

Pressure Distribution Inside Nucleons in a Tsallis-MIT Bag Model

Física de partículas

Presenta: **Manuel Alejandro Matías Astorga**
Director de tesis: **Dr. Gerardo Herrera Corral**

A thesis presented for the degree of
Doctor of Philosophy



Cinvestav

Departamento de física

CINVESTAV

CDMX, México

29 de abril de 2025

RESUMEN Y ABSTRACT

Resumen (Español)

En esta tesis se propone una extensión del modelo de bolsa del MIT mediante el uso de la estadística no extensiva de Tsallis, con el objetivo de describir la distribución radial de presión dentro del protón. A partir de un enfoque termodinámico efectivo, se incorporan perfiles espaciales para la temperatura y la presión de bolsa, y se analiza el efecto del parámetro q de Tsallis como descriptor de las correlaciones internas del sistema. El modelo resultante, denominado Tsallis-MIT Bag Model, permite estudiar cómo la presión total, y en particular su descomposición en componentes quark y gluónica, se ve afectada por el potencial químico y la no extensividad. Los resultados se comparan con cálculos recientes de Lattice QCD y funciones de forma gravitacionales (GFFs), mostrando una concordancia cualitativa con datos extraídos de dispersión profundamente virtual (DVCS). Además, se propone una reinterpretación física del parámetro q como una manifestación del confinamiento, a partir de su relación funcional con la presión de bolsa. Finalmente, se discute la posibilidad de reconstruir perfiles de $q(r)$ y su potencial como variable dinámica en modelos autoconfinantes.

Abstract (English)

This thesis proposes an extension of the MIT bag model by introducing Tsallis non-extensive statistics, aimed at describing the radial pressure distribution inside the proton. Using an effective thermodynamic framework, spatial profiles for temperature and bag pressure are incorporated, and the role of the Tsallis parameter q is analyzed as a descriptor of internal correlations within the system. The resulting model, referred to as the Tsallis-MIT Bag Model, enables the study of how total pressure—particularly its quark and gluon components—varies under changes in the chemical potential and non-extensivity. The results are compared with recent Lattice QCD computations and gravitational form factors (GFFs), showing qualitative agreement with data extracted from deeply virtual Compton scattering (DVCS). Furthermore, a physical reinterpretation of the parameter q is proposed, framing it as a manifestation of confinement through its functional relationship with the bag pressure. The work concludes with the possibility of reconstructing $q(r)$ profiles, highlighting its potential as a dynamic variable in self-confining models.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente al **Dr. Gerardo Herrera Corral** por su guía, paciencia y confianza durante el desarrollo de esta tesis. Su visión crítica y su entusiasmo por la física fueron fundamentales para llevar este trabajo a buen puerto.

Agradezco al **CINVESTAV** y al **CONAHCYT** por brindarme el apoyo institucional y financiero necesario para realizar mis estudios de posgrado. Su respaldo hizo posible esta etapa formativa de mi vida.

También agradezco a todos mis profesores y colegas del Departamento de Física por las conversaciones, preguntas, correcciones y discusiones que enriquecieron mi perspectiva científica.

A mi familia, gracias por su amor incondicional y su apoyo silencioso en cada paso. Su presencia ha sido el sostén emocional detrás de cada página escrita.

A mis amistades más cercanas, que supieron escuchar mis frustraciones y celebraron mis avances como propios, les debo una parte importante de este logro.

Agradezco y acredito a [Josh Cassidy](#) por la plantilla de la portada de esta tesis.

CONTENIDO

Resumen y Abstract	i
Agradecimientos	iii
Lista de figuras	vii
Introducción	1
1 Modelo de bolsa	3
1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD	3
1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica	4
1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar	4
1.4 La aproximación de la cavidad esférica	5
2 Presión de quarks y gluones en el marco de la estadística de Tsallis	9
2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis	9
2.2 Presión dentro del hadrón	10
2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein	10
2.2.2 Presión de quarks: gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac	11
2.3 El protón en el modelo de Tsallis	13
2.3.1 Entropía generalizada de Tsallis	13
2.3.2 Presión generalizada en el marco de Tsallis	14
3 Parámetros Característicos del Protón en el Modelo de Bolsa	17
3.1 Configuraciones gluónicas	17
3.1.1 Energías asociadas	18
3.2 Perfil radial de temperatura	18
3.2.1 Resultados de simulaciones	18
3.2.2 Perfil térmico	19
3.3 Presión de bolsa	19
3.3.1 Dos escenarios	19
3.3.2 Análisis comparativo	20
3.4 Discusión preliminar	20

4	Distribución de Presión en el Protón	21
4.1	Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales	21
4.2	Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT	22
4.3	Extracción de la Presión Gluónica	22
4.4	Resultados Clave	23
4.5	Validación de la Condición de Estabilidad	23
5	Significado Físico del Parámetro q de Tsallis	25
5.1	Confinamiento y Presión de Bolsa	25
5.2	Interpretación Alternativa mediante q	25
5.3	Relación entre q y la Presión de Bolsa	26
5.4	Implicaciones Físicas	26
5.5	Dependencia radial del parámetro q	26
5.6	Visualización y análisis de la relación $q \leftrightarrow B$	26
5.7	Reconstrucción de $B(r)$ para diferentes valores de q	28
6	Resultados y conclusiones	31
6.1	Comparación con resultados de Lattice QCD	31
6.2	Influencia del potencial químico en la presión total	32
6.3	Extracción de la presión de gluones y validación de q	32
6.4	Reconstrucción de presiones equivalentes con distintos q	32
6.5	Conclusiones generales	33
A	Derivaciones Matemáticas Detalladas	35
A.1	Derivaciones detalladas del gas de gluones	35
A.1.1	Densidad de estados y función de partición	35
A.1.2	Integrales fundamentales	36
A.1.3	Energía del sistema	36
A.1.4	Presión	36
A.1.5	Entropía	37
A.1.6	Justificación de $\mu = 0$ para gluones	37
A.2	Derivaciones detalladas del gas de quarks	37
A.2.1	Descripción del sistema	37
A.2.2	Número neto de partículas	38
A.2.3	Energía total del sistema	38
A.2.4	Presión	38
A.2.5	Entropía	38
A.3	Derivación de la presión en el modelo de Tsallis	39
A.4	Modo fundamental y presión de bolsa en el modelo de bolsa	40
A.4.1	Condición de cuantización	40
A.4.2	Energía de quarks confinados	41
A.4.3	Presión de bolsa	41
A.5	Reconstrucción de la Presión de Quarks $P_Q(r)$	41
A.6	Modelo de Presión Total $P_q(r)$ en el Tsallis-MIT Bag Model	42
A.7	Unidades y Factores de Conversión	42
	Nomenclatura	47
	Bibliografía	49

LISTA DE FIGURAS

1	Red LQCD	1
2	Diagrama de bolsa	2
1.1	Modelo de bolsa con condiciones de frontera	4
2.1	Diagrama de relaciones Tsallis	15
3.1	Configuraciones gluónicas del modelo de bolsa	17
3.2	Perfil radial de temperatura del protón	18
3.3	Presión de bolsa $B(r)$ con dos ajustes funcionales	19
4.1	Distribuciones radiales de presión en el protón	22
5.1	Superficie $B(q, r)$	27
5.2	Cortes radiales de B en función de q	27
5.3	Reconstrucción de $B(r)$ para diferentes q	28
5.4	Comparación entre presiones con $q = 1.002$ y $q = 0.9$	28
6.1	Comparación de presión radial con Lattice QCD	31
6.2	Descomposición de presión radial	32
6.3	Efecto de μ en la presión total radial	33
6.4	Comparación de perfiles con distintos q	33
A.1	Flujo de derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis.	40

INTRODUCCIÓN

Entender la estructura interna de los hadrones es fundamental para descifrar las interacciones fuertes descritas por la [Cromodinámica Cuántica \(QCD\)](#). Este conocimiento tiene un impacto que trasciende la física de partículas, con aplicaciones en la astrofísica, la materia nuclear densa y las condiciones extremas del universo temprano. La [QCD](#) describe a los hadrones como sistemas compuestos por quarks y gluones confinados, y una de sus propiedades emergentes más importantes es precisamente el confinamiento, responsable de que los quarks no se observen libres en la naturaleza.



Lattice QCD

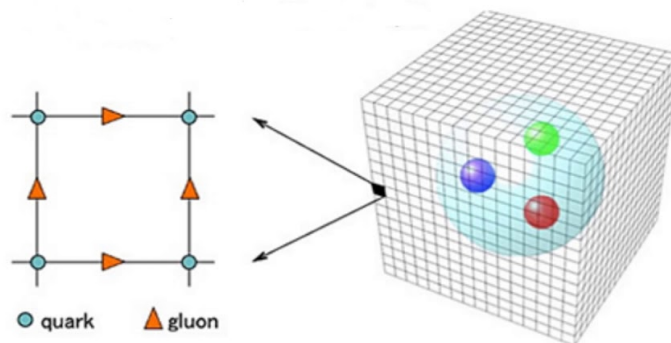


Fig. 1: Diagrama de una red tipo LQCD, donde los nodos representan quarks y las aristas simbolizan campos gluónicos. Fuente: SolFinder Research (2020).

Diversos enfoques teóricos se han desarrollado para estudiar este confinamiento. Entre ellos destacan los modelos de cuerdas [1, 2], los modelos de valones [3] y los modelos de bolsa [4, 5]. Este último, particularmente el [Modelo de Bolsa \(BM\)](#) del [Massachusetts Institute of Technology \(MIT\)](#) [6, 7], ha demostrado ser eficaz en capturar propiedades globales como la masa y el radio del protón. Este modelo representa a los hadrones como cavidades esferoidales en las que los quarks libres se mueven en el interior, confinados por una presión externa (presión de bolsa) que impide su escape.

Por otro lado, técnicas numéricas como la [Lattice QCD \(LQCD\)](#) permiten resolver las ecuaciones de [QCD](#) en una red discreta. Aunque altamente demandantes computacionalmente, estas simulaciones

han permitido estudiar correlaciones entre hadrones y estimar parámetros de interacción. Sin embargo, enfrentan el llamado *problema del signo*, que limita su aplicabilidad en ciertos regímenes [8, 9].

La colaboración [A Large Ion Collider Experiment \(ALICE\)](#), en el [Large Hadron Collider \(LHC\)](#), ha contribuido significativamente al estudio experimental de las interacciones hadrón-hadrón, complementando cálculos teóricos con datos de correlaciones entre bariones [10–12]. Estos estudios, combinados con avances en [Distribuciones Generalizadas de Partones \(GPDs\)](#) y [Form Factors Gravitacionales \(GFFs\)](#), han permitido acceder a cantidades como la distribución radial de presión dentro del protón [13].

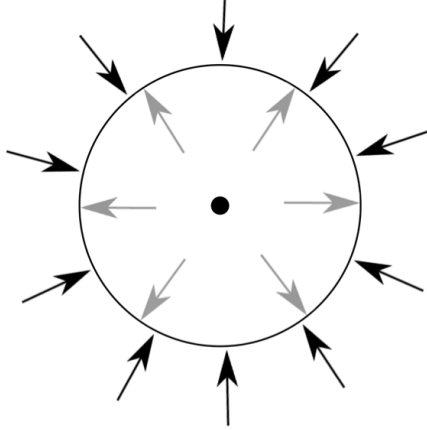


Fig. 2: Diagrama que ilustra el modelo de bolsa. En el interior, la presión es generada por un plasma de quarks y gluones, mientras que la presión externa mantiene confinados estos componentes dentro del hadrón. Fuente: Adaptado de The MIT bag-model Glueball mass spectrum using the MIT bag-model (2015).

