escogemos para designar isospín y color. Buscamos soluciones para que la frontera sea una esfera estática de radio  $R_0$  en cuyo caso  $n_\mu = (0, -\hat{r})$  y ecuaciones (2) se vuelven

$$-i\hat{r} \cdot \vec{\gamma} \psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x), \quad (7.5)$$

$$-\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) = 2B \quad (7.6)$$

en  $r = R_0$ .

La solución general a las ecuaciones (1) y (3) es una superposición (con coeficientes  $a_\alpha$ ) de soluciones a la ecuación de Dirac libre:

$$\psi_\alpha(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa j}) a_\alpha(n\kappa jm) \psi_{n\kappa km}(x, t). \quad (7.7)$$

$j$  y  $m$  etiquetan el modo del momento angular y su zomponente  $z$ .  $\kappa$  es el número cuántico de Dirac<sup>1</sup>,  $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ , que diferencia los dos estados de paridad opuesta para cada valor de  $j$ . El índice  $n$  etiqueta frecuencias que están a ser determinadas por las condiciones de frontera lineales. La condición de frontera cuadrática (3b) restringe los modos que pueden ser excitados. Entre otras cosas, 3b permite sólo soluciones para la ecuación de Dirac. Para  $j = \frac{1}{2}$ , ya sea  $\kappa = -1$ ,

$$\psi_{n-1\frac{1}{2}m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_0(\omega_{n,-1}r/R_0)U_m \\ -j_1(\omega_{n,-1}r/R_0)\sigma \cdot \hat{r}U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,-1}t/R_0} \quad (7.8)$$

o  $\kappa = 1$

$$\psi_{n1\frac{1}{2}m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_1(\omega_{n,1}r/R_0)\sigma \cdot \hat{r}U_m \\ j_0(\omega_{n,1}r/R_0)U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,1}t/R_0} \quad (7.9)$$

$U_m$  es un espino de Pauli bidimensional y  $j_\ell(z)$  son las funciones de Bessel esféricas. Hemos omitido los índices  $j$  sobre  $\omega_{n\kappa}$  ya que solo  $j = \frac{1}{2}$  es de interés en el presente.  $N(\omega_{n\kappa})$  es una constante de normalización escogida para conveniencia futura:

$$N(\omega_{n\kappa}) \equiv \left( \frac{\omega_{n\kappa}^3}{2R_0^3(\omega_{n\kappa} + \kappa) \sin^2 \omega_{n\kappa}} \right)^{1/2} \quad (7.10)$$

La condición de frontera lineal (3a) genera una condición eigenvalor para los modos de frecuencias  $\omega_{n\kappa}$

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}),$$

o

$$\tan \omega_{n\kappa} = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa} \quad (7.11)$$

[Por convención escogemos  $n$  positiva (negativa) secuencialmente para etiquetar las raíces positivas (negativas) de la eq 7] Las primeras soluciones a (7.11) son

---

<sup>1</sup>•

$$\begin{aligned}\kappa = -1 : \quad \omega_{1-1} &= 2.04; \quad \omega_{2-1} = 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{11} &= 3.81; \quad \omega_{21} = 7.00.\end{aligned}\tag{7.12}$$

La condición de frontera cuadrática requiere que  $\sum_{\alpha}(\partial/\partial r)\bar{\psi}_{\alpha}(x)\psi_{\alpha}(x)$  sea independiente de tiempo y dirección para  $r = R_0$ . La independencia angular requiere que  $j = \frac{1}{2}$ . Para obtener independencia temporal, ajustamos

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}^{*}(n \kappa j = \frac{1}{2} m) a_{\alpha}(n' \kappa' j = \frac{1}{2} m') = 0,\tag{7.13}$$

a menos que  $n = n'$ ,  $\kappa = \kappa'$  o  $n = -n'$ ,  $\kappa = -\kappa'$  en cuyos casos no hay restricción ya que los términos dependientes del tiempo se cancela. La ecuación anterior es una restricción severa sobre los modos que deben ser ocupados. Deberíamos implementar la ecuación anterior requiriendo que para cada grado de libertad interno  $\alpha$  sólo un modo normal,  $a_{\alpha}(n \kappa j = \frac{1}{2} m)$  es excitado. Esto automáticamente será el caso para bariones de tres quarks si son requeridos a ser singletes de color.

