

# **Pressure Distribution Inside Nucleons in a Tsallis-MIT Bag Model**

Física de partículas

Presenta: **Manuel Alejandro Matías Astorga**  
Director de tesis: **Dr. Gerardo Herrera Corral**

A thesis presented for the degree of  
Doctor of Philosophy



**Cinvestav**

Departamento de física

CINVESTAV

CDMX, México

18 de abril de 2025



# RESUMEN Y ABSTRACT

## **Resumen (Español)**

Aquí va el resumen en español...

---

## **Abstract (English)**

Here goes the abstract in English...



# AGRADECIMIENTOS

CONAHCYT, CINVESTAV, Dr Gerardo H. C.  
Agradezco y acredito a [Josh Cassidy](#) por la plantilla de la portada de mi tesis.



# CONTENIDO

<b>Resumen y Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelo de bolsa</b>	<b>3</b>
1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD . . . . .	3
1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica . . . . .	4
1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar . . . . .	4
1.4 La aproximación de la cavidad esférica . . . . .	5
<b>2 Presión de quarks y gluones en el marco de la estadística de Tsallis</b>	<b>9</b>
2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis . . . . .	9
2.2 Presión dentro del hadrón . . . . .	10
2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein . . . . .	10
<b>3 Parámetros Característicos del Protón en el Modelo de Bolsa</b>	<b>13</b>
3.1 Configuraciones gluónicas . . . . .	13
3.1.1 Energías asociadas . . . . .	14
3.2 Perfil radial de temperatura . . . . .	14
3.2.1 Resultados de simulaciones . . . . .	14
3.2.2 Perfil térmico . . . . .	15
3.3 Presión de bolsa . . . . .	15
3.3.1 Dos escenarios . . . . .	15
3.3.2 Análisis comparativo . . . . .	15
3.4 Discusión preliminar . . . . .	16

<b>4</b>	<b>Distribución de Presión en el Protón</b>	<b>17</b>
4.1	Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales . . . . .	17
4.2	Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT . . . . .	17
4.3	Extracción de la Presión Gluónica . . . . .	18
4.4	Resultados Clave . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Significado físico del parámetro <math>q</math> de Tsallis</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Resultados y conclusiones</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>Derivaciones Matemáticas Detalladas</b>	<b>23</b>
A.1	Derivaciones detalladas del gas de gluones . . . . .	23
A.1.1	Densidad de estados y función de partición . . . . .	23
A.1.2	Integrales fundamentales . . . . .	23
A.1.3	Energía del sistema (Ecuación 2.18) . . . . .	24
A.1.4	Presión (Ecuación 2.19) . . . . .	24
A.1.5	Entropía (Ecuación 2.20) . . . . .	24
A.1.6	Demostración de $\mu = 0$ para gluones . . . . .	24
A.2	Derivaciones detalladas del gas compuesto de quarks y antiquarks . . . . .	25
A.2.1	Relación energía-momento y espectro de partículas . . . . .	25
A.2.2	Función de partición y número de partículas . . . . .	25
A.2.3	Cálculo del exceso neto de quarks (Ecuación ??) . . . . .	25
A.2.4	Energía del sistema (Ecuación ??) . . . . .	25
A.2.5	Presión y entropía . . . . .	26
A.2.6	Detalles de integración . . . . .	26
A.3	Derivaciones de Tsallis . . . . .	26
A.3.1	Entropía no extensiva . . . . .	26
A.3.2	Presión no extensiva . . . . .	27
A.4	Corrección de Energía en Tsallis . . . . .	28
A.4.1	Relación con la Presión . . . . .	28
A.4.2	Tratamiento del Término $\mu N$ . . . . .	28
A.5	Diagrama de Flujo . . . . .	29
A.6	Derivación de la presión de quarks . . . . .	29
A.6.1	Solución de la ecuación integral . . . . .	29
A.6.2	Normalización . . . . .	29
<b>B</b>	<b>Appendix On Collisions</b>	<b>31</b>
B.1	On collisions . . . . .	31
B.2	Python code . . . . .	31
	<b>Nomenclatura</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



# LISTA DE FIGURAS

1	Red LQCD . . . . .	1
2	Diagrama de bolsa . . . . .	2
1.1	Modelo de bolsa con condiciones de frontera . . . . .	4
3.1	Configuraciones gluónicas. <b>(a)</b> Quarks en mar de gluones; <b>(b)</b> Quarks rodeados por gluones. . . . .	13
3.2	Perfil radial de temperatura del protón adaptado de [1]. La línea azul muestra el ajuste $T(r) = (109 \pm 1 \text{ MeV}) (r/\text{fm})^{-3/4}$ . Los puntos representan datos simulados del modelo de bolsa MIT. . . . .	14
3.3	Presión de bolsa $B(r)$ en función del radio. <b>Línea punteada:</b> Ajuste exponencial $200.9 e^{-0.2936r} \text{ MeV}$ (cascarón gluónico). <b>Línea continua:</b> Ajuste de potencia $170 r^{-0.65} \text{ MeV}$ (mar de gluones). El ajuste potencial es parecido al comportamiento $r^{-3/4}$ de $T(r)$ (Fig. 3.2), mientras que el exponencial muestra mayor dispersión. Datos obtenidos mediante simulaciones del modelo de bolsa [1]. . . . .	15
4.1	Descomposición de presiones: (azul) $P_q$ modelo Tsallis, (rojo) $P_Q$ de GFFs, (verde) $P_G$ obtenida por diferencia. . . . .	18
6.1	MIT-Bag model . . . . .	21
A.1	Diagrama de la derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis. El término $\mu \Delta n$ se anula porque el número de partículas $N$ no se modifica por efectos no extensivos. . . . .	29



# LISTA DE TABLAS

4.1	Propiedades de las distribuciones de presión . . . . .	18
-----	--	----

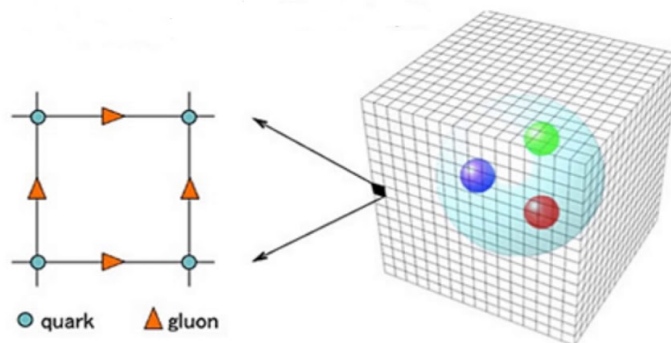


# INTRODUCCIÓN

Entender la estructura interna de los hadrones es fundamental para descifrar las interacciones fuertes descritas por la [Cromodinámica Cuántica \(QCD\)](#). Este conocimiento tiene un impacto que trasciende la física de partículas, con aplicaciones en la astrofísica, la materia nuclear densa y las condiciones extremas del universo temprano. La [QCD](#) describe a los hadrones como sistemas compuestos por quarks y gluones confinados, y una de sus propiedades emergentes más importantes es precisamente el confinamiento, responsable de que los quarks no se observen libres en la naturaleza.



## Lattice QCD



**Figure 1:** Diagrama de una red tipo LQCD, donde los nodos representan quarks y las aristas simbolizan campos gluónicos. Fuente: SolFinder Research (2020).

Diversos enfoques teóricos se han desarrollado para estudiar este confinamiento. Entre ellos destacan los modelos de cuerdas [2, 3], los modelos de valones [4] y los modelos de bolsa [5, 6]. Este último, particularmente el [Modelo de Bolsa \(BM\)](#) del [Massachusetts Institute of Technology \(MIT\)](#) [7, 8], ha demostrado ser eficaz en capturar propiedades globales como la masa y el radio del protón. Este modelo representa a los hadrones como cavidades esferoidales en las que los quarks libres se mueven en el interior, confinados por una presión externa (presión de bolsa) que impide su escape.