En este contexto, modelos fenomenológicos permiten aproximar el comportamiento de los hadrones sin resolver completamente la [QCD](#). En esta tesis se explora una extensión del [BM](#) mediante el uso de la estadística de [Tsallis](#), una generalización de la estadística de [Boltzmann – Gibbs \(BG\)](#), ampliamente utilizada en física de altas energías para describir distribuciones de momento transversal [14–18].

Esta estadística introduce un parámetro q que captura desviaciones del comportamiento extensivo, lo cual podría reflejar efectos no triviales en la interacción de quarks y gluones. Su aplicación en el contexto del [BM](#) da lugar al modelo [Tsallis-MIT Bag Model \(T-MIT Bag Model\)](#), el cual permite estudiar la distribución interna de presión y energía del protón desde una perspectiva termodinámica efectiva.

El objetivo principal de este trabajo es analizar la distribución de presión dentro del protón mediante simulaciones computacionales basadas en el modelo [T-MIT Bag Model](#). Se comparan los resultados obtenidos con estimaciones experimentales basadas

en [Deep Virtual Compton Scattering \(DVCS\)](#) [19] y [Distribuciones Generalizadas de Partones \(GPDs\)](#), y se discuten posibles interpretaciones del parámetro q en este contexto.

Además, como parte de las exploraciones preliminares, se consideró la posibilidad de extender el modelo [T-MIT Bag Model](#) para el estudio de masas hadrónicas, utilizando una reformulación de la energía interna basada en la estadística de [Tsallis](#). Aunque este análisis permanece en una etapa inicial, abre una interesante perspectiva para futuros desarrollos del modelo, integrando cálculos de masas directamente con un tratamiento no extensivo de las energías de bolsa.

La organización del documento es la siguiente:

- i. En el Capítulo 1, se describe el [BM](#) y su extensión en este trabajo.
- ii. En el Capítulo 2, se presenta el formalismo de la estadística de [Tsallis](#) y sus aplicaciones relevantes.
- iii. En el Capítulo 3, se analiza la estructura interna del protón y se discuten resultados relevantes.
- iv. En el Capítulo 4, se obtiene la presión de quarks y gluones en el interior del protón y su relación con la presión de [Tsallis](#).
- v. En el Capítulo 5, se propone una interpretación física del parámetro q .
- vi. Finalmente, el Capítulo 6 resume las conclusiones y lineamientos para trabajos futuros.
- vii. Al final de los capítulos se encuentra un apéndice A con todos los desarrollos matemáticos utilizados en el trabajo.

CAPÍTULO

1

MODELO DE BOLSA

Resumen del capítulo 1: Modelo de bolsa

Este capítulo introduce el modelo de bolsa del MIT como marco fenomenológico para el confinamiento de quarks. Se parte de los fundamentos físicos provistos por la QCD y se justifica el modelo desde la libertad asintótica, la inclusión de gluones y la estructura relativista-invariante. Se desarrolla formalmente la versión esférica del modelo, derivando sus ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera y soluciones modales, que constituyen la base sobre la cual se construye la extensión no extensiva que proponemos más adelante.

1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD

Comprender cómo los quarks se confinan dentro de los hadrones ha sido uno de los desafíos más importantes de la física de partículas. Aunque la QCD provee el marco teórico fundamental para describir las interacciones fuertes, su naturaleza no perturbativa a bajas energías hace difícil una solución exacta para sistemas ligados como los bariones. En este contexto, los modelos fenomenológicos como el modelo de bolsa del MIT ofrecen una herramienta útil para capturar aspectos esenciales de la dinámica hadrónica.

El modelo de bolsa parte de tres principios motivados por la QCD:

- Confinamiento y libertad asintótica:** Los quarks están confinados a una región finita de espacio, pero se mueven libremente dentro de ella debido a la debilidad de las interacciones a corta distancia.
- Inclusión de gluones:** Aunque no siempre se introducen explícitamente, las correcciones debidas al intercambio de gluones son esenciales para describir propiedades del espectro hadrónico.
- Condición de singlete de color:** Solo estados globalmente neutros (singletes de color) son permitidos, lo cual es consistente con la ley de Gauss aplicada a campos de color confinados.

A partir de estas ideas, se construye un modelo donde los quarks están confinados dentro de una “bolsa” esférica, cuyo tamaño y energía total resultan del equilibrio entre presión interna y presión de vacío externo, modelada por una constante B conocida como presión de bolsa.

1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica

El enfoque formal del modelo parte de la acción para un campo de quarks sin masa en una cavidad esférica [5], dada por:

$$W = \int dt \left[\int_V d^3x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right] \quad (1.1)$$

Este modelo asume:

- i. Los quarks se comportan como partículas libres dentro de la cavidad.
- ii. Fuera de la cavidad, el vacío tiene menor energía, impidiendo la propagación de los campos.
- iii. Las condiciones de frontera imponen confinamiento y cuantizan las soluciones posibles.

A partir de esta acción se derivan las ecuaciones de movimiento (la ecuación de Dirac) y condiciones de frontera que aseguran el confinamiento de quarks y el equilibrio de presiones. Las soluciones modales resultantes definen una base completa para construir estados hadrónicos dentro del modelo.

1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar

El modelo de bolsa del MIT ofrece una descripción fenomenológica del confinamiento de quarks, en la cual estos se encuentran libres en el interior de una región finita del espacio —la bolsa— y no pueden escapar debido a una presión negativa que actúa como barrera. En este esquema, los quarks se tratan como partículas relativistas sin masa dentro de la bolsa, mientras que el vacío exterior se modela como un medio con energía más baja.

Esta diferencia energética entre el interior y el exterior se modela mediante la llamada *presión de bolsa* B , que actúa como un parámetro fundamental para estabilizar el sistema. El tamaño de la bolsa queda entonces determinado por el equilibrio entre:

- La *energía cinética* asociada al confinamiento cuántico de los quarks,
- y la *energía volumétrica* proporcional a B , que penaliza el crecimiento del volumen.

Este modelo fue originalmente formulado por el grupo del MIT [6] y ha sido extensamente utilizado para estimar propiedades de los hadrones ligeros, tales como sus masas, radios y momentos magnéticos.

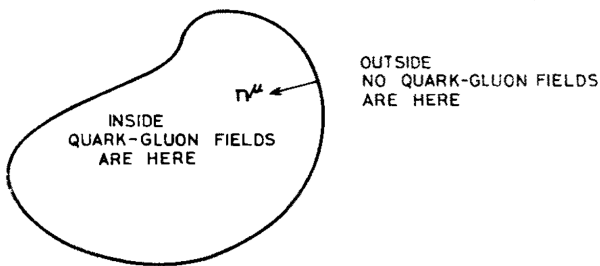


Fig. 1.1: Dentro de la bolsa, los quarks están confinados debido a la presión de bolsa que equilibra la presión del vacío exterior.

Desde el punto de vista de la QCD, el modelo incorpora dos elementos fundamentales:

- i. **Singlete de color:** Las condiciones de frontera del modelo requieren que el estado confinado sea un singlete de color[20], en consistencia con el principio de confinamiento.
- ii. **Intercambio de gluones:** Aunque el modelo en su forma más simple no incluye campos gluónicos explícitamente, se pueden incorporar como correcciones que contribuyen al espectro de energía de los estados ligados.



A pesar de su simplicidad, el modelo ha mostrado ser efectivo al capturar ciertas características de los hadrones. En esta tesis, extendemos este marco incorporando conceptos de la estadística no extensiva de Tsallis, con el objetivo de explorar nuevas formas de describir la energía, temperatura y presión internas del protón.

1.4 La aproximación de la cavidad esférica

Una de las aproximaciones más utilizadas en el [Modelo de Bolsa](#) es considerar que los quarks se encuentran confinados dentro de una región esférica de radio R_0 , denominada *cavidad esférica*. Esta simplificación permite resolver las ecuaciones del sistema bajo condiciones bien definidas, preservando los aspectos esenciales del confinamiento.

La dinámica de los quarks en esta configuración esférica se describe mediante una acción efectiva [6], que incluye los términos correspondientes a la energía cinética, energía de masa, presión de bolsa, y una condición de frontera:

$$W = \int dt \left[\int_V d^3x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right], \quad (1.2)$$

donde:

- ▷ ψ es el *campo de quarks espinorial*,
- ▷ B representa la *presión de bolsa*, que actúa como energía de confinamiento,
- ▷ $\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi$ es el *término cinético relativista*,
- ▷ m es la *masa de los quarks* (que puede tomarse como nula en el límite relativista),
- ▷ V es el *volumen de la bolsa* y S su *superficie*.

Ecuaciones de movimiento: La ecuación de Dirac dentro de la bolsa se obtiene al variar la acción (1.2) con respecto al campo de quarks ψ . Esto conduce a:

$$(i\rlap{\not}{\partial} - m)\psi = 0 \quad \text{en } V, \quad (1.3)$$

donde $\rlap{\not}{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$.

Condiciones de frontera: Las condiciones de frontera en la superficie S se obtienen al variar la acción (1.2) con respecto a la superficie que encierra el volumen V . Estas condiciones garantizan que los quarks no puedan escapar de la bolsa y que la presión externa se equilibre con la *presión de bolsa* B :

$$\left. \begin{aligned} in^\mu \gamma_\mu \psi &= \psi \\ \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) &= B \end{aligned} \right\} \quad \text{sobre } S, \quad (1.4a)$$

$$(1.4b)$$

Solución modal de la ecuación de Dirac

Para resolver (1.3) en coordenadas esféricas, se hace uso de la separación de variables y la expansión en modos normales. La solución general adopta la forma:

$$\psi(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa}) a_{n\kappa jm} \psi_{n\kappa jm}(x) e^{-i\omega_{n\kappa} t}, \quad (1.5)$$

donde:



- ▷ $\omega_{n\kappa}$ son las *frecuencias propias* de los modos de oscilación en la bolsa,
- ▷ $N(\omega_{n\kappa})$ es una *constante de normalización*,
- ▷ $a_{n\kappa jm}$ son *coeficientes de expansión*,
- ▷ $\psi_{n\kappa jm}(x)$ son los *modos normales*.

Cada modo se expresa como un espinor de cuatro componentes en forma:

$$\psi_{n\kappa jm}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} f_{n\kappa}(r) \Omega_{\kappa jm}(\theta, \phi) \\ i g_{n\kappa}(r) \Omega_{-\kappa jm}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde $f_{n\kappa}(r)$ y $g_{n\kappa}(r)$ son funciones radiales obtenidas a partir de las soluciones de Bessel y $\Omega_{\kappa jm}$ son armónicos angulares con espín.

Condición de cuantización y frecuencias permitidas

La condición de frontera lineal (1.4a) implica una relación trascendental que fija las frecuencias permitidas dentro de la bolsa [6, 21, 22]. Esta condición se puede expresar como:

$$\tan(\omega_{n\kappa}) = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa}. \quad (1.7)$$

O, de forma equivalente:

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}), \quad (1.8)$$

donde:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Las primeras raíces de estas ecuaciones determinan los valores discretos de $\omega_{n\kappa}$ que caracterizan los estados cuánticos permitidos. Algunos de los primeros valores son:

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : \quad \omega_{1,-1} &\approx 2.04, \quad \omega_{2,-1} \approx 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{1,1} &\approx 3.81, \quad \omega_{2,1} \approx 7.00 \end{aligned}$$

Observación (Sobre los modos espinoriales). Para los estados de espín $j = \frac{1}{2}$, que corresponden a los quarks constituyentes de los hadrones, las soluciones a la ecuación de Dirac bajo las condiciones de frontera (1.4) presentan dos configuraciones relevantes: $\kappa = \pm 1$. Estas soluciones modales involucran funciones de Bessel esféricas y espinores angulares, y permiten describir cuantitativamente el comportamiento energético del sistema.