Una vez que (9) es satisfecho, los términos independientes del tiempo en (3b) pueden ser coleccionados,

$$\sum_{\alpha n \kappa m} \omega_{n \kappa} a_{\alpha}^{*}(n \kappa \frac{1}{2} m) a_{\alpha}(n \kappa \frac{1}{2} m) = 4\pi B R_0^4,\tag{7.14}$$

## Conclusiones

- a) El campo en la bolsa se comporta sobre el promedio como un gas relativista perfecto; que es, la traza del tensor energía momento asociado con el campo, cuando es promediado sobre tiempo y espacio, es cero:

$$\left\langle \int_R d^3x (\Theta_{\mu}^{\mu})_{\text{campo}} \right\rangle = 0\tag{7.15}$$

- b) El volumen promediado en el tiempo de una bolsa es proporcional a su energía:

$$E = 4B \langle V \rangle\tag{7.16}$$

- c) El estado base y estados excitados más bajos de la bolsa contienen pocos partones de momento promedio de orden  $B^{1/4}$  encerrados en un volumen de orden  $B^{-3/4}$ . [ $B$  tiene la dimensión (longitud) $^{-4}$  con  $\hbar = c = 1$ ]
- d) En el límite termodinámico la bolsa tiene una temperatura fija,  $T_0$ , independiente de su energía.  $T_0$  es de orden  $B^{-1/4}$ . Esto es equivalente a las siguientes declaraciones

- La energía cinética promedio de los partones es de orden  $T_0$  independiente de la energía de bolsa  $E$  proporcionado el último es más grande que  $T_0$ :  $E \gg T_0$ .
- La densidad de nivel asintótico  $\zeta(E)$  del sistema es una función exponencial de  $E$ :

$$\zeta \sim e^{E/T_0}$$

- El número,  $N$ , de partones más antipartones presente en el hadrón es proporcional a su energía:

$$N \propto E/T_0$$

- e) Si la dinámica clásica es tal que hay un máximo momento angular del hadrón en una energía total dada  $E$ , ese máximo debe ser

$$J_{\text{máx}} = \kappa B^{-1/3} E^{4/3},$$

donde  $\kappa$  es una constante adimensional determinada por la dinámica detallada. Si el límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) existe, las correcciones cuánticas a esta fórmula se reducirían por potencias de  $E$ . Si no hay trayectoria clásica a seguir, un argumento plausible sugiere que la trayectoria guía podría ser (para un gran  $E$ )

$$J_{\text{máx}} = \kappa' B^{-1/2} E^2 \quad (\hbar = 1).$$

- f) El momento angular más probable para una  $E$  grande está dada por

$$\bar{J} \propto (B^{-1/4} E)^{5/6}$$



---

---

## CHAPTER 8

---

# NOTAS SOBRE NEW EXTENDED MODEL OF HADRONS DE A. CHODOS

### 8.1. Campos escalares

Aquí empiezan con el estudio cuantitativo de las propiedades de teorías de campos confinados a una bolsa con el caso de un campo escalar único.

#### 8.1.1. Formulación del problema clásico

Empezamos con el Lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \int_R d^{n-1}x \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - B \right) \\ &\equiv \int_R d^{n-1}x \mathcal{L} \end{aligned} \quad (8.1)$$

(nuestra métrica es  $-g^{00} = g^{ii} = 1$ ), donde  $B$  es la constante de bolsa, que es, la densidad de energía asociada con el volumen  $R$  al que los campos están confinados. La frontera de la región  $R$  barre una superficie  $S$  en espacio-tiempo. Las coordenadas  $X^\mu$  de  $S$  etiquetadas por  $n - 1$  parámetros  $\alpha_j$ ,

$$X^\mu = X^\mu(\{\alpha\}) \quad (8.2)$$

El vector unitario normal ( $n_\mu$ ) a esta superficie es definida para ser el vector unitario ortogonal a los  $n - 1$  vectores tangentes  $T_j^\mu$ :

$$T_j^\mu \equiv \frac{d}{d\alpha_j} X^\mu(\{\alpha\}). \quad (8.3)$$

Es útil expresar  $n_\mu$  en términos de la normal ( $m_\mu$ ) a la superficie a tiempo constante ( $t \equiv x^0$ ). Para hacer esto escogemos el parámetro  $\alpha_0 = t$  y reescribimos las ecuaciones anteriores como