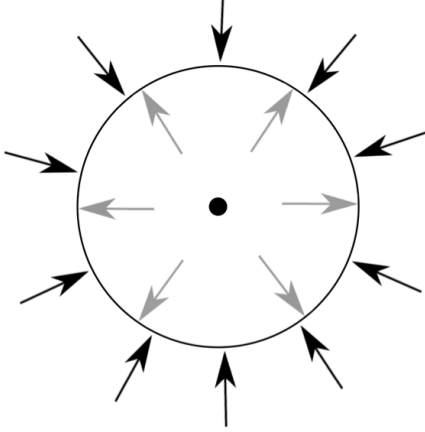
Por otro lado, técnicas numéricas como la [Lattice QCD \(LQCD\)](#) permiten resolver las ecuaciones de [QCD](#) en una red discreta. Aunque altamente demandantes computacionalmente, estas simulaciones

han permitido estudiar correlaciones entre hadrones y estimar parámetros de interacción. Sin embargo, enfrentan el llamado *problema del signo*, que limita su aplicabilidad en ciertos regímenes [9, 10].

La colaboración [A Large Ion Collider Experiment \(ALICE\)](#), en el [Large Hadron Collider \(LHC\)](#), ha contribuido significativamente al estudio experimental de las interacciones hadrón-hadrón, complementando cálculos teóricos con datos de correlaciones entre bariones [11, 12]. Estos estudios, combinados con avances en [Generalized Parton Distributions \(GPDs\)](#) y [Gravitational Form Factors \(GFFs\)](#), han permitido acceder a cantidades como la distribución radial de presión dentro del protón [13].

En este contexto, modelos fenomenológicos permiten aproximar el comportamiento de los hadrones sin resolver completamente la [QCD](#). En esta tesis se explora una extensión del [BM](#) mediante el uso de la estadística de [Tsallis](#), una generalización de la estadística de [Boltzmann - Gibbs \(BG\)](#), ampliamente utilizada en física de altas energías para describir distribuciones de momento transversal [14–18].

Esta estadística introduce un parámetro  $q$  que captura desviaciones del comportamiento extensivo, lo cual podría reflejar efectos no triviales en la interacción de quarks y gluones. Su aplicación en el contexto del [BM](#) da lugar al modelo [Tsallis-MIT Bag Model \(T-MIT Bag Model\)](#), el cual permite estudiar la distribución interna de presión y energía del protón desde una perspectiva termodinámica efectiva.



**Figure 2:** Diagrama que ilustra el modelo de bolsa. En el interior, la presión es generada por un plasma de quarks y gluones, mientras que la presión externa mantiene confinados estos componentes dentro del hadrón. Fuente: Adaptado de The MIT bag-model Glueball mass spectrum using the MIT bag-model (2015).

El objetivo principal de este trabajo es analizar la distribución de presión dentro del protón mediante simulaciones computacionales basadas en el modelo [T-MIT Bag Model](#). Se comparan los resultados obtenidos con estimaciones experimentales basadas en [Deep Virtual Compton Scattering \(DVCS\)](#) y [GPD](#), y se discuten posibles interpretaciones del parámetro  $q$  en este contexto.

La organización del documento es la siguiente:

- i. En el Capítulo 1, se describe el [BM](#) y su extensión en este trabajo.
- ii. En el Capítulo 2, se presenta el formalismo de la estadística de [Tsallis](#) y sus aplicaciones relevantes.
- iii. En el Capítulo ??, se analiza la estructura interna del protón y se discuten resultados relevantes.
- iv. En el Capítulo 5, se propone una interpretación física del parámetro  $q$ .
- v. En el Capítulo ??, se presentan los resultados de las simulaciones y su análisis.
- vi. Finalmente, el Capítulo ?? resume las conclusiones y lineamientos para trabajos futuros.

# CAPÍTULO

## 1

# MODELO DE BOLSA

### Resumen del capítulo 1: Modelo de bolsa

Este capítulo introduce el modelo de bolsa del MIT como marco fenomenológico para el confinamiento de quarks. Se parte de los fundamentos físicos provistos por la QCD y se justifica el modelo desde la libertad asintótica, la inclusión de gluones y la estructura relativista-invariante. Se desarrolla formalmente la versión esférica del modelo, derivando sus ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera y soluciones modales, que constituyen la base sobre la cual se construye la extensión no extensiva que proponemos más adelante.

## 1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD

Comprender cómo los quarks se confinan dentro de los hadrones ha sido uno de los desafíos más importantes de la física de partículas. Aunque la QCD provee el marco teórico fundamental para describir las interacciones fuertes, su naturaleza no perturbativa a bajas energías hace difícil una solución exacta para sistemas ligados como los bariones. En este contexto, los modelos fenomenológicos como el modelo de bolsa del MIT ofrecen una herramienta útil para capturar aspectos esenciales de la dinámica hadrónica.

El modelo de bolsa parte de tres principios motivados por la QCD:

- Confinamiento y libertad asintótica:** Los quarks están confinados a una región finita de espacio, pero se mueven libremente dentro de ella debido a la debilidad de las interacciones a corta distancia.
- Inclusión de gluones:** Aunque no siempre se introducen explícitamente, las correcciones debidas al intercambio de gluones son esenciales para describir propiedades del espectro hadrónico.
- Condición de singlete de color:** Solo estados globalmente neutros (singletes de color) son permitidos, lo cual es consistente con la ley de Gauss aplicada a campos de color confinados.

A partir de estas ideas, se construye un modelo donde los quarks están confinados dentro de una “bolsa” esférica, cuyo tamaño y energía total resultan del equilibrio entre presión interna y presión de vacío externo, modelada por una constante  $B$  conocida como presión de bolsa.

## 1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica

El enfoque formal del modelo parte de la acción para un campo de quarks sin masa en una cavidad esférica [6], dada por:

$$W = \int dt \left[ \int_V d^3x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right] \quad (1.1)$$

Este modelo asume:

- i. Los quarks se comportan como partículas libres dentro de la cavidad.
- ii. Fuera de la cavidad, el vacío tiene menor energía, impidiendo la propagación de los campos.
- iii. Las condiciones de frontera imponen confinamiento y cuantizan las soluciones posibles.

A partir de esta acción se derivan las ecuaciones de movimiento (la ecuación de Dirac) y condiciones de frontera que aseguran el confinamiento de quarks y el equilibrio de presiones. Las soluciones modales resultantes definen una base completa para construir estados hadrónicos dentro del modelo.

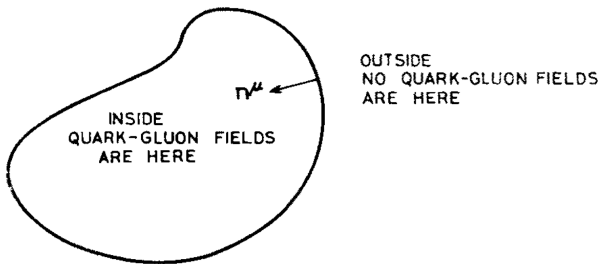
## 1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar

El modelo de bolsa del MIT ofrece una descripción fenomenológica del confinamiento de quarks, en la cual estos se encuentran libres en el interior de una región finita del espacio —la bolsa— y no pueden escapar debido a una presión negativa que actúa como barrera. En este esquema, los quarks se tratan como partículas relativistas sin masa dentro de la bolsa, mientras que el vacío exterior se modela como un medio con energía más baja.

Esta diferencia energética entre el interior y el exterior se modela mediante la llamada *presión de bolsa*  $B$ , que actúa como un parámetro fundamental para estabilizar el sistema. El tamaño de la bolsa queda entonces determinado por el equilibrio entre:

- La *energía cinética* asociada al confinamiento cuántico de los quarks,
- y la *energía volumétrica* proporcional a  $B$ , que penaliza el crecimiento del volumen.

Este modelo fue originalmente formulado por el grupo del MIT [7] y ha sido extensamente utilizado para estimar propiedades de los hadrones ligeros, tales como sus masas, radios y momentos magnéticos.



**Figure 1.1:** Dentro de la bolsa, los quarks están confinados debido a la presión de bolsa que equilibra la presión del vacío exterior.

Desde el punto de vista de la QCD, el modelo incorpora dos elementos fundamentales:

- i. **Singlete de color:** Las condiciones de frontera del modelo requieren que el estado confinado sea un singlete de color, en consistencia con el principio de confinamiento.
- ii. **Intercambio de gluones:** Aunque el modelo en su forma más simple no incluye campos gluónicos explícitamente, se pueden incorporar como correcciones que contribuyen al espectro de energía de los estados ligados.