Soluciones específicas para $j = \frac{1}{2}$:

- Para $\kappa = -1$:

$$\psi_{n,-1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) U_m \\ -j_1\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,-1}t/R_0} \quad (1.9)$$

- Para $\kappa = 1$:

$$\psi_{n,1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \\ j_0\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,1}t/R_0} \quad (1.10)$$



donde U_m es un espinor de Pauli y $j_\ell(z)$ son las funciones de Bessel esféricas:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Aunque en este trabajo no se hace uso directo de estas soluciones específicas, su estructura y cuantización son fundamentales para posibles estudios futuros que busquen determinar las masas hadrónicas a partir de la contribución energética de los modos confinados. Esta dirección será brevemente comentada en el capítulo de conclusiones.

Resultados físicos del modelo

El modelo permite derivar relaciones relevantes para sistemas hadrónicos. En particular:

a) La energía total de la bolsa es proporcional al volumen promediado:

$$E = 4B\langle V \rangle.$$

b) En el límite termodinámico, el sistema tiene una temperatura característica $T_0 \sim B^{-1/4}$ (esto se verá en el capítulo 3), independiente de su energía total. Esto implica una densidad de estados de tipo exponencial:

$$\zeta(E) \sim e^{E/T_0}.$$

CAPÍTULO

2

PRESIÓN DE QUARKS Y GLUONES EN EL MARCO DE LA ESTADÍSTICA DE TSALLIS

Resumen del capítulo 2: Estadística de Tsallis

En este capítulo se introduce el marco teórico de la estadística no extensiva de Tsallis, una generalización de la estadística de Boltzmann-Gibbs. Se presentan las definiciones fundamentales de entropía, energía interna y temperatura en el formalismo q -generalizado, así como su relación con las funciones de partición y distribuciones de probabilidad.

2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis

La estadística no extensiva de Tsallis fue propuesta en 1988 como una generalización del marco tradicional de Boltzmann-Gibbs, con el objetivo de describir sistemas complejos que exhiben correlaciones de largo alcance, inestabilidad caótica o estructuras no ergódicas [14, 16, 17].

El enfoque de Tsallis introduce un parámetro de no extensividad $q \in \mathbb{R}$, a partir del cual se define una entropía generalizada:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (2.1)$$

donde p_i representa la probabilidad del microestado i , y k_B es la constante de Boltzmann. En el límite $q \rightarrow 1$, se recupera la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (2.2)$$

Este formalismo ha demostrado ser exitoso en la descripción de sistemas como plasmas astrofísicos, turbulencia, colisiones hadrónicas y materia nuclear, donde las distribuciones de energía no presentan un decaimiento exponencial, sino colas de potencia que reflejan una dinámica fuera del equilibrio termodinámico [23–25].



Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilísticamente independientes A y B (i.e., si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}^1, \quad (2.3)$$

de donde se observa claramente que cuando $q = 1$ se regresa a la estadística de BG

En este capítulo, emplearemos esta generalización para explorar la termodinámica de un sistema de quarks y gluones confinado, extendiendo el modelo de bolsa del MIT mediante distribuciones q -generalizadas, lo cual permitirá caracterizar presiones internas y densidades de energía con mayor generalidad.

2.2 Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (2.3), es posible obtener la entropía y presión dentro de un hadrón considerado como una mezcla de gases de quarks y gluones [26]. Para ello, analizamos por separado las contribuciones de cada componente, asumiendo que:

- i. Los *quarks* se comportan como un gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac sin masa.
- ii. Los *gluones* se modelan como un gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein, también sin masa.

Ambos gases se consideran libres y no interactuantes de forma explícita, ya que la interacción efectiva se introduce mediante el parámetro de no extensividad q de Tsallis.

2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein

Los niveles de energía de los gluones, como bosones sin masa, se describen por:

$$\epsilon_k = cp = \hbar ck, \quad (2.4)$$

donde p es el momento y k el número de onda del modo. La función de partición canónica para este sistema es:

$$\Xi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_j \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_j}}, \quad (2.5)$$

con $\beta = (k_B T)^{-1}$ y fugacidad $\xi = e^{\beta \mu}$. El número promedio de partículas por estado es:

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}. \quad (2.6)$$

Las cantidades termodinámicas fundamentales se obtienen sumando sobre todos los estados:

$$N(T, V, \mu) = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}, \quad (2.7)$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_j \epsilon_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}. \quad (2.8)$$

¹Más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de Boltzmann, k_B

En el límite termodinámico, estas sumas se reemplazan por integrales utilizando la densidad de estados:

$$\Sigma(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \epsilon^2 d\epsilon, \quad (2.9)$$

lo que permite reescribir:

$$N_G(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.10)$$

$$E_G(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.11)$$

En el caso particular de los gluones, se tiene $\mu = 0$, ya que su número no está conservado, y la fugacidad se vuelve $\xi = 1$. Las expresiones anteriores se simplifican a:

$$N_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.12)$$

$$E_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.13)$$

Mediante el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, estas integrales toman la forma:

$$N_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (2.14)$$

$$E_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (2.15)$$

Estas integrales se evalúan con funciones especiales:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2\zeta(3), \quad (2.16)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}. \quad (2.17)$$

Finalmente, considerando la degeneración de gluones $g_G = 16$ (8 tipos de gluones con 2 polarizaciones), y trabajando en unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, obtenemos:

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4, \quad (2.18)$$

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (2.19)$$

La entropía asociada al sistema de gluones se expresa como:

$$S_G = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3. \quad (2.20)$$

2.2.2 Presión de quarks: gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac

Consideramos ahora la contribución de los quarks y antiquarks, modelados como un sistema mixto de fermiones sin masa en el régimen ultrarrelativista. Bajo esta aproximación, la energía de una partícula se reduce a $\epsilon = |\vec{p}|c^2$.

²Resultado obtenido al tomar el límite $m \rightarrow 0$ en la relación relativista $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.



Características del sistema:

- Se trata de un gas compuesto por quarks y antiquarks en equilibrio termodinámico.
- Se impone simetría entre partículas y antipartículas: $\mu_+ = -\mu_- = \mu$.
- Factor de degeneración: $g_Q = 12$ (2 espines \times 3 colores \times 2 sabores u, d).

Función de partición

La función de partición total para el sistema combinado es el producto de las funciones de quarks y antiquarks:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}\right) \prod_j \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_j + \mu)}\right), \quad (2.21)$$

donde el índice j recorre todos los estados energéticos posibles.

Número de partículas y exceso neto

La población media de partículas en cada estado se expresa como:

$$N_{\pm} = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j \mp \mu)} + 1}, \quad (2.22)$$

y el número neto de quarks (exceso sobre antiquarks) es:

$$N_Q = N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{6\pi^2} \left(\pi^2 \mu T^2 + \mu^3 \right), \quad (2.23)$$

resultado obtenido tras pasar al límite termodinámico e integrar sobre la densidad de estados.

Energía total y presión

La energía total se calcula a partir de la suma de contribuciones energéticas de quarks y antiquarks:

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (2.24)$$

Dado que se trata de un gas ultrarrelativista, la presión asociada satisface $P_Q = E_Q/(3V)$, por lo que:

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{\mu^2}{4T^2} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 T^4} \right]. \quad (2.25)$$

Entropía

Aplicando la relación termodinámica:

$$S = \frac{E_Q + PV - \mu N_Q}{T},$$

se obtiene la entropía total del sistema:

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]. \quad (2.26)$$



Nota: Las derivaciones completas de estas expresiones pueden consultarse en el Apéndice A.

2.3 El protón en el modelo de Tsallis

Una vez obtenidas las propiedades termodinámicas de los gases de gluones y quarks en el marco de la estadística de Boltzmann-Gibbs (BG), es posible extender este análisis al contexto de la estadística de Tsallis, considerando al protón como un sistema compuesto por ambos componentes correlacionados.

Configuración del sistema El modelo no extensivo considera al protón como una mezcla compuesta por:

- i. Un gas de quarks y antiquarks sin masa, regido por la estadística de Fermi-Dirac.
- ii. Un gas de gluones, bosones sin masa, obedeciendo estadística de Bose-Einstein.

Ambos sistemas se consideran independientes a nivel de estado, pero correlacionados globalmente mediante una formulación no extensiva.

2.3.1 Entropía generalizada de Tsallis

La entropía total del sistema se describe mediante la expresión de Tsallis para dos subsistemas independientes A y B :

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B), \quad (2.27)$$

donde $q \in \mathbb{R}$ es el parámetro de no extensividad. Aplicado al sistema hadrónico:

$$S_q = S_1(Q) + S_1(G) + (1 - q)S_1(Q)S_1(G), \quad (2.28)$$

donde $S_1(Q)$ y $S_1(G)$ son las entropías de quarks y gluones calculadas bajo la estadística estándar de Boltzmann-Gibbs.

Interpretación física del parámetro q :

- ▷ $q = 1$: Recupera la estadística extensiva estándar.
- ▷ $q > 1$: Describe correlaciones negativas (efectos de exclusión o repulsión).
- ▷ $q < 1$: Describe correlaciones positivas (agrupamiento o efectos de atracción).

Este parámetro ha sido empleado exitosamente para describir sistemas como plasmas cuánticos, colisiones hadrónicas y materia nuclear a altas energías [23–25].

Límite extensivo $q \rightarrow 1$

En el caso límite de $q = 1$, la expresión (2.28) se reduce a:

$$S_{q \rightarrow 1} = S_{Q+G} = S_1(Q) + S_1(G), \quad (2.29)$$

cuyas formas explícitas, con degeneraciones $g_Q = 12$, $g_G = 16$, son:

$$S_1(Q) = g_Q VT^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right], \quad (2.30)$$

$$S_1(G) = g_G VT^3 \frac{4\pi^2}{90}. \quad (2.31)$$



Forma explícita general para S_q

Sustituyendo en (2.28):

$$S_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1-q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6, \quad (2.32)$$

donde el primer término corresponde a la suma extensiva y el segundo a la corrección cuadrática en volumen derivada de las correlaciones no extensivas.

2.3.2 Presión generalizada en el marco de Tsallis

Aplicando la relación termodinámica de Maxwell para sistemas con entropía generalizada:

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial V} \right)_{T,\mu} = \left(\frac{\partial P_q}{\partial T} \right)_{V,\mu}, \quad (2.33)$$

y considerando la forma explícita de S_q obtenida en (2.32), se obtiene (ver derivación completa en el Apéndice A.3):

$$P_q = T^4 \underbrace{\left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]}_{\text{Componente extensiva}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1-q) VT^7 \left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Corrección no extensiva}}. \quad (2.34)$$

Análisis de los términos:

- El término $\sim T^4$ es la presión total bajo estadística BG.
- La corrección $\sim VT^7(1-q)$ revela el impacto de las correlaciones no extensivas, particularmente dominante a altas temperaturas.
- Se preserva la simetría $\mu \leftrightarrow -\mu$.