$$\begin{aligned} X^\mu &= (t, X(\{\alpha\})), \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ T_j^\mu &= \begin{cases} (1, \dot{X}^i(\{\alpha, t\})), & j = 0 \\ \left( 0, \frac{d}{d\alpha_j} X^i(\{\alpha\}, t) \right), & j = 1, \dots, n - 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$m_\mu$  es entonces vector unitario puramente espacial [ $m_\mu = (0, m_i)$ ] ortogonal a los  $n - 2$  vectores tangentes  $T_j^\mu$  ( $j = 1, \dots, n - 2$ ):

$$m_\mu T_j^\mu = 0, \quad j = 1, \dots, n-2$$

$$m_\mu m^\mu = 1$$

Entonces definir

$$n_\mu = \frac{-(m_\lambda \dot{X}^\lambda) \eta_\mu + m_\mu}{[1 - (m_\lambda \dot{X}^\lambda)^2]^{1/2}}, \quad (8.5)$$

donde  $\eta_\mu$  es el vector tipo tiempo unitario:

$$\eta_\mu \equiv (1, 0, \dots, 0)$$

y  $\dot{X}^\lambda \equiv T_0^\lambda$ . Es fácil verificar que  $n_\mu T_j^\mu = 0$  y  $n_\mu n^\mu$ . Para establecer una convención escogemos que  $m_\mu$  sea normal interior a la superficie espacial.

Con esta geometría preliminar en mente derivamos las ecuaciones de movimiento del sistema requiriendo que la acción  $W \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L$  sea estacionario bajo variaciones del campo  $\phi$  y de la frontera  $S$  que se desvanece en  $t_0$  y  $t_1$ . Estabilidad bajo variación en la frontera requiere que la densidad de Lagrange se desvanezca sobre  $S$ :

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -2B \quad \text{sobre } S \quad (8.6)$$

La variación de los campos generan la ecuación de Klein-Gordon dentro de la bolsa:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \text{en } R \quad (8.7)$$

y otra condición de frontera:

$$n_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad \text{sobre } S \quad (8.8)$$

Esta condición de frontera surge a partir de términos superficiales en las integraciones parciales que son realizadas para liberar la variación  $\delta\phi$  de la derivada  $\partial_\mu$

### 8.1.2. Invariancia de Poincaré del problema clásico

Las ecuaciones de movimiento son manifestamente invariante de Poincaré. Correspondiendo a esta invariancia tenemos un arreglo de momentos  $P_\mu$  y generadores de rotación de Lorentz  $M_{\mu\nu}$  que deberían ser independientes del tiempo. Estos pueden ser construidos por medio del teorema de Noether a partir del Lagrangiano.

Las corrientes conservadas localmente son idénticas a esas del campo de Klein Gordon libre excepto por términos involucrando la densidad de energía  $B$ :

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (8.9)$$

$$M_{\mu\nu\lambda} = x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda} \quad (8.10)$$

con

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = \partial^\lambda M_{\mu\nu\lambda} = 0$$

Para mostrar la constancia de las cargas correspondientes considerar la integral de la divergencia de una corriente conservada sobre el "hipertubo mundial" de la bolsa:

$$0 = \int_V d^n x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \quad (\text{donde } \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0) \quad (8.11)$$

$V$  es el volumen espacio temporal recorrido por la bolsa y está ligado por dos hipersuperficies de tipo espacial y luz  $R_1$  y  $R_2$  que pueden ser tomadas como superficies de tiempo constante.

Integrando la ecuación anterior obtenemos

$$Q \equiv \int_{R_1} ds n_\mu \mathcal{J}^\mu = \int_{R_2} ds n_\mu \mathcal{J}^\mu - \int_S ds n_\mu \mathcal{J}^\mu \quad (8.12)$$

donde  $ds$  es el elemento de superficie sobre las superficies  $(n-1)$  dimensionales  $R_1$ ,  $R_2$ , y  $S$ . Para las corrientes conservadas de (3.9) y (3.10) es fácilmente mostrado que  $n_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$  sobre  $S$  con el auxilio de la condición de frontera (3.8). Por lo tanto hay independencia temporal de las cargas convencionales. Para completez, anotamos las expresiones para  $P_\mu$  y  $M_{\mu\nu}$  definidas sobre superficies de tiempo constante:

$$P_\mu \equiv \int_R d^{n-1}x T_\mu^0 \quad (8.13)$$

$$M_{\mu\nu} \equiv \int_R d^{n-1}x (x_\mu T_\nu^0 - x_\nu T_\mu^0). \quad (8.14)$$

Ya que la función primaria de las condiciones de frontera es garantizar la conservación de los generadores de Poincaré, podemos preguntar si existe un conjunto alternativo de condiciones de frontera, aparte de (3.6) y 3.9, que logran esta meta.