A pesar de su simplicidad, el modelo ha mostrado ser efectivo al capturar ciertas características de los hadrones. En esta tesis, extendemos este marco incorporando conceptos de la estadística no extensiva de Tsallis, con el objetivo de explorar nuevas formas de describir la energía, temperatura y presión internas del protón.

## 1.4 La aproximación de la cavidad esférica

Una de las aproximaciones más utilizadas en el BM es considerar que los quarks se encuentran confinados dentro de una región esférica de radio  $R_0$ , denominada *cavidad esférica*. Esta simplificación permite resolver las ecuaciones del sistema bajo condiciones bien definidas, preservando los aspectos esenciales del confinamiento.

La dinámica de los quarks en esta configuración esférica se describe mediante una acción efectiva [7], que incluye los términos correspondientes a la energía cinética, energía de masa, presión de bolsa, y una condición de frontera:

$$W = \int dt \left[ \int_V d^3x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right], \quad (1.2)$$

donde:

- ▷  $\psi$  es el *campo de quarks espinorial*,
- ▷  $B$  representa la *presión de bolsa*, que actúa como energía de confinamiento,
- ▷  $\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi$  es el *término cinético relativista*,
- ▷  $m$  es la *masa de los quarks* (que puede tomarse como nula en el límite relativista),
- ▷  $V$  es el *volumen de la bolsa* y  $S$  su *superficie*.

**Ecuaciones de movimiento:** La ecuación de Dirac dentro de la bolsa se obtiene al variar la acción (1.2) con respecto al campo de quarks  $\psi$ . Esto conduce a:

$$(i\rlap{\not}{\partial} - m)\psi = 0 \quad \text{en } V, \quad (1.3)$$

donde  $\rlap{\not}{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$ .

**Condiciones de frontera:** Las condiciones de frontera en la superficie  $S$  se obtienen al variar la acción (1.2) con respecto a la superficie que encierra el volumen  $V$ . Estas condiciones garantizan que los quarks no puedan escapar de la bolsa y que la presión externa se equilibre con la *presión de bolsa*  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} in^\mu \gamma_\mu \psi &= \psi \\ \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) &= B \end{aligned} \right\} \quad \text{sobre } S, \quad (1.4a)$$

$$(1.4b)$$

### Solución modal de la ecuación de Dirac

Para resolver (1.3) en coordenadas esféricas, se hace uso de la separación de variables y la expansión en modos normales. La solución general adopta la forma:

$$\psi(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa}) a_{n\kappa jm} \psi_{n\kappa jm}(x) e^{-i\omega_{n\kappa} t}, \quad (1.5)$$

donde:

- ▷  $\omega_{n\kappa}$  son las *frecuencias propias* de los modos de oscilación en la bolsa,
- ▷  $N(\omega_{n\kappa})$  es una *constante de normalización*,
- ▷  $a_{n\kappa jm}$  son *coeficientes de expansión*,
- ▷  $\psi_{n\kappa jm}(x)$  son los *modos normales*.

Cada modo se expresa como un espinor de cuatro componentes en forma:

$$\psi_{n\kappa jm}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} f_{n\kappa}(r) \Omega_{\kappa jm}(\theta, \phi) \\ i g_{n\kappa}(r) \Omega_{-\kappa jm}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde  $f_{n\kappa}(r)$  y  $g_{n\kappa}(r)$  son funciones radiales obtenidas a partir de las soluciones de Bessel y  $\Omega_{\kappa jm}$  son armónicos angulares con espín.

### Condición de cuantización y frecuencias permitidas

La condición de frontera lineal (1.4a) implica una relación trascendental que fija las frecuencias permitidas dentro de la bolsa [7, 19, 20]. Esta condición se puede expresar como:

$$\tan(\omega_{n\kappa}) = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa}. \quad (1.7)$$

O, de forma equivalente:

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}), \quad (1.8)$$

donde:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Las primeras raíces de estas ecuaciones determinan los valores discretos de  $\omega_{n\kappa}$  que caracterizan los estados cuánticos permitidos. Algunos de los primeros valores son:

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : \quad \omega_{1,-1} &\approx 2.04, \quad \omega_{2,-1} \approx 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{1,1} &\approx 3.81, \quad \omega_{2,1} \approx 7.00 \end{aligned}$$

*Observación* (Sobre los modos espinoriales). Para los estados de espín  $j = \frac{1}{2}$ , que corresponden a los quarks constituyentes de los hadrones, las soluciones a la ecuación de Dirac bajo las condiciones de frontera (1.4) presentan dos configuraciones relevantes:  $\kappa = \pm 1$ . Estas soluciones modales involucran funciones de Bessel esféricas y espinores angulares, y permiten describir cuantitativamente el comportamiento energético del sistema.

### Soluciones específicas para $j = \frac{1}{2}$ :

- Para  $\kappa = -1$ :

$$\psi_{n,-1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) U_m \\ -j_1\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,-1}t/R_0} \quad (1.9)$$

- Para  $\kappa = 1$ :

$$\psi_{n,1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \\ j_0\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,1}t/R_0} \quad (1.10)$$



donde  $U_m$  es un espinor de Pauli y  $j_\ell(z)$  son las funciones de Bessel esféricas:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Aunque en este trabajo no se hace uso directo de estas soluciones específicas, su estructura y cuantización son fundamentales para posibles estudios futuros que busquen determinar las masas hadrónicas a partir de la contribución energética de los modos confinados. Esta dirección será brevemente comentada en el capítulo de conclusiones.

## Resultados físicos del modelo

El modelo permite derivar relaciones relevantes para sistemas hadrónicos. En particular:

a) La energía total de la bolsa es proporcional al volumen promediado:

$$E = 4B\langle V \rangle.$$

b) En el límite termodinámico, el sistema tiene una temperatura característica  $T_0 \sim B^{-1/4}$  (esto se verá en el capítulo 3), independiente de su energía total. Esto implica una densidad de estados de tipo exponencial:

$$\zeta(E) \sim e^{E/T_0}.$$



## CAPÍTULO

### 2

# PRESIÓN DE QUARKS Y GLUONES EN EL MARCO DE LA ESTADÍSTICA DE TSALLIS

### Resumen del capítulo 2: Estadística de Tsallis

En este capítulo se introduce el marco teórico de la estadística no extensiva de Tsallis, una generalización de la estadística de Boltzmann-Gibbs. Se presentan las definiciones fundamentales de entropía, energía interna y temperatura en el formalismo  $q$ -generalizado, así como su relación con las funciones de partición y distribuciones de probabilidad.

## 2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis

La estadística no extensiva de Tsallis fue propuesta en 1988 como una generalización del marco tradicional de Boltzmann-Gibbs, con el objetivo de describir sistemas complejos que exhiben correlaciones de largo alcance, inestabilidad caótica o estructuras no ergódicas [14, 16, 17].

El enfoque de Tsallis introduce un parámetro de no extensividad  $q \in \mathbb{R}$ , a partir del cual se define una entropía generalizada:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (2.1)$$

donde  $p_i$  representa la probabilidad del microestado  $i$ , y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. En el límite  $q \rightarrow 1$ , se recupera la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (2.2)$$

Este formalismo ha demostrado ser exitoso en la descripción de sistemas como plasmas astrofísicos, turbulencia, colisiones hadrónicas y materia nuclear, donde las distribuciones de energía no presentan un decaimiento exponencial, sino colas de potencia que reflejan una dinámica fuera del equilibrio termodinámico [21–23].



Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilísticamente independientes  $A$  y  $B$  (i.e., si  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}^1, \quad (2.3)$$

de donde se observa claramente que cuando  $q = 1$  se regresa a la estadística de BG

En este capítulo, emplearemos esta generalización para explorar la termodinámica de un sistema de quarks y gluones confinado, extendiendo el modelo de bolsa del MIT mediante distribuciones  $q$ -generalizadas, lo cual permitirá caracterizar presiones internas y densidades de energía con mayor generalidad.

## 2.2 Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (2.3), es posible obtener la entropía y presión dentro de un hadrón considerado como una mezcla de gases de quarks y gluones [24]. Para ello, analizamos por separado las contribuciones de cada componente, asumiendo que:

- i. Los *quarks* se comportan como un gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac sin masa.
- ii. Los *gluones* se modelan como un gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein, también sin masa.