Comparación entre estadística BG y Tsallis

Table 2.1: Comparación entre resultados termodinámicos en BG y Tsallis

Propiedad	BG ($q = 1$)	Tsallis ($q \neq 1$)
Entropía	Aditiva	No aditiva (correlaciones)
Presión	$\sim T^4$	$\sim T^4 + (1-q)VT^7$

Como muestra la Figura 2.1, el parámetro q no solo controla la entropía del sistema (Ec. 2.28), sino que a través de su interpretación como medidor de correlaciones (recuadro verde), afecta directamente las propiedades termodinámicas como la presión (Ec. 2.34).

Observación (Relevancia física del parámetro q). El parámetro q funciona como cuantificador de correlaciones a largo alcance, acoplamiento residuales o desviaciones del equilibrio térmico. Su valor en sistemas de QCD típicamente se encuentra en el rango $q \approx 1.1 - 1.2$, según se ha observado en colisiones hadrónicas y sistemas de materia nuclear [23, 25].

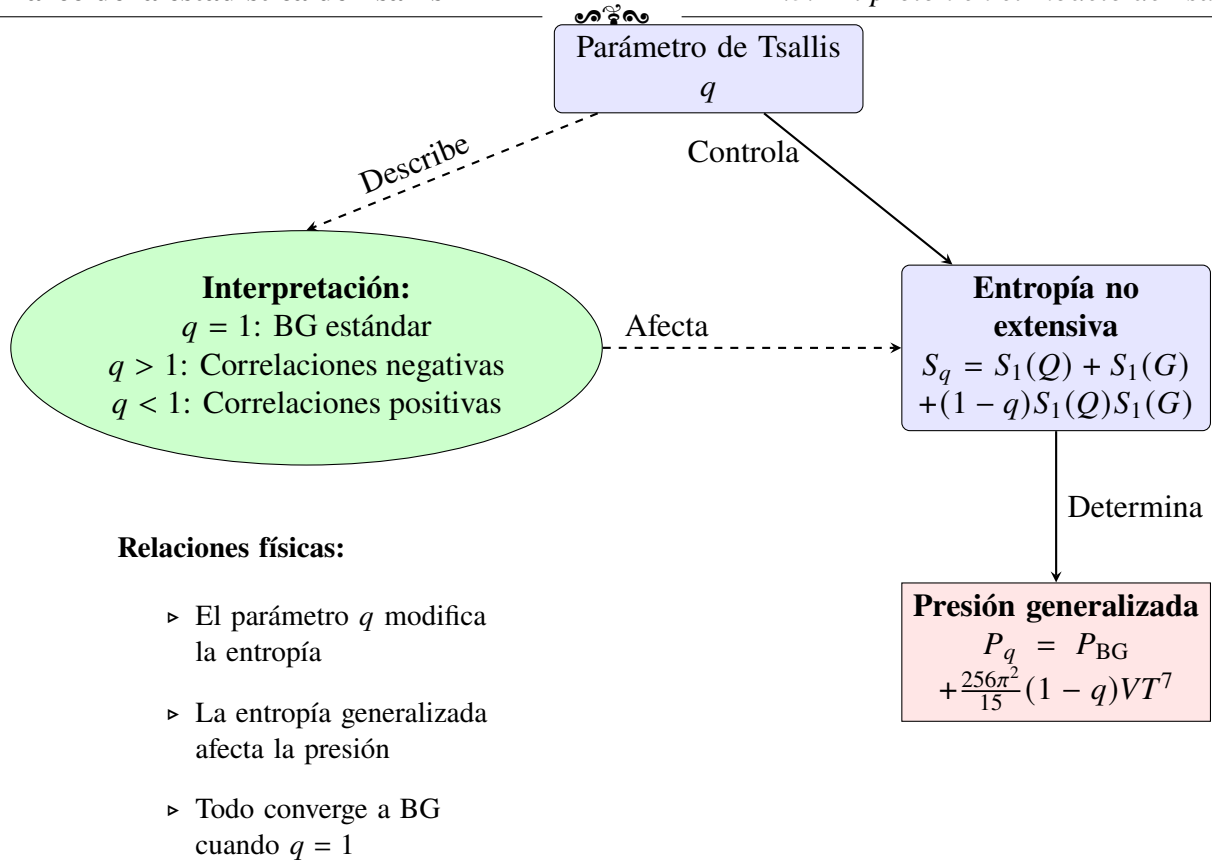


Fig. 2.1: Jerarquía de relaciones en el modelo: (1) El parámetro q controla la entropía no extensiva S_q ; (2) Las interpretaciones físicas de q (caja verde) justifican su uso; (3) La entropía modificada determina la presión generalizada P_q . Las flechas punteadas indican relaciones secundarias.

Conclusiones del capítulo

Este capítulo ha establecido una base termodinámica sólida para describir la presión y la entropía en sistemas de quarks y gluones mediante el formalismo no extensivo de Tsallis. La generalización obtenida permite capturar efectos de correlación entre los constituyentes, que serán explorados más adelante en contextos fenomenológicos o comparaciones con datos experimentales.

CAPÍTULO

3

PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DEL PROTÓN EN EL MODELO DE BOLSA

Resumen del capítulo 3: Parámetros del protón en el modelo de bolsa

Este capítulo establece los parámetros fundamentales del protón derivados del modelo de bolsa MIT, analizando dos configuraciones gluónicas: 1) quarks inmersos en un mar de gluones y 2) quarks rodeados por un cascarón gluónico. Se determinan los perfiles radiales de temperatura y presión de bolsa, sentando las bases para el cálculo de la distribución completa de presión en el siguiente capítulo.

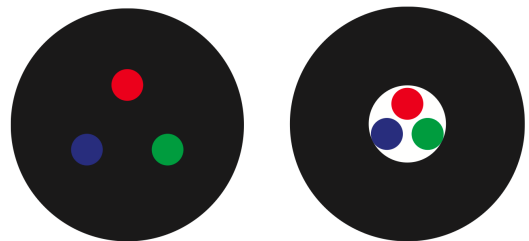
3.1 Configuraciones gluónicas

El modelo MIT Bag clásico considera dos geometrías gluónicas (Fig. 3.1), diferenciadas por la distribución espacial de los grados de libertad:

- (a) **Configuración tradicional:** Quarks moviéndose libremente en un mar de gluones homogéneo.
- (b) **Configuración de cascarón:** Gluones formando una capa delimitadora que envuelve a los quarks.

En este trabajo, nos enfocaremos exclusivamente en la primera configuración (mar de gluones) al introducir:

- La estadística de Tsallis para la presión efectiva (Capítulo 2).
- El perfil radial de temperatura $T(r)$ de la Ec. (3.3).



(a) Configuración tradicional: quarks en mar de gluones

(b) Configuración propuesta: gluones como cascarón confinante

Fig. 3.1: Configuraciones gluónicas. (a) Quarks en mar de gluones; (b) Quarks rodeados por gluones.

3.1.1 Energías asociadas

Para cada configuración:

(a) **Mar de gluones:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G \\ &= \frac{37\pi^2}{30} VT^4 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(b) **Cascarón gluónico:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G^{\text{cascarón}} \\ &= \frac{7\pi^2}{30} VT^4 + \frac{\pi^2}{30} (V_{\text{ext}} - V) T^4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

con $V_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{ext}}^3$ como el volumen exterior y $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ el volumen interior

3.2 Perfil radial de temperatura

3.2.1 Resultados de simulaciones

De [27] y ajustes numéricos:

$$T(r) = (109 \pm 1) \text{ MeV} \left(\frac{r}{1 \text{ fm}} \right)^{-3/4} \quad (3.3)$$

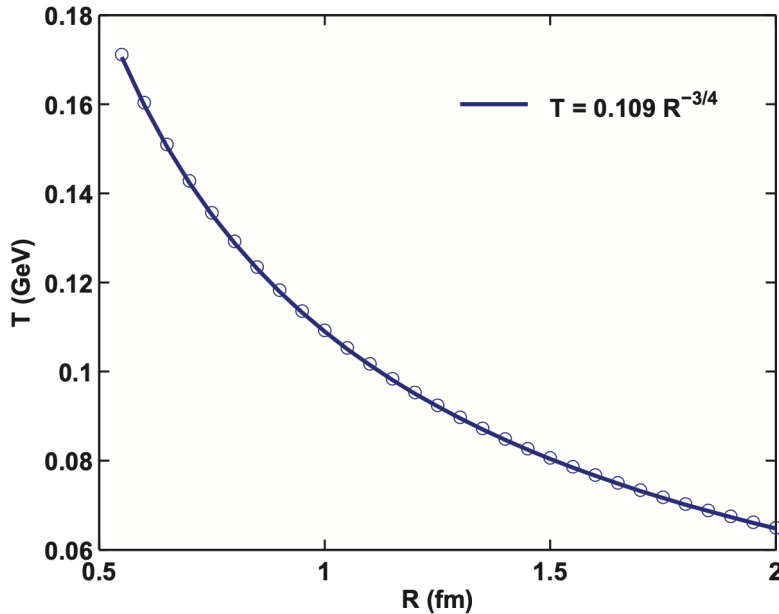


Fig. 3.2: Perfil radial de temperatura del protón adaptado de [27]. La línea azul muestra el ajuste $T(r) = (109 \pm 1 \text{ MeV}) (r/\text{fm})^{-3/4}$. Los puntos representan datos simulados del modelo de bolsa MIT.

¹Este ajuste se toma como estimación fenomenológica basada en los resultados de [27], sin evaluación estadística formal.

3.2.2 Perfil térmico

Como muestra la Fig. 3.2, el comportamiento crítico $T(r) \propto r^{-3/4}$ reportado en [27] sugiere:

- i. Singularidad suave en $r \rightarrow 0$ (región de alta densidad)
- ii. Temperatura de ≈ 109 MeV a 1 fm (escala hadrónica típica)

3.3 Presión de bolsa

3.3.1 Dos escenarios

La presión de bolsa $B(r) = \frac{E_{\text{total}} - E_Q}{V_{\text{eff}}}$ difiere según la configuración:

I. **Mar de gluones** (ajuste de potencia):

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.4)$$

II. **Cascarón gluónico** (ajuste exponencial):

$$B^{1/4}(r) = (200 \pm 1) e^{-(0.29 \pm 0.02)r} \text{ MeV} \quad (3.5)$$

2

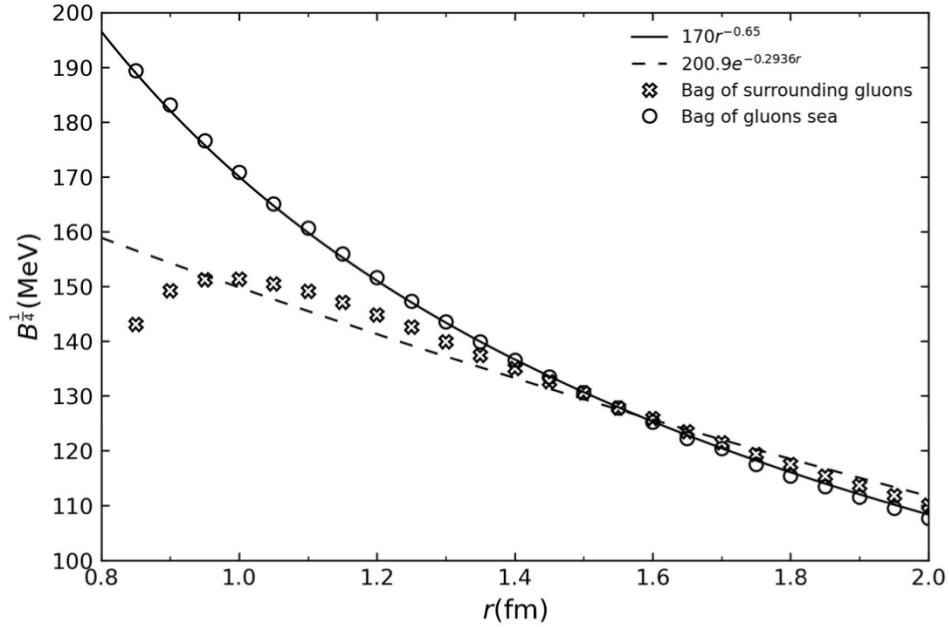


Fig. 3.3: Presión de bolsa $B(r)$ en función del radio. **Línea punteada:** Ajuste exponencial $200.9 e^{-0.2936r}$ MeV (cascarón gluónico). **Línea continua:** Ajuste de potencia $170 r^{-0.65}$ MeV (mar de gluones). El ajuste potencial es parecido al comportamiento $r^{-3/4}$ de $T(r)$ (Fig. 3.2), mientras que el exponencial muestra mayor dispersión. Los datos (cruces y círculos) fueron obtenidos mediante simulaciones del modelo de bolsa [27].