### 8.1.3. Mecánica clásica en dos dimensiones

En una dimensión espacial y una temporal, las ecuaciones de movimiento del campo escalar confinado a una bolsa se simplifican considerablemente.

Ya que el campo dentro de la bolsa es sin masa, es conveniente trabajar con variables de cono de luz:

$$x^+ \equiv \tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z),$$

$$x^- \equiv x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z)$$

Usando variables de cono de luz, el tensor métrico es fuera de la diagonal  $g^{+-} = g^{-+} = -1$ ,  $g^{++} = g^{--} = 0$ . Denotamos las derivadas con respecto a  $\tau$  por puntos:

$$\partial_+ \phi(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = \dot{\phi}(x, \tau)$$

y derivadas con respecto a  $x$  por primas:

$$\partial_- \phi(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \tau) = \phi'(x, \tau).$$

### Solución al problema clásico

En dos dimensiones y en coordenadas de cono de luz, la ecuación de movimiento y las condiciones de frontera se reducen a

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} \phi(x, \tau) = 0, \text{ en } R \quad (8.15)$$

$$\dot{\phi}(x_i(\tau), \tau) \phi'(x_i(\tau), \tau) = -B, \quad i = 0, 1 \quad (8.16)$$

$$\phi(x_i(\tau), \tau) = 0, \quad (8.17)$$

donde  $x_i(\tau)$  ( $i = 0, 1$ ) son los dos puntos que encierran la bolsa.

Para resolver la ecuación de onda, podemos proponer una solución de la forma

$$\phi(x, \tau) = f(\tau) + g(x). \quad (8.18)$$

Las condiciones de frontera pueden ser reescritas en términos de  $f(\tau)$  y  $g(x)$ :

$$\dot{f}(\tau)g'(x_i(\tau)) = -B, \quad i = 0, 1 \quad (8.19)$$

$$\dot{f}(\tau) + \dot{x}_i(\tau)g'(x_i(\tau)) = 0, \quad (8.20)$$

donde hemos diferenciado (3.15c) para obtener (3.17b). Las constantes del movimiento están dadas por (3.13):

$$P^- \equiv H = B(x_1(\tau) - x_0(\tau)), \quad (8.21)$$

$$P^+ \equiv P = \int_{x_0(\tau)}^{x_1(\tau)} dx [g'(x)]^2, \quad (8.22)$$

$$M^{+-} \equiv M = H\tau - \int_{x_0(\tau)}^{x_1(\tau)} dx x [g'(x)]^2 \quad (8.23)$$

La independencia temporal de  $H$ ,  $P$ , y  $M$  puede ser verificada con la ayuda de las condiciones de frontera (3.17). Por ejemplo, una combinación ajustable de las ecuaciones (3.17) lleva a

$$\dot{x}_i(\tau) = \frac{[\dot{f}(\tau)]^2}{B},$$

tal que  $\dot{x}_i(\tau)$  es independiente de  $i$  y  $\dot{H} = 0$ .

Para seguir encontraremos conveniente linealizar las condiciones de frontera. Esto puede ser hecho definiendo un nuevo parámetro espacial  $\sigma = \sigma(x)$  de acuerdo a la ecuación diferencial