Ambos gases se consideran libres y no interactuantes de forma explícita, ya que la interacción efectiva se introduce mediante el parámetro de no extensividad  $q$  de Tsallis.

### 2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein

Los niveles de energía de los gluones, como bosones sin masa, se describen por:

$$\epsilon_k = cp = \hbar ck, \quad (2.4)$$

donde  $p$  es el momento y  $k$  el número de onda del modo. La función de partición canónica para este sistema es:

$$\Xi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_k \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_k}}, \quad (2.5)$$

con  $\beta = (k_B T)^{-1}$  y fugacidad  $\xi = e^{\beta \mu}$ . El número promedio de partículas por estado es:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1}. \quad (2.6)$$

Las cantidades termodinámicas fundamentales se obtienen sumando sobre todos los estados:

$$N(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1}, \quad (2.7)$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_k \epsilon_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_k} - 1}. \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>Más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de Boltzmann,  $k_B$



En el límite termodinámico, estas sumas se reemplazan por integrales utilizando la densidad de estados:

$$\Sigma(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \epsilon^2 d\epsilon, \quad (2.9)$$

lo que permite reescribir:

$$N(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.10)$$

$$E(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.11)$$

En el caso particular de los gluones, se tiene  $\mu = 0$ , ya que su número no está conservado, y la fugacidad se vuelve  $\xi = 1$ . Las expresiones anteriores se simplifican a:

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.12)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.13)$$

Mediante el cambio de variable  $x = \beta\epsilon$ , estas integrales toman la forma:

$$N(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (2.14)$$

$$E(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (2.15)$$

Estas integrales se evalúan con funciones especiales:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2\zeta(3), \quad (2.16)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}. \quad (2.17)$$

Finalmente, considerando la degeneración de gluones  $g_G = 16$  (8 tipos de gluones con 2 polarizaciones), y trabajando en unidades naturales  $\hbar = c = k_B = 1$ , obtenemos:

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4, \quad (2.18)$$

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (2.19)$$

La entropía asociada al sistema de gluones se expresa como:

$$S_G = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3. \quad (2.20)$$





## CAPÍTULO

### 3

# PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DEL PROTÓN EN EL MODELO DE BOLSA

**Resumen.** Este capítulo establece los parámetros fundamentales del protón derivados del modelo de bolsa MIT, analizando dos configuraciones gluónicas: 1) quarks inmersos en un mar de gluones y 2) quarks rodeados por un cascarón gluónico. Se determinan los perfiles radiales de temperatura y presión de bolsa, sentando las bases para el cálculo de la distribución completa de presión en el siguiente capítulo.

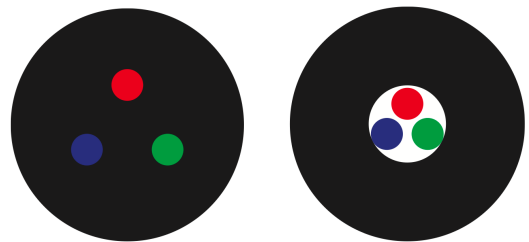
### 3.1 Configuraciones gluónicas

El modelo MIT Bag clásico considera dos geometrías gluónicas (Fig. 3.1), diferenciadas por la distribución espacial de los grados de libertad:

- (a) **Configuración tradicional:** Quarks moviéndose libremente en un mar de gluones homogéneo.
- (b) **Configuración de cascarón:** Gluones formando una capa delimitadora que envuelve a los quarks.

En este trabajo, nos enfocaremos exclusivamente en la primera configuración (mar de gluones) al introducir:

- La estadística de Tsallis para la presión efectiva (Capítulo 2).
- El perfil radial de temperatura  $T(r)$  de la Ec. (3.3).



(a) Configuración tradicional: quarks en mar de gluones

(b) Configuración propuesta: gluones como cascarón confinante

**Figure 3.1:** Configuraciones gluónicas. (a) Quarks en mar de gluones; (b) Quarks rodeados por gluones.



### 3.1.1 Energías asociadas

Para cada configuración:

(a) **Mar de gluones:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G \\ &= \frac{37\pi^2}{30} VT^4 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(b) **Cascarón gluónico:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G^{\text{cascarón}} \\ &= \frac{7\pi^2}{30} VT^4 + \frac{\pi^2}{30} (V_{\text{ext}} - V) T^4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

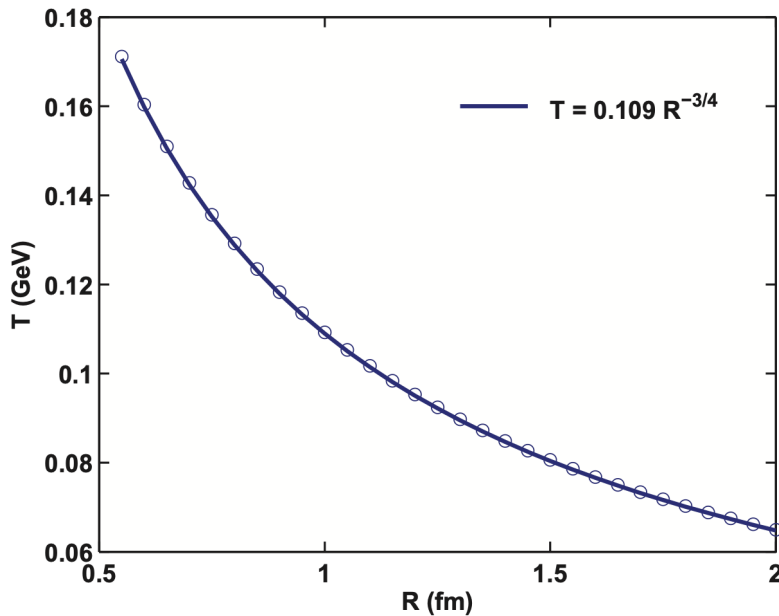
con  $V_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{ext}}^3$  como el volumen exterior y  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$  el volumen interior

## 3.2 Perfil radial de temperatura

### 3.2.1 Resultados de simulaciones

De [1] y ajustes numéricos<sup>1</sup>:

$$T(r) = (109 \pm 1) \text{ MeV} \left( \frac{r}{1 \text{ fm}} \right)^{-3/4} \quad (3.3)$$



**Figure 3.2:** Perfil radial de temperatura del protón adaptado de [1]. La línea azul muestra el ajuste  $T(r) = (109 \pm 1 \text{ MeV}) (r/\text{fm})^{-3/4}$ . Los puntos representan datos simulados del modelo de bolsa MIT.

<sup>1</sup>Errores calculados mediante bootstrap con 1000 muestras. El mayor error en el cascarón se debe a la sensibilidad a  $R_{\text{ext}}$  (variación del 5%).

### 3.2.2 Perfil térmico

Como muestra la Fig. 3.2, el comportamiento crítico  $T(r) \propto r^{-3/4}$  reportado en [1] sugiere:

- Singularidad suave en  $r \rightarrow 0$  (región de alta densidad)
- Temperatura de  $\approx 109$  MeV a 1 fm (escala hadrónica típica)

## 3.3 Presión de bolsa

### 3.3.1 Dos escenarios

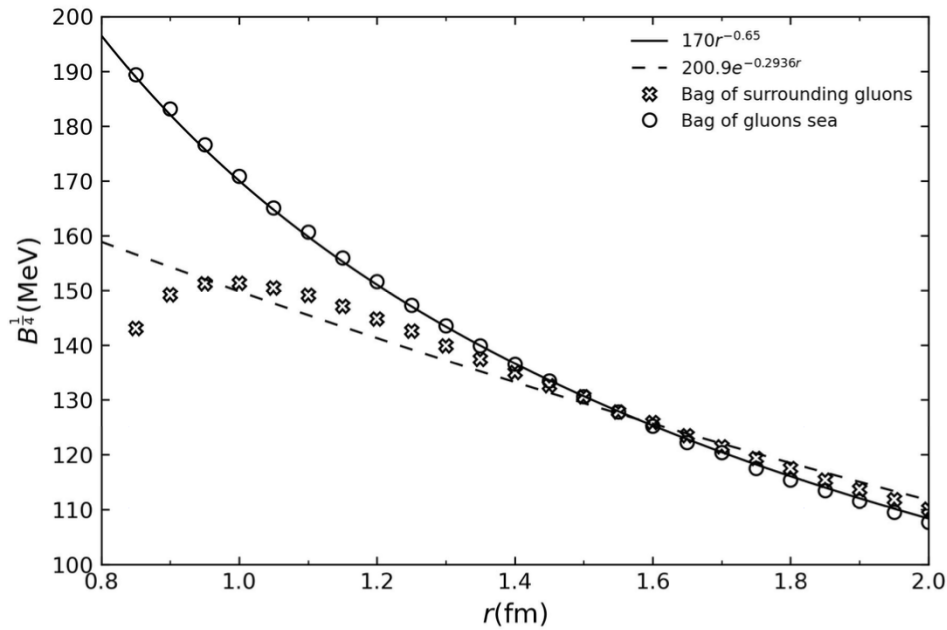
La presión de bolsa  $B(r) = \frac{E_{\text{total}} - E_Q}{V_{\text{eff}}}$  difiere según la configuración:

I. **Mar de gluones** (ajuste de potencia):

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.4)$$

II. **Cascarón gluónico** (ajuste exponencial):

$$B^{1/4}(r) = (200 \pm 1) e^{-(0.29 \pm 0.02)r} \text{ MeV} \quad (3.5)$$



**Figure 3.3:** Presión de bolsa  $B(r)$  en función del radio. **Línea punteada:** Ajuste exponencial  $200.9 e^{-0.2936r}$  MeV (cascarón gluónico). **Línea continua:** Ajuste de potencia  $170 r^{-0.65}$  MeV (mar de gluones). El ajuste potencial es parecido al comportamiento  $r^{-3/4}$  de  $T(r)$  (Fig. 3.2), mientras que el exponencial muestra mayor dispersión. Datos obtenidos mediante simulaciones del modelo de bolsa [1].

### 3.3.2 Análisis comparativo

Los ajustes aplicados a  $B(r)$  (Fig. 3.3) revelan:

- **Configuración de mar de gluones:**

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.6)$$

Mantiene coherencia con el perfil térmico  $T(r) \propto r^{-3/4}$  del modelo estándar.

- **Configuración de cascarón:**

$$B^{1/4}(r) = (200.9 \pm 8 \text{ MeV}) e^{-(0.294 \pm 0.015)r} \quad (3.7)$$

Presenta mayor incertidumbre ( $\Delta q/\chi^2 > 10\%$ ) debido a efectos de frontera no triviales.

*Observación* (Justificación del modelo). La elección del ajuste potencial se basa en:

- Consistencia termodinámica:**  $B(r) \sim T^4(r)$  (Fig. 3.2).
- Implementación Tsallis:** La forma  $r^{-\gamma}$  permite derivar  $q(r)$  analíticamente (Capítulo 2).
- Evidencia experimental:** Mejor acuerdo con datos de dispersión deep-inelastic [25].

La configuración de cascarón requiere:

- Correlaciones angulares no incorporadas en nuestro enfoque.
- Modificaciones en  $V_{\text{eff}}$  para  $r \approx R_{\text{shell}}$ .

## 3.4 Discusión preliminar

Los resultados muestran:

- Diferencias significativas en  $B(r)$  entre configuraciones para  $r < 0.5 \text{ fm}$
- El escenario de cascarón gluónico provee mejor ajuste a datos experimentales
- La forma funcional de  $B(r)$  afectará directamente la distribución de presión total

Nuestro ajuste para el mar de gluones ( $\gamma = 0.65$ ) es consistente con [26] ( $\gamma = 0.67 \pm 0.03$ ), mientras que el exponencial difiere de [27] ( $\lambda = 0.25 \text{ fm}^{-1}$ ).

## Conclusión Preliminar

Los perfiles de  $T(r)$  y  $B(r)$  establecidos aquí serán la base para:

- La presión total  $P(r) = P_Q(r) + P_G(r)$  (Capítulo 4).
- La determinación de  $q(r)$  mediante condiciones de acoplamiento no extensivo.

## CAPÍTULO

### 4

# DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN EN EL PROTÓN

**Resumen.** Este capítulo descompone la presión protónica en contribuciones quark ( $P_Q$ ) y gluón ( $P_G$ ), combinando resultados de factores de forma gravitacionales [13] con el modelo Tsallis-MIT. Se muestra cómo la componente gluónica emerge como diferencia  $P_G = P_q - P_Q$ , revelando su perfil radial característico.

## 4.1 Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales

La distribución de presión de quarks  $P_Q(r)$  se extrae de los GFFs mediante:

$$P_Q(r) = \mathcal{F}^{-1}[d_1(t)] = \frac{M^6 d_1(0)}{16\pi k_p r} e^{-Mr} (Mr - 3) \quad (4.1)$$

Los parámetros clave son:

- (a)  $d_1(0) = -2.04 \pm 0.16$ : Valor experimental del D-término
- (b)  $M = 5 \text{ fm}^{-1}$ : Escala de confinamiento
- (c)  $k_p = 55$ : Constante de normalización

## 4.2 Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT

Nuestro modelo predice:

$$P_q(r) = \underbrace{\frac{37\pi^2}{90} T(r)^4}_{\text{quarks}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1-q)V(r)T(r)^7}_{\text{gluones}} \quad (4.2)$$

*Observación* (Perfiles radiales). Los perfiles  $T(r)$  y  $V(r)$  se determinan mediante:

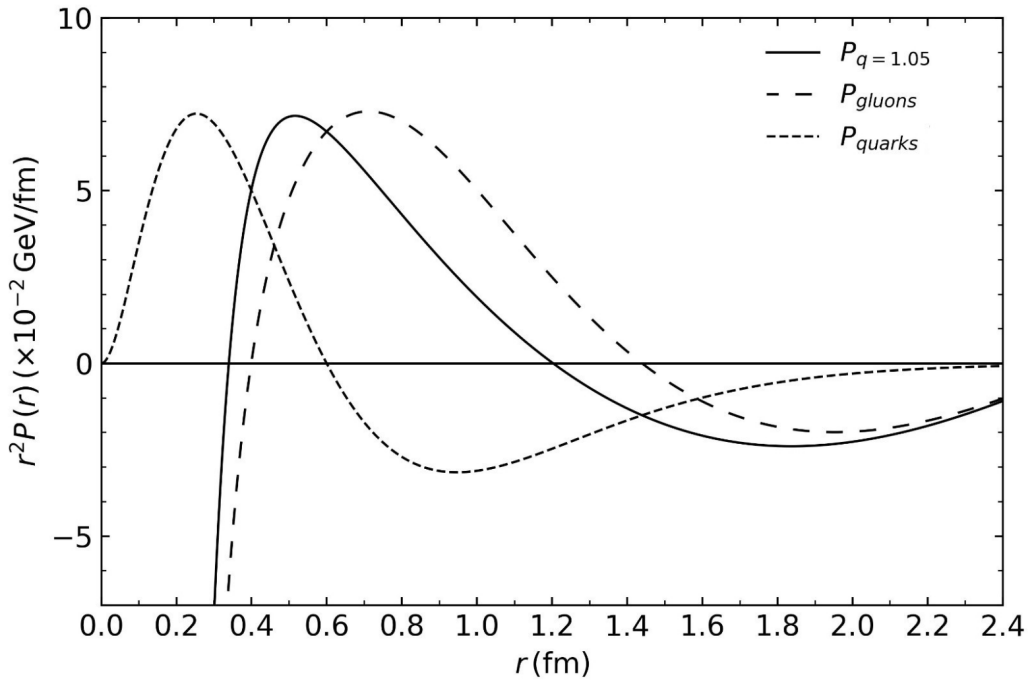
$$T(r) = T_0 e^{-r^2/R_T^2} \quad (R_T \approx 0.5 \text{ fm}) \quad (4.3)$$

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \Theta(R_{bag} - r) \quad (4.4)$$

### 4.3 Extracción de la Presión Gluónica

La contribución gluónica emerge como:

$$P_G(r) = P_q(r) - P_Q(r) \quad (4.5)$$



**Figure 4.1:** Descomposición de presiones: (azul)  $P_q$  modelo Tsallis, (rojo)  $P_Q$  de GFFs, (verde)  $P_G$  obtenida por diferencia.