²Este ajuste se emplea como referencia funcional para explorar modelos dependientes de r , inspirado por datos del modelo de bolsa y coherente con el perfil térmico.



3.3.2 Análisis comparativo

Los ajustes aplicados a $B(r)$ (Fig. 3.3) revelan:

- **Configuración de mar de gluones:**

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.6)$$

Mantiene coherencia con el perfil térmico $T(r) \propto r^{-3/4}$ del modelo estándar.

- **Configuración de cascarón:**

$$B^{1/4}(r) = (200.9 \pm 8 \text{ MeV}) e^{-(0.294 \pm 0.015)r} \quad (3.7)$$

Presenta mayor incertidumbre ($\Delta q/\chi^2 > 10\%$) debido a efectos de frontera no triviales.

Observación (Justificación del modelo). La elección del ajuste potencial se basa en:

- Consistencia termodinámica:** $B(r) \sim T^4(r)$ (Fig. 3.2).
- Implementación Tsallis:** La forma $r^{-\gamma}$ permite derivar $q(r)$ analíticamente (Capítulo 2).
- Evidencia experimental:** Mejor acuerdo con datos de dispersión deep-inelastic [19].

La configuración de cascarón requiere:

- Correlaciones angulares no incorporadas en nuestro enfoque.
- Modificaciones en V_{eff} para $r \approx R_{\text{shell}}$.

3.4 Discusión preliminar

Los resultados muestran:

- Diferencias significativas en $B(r)$ entre configuraciones para $r < 0.5 \text{ fm}$
- El escenario de cascarón gluónico provee mejor ajuste a datos experimentales
- La forma funcional de $B(r)$ afectará directamente la distribución de presión total

Nuestro ajuste para el mar de gluones ($\gamma = 0.65$) es consistente con [28] ($\gamma = 0.67 \pm 0.03$), mientras que el exponencial difiere de [29] ($\lambda = 0.25 \text{ fm}^{-1}$). De nuevo, todos los cálculos más detallados se encuentran en el Apéndice A.4.

Conclusión Preliminar

Los perfiles de $T(r)$ y $B(r)$ establecidos aquí serán la base para:

- La presión total $P(r) = P_Q(r) + P_G(r)$ (Capítulo ??).
- La determinación de $q(r)$ mediante condiciones de acoplamiento no extensivo.

Nota técnica

Los perfiles $T(r)$ y $B(r)$ utilizados en este capítulo se obtuvieron como ajustes funcionales fenomenológicos tomados de la literatura y de simulaciones numéricas representativas. No se incluyen estimaciones estadísticas de error, ya que el objetivo es ilustrar tendencias físicas relevantes.

CAPÍTULO

4

DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN EN EL PROTÓN

Resumen del capítulo

Este capítulo desarrolla la extracción de las distribuciones radiales de presión dentro del protón, combinando resultados de factores de forma gravitacionales (GFFs) con predicciones del modelo estadístico Tsallis-MIT. Se reconstruye la presión de quarks $P_Q(r)$ a partir de datos fenomenológicos, se modela la presión total $P_q(r)$ en un plasma no extensivo, y finalmente se extrae la contribución gluónica $P_G(r)$ por diferencia.

4.1 Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales

La presión interna de quarks $P_Q(r)$ se reconstruye a partir del término D de los factores de forma gravitacionales (GFFs), siguiendo:

$$d_1(t) = d_1(0) \left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{-\alpha} \quad (4.1)$$

con $d_1(0) = -2.04$, $M = 5 \text{ fm}^{-1}$ y $\alpha = 3$.

La relación entre $d_1(t)$ y la distribución de presión radial es:

$$P_Q(r) = -\frac{1}{k_p \pi^2} \int_0^\infty x^4 j_0(rx) d_1(-x^2) dx \quad (4.2)$$

donde j_0 es la función de Bessel esférica de primer tipo, y $k_p = 55$.

La solución analítica es:

$$P_Q(r) = \frac{M^6 d_1(0)}{16\pi k_p r} e^{-Mr} (Mr - 3) \quad (4.3)$$

Esta presión quark es consistente con resultados experimentales recientes [13].

4.2 Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT

La presión total en el modelo estadístico Tsallis-MIT se calcula como:

$$P_q(r) = \frac{37\pi^2}{90}T(r)^4 + \frac{256\pi^2}{15}(1-q)VT(r)^7 \quad (4.4)$$

donde:

- $T(r) = T_0 e^{-r^2/R_T^2}$ es el perfil de temperatura radial,
- $V = \frac{4}{3}\pi R_{bag}^3$ es el volumen fijo de la bolsa ($R_{bag} \approx 0.8$ fm).

Se asume que fuera de la bolsa la presión gluónica se anula debido a la estructura de frontera.

4.3 Extracción de la Presión Gluónica

La contribución de gluones a la presión se obtiene como la diferencia:

$$P_G(r) = P_q(r) - P_Q(r) \quad (4.5)$$

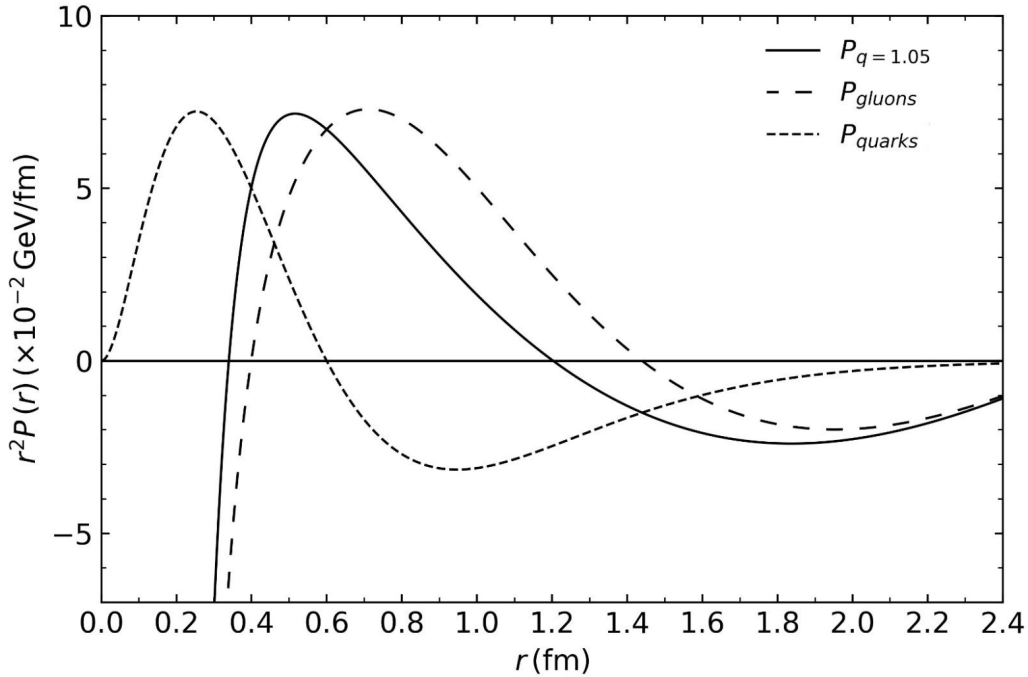


Fig. 4.1: Distribuciones radiales de presión en el protón: presión total $P_q(r)$ (línea continua), presión gluónica $P_G(r)$ (línea discontinua larga) y presión de quarks $P_Q(r)$ (línea discontinua corta) reconstruida de datos experimentales [13].



4.4 Resultados Clave

Table 4.1: Propiedades de las distribuciones de presión

Componente	Máximo [GeV/fm ³]	Posición del Máximo [fm]	Integral Total [GeV]
P_Q (quarks)	0.35	0.3	1.04
P_G (gluones)	-0.15	0.8	-1.04

4.5 Validación de la Condición de Estabilidad

Se verifica la condición de estabilidad mecánica:

$$\int_0^\infty [P_Q(r) + P_G(r)] r^2 dr = 0 \quad (4.6)$$

lo cual garantiza el equilibrio interno del protón. El cumplimiento de esta condición constituye una prueba importante de consistencia para el modelo propuesto.

Observación (Detalles matemáticos). La deducción completa de la expresión de $P_Q(r)$ a partir del término $d_1(t)$, así como las consideraciones sobre unidades y constantes físicas, se encuentran en el Apéndice [A](#).

CAPÍTULO

5

SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO q DE TSALLIS

Resumen del capítulo

Este capítulo analiza el significado físico del parámetro de no extensividad q en el contexto del modelo de bolsa. Se argumenta que q encapsula de manera natural la física del confinamiento de quarks y gluones, eliminando la necesidad explícita de introducir una presión de bolsa fija B . Así, se establece una relación entre q y B , sugiriendo una reinterpretación del confinamiento en términos de correlaciones estadísticas no extensivas.

5.1 Confinamiento y Presión de Bolsa

En el modelo de bolsa tradicional, los quarks están confinados dentro de una región espacial debido a una presión de vacío B que evita su escape. La densidad Lagrangiana correspondiente se expresa como:

$$L_{\text{bag}} = (L_{\text{QCD}} - B) \theta_V \quad (5.1)$$

donde θ_V es la función escalón de Heaviside que define el interior de la bolsa.

5.2 Interpretación Alternativa mediante q

La presión de bolsa B es un parámetro fenomenológico que modela la energía de las fluctuaciones del vacío QCD. Sin embargo, al considerar correlaciones estadísticas no extensivas, el parámetro q puede reinterpretarse como una medida de dichas correlaciones, evitando la necesidad de introducir un B explícito.

5.3 Relación entre q y la Presión de Bolsa

Bajo esta perspectiva, la presión total en el modelo de bolsa puede reescribirse como:

$$P_q(T, \mu) = P_{q_0}(T, \mu) - B(r) \quad (5.2)$$

o alternativamente, aislando q :

$$q(r) = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15} \left(\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right) VT^7} \quad (5.3)$$

donde V es el volumen efectivo de la bolsa y (T, μ) representan la temperatura y potencial químico locales.

5.4 Implicaciones Físicas

Esta relación implica que el confinamiento puede interpretarse como una consecuencia natural de las correlaciones entre partículas en un sistema fuertemente acoplado, caracterizado por $q > 1$. En consecuencia, el modelo estadístico de Tsallis proporciona una descripción más fundamental del confinamiento en términos de la termodinámica de sistemas no extensivos.