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{p} [g'(x)]^2 \quad (8.24)$$

y condición inicial  $\sigma(x_0(0)) = 0$ , donde  $p$  es una constante que será especificada después. Definimos un nuevo campo  $\tilde{g}(\sigma)$  en términos de  $g(x)$  por este cambio de variables independientes,

$$\tilde{g}(\sigma) \equiv g(x(\sigma)) \quad (8.25)$$

$x(\sigma)$  será determinado a partir del inverso de

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{1}{p} [\tilde{g}'(\sigma)], \quad (8.26)$$

donde  $\tilde{g}'(\sigma) \equiv (\frac{d}{d\sigma})\tilde{g}(\sigma)$ . Las fronteras de la bolsa son  $\sigma_i(\tau) \equiv \sigma(x_i(\tau))$ . Cuando es descrito en términos de  $\sigma$ , el movimiento de frontera será bastante más simple. Cuando transformamos a  $\sigma$  como variable independiente (3.17) se vuelve

$$\dot{f}(\tau) = -\frac{B}{p} \tilde{g}'(\sigma_i(\tau)), \quad (8.27)$$

$$\dot{f}(\tau) + \dot{\sigma}_i(\tau) \tilde{g}'(\sigma_i(\tau)) = 0 \quad (8.28)$$



tal que  $\dot{\sigma}_i(\tau) = \frac{B}{p}$ . Usando la condición inicial  $\sigma(x_0(0)) = \sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_0(\tau) = \frac{B\tau}{p}$ ,  $\sigma_1(\tau) = (B\tau/p) + \sigma_1$ , donde  $\sigma_1$  es una constante de integración. Para especificar  $\sigma_1$  y  $p$  considerar el momento (3.18b) en conjunción con (3.19):

$$P = p(\sigma_1(\tau) - \sigma_0(\tau)) = p\sigma_1$$

Consecuentemente, si escogemos por conveniencia  $p$  sea la constante  $P$ , entonces  $\sigma_1 = 1$  y

$$\sigma_1(\tau) = \frac{B\tau}{P} + 1 \quad (8.29)$$

$$\sigma_0(\tau) = \frac{B\tau}{P} \quad (8.30)$$

La solución es ahora inmediato

## 8.2. Campos fermiónicos

### 8.2.1. Declaración de las condiciones de frontera

Supongamos que consideramos un solo campo de Dirac en la bolsa descrito por la acción

$$W_1 = \int_V d^4x \left[ \frac{1}{2} i (\bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{D}} \psi) - \right] \quad (8.31)$$



---

---

## CHAPTER 9

---

# NOTAS SOBRE MASSES AND OTHER PARAMETERS OF THE LIGHT HADRONS DEGRAND

Las masas y parámetros estáticos de hadrones ligeros

Los efectos de la energía cinética de quark, energía de bolsa, masa de quark extraño, intercambio de gluon colorado a más bajo orden, y energía asociada con ciertas fluctuaciones cuánticas son incluidas. Estas son parametrizadas por cuatro constantes que tienen significancia fundamental y no cambiar de multiplete a multiplete. El ajuste al espectro es bueno.

Momentos magnético, constantes de decaimiento débil, y el radio de carga son calculados. Donde comparación con experimento es posible.

### 9.1. Introducción

Durante la decada pasada, una teoría de quarks de estructura de hadron ha sido desarrollada que es exitosa en interpretar vastas cantidades de datos experimentales de unas pocas ideas simples extraordinariamente. Los ingredientes de esta teoría son como sigue:

- a) Hadrones están compuestos de quarks. Los quarks vienen en varios "sabores", los tres de Gell - Mann y Zweig, aumentado quizá por nuevos quarks para nuevos grados de libertad hadrónicos tales como encanto, y 3 colores.
- b) Los quarks interactuan entre ellos mismos relativamente débilmente por el intercambio de un octeto de gluones acoplados colorados, sin masa en la manera de Yang Mills a sus índices de colores.
- c) La interacción debe ser débil a cortas distancias para explicar escala en experimentos de dispersión de leptones; debe ser débil cerca de la transferencia de momento cero para tomar en cuenta para la falta de grandes renormalizaciones de modelo de quark sencillo estima de transiciones entre bariones ligeros.
- d) La simetría  $SU(3)$  generada por la permutación de índices de color es inquebrantable.
- e) Los quarks de diferentes sabores pueden tener diferentes masas para dar cuenta del desglose observado del  $SU(3)$  de Gell Mann y para las altas masas de estados compuestos de quarks encantados si eso es lo que son  $J(3100)$  y  $\psi(3700)$

Finalmente, y esencialmente, quarks colorados y gluones colorados no son ellos mismos parte del espectro físico.