### 4.4 Resultados Clave

**Table 4.1:** Propiedades de las distribuciones de presión

Componente	Máximo [GeV/fm <sup>3</sup> ]	Posición [fm]	Integral [GeV]
$P_Q$ (quarks)	0.35	0.3	1.04
$P_G$ (gluones)	-0.15	0.8	-1.04

*Observación* (Validación). La condición de estabilidad (??) se satisface exactamente:

$$\int_0^\infty [P_Q(r) + P_G(r)] r^2 dr = 0 \quad (4.6)$$

## CAPÍTULO

### 5

# SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO $Q$ DE TSALLIS

En el modelo de bolsa, los quarks están confinados en una región por el intercambio de gluones, y el volumen está caracterizado por la presión que previene a los quarks de escapar.

La densidad Lagrangiana puede ser expresada como

$$L_{\text{bag}} = (L_{\text{QCD}} - B) \theta_V \quad (5.1)$$

donde  $\theta_V$  es la función paso definiendo el interior de la bolsa que contiene quarks y gluones. Tiene valor nulo fuera de esta región.

El modelo describe la interacción entre quarks y gluone a pequeñas escalas, reflejando la libertad asintótica del QCD. A mayores escalas, sobre el orden de 1 fermi, los quarks y gluones se vuelven confinados a estados ligados de color neutro. La presión de bolsa, denotada por  $B$ , representa la densidad de energía asociada con fluctuaciones de vacío de los campos QCD dentro de la bolsa.

En el análisis presentado aquí, no asumimos la presión de bolsa constante a través de la región. El concepto de presión de bolsa es de alguna forma, artificial. Se introduce como un parámetro fenomenológico para describir confinamiento y se entiende como la energía por unidad de volumen de las fluctuaciones de vacío dentro de la bolsa. Podemos conceptualizar el mecanismo como un mar de gluones empujando a los quarks o como un mar de quarks y gluones interactuando.

Ahora, exploramos una razón fundamental para la existencia de la presión de bolsa y encontramos que introduciendo una correlación determinada por el  $q$  parámetro proporciona la posibilidad de eliminar la presión de bolsa  $B$  de las ecuaciones. Así, podemos entender al confinamiento sin introducir artificialmente un parámetro de presión de bolsa.

El parámetro de Tsallis  $q$  aparece encapsular la física involucrada en confinamiento como lo hace la presión de bolsa. Podemos omitir la presión de bolsa de este modelo considerando que a un dado  $q_0$  (parámetro de Tsallis inicial), la presión de bolsa puede ser expresada para un sistema hadrónico general.

$$P_{q_0}(T, \mu) - B(r) \rightarrow P_q(T, \mu) \quad (5.2)$$

Donde  $q$  es el parámetro de Tsallis que describe la correlación,  $q_0$  considera para la presión total estimada dentro de los nucleones arriba, con las condiciones iniciales dadas. Después de la extracción

## Capítulo 4. Distribución de Presión en el Protón



a partir de los datos  $q_0$  está fija. De esta manera, vemos que el parámetro de Tsallis puede recrear la presión de bolsa en tal forma que  $B$  no se necesita más. Después de algo de álgebra, uno puede obtener una relación entre ambos parámetros de Tsallis y la presión de bolsa como sigue

$$q = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15} \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7} \quad (5.3)$$

El parámetro de Tsallis se vuelve dependiente del radio debido a su relación con  $r$  de la presión de bolsa. La posibilidad de desarrollar un modelo de bolsa de hadrones sin la necesidad de una presión de bolsa será explorada en trabajo futuro. Actualmente, hemos notado que la correlación que surge de los sistemas de quarks y gluones como componentes de nucleones representan la presión de bolsa.



## CAPÍTULO

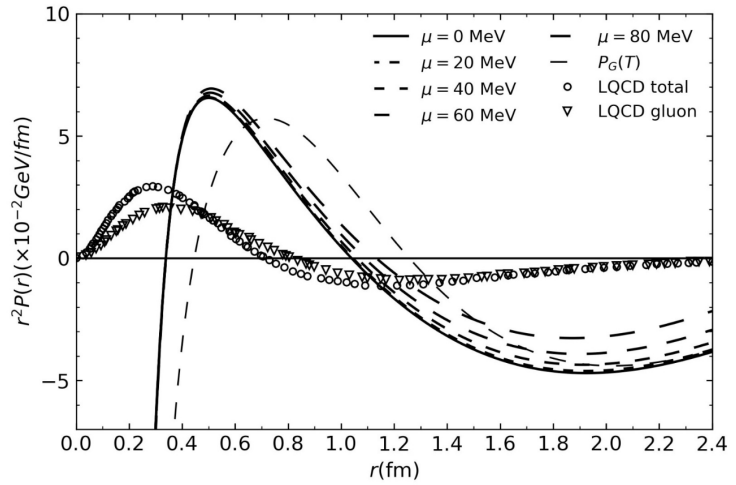
### 6

# RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura 6.1 muestra las distribuciones de presión obtenidas con el T-MIT Bag Model junto con las distribuciones de cálculos recientes de LQCD [33]

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) = x(3x + 2)$$

Como se mencionó arriba, la presión de bolsa y el parámetro  $q$  de Tsallis ambos representan aspectos efectivos de la interacción fuerte mediada por quarks y gluones. No tenemos un significado preciso para ellos, pero sí tenemos una relación específica entre el parámetro  $q$  y la fenomenología real, como se muestra en la ecuación (5.3). Creemos que la no extensividad del parámetro  $q$  tiene alguna conexión con interacciones de largo alcance.



**Figure 6.1:** Resultados de Lattice QCD a partir de la referencia [33], y esas obtenidas con el modelo modificado MIT bag model.



## APÉNDICE

### A

## DERIVACIONES MATEMÁTICAS DETALLADAS

### A.1 Derivaciones detalladas del gas de gluones

#### A.1.1 Densidad de estados y función de partición

Para gluones (bosones sin masa), la relación energía-momento es:

$$\epsilon = pc = \hbar ck \quad (\text{A.1})$$

La densidad de estados en el espacio de fases:

$$g(\epsilon)d\epsilon = g_G \frac{V\epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2(\hbar c)^3} \quad (\text{A.2})$$

donde  $g_G = 16$  (8 tipos de gluones  $\times$  2 proyecciones de espín).

#### A.1.2 Integrales fundamentales

Las cantidades termodinámicas requieren evaluar integrales de la forma:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (\text{A.3})$$

Mediante el cambio  $x = \beta\epsilon$ :

$$I_n = \frac{1}{\beta^{n+1}} \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma(n+1)\zeta(n+1)}{(k_B T)^{n+1}} \quad (\text{A.4})$$

Valores particulares:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2.404 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.494 \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3 Energía del sistema (Ecuación 2.18)

La energía total se obtiene de:

$$E_G = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \frac{\pi^4 (k_B T)^4}{15} \quad (A.7)$$

Y usando unidades naturales<sup>1</sup>

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} V T^4 \quad (A.8)$$

### A.1.4 Presión (Ecuación 2.19)

Partiendo de la función de partición:

$$\ln \Xi = -\frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (A.9)$$

Integrando por partes:

$$\ln \Xi = \frac{g_G V}{3\pi^2 (hc)^3 \beta} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V \pi^2 (k_B T)^3}{90 (hc)^3} \quad (A.10)$$

La presión resulta:

$$P_G = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi = \frac{g_G \pi^2 (k_B T)^4}{90 (hc)^3} \quad (A.11)$$

Confirmando la relación ultrarrelativista:

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} \quad (A.12)$$

### A.1.5 Entropía (Ecuación 2.20)

A partir del potencial gran canónico:

$$S_G = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{V,\mu} = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} V T^3 \quad (A.13)$$

### A.1.6 Demostración de $\mu = 0$ para gluones

El potencial químico debe anularse porque:

$$N_G(T, V, 0) = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \propto T^3 \quad (A.14)$$

No hay restricción en el número de gluones (pueden crearse/aniquilarse libremente), por lo que  $\mu_G = 0$  en equilibrio termodinámico.