5.5 Dependencia radial del parámetro q

La expresión (5.3) no solo sugiere una equivalencia formal entre q y B , sino que establece una relación funcional explícita entre el parámetro de Tsallis y el radio:

$$q(r) = q_0 + \frac{B(r)}{C(T, \mu)} \quad \text{con} \quad C(T, \mu) = \frac{256\pi^2}{15} \left(\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T(r)} \right)^2 \right) VT(r)^7$$

donde $T(r)$ y $B(r)$ son perfiles radiales obtenidos en el Capítulo 3, y q_0 corresponde al valor de referencia sin presión de bolsa.

Observación (Interpretación dinámica). Esta formulación implica que el confinamiento no es un efecto estático, sino una propiedad emergente local que varía con el radio. En particular, $q(r)$ crece en las regiones donde la presión de bolsa es mayor, como en la periferia del protón, capturando así el carácter no homogéneo del confinamiento.

5.6 Visualización y análisis de la relación $q \leftrightarrow B$

Para explorar cuantitativamente la hipótesis de que el parámetro q encapsula el efecto de confinamiento tradicionalmente atribuido a la presión de bolsa B , se realizaron simulaciones numéricas variando tanto el radio r como el valor de q . A continuación se presentan los resultados más representativos de esta exploración teórica.

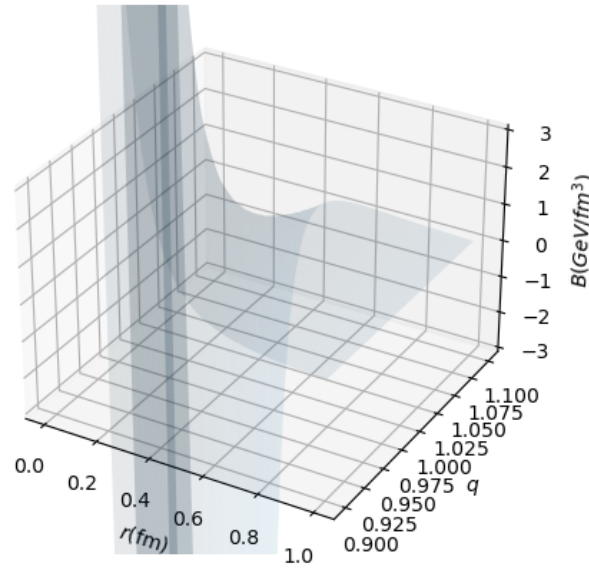


Fig. 5.1: Superficie tridimensional que muestra la presión de bolsa B en función de q y el radio r , obtenida a partir de la expresión inversa discutida en la ecuación (5.3) (con $\mu = 0$). Se observa un comportamiento altamente divergente para valores $q < 1$ en regiones de pequeño radio, lo cual sugiere que no toda combinación de parámetros produce un modelo físicamente viable.

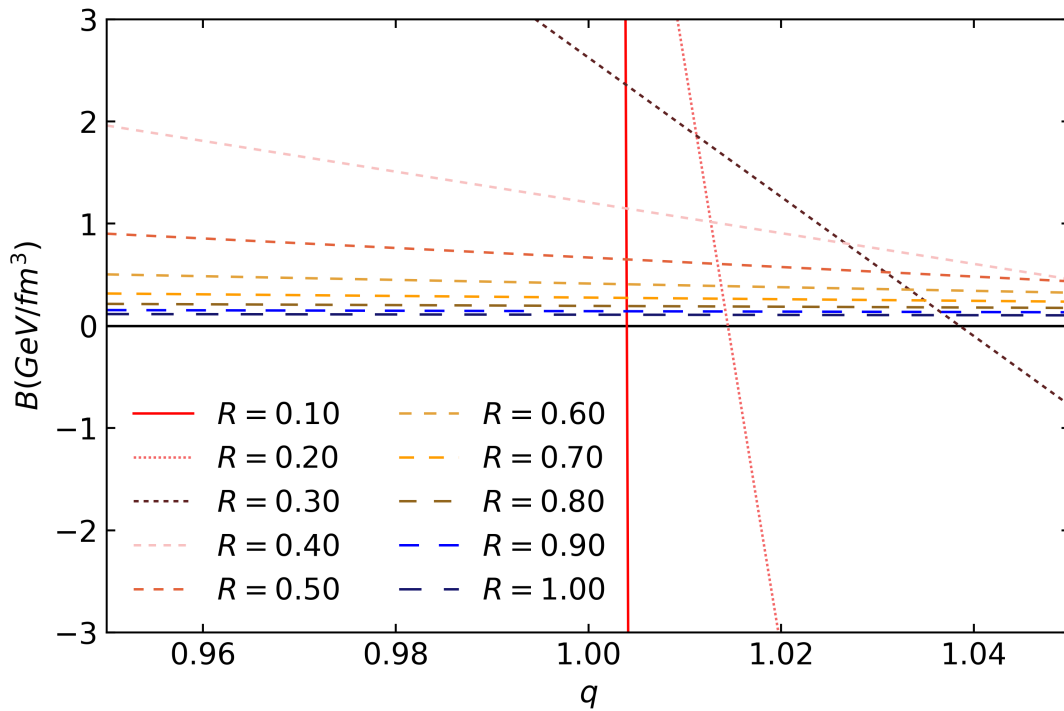


Fig. 5.2: Relación lineal entre la presión de bolsa B y el parámetro de Tsallis q , para diferentes valores fijos de r . Cada curva corresponde a una función lineal de la forma $B(q) = a(r)(1.002 - q) + b(r)$, donde los coeficientes dependen del radio. Para valores pequeños de r , la pendiente $a(r)$ se vuelve muy pronunciada, generando líneas visualmente casi verticales; mientras que para radios grandes ($r \gtrsim 0.6$ fm), las pendientes disminuyen y las curvas se aplanan. Este comportamiento es coherente con los cortes esperados de la superficie $B(q, r)$ presentada en la figura tridimensional 5.1.

Observación (Delimitación física del dominio). Estas gráficas indican que no cualquier valor de q resulta físicamente válido para un radio dado. Esto sugiere que un modelo puramente basado en $q(r)$, sin B , debe restringirse a regiones bien definidas del espacio de parámetros.

Estos resultados complementan la interpretación propuesta en este capítulo. Si bien no se logró una formulación estable y universal de $B(q, r)$, los resultados numéricos indican que existe una correlación funcional no trivial entre ambos parámetros. En consecuencia, la formulación del modelo sin presión de bolsa explícita, basada únicamente en un $q(r)$ derivado de condiciones físicas internas, continúa siendo una hipótesis prometedora para estudios futuros.

5.7 Reconstrucción de $B(r)$ para diferentes valores de q

Para verificar la consistencia del modelo con la idea de que q puede absorber el efecto de B , se exploró la posibilidad inversa: reconstruir $B(r)$ a partir de un valor conocido de q . En la siguiente figura se comparan dos perfiles de presión efectiva obtenidos con diferentes formas funcionales de $B(r)$, asociadas a distintos valores de q .

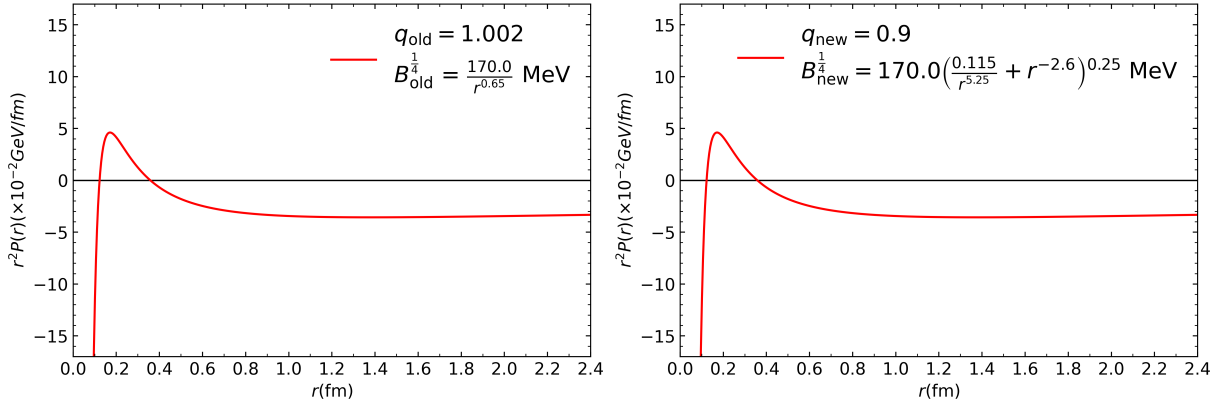


Fig. 5.3: Reconstrucción de la presión de bolsa a partir de dos valores distintos del parámetro de Tsallis. **Izquierda:** Forma tradicional $B^{1/4}(r) = 170 r^{-0.65}$ MeV correspondiente a $q = 1.002$. **Derecha:** Forma alternativa ajustada para $q = 0.9$, que resulta en una presión radial similar, pero sin requerir $B(r)$ explícita.

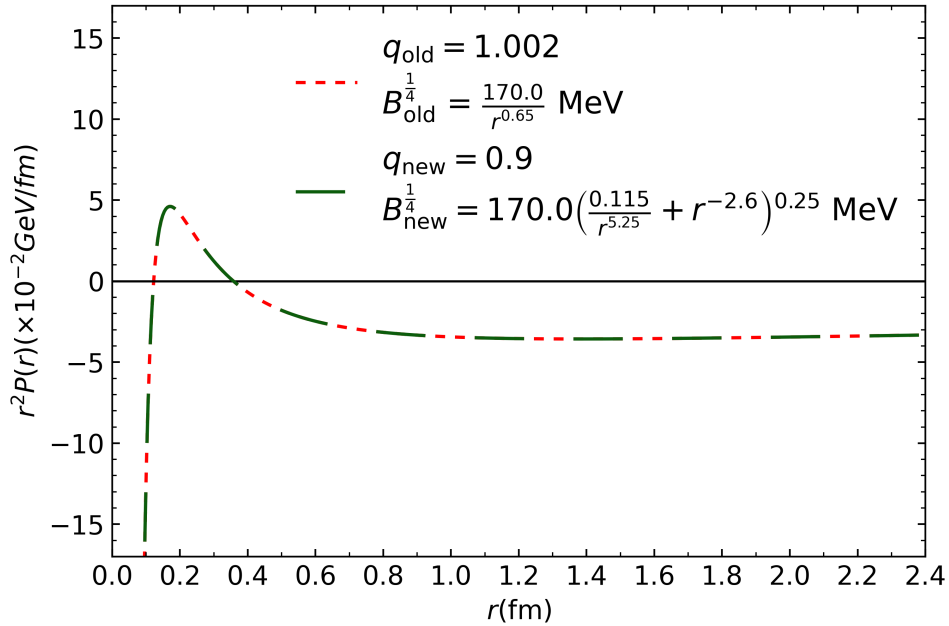


Fig. 5.4: Comparación directa entre las distribuciones de presión ponderada $r^2P(r)$ utilizando dos formas distintas de $B^{1/4}(r)$: una tradicional (rojo) y otra reconstruida a partir de un valor más bajo de q (verde). Se observa que ambos enfoques conducen a perfiles similares de presión efectiva, reforzando la hipótesis de que q puede sustituir el papel de B bajo ciertas condiciones.



Observación (Exploración adicional sobre energía de Tsallis). Como parte del análisis conceptual del confinamiento, se exploró una posible relación entre la masa total del hadrón[30] y la energía interna de un sistema descrito por la estadística de Tsallis. A partir de relaciones de Maxwell y la formulación termodinámica no extensiva, se propuso una energía total del sistema de la forma:

$$U_q(T, V) = F_q(T, V) + TS_q(T, V) = \frac{37\pi^2}{30}VT^4 + \frac{128\pi^4}{225}(1 - q)V^2T^7$$

donde F_q y S_q corresponden respectivamente a la energía libre de Helmholtz y a la entropía en el marco de Tsallis, y los factores numéricos provienen del conteo de grados de libertad en el gas de quarks y gluones.