Los grados de libertad de quark-gluon pueden similarmente caracterizar variables colectivas describiendo la "baja excitación" de materia hadrónica. La única manera que sabemos de proporcionar una descripción de esto consistente con invariancia de lorentz es introduciendo un nuevo término,  $-g_{\mu\nu}\theta_s B$ , en el tensor de energía momento de la teoría [4, 10, 32–34].

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$$

---

---

# APPENDIX A

---

## APPENDIX ON COLLISIONS

### A.1. On collisions

4

(A.1)



---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70 (1):93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). [Elsevier].
- [2] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. [Springer].
- [3] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL [http://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_2\\_163\\_0/](http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/). [Numdam].
- [4] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315>. [Annual Reviews].
- [5] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539>. [APS].
- [6] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki.  $N\Omega$  dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050>. [Elsevier].
- [7] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki.  $p \Xi^-$  correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967:856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041>. [Elsevier].
- [8] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the lh. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6>. [Nature].
- [9] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive  $p$ - $\phi$  interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: [10.1103/PhysRevLett.127.172301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.172301). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301>. [APS].

- [10] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. [APS].
- [11] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: [doi:10.1103/physrevd.10.2599](https://doi.org/10.1103/physrevd.10.2599). [APS].
- [12] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y>. [Springer].
- [13] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. [Springer].
- [14] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). [Elsevier].
- [15] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. [Springer].
- [16] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132>. [EPJ].
- [17] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. [Springer].
- [18] I. Bediaga, E.M.F. Curado, and J.M. de Miranda. A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in  $e^+ e^- \rightarrow$  hadrons. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 286(1–2):156–163, October 2000. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00368-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00368-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X). [Elsevier].
- [19] TASSO Collaboration. Jet production and fragmentation in  $e^+ e^-$  annihilation at 12 to 43 gev. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 22(4):307–340, December 1984. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01547419>. [Springer].
- [20] CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 105:022002, Jul 2010. doi: [10.1103/PhysRevLett.105.022002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.022002). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.022002>. [APS].
- [21] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy  $pp$  collisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5):054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. [APS].
- [22] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at lhc energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: [10.1088/1361-6471/aaaea0](https://doi.org/10.1088/1361-6471/aaaea0). [IOPScience].



- [23] Arvind Khuntia, Sushanta Tripathy, Raghunath Sahoo, and Jean Cleymans. Multiplicity dependence of non-extensive parameters for strange and multi-strange particles in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 7$  s = 7 tev at the lhc. *The European Physical Journal A*, 53(5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8>. [Springer].
- [24] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, and Venktesh Singh. Transverse momentum spectra of hadrons in high energy pp and heavy ion collisions. *Journal of Physics Communications*, 2(3):035003, March 2018. ISSN 2399-6528. doi: 10.1088/2399-6528/aab00f. [IOPScience].
- [25] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, Vineet Kumar, and Venktesh Singh. Strange hadron production in pp, ppb and pbb collisions at lhc energies. *The European Physical Journal A*, 53(5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7>. [Springer].
- [26] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. [Nature].
- [27] CLAS Collaboration. Measurement of deeply virtual compton scattering beam-spin asymmetries. *Phys. Rev. Lett.*, 100:162002, Apr 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.162002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.162002>. [APS].
- [28] CLAS Collaboration. Cross sections for the exclusive photon electroproduction on the proton and generalized parton distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 115:212003, Nov 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.212003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.212003>. [APS].
- [29] Dimitar Lubomirov Mihaylov. First experimental test of hadron qcd lattice calculations for the multi strange hyperon - nucleon interaction with alice. *Nuclear Physics A*, 1005:121760, January 2021. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760>. URL <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760>. [Elsevier].
- [30] Frank Wilczek. Quantum chromodynamics: The modern theory of the strong interaction. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, (32):177–209, 1982. URL <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141>. <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141>.
- [31] K. Johnson. The m.i.t bag model. *ACTA PHYSICA POLONICA*, B6(6):1–28, 1975. URL <https://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=6&page=865>.
- [32] M. Y. Han and Y. Nambu. Three-triplet model with double su(3) symmetry. *Physical Review*, 139(4B):B1006–B1010, aug 1965. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.139.B1006>.
- [33] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics (Classical Theoretical Physics)*. Springer, 2001. ISBN 0-387-94299-8.
- [34] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. Kiskis. Masses and other parameters of the light hadrons. *Physical Review D*, 12(7):2060–2076, oct 1975. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.2060>.