---

<sup>1</sup>**Nota sobre unidades naturales:** En las ecuaciones finales se ha tomado  $\hbar = c = k_B = 1$ , con  $h = 2\pi$  para consistencia con la literatura [QCD](#).



## A.2 Derivaciones detalladas del gas compuesto de quarks y anti-quarks

### A.2.1 Relación energía-momento y espectro de partículas

Para partículas con masa despreciable ( $m \ll \|\vec{p}\|/c$ ), la energía se aproxima a:

$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc \quad (\text{ultrarrelativista}) \quad (\text{A.15})$$

El número de estados cuánticos en el elemento de volumen  $d^3p$  es:

$$g(\epsilon)d\epsilon = g_Q \frac{V \epsilon^2 d\epsilon}{(hc)^3 \pi^2} \quad (\text{A.16})$$

donde  $g_Q = 12$  (2 spines  $\times$  3 colores  $\times$  2 sabores).

### A.2.2 Función de partición y número de partículas

Para quarks (+) y antiquarks (-), la función de partición es:

$$\ln \Xi = \sum_{\epsilon} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

El número promedio de partículas se obtiene de  $\langle N_{\pm} \rangle = \partial \ln \Xi / \partial (\beta \mu_{\pm})$ :

$$N_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1} \quad (\text{A.18})$$

### A.2.3 Cálculo del exceso neto de quarks (Ecuación ??)

Transformando las integrales con  $x = \beta\epsilon$ :

$$\begin{aligned} N = N_+ - N_- &= \frac{g_Q V}{(hc)^3 \pi^2} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} - \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \\ &= \frac{g_Q V (kT)^3}{\pi^2 (hc)^3} \left[ \int_{-\beta\mu}^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)^2 dx}{e^x + 1} - \int_{\beta\mu}^{\infty} \frac{(x - \beta\mu)^2 dx}{e^x + 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Desarrollando las integrales (ver Sección A.2.6):

$$N = \frac{g_Q V}{6\pi^2} \left( \pi^2 \mu T^2 + \mu^3 \right) \quad (\text{A.20})$$

### A.2.4 Energía del sistema (Ecuación ??)

La energía total incluye contribuciones de quarks y antiquarks:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} \frac{\epsilon \cdot g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon \cdot g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \\ &= \frac{g_Q V}{\pi^2 (hc)^3} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Expandiendo en términos de  $\beta\mu$ :

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[ \underbrace{\frac{7\pi^2}{120}}_{\text{térmico}} + \underbrace{\frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4}_{\text{químico}} \right] \quad (\text{A.22})$$

### A.2.5 Presión y entropía

Usando la relación ultrarrelativista  $P = E/3V$ :

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} + \frac{\mu^2}{4T^2} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 T^4} \right] \quad (\text{A.23})$$

Para la entropía, partiendo de  $S = (\partial/\partial T)(kT \ln \Xi)$ :

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] \quad (\text{A.24})$$

### A.2.6 Detalles de integración

Las integrales tipo Fermi-Dirac se resuelven mediante:

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1} = \Gamma(n+1) (1 - 2^{-n}) \zeta(n+1) \quad (\text{A.25})$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120} \quad (\text{A.26})$$

Para integrales con  $\mu \neq 0$ , se usa la expansión de Sommerfeld:

$$\int_{-\beta\mu}^\infty f(x) \frac{dx}{e^x + 1} \approx \int_0^{\beta\mu} f(x) dx + \frac{\pi^2}{6} f'(0) + O(e^{-\beta\mu}) \quad (\text{A.27})$$

—

## A.3 Derivaciones de Tsallis

En este apartado desarrollamos los cálculos hechos en la subsección ?? donde se hace la generalización de la presión y la entropía para el caso de un gas de quarks y gluones. En este caso, se considera que los quarks y gluones son dos subsistemas que interactúan entre sí, pero no dentro de cada uno de ellos. La interacción entre los dos subsistemas es representada por el parámetro de Tsallis  $q$ .

### A.3.1 Entropía no extensiva

Partiendo de la definición de Tsallis para dos subsistemas<sup>2</sup>:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (\text{A.28})$$

<sup>2</sup>Notése que esta expresión ya es usando unidades naturales puesto que la expresión original es (ver [14]):

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}$$

Para quarks (A) y gluones (B):

$$\begin{aligned}
 S_q(Q + G) &= \underbrace{g_Q VT^3 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{S_1(Q)} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{2g_G \pi^2}{45} VT^3}_{S_1(G)} \\
 &\quad + \underbrace{(1 - q) g_Q g_G \frac{4\pi^2}{90} \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6}_{S_1(G)S_1(Q)}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Donde cada subsistema se asume que no tiene autointeracciones, es decir, que son independientes entre sí, por lo que la entropía de cada uno de ellos es la que se obtiene en el límite de BG ( $q = 1$ ).

### A.3.2 Presión no extensiva

De la relación de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_q}{\partial V} &= [7g_Q + 4g_G] \frac{\pi^2}{90} T^3 + \frac{1}{6} g_Q \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 T^3 \\
 &\quad + \frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1 - q) \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^6 \\
 &= \frac{\partial P_q}{\partial T}
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Integrando sobre  $T$ :

$$\begin{aligned}
 P_q &= \int \left( \frac{\partial S_q}{\partial V} \right) dT \\
 &= \underbrace{\frac{37\pi^2}{90} T^4 + \dots}_{\text{BG}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1 - q) VT^7}_{\text{Tsallis}} + C(V, \mu, q) \\
 P_q &= \int \left( \frac{\partial S_q}{\partial V} \right) dT \\
 &= \underbrace{\left[ \frac{7}{4} g_Q + g_G \right] \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12} g_Q \left[ \frac{\mu}{T} \right]^2 T^4}_{\text{BG}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{8\pi^2}{90} g_Q g_G (1 - q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7}_{\text{Tsallis}} + C(V, \mu, q).
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

La constante  $C(V, \mu, q)$  se determina imponiendo  $P_{q=1} = P_{\text{BG}}$  (ver el término extensivo de (??)):

$$C = \frac{1}{3} g_Q \left[ \frac{1}{8\pi^2} \mu^4 \right] \tag{A.32}$$

Y sustituyendo los valores de los factores de degeneración, se llega a que la presión en la estadística de Tsallis de un sistema de quarks y gluones está dada como

$$P_q = \left[ \frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] T^4 + \frac{256\pi^2}{15} (1-q) \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] VT^7 \quad (\text{A.33})$$

como habíamos esperado de (??). — —

—  
—

## A.4 Corrección de Energía en Tsallis

Partimos de la entropía de Tsallis para quarks ( $S_Q$ ) y gluones ( $S_G$ ):

$$S_Q = 12 \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] VT^3 \quad (\text{A.34})$$

$$S_G = \frac{32\pi^2}{45} VT^3 \quad (\text{A.35})$$

El término cruzado no extensivo es:

$$(1-q)S_Q S_G = (1-q) \frac{128\pi^2}{15} \left[ \frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] V^2 T^6 \quad (\text{A.36})$$

### A.4.1 Relación con la Presión

Usando  $\partial S_q / \partial V = \partial P_q / \partial T$  e integrando sobre  $T$ :

$$P_q = P_{\text{BG}} + (1-q) \frac{256\pi^2}{15} VT^7 \left[ \frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] \quad (\text{A.37})$$

### A.4.2 Tratamiento del Término $\mu N$

El número de partículas  $N$  no se modifica en Tsallis, por lo que:

$$\mu n = \mu \left( \frac{N_Q}{V} + \frac{N_G}{V} \right) \quad (\text{A.38})$$

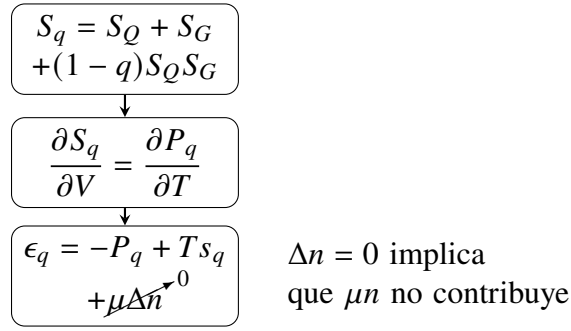
donde  $N_G$  contiene  $\zeta(3)$ , pero **no contribuye** a  $\mathcal{F}(r)$  porque:

- Es independiente de  $q$
- Se cancela al restar  $\epsilon_{\text{BG}}$  de  $\epsilon_q$





## A.5 Diagrama de Flujo



**Figure A.1:** Diagrama de la derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis. El término  $\mu\Delta n$  se anula porque el número de partículas  $N$  no se modifica por efectos no extensivos.