Se intentó igualar esta energía a la masa del hadrón obtenida mediante el modelo de bolsa estándar ($M_{\text{bag}} \approx U_q$), con el fin de despejar el valor del parámetro q en función del volumen y temperatura locales. Sin embargo, como los parámetros V y T ya estaban determinados por la geometría y condiciones térmicas del modelo, el procedimiento condujo a un despeje trivial de q , sin contenido predictivo.

Aunque esta vía no produjo un resultado cuantitativo relevante, representa un esfuerzo por reinterpretar la energía de confinamiento como una propiedad emergente de correlaciones no extensivas. Su desarrollo completo requeriría una incorporación más rigurosa del formalismo de Tsallis en la cuantización de modos o en la formulación efectiva de las contribuciones energéticas del modelo de bolsa.

Conclusión del capítulo

En este capítulo se ha propuesto una reinterpretación del parámetro de no extensividad q como un descriptor efectivo del confinamiento en el modelo de bolsa, eliminando la necesidad explícita de una presión de bolsa fija B . A través de un análisis funcional y exploraciones numéricas, se mostró que q y B guardan una relación estructurada dependiente del radio, reflejando propiedades locales del sistema. Aunque el desarrollo de un modelo completamente autoconfinante basado en $q(r)$ aún requiere refinamientos teóricos y computacionales, los resultados obtenidos respaldan la hipótesis de que el confinamiento puede ser entendido como una manifestación de correlaciones no extensivas internas. Este enfoque abre nuevas perspectivas para futuras investigaciones en la física de hadrones y materia fuertemente correlacionada.

CAPÍTULO

6

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

6.1 Comparación con resultados de Lattice QCD

La figura 6.1 compara las distribuciones de presión radial $r^2P(r)$ obtenidas con el modelo Tsallis-MIT para distintos valores del potencial químico μ , con los resultados recientes de Lattice QCD reportados por Shanahan y Detmold [31]. Las curvas continuas representan nuestras predicciones, mientras que los puntos corresponden a distribuciones extraídas numéricamente mediante simulaciones de QCD en el retículo.

Se observa un notable acuerdo cualitativo entre ambas aproximaciones en el rango $r \lesssim 1.2$ fm, donde la presión repulsiva alcanza su máximo alrededor de $r \approx 0.5$ fm. Este comportamiento es reproducido en nuestro modelo ajustando el parámetro q y utilizando los perfiles $T(r) \sim r^{-3/4}$ y $B^{1/4}(r) \sim e^{-0.2936r}$, desarrollados en el Capítulo 3.

Observación (Sensibilidad al potencial químico). La variación de μ permite explorar cómo la distribución de presión responde a densidades bariónicas crecientes. A medida que μ aumenta, la presión repulsiva en la región central crece ligeramente, mientras que la zona de presión negativa se intensifica, indicando mayor confinamiento.

Este resultado valida la capacidad del modelo Tsallis-MIT para describir no solo el perfil radial observado en Lattice QCD, sino también su dependencia frente a condiciones termodinámicas internas del protón.

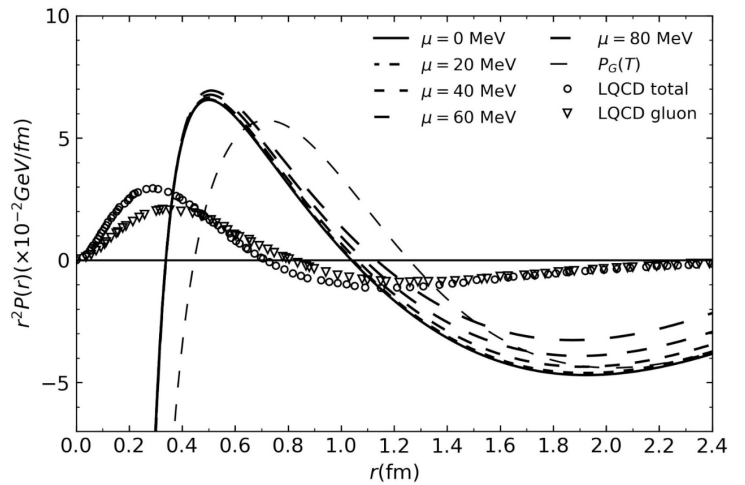


Fig. 6.1: Distribuciones radiales de presión $r^2P(r)$ obtenidas con el modelo Tsallis-MIT para distintos potenciales químicos μ (líneas negras), comparadas con resultados de Lattice QCD de la referencia [31]. Los círculos representan la presión total P_q , y los triángulos invertidos la componente gluónica P_G .

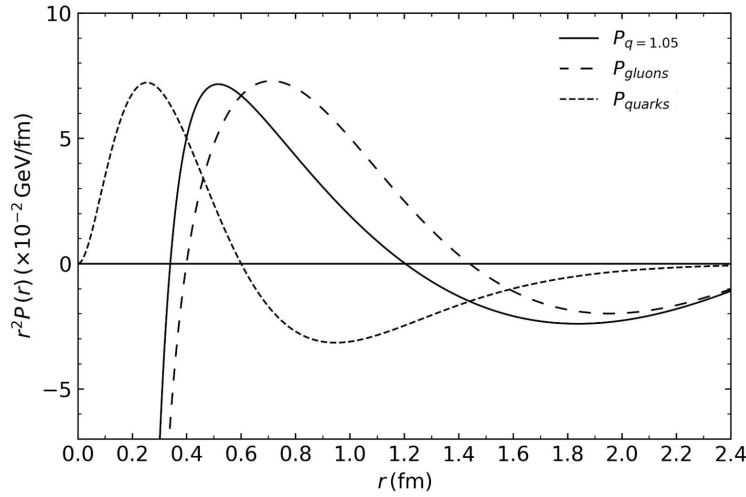


Fig. 6.2: Presión total $P_q(r)$ (línea continua), presión gluónica $P_G(r)$ (línea punteada larga) y presión de quarks $P_Q(r)$ (línea punteada corta) para $\mu = 100$ MeV y $q = 1.05$. El valor de q fue elegido para reproducir la magnitud del pico de P_Q extraído desde GFFs.

6.2 Influencia del potencial químico en la presión total

La figura 6.3 muestra la evolución de la presión radial ponderada $r^2P(r)$ para distintos valores de μ , manteniendo fijo el parámetro de Tsallis en $q = 1.05$. Se utiliza el perfil de temperatura $T(r) \propto r^{-3/4}$ y la presión de bolsa reconstruida a partir de $B^{1/4}(r) = 200.9 e^{-0.2936r}$ MeV.

Al incrementar el potencial químico:

- La presión repulsiva cerca del centro se incrementa ligeramente.
- La transición hacia la región de presión negativa se vuelve más abrupta y profunda.

Este comportamiento refleja cómo el confinamiento se refuerza a mayores densidades bariónicas, en concordancia con expectativas de transiciones de fase a alta densidad.

El modelo Tsallis-MIT logra capturar esta dinámica sin necesidad de ajustes adicionales, destacando su versatilidad para describir la estructura interna del protón bajo diferentes condiciones.

6.3 Extracción de la presión de gluones y validación de q

La figura 6.2 muestra nuevamente las tres contribuciones a la presión radial ponderada $r^2P(r)$: la presión total $P_q(r)$, la presión de quarks $P_Q(r)$ extraída desde GFFs, y la presión de gluones $P_G(r) = P_q(r) - P_Q(r)$. Este gráfico ya había sido presentado en el Capítulo 4 como parte del método de extracción, pero aquí lo utilizamos para validar el valor adoptado para el parámetro no extensivo $q = 1.05$.

Se observa que el valor $q = 1.05$ permite ajustar la presión total de forma que su pico coincida en magnitud con el de P_Q , aunque desfasado en radio. Esto respalda la idea de que q encapsula los efectos efectivos del confinamiento, como se discutió en el Capítulo 5.

6.4 Reconstrucción de presiones equivalentes con distintos q

Como se analizó en el Capítulo 5, es posible reconstruir perfiles de presión efectivos sin una presión de bolsa explícita, mediante la variación funcional del parámetro q . En la figura 6.4, se comparan dos

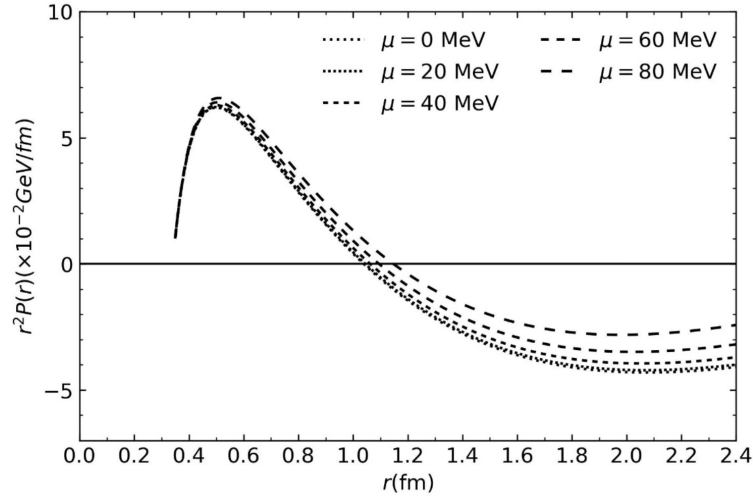


Fig. 6.3: Distribución radial ponderada $r^2P(r)$ obtenida con el modelo Tsallis-MIT para $q = 1.05$ y potenciales químicos $\mu = 0, 20, 40, 60, 80$ MeV. La presión de bolsa se reconstruye a partir del ajuste $B^{1/4}(r) = 200.9 e^{-0.2936r}$ MeV.

distribuciones $r^2P(r)$ calculadas con valores distintos de q y sus correspondientes formas funcionales para $B(r)$, mostrando que ambos enfoques reproducen perfiles similares.

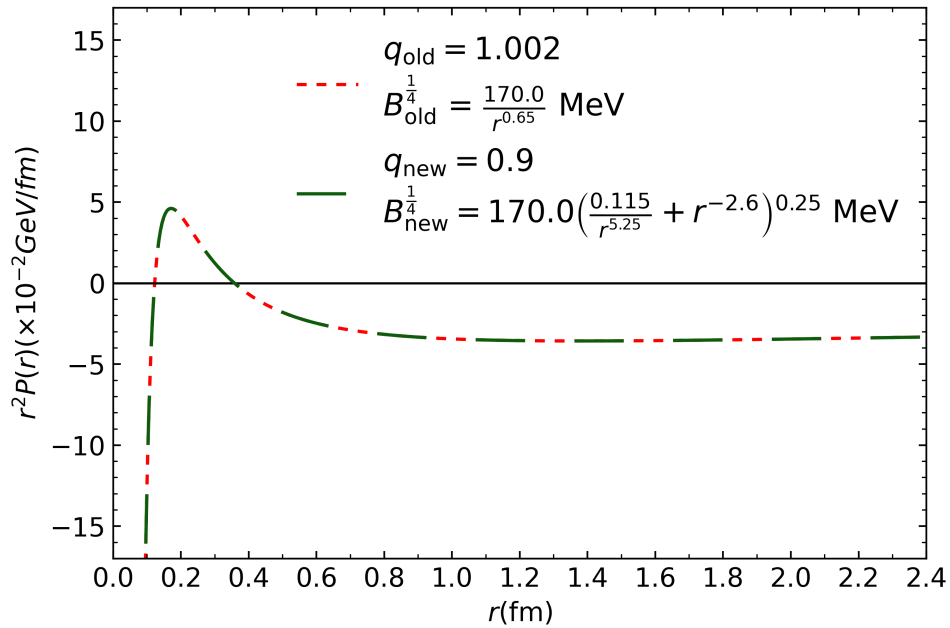


Fig. 6.4: Comparación entre distribuciones $r^2P(r)$ obtenidas con $q = 1.002$ y una forma tradicional de $B(r)$, y con $q = 0.9$ usando una forma funcional reconstruida. Ambos perfiles son compatibles en forma general, lo que respalda la hipótesis de que q puede absorber el efecto de confinamiento.