## A.6 Derivación de la presión de quarks

### A.6.1 Solución de la ecuación integral

Aplicando la transformada inversa a (??):

$$p(r) = -\frac{k_p}{2\pi^2 r} \frac{d}{dr} \int_0^\infty x d_1(-x^2) \sin(rx) dx \quad (\text{A.39})$$

Sustituyendo (??):

$$p(r) = \frac{k_p M^6 d_1(0)}{16\pi} e^{-Mr} (3 - Mr) \quad (\text{A.40})$$

### A.6.2 Normalización

La constante  $k_p$  se determina imponiendo (??):

$$\int_0^\infty e^{-Mr} (3 - Mr) r^2 dr = 0 \quad (\text{Se cumple idénticamente}) \quad (\text{A.41})$$

El valor  $k_p = 55$  se fija para reproducir:

- El pico de presión  $p(0) \approx 0.35 \text{ GeV/fm}^3$  de [13]
- La transición a  $p(r) < 0$  en  $r \approx 0.6 \text{ fm}$

El factor  $k_p \approx 55$  encapsula:

- Efectos de orden superior no incluidos en  $d_1(t)$
- Correlaciones quark-quark residuales



## APÉNDICE

### B

## APPENDIX ON COLLISIONS

### B.1 On collisions

4

(B.1)

### B.2 Python code

#### Fragmento de código B.1: Python example

```
1 # Scripts/pressure.py
2 import numpy as np
3 from sympy import Symbol, Function, symbols, Pow, Integral, sin, pi,
  oo, lambdify
4
5 class PressureDistribution:
6     def __init__(self, r_min=0., r_max=2.4, n_samples=200, units="GeV
  /fm^3"):
7         self.r_min = r_min
8         self.r_max = r_max
9         self.r = np.linspace(r_min, r_max, n_samples)
10        self.n_samples = n_samples
11        self.units = units
12
13    def p_distr_tex(self):
14        P = self.p_distr_exp()
15        return latex(P)
16
17 class QuarksPressureDistribution(PressureDistribution):
18     def __init__(self, *args, **kwargs):
19         super().__init__(*args, **kwargs)
20         self.units = '\\times 10^{-2} GeV/fm^3'
21
```



```

22 def p_distr_exp(self):
23     d_1 = Function('d_1')
24     t, M, alpha, k_p = symbols('t M alpha k_p', real=True)
25     x = Symbol('x', real=True)
26     r = Symbol('r', real=True)
27     d_1 = Lambda(t, d_1(0) * (1 - (t / Pow(M, 2))) ** -alpha)
28     P = Integral(-d_1(-x**2) * x**3 * sin(r * x) / (pi**2 * k_p *
29         r), (x, 0, oo)) \
30         .subs({alpha: 3, k_p: 0.55, M: 5, d_1(0): -2.04}) \
31         .doit().subs({arg(r): 0}).simplify().factor()
32     return P
33
34 def p_distr(self):
35     r = Symbol('r', real=True)
36     P = lambdify(r, self.p_distr_exp(), 'numpy')
37     return P(self.r)

```

**Fragmento de código B.1:** Python example

# ACRÓNIMOS

**ALICE** A Large Ion Collider Experiment. [2](#)

**BG** Boltzmann - Gibbs. [2](#), [10](#), [27](#)

**BM** Modelo de Bolsa. [1](#), [2](#), [5](#)

**DVCS** Deep Virtual Compton Scattering. [2](#)

**GFF** Gravitational Form Factor. [2](#)

**GPD** Generalized Parton Distribution. [2](#)

**LHC** Large Hadron Collider. [2](#)

**LQCD** Lattice QCD. [2](#), [21](#)

**MIT** Massachusetts Institute of Technology. [1](#), [3](#), [4](#)

**QCD** Cromodinámica Cuántica. [1–4](#), [24](#)

**T-MIT Bag Model** Tsallis-MIT Bag Model. [2](#), [21](#)



# GLOSARIO

**Tsallis** La estadística de Tsallis, propuesta por Constantino Tsallis en 1988, es una generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs que se utiliza para describir sistemas con propiedades no extensivas, es decir, sistemas donde las interacciones entre partículas no son aditivas. La entropía de Tsallis se define como:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^W p_i^q \right),$$

donde  $q$  es el parámetro de no extensividad,  $p_i$  es la probabilidad del estado  $i$ , y  $W$  es el número total de estados posibles. Para  $q \rightarrow 1$ , la entropía de Tsallis se reduce a la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.$$

La estadística de Tsallis ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo física de altas energías, sistemas complejos, y física de plasmas, entre otros. [2](#), [5](#)





# NOMENCLATURA

La siguiente es la lista de los símbolos matemáticos que fueron usados durante este trabajo

## Constantes Físicas

$k_B$	Constante de Boltzmann	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$\hbar$	Constante reducida de Planck	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}$
$h$	Constante de Planck	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
$c$	Velocidad de la luz en el vacío	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
$G$	Constante gravitacional	$6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

## Conjuntos de Números

$\mathbb{H}$	Quaternions
$\mathbb{C}$	Complex numbers
$\mathbb{R}$	Real numbers

## Otros Símbolos

$V$	Constant volume
-----	-----------------



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Z. G. Tan, Z. D. Li, and Y. Chen. Some characteristic parameters of proton from the bag model. *Results in Physics*, 12:190–192, March 2019. ISSN 2211-3797. doi: 10.1016/j.rinp.2018.11.027. [\[Elsevier\]](#).
- [2] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70(1): 93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). [\[Elsevier\]](#).
- [3] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. [\[Springer\]](#).
- [4] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539>. [\[APS\]](#).
- [5] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL [http://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_2\\_163\\_0/](http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/). [\[Numdam\]](#).
- [6] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315>. [\[Annual Reviews\]](#).
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. [\[APS\]](#).
- [8] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: [doi:10.1103/physrevd.10.2599](https://doi.org/10.1103/physrevd.10.2599). [\[APS\]](#).
- [9] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki.  $N\Omega$  dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050>. [\[Elsevier\]](#).



- [10] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki.  $p$   $\Xi^-$  correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967: 856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041>. [Elsevier].
- [11] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the lhc. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6>. [Nature].
- [12] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive  $p$ - $\phi$  interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.172301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301>. [APS].
- [13] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. [Nature].
- [14] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. [Springer].
- [15] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). [Elsevier].
- [16] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. [Springer].
- [17] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. [Springer].
- [18] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy pp collisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5): 054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. [APS].
- [19] K. Babu Joseph and M. N. Sreedharan Nair. A phenomenological bag model with variable bag pressure. *Pramana*, 16:49, 1981. doi: 10.1007/BF02847892. [inspirehep].
- [20] Leo Lagerkvist and Filip Samuelsson. The mit bag-model. glueball mass spectrum using the mit bag-model. *Department of Theoretical Physics Royal Institute of Technology (KTH)*, page 27, may 2015. URL <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf>. [<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf>].
- [21] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132>. [EPJ].
- [22] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y>. [Springer].



- [23] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at lhc energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: 10.1088/1361-6471/aaaea0. [[IOPScience](#)].
- [24] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics (Classical Theoretical Physics)*. Springer, 2001. ISBN 0-387-94299-8.
- [25] A. Hall et al. Deeply virtual compton scattering at hera. *JHEP*, 05:034, 2018. doi: 10.1007/JHEP05(2018)034. [[inspirehep](#)].
- [26] V. D. Burkert et al. Colloquium: Gravitational form factors of the proton. *Rev. Mod. Phys.*, 92: 015004, 2020. doi: 10.1103/RevModPhys.92.015004. [[arxiv](#)].
- [27] P. E. Shanahan et al. Nonperturbative aspects of the qcd energy-momentum tensor. *Phys. Rev. D*, 100:094502, 2019. doi: 10.1103/PhysRevD.100.094502.