Este resultado fortalece la idea de que q puede interpretarse como un parámetro dinámico que encapsula la física del confinamiento, y no solo como un modificador estadístico.

6.5 Conclusiones generales

- Se construyó un modelo efectivo basado en la estadística de Tsallis acoplado al modelo de bolsa MIT, capaz de reproducir distribuciones de presión hadrónica consistentes con QCD en



el retículo.

- La dependencia radial del parámetro $q(r)$ permite reinterpretar el confinamiento como un fenómeno emergente asociado a correlaciones no extensivas, prescindiendo potencialmente de la presión de bolsa fija.
- La validez del modelo se verificó frente a resultados de Lattice QCD y mediante reconstrucción inversa de perfiles de presión.
- La sensibilidad del modelo al potencial químico sugiere posibles aplicaciones en materia densa o escenarios de transición de fase (neutron stars, heavy-ion collisions, etc.).

Observación (Perspectivas). Futuras investigaciones podrían integrar una evolución dinámica de $q(r, t)$, explorar efectos de anisotropías, o conectar con observables experimentales más allá de GFFs.

Perspectivas de trabajo futuro

Durante el desarrollo de este trabajo, se exploró preliminarmente la posibilidad de extender el modelo Tsallis-MIT al cálculo de masas hadrónicas. La idea inicial consistió en reinterpretar la energía total del sistema, $U_q(T, V)$, derivada de relaciones termodinámicas de Tsallis, como responsable directa de la masa del hadrón, igualándola a la energía de bolsa tradicional. Esta propuesta permitió visualizar un posible camino hacia un modelo de masas dependiente explícitamente del parámetro de no extensividad q .

Sin embargo, dado que los perfiles de temperatura $T(r)$ y volumen efectivo $V(r)$ ya estaban determinados fenomenológicamente, el cálculo resultante para q se reducía a un simple ajuste algebraico, limitando el alcance predictivo de esta aproximación.

Una perspectiva de trabajo futuro interesante sería implementar técnicas de aprendizaje automático (Machine Learning) para inferir el valor óptimo de q directamente a partir de masas experimentales de hadrones. A partir de un conjunto sintético generado por la energía $U_q(T, V, q)$, podría entrenarse un regresor que prediga q como función de propiedades hadrónicas conocidas (masa, radio, temperatura). Esto permitiría validar de forma estadística la viabilidad del modelo Tsallis-MIT para describir espectros de masas sin necesidad de ajustes manuales.

Adicionalmente, se podrían explorar modificaciones a la condición de frontera de los modos normales en el modelo de bolsa, incorporando deformaciones dependientes de q en la ecuación trascendental de confinamiento. Esta estrategia abriría la posibilidad de obtener un espectro de masas directamente no extensivo desde la cuantización de los modos.

Aunque estos enfoques no fueron implementados en el presente trabajo, representan rutas prometedoras para investigaciones futuras que integren de manera más profunda la estadística de Tsallis en la fenomenología hadrónica.

Palabras finales

Este trabajo presentó una formulación extendida del modelo de bolsa para nucleones mediante el uso de estadística no extensiva de Tsallis, integrando de manera natural los efectos del confinamiento y la correlación de largo alcance. Más allá de los resultados numéricos y validaciones presentadas, este estudio busca abrir nuevas líneas de exploración en la descripción efectiva de la materia hadrónica.

Queda como perspectiva futura el desarrollo de modelos dinámicos basados en $q(r, t)$, así como su contraste directo con datos experimentales provenientes de dispersión profunda y colisiones de alta energía.

APÉNDICE

A

DERIVACIONES MATEMÁTICAS DETALLADAS

A.1 Derivaciones detalladas del gas de gluones

En esta sección se derivan de forma detallada las expresiones termodinámicas del gas de gluones modelado como un sistema ideal de Bose-Einstein ultrarrelativista. Estas expresiones se utilizan en la sección 2.2 para el desarrollo de la entropía y presión dentro del hadrón bajo estadística de Tsallis.

A.1.1 Densidad de estados y función de partición

Para gluones (bosones sin masa), la relación energía-momento en el régimen ultrarrelativista está dada por:

$$\epsilon = pc = \hbar c |\vec{k}|, \quad (\text{A.1})$$

donde $|\vec{k}|$ es el módulo del vector de onda y p la magnitud del momento lineal.

La densidad de estados en el espacio de fases tridimensional, considerando volumen V , es:

$$g(\epsilon) d\epsilon = g_G \frac{V \epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 (hc)^3}, \quad (\text{A.2})$$

donde $g_G = 16$ es el factor de degeneración para gluones (8 tipos de gluones \times 2 polarizaciones transversales). Esta expresión surge de contar los modos disponibles en una caja cúbica de volumen V con condiciones de frontera periódicas, y se utiliza para convertir sumas discretas en integrales continuas.

La función de partición del sistema se expresa como:

$$\Xi = \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_j}}, \quad (\text{A.3})$$

donde j es un índice que recorre todos los niveles de energía disponibles y $\beta = (k_B T)^{-1}$.

A.1.2 Integrales fundamentales

Las cantidades termodinámicas se expresan en términos de integrales de la forma:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (\text{A.4})$$

las cuales se evalúan fácilmente mediante el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, resultando en:

$$I_n = \frac{1}{\beta^{n+1}} \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma(n+1)\zeta(n+1)}{(k_B T)^{n+1}}, \quad (\text{A.5})$$

donde Γ es la función gamma y ζ es la función zeta de Riemann.

Los valores específicos de estas integrales más relevantes son:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2.404, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.494. \quad (\text{A.7})$$

A.1.3 Energía del sistema

La energía total del sistema se obtiene integrando sobre todos los modos disponibles, ponderados por su ocupación térmica:

$$E_G = \int_0^\infty g(\epsilon) \epsilon f_{\text{BE}}(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.8})$$

donde $f_{\text{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$ es la distribución de ocupación de Bose-Einstein. Sustituyendo y usando el resultado anterior para la integral:

$$E_G = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \frac{\pi^4 (k_B T)^4}{15}. \quad (\text{A.9})$$

En unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, se simplifica a:

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} V T^4. \quad (\text{A.10})$$

A.1.4 Presión

La presión se obtiene a partir del potencial gran canónico, el cual se relaciona con la función de partición mediante:

$$\ln \Xi = -\frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon. \quad (\text{A.11})$$

Realizando una integración por partes y usando identidades estándar de integrales, se encuentra que:

$$\ln \Xi = \frac{g_G V}{3\pi^2 (hc)^3 \beta} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (\text{A.12})$$

La presión se calcula como:

$$P_G = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi = \frac{g_G \pi^2 (k_B T)^4}{90 (hc)^3}, \quad (\text{A.13})$$

y en unidades naturales:

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (\text{A.14})$$

Esto refleja la relación característica entre presión y energía de un gas ultrarrelativista.



A.1.5 Entropía

La entropía se puede obtener directamente a partir de la energía utilizando la identidad:

$$S_G = \left(\frac{\partial E_G}{\partial T} \right)_V = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T}. \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo la expresión de la energía:

$$S_G = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3. \quad (\text{A.16})$$

A.1.6 Justificación de $\mu = 0$ para gluones

En sistemas con partículas sin número conservado, como los gluones, el potencial químico se anula en equilibrio termodinámico. Esto se debe a que los gluones pueden crearse y aniquilarse libremente, de modo que no existe una restricción asociada a su número total.

$$N_G(T, V, 0) = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \propto T^3, \quad (\text{A.17})$$

lo que confirma que la ocupación de estados sigue siendo finita sin necesidad de introducir un término de control para N . Por tanto, se toma:

$$\mu_G = 0. \quad (\text{A.18})$$

Resumen de resultados fundamentales

- Energía total: $E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4$
- Presión: $P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4$
- Entropía: $S_G = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3$
- Potencial químico: $\mu_G = 0$

Estas expresiones son esenciales para extender el análisis al marco de la estadística no extensiva de Tsallis, donde las correlaciones entre grados de libertad se introducen mediante el parámetro q .

A.2 Derivaciones detalladas del gas de quarks

El gas de quarks se modela como un sistema ideal de partículas fermiónicas ultrarrelativistas sin masa. Dado que se consideran quarks y antiquarks en equilibrio, el sistema incluye dos gases acoplados con potenciales químicos opuestos. Esta derivación permite obtener expresiones para la energía, presión, número neto de partículas y entropía.

A.2.1 Descripción del sistema

Se considera un sistema compuesto por quarks y antiquarks con las siguientes características:

- Relación energía-momento: $\epsilon = pc = \hbar c |\vec{k}|$, válida en el límite $m \rightarrow 0$.
- Simetría partícula-antipartícula: $\mu_{\text{quark}} = -\mu_{\text{antiquark}} = \mu$.
- Factor de degeneración: $g_Q = 12$ (2 espines \times 3 colores \times 2 sabores u, d).
- Estadística Fermi-Dirac:

$$f_{\text{FD}}^\pm(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1}.$$

A.2.2 Número neto de partículas

El número promedio total de quarks y antiquarks se obtiene sumando sobre los estados energéticos ocupados:

$$N_+ = \int_0^\infty g(\epsilon) f_{\text{FD}}^+(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.19})$$

$$N_- = \int_0^\infty g(\epsilon) f_{\text{FD}}^-(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.20})$$

donde f_{FD}^\pm son las distribuciones de quarks y antiquarks. La densidad de estados para partículas sin masa es la misma que para bosones:

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{g_Q V \epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 (hc)^3}.$$

El exceso neto de quarks se define como:

$$N = N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 [f_{\text{FD}}^+(\epsilon) - f_{\text{FD}}^-(\epsilon)] d\epsilon. \quad (\text{A.21})$$

Esta integral puede resolverse analíticamente en unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, resultando en:

$$N = \frac{g_Q V}{6} (\pi^2 \mu T^2 + \mu^3). \quad (\text{A.22})$$

A.2.3 Energía total del sistema

La energía total incluye la contribución de quarks y antiquarks:

$$E_Q = \int_0^\infty g(\epsilon) \epsilon [f_{\text{FD}}^+(\epsilon) + f_{\text{FD}}^-(\epsilon)] d\epsilon. \quad (\text{A.23})$$

Evalutando la integral, se obtiene:

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (\text{A.24})$$

A.2.4 Presión

En un gas ultrarrelativista sin masa, la relación fundamental entre energía y presión es:

$$P_Q = \frac{1}{3} \frac{E_Q}{V}. \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo la expresión para E_Q :

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (\text{A.26})$$

A.2.5 Entropía

La entropía se obtiene a partir de la relación:

$$S_Q = \frac{4}{3} \frac{E_Q}{T} - \frac{\mu N}{T}. \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo las expresiones de E_Q y N , se llega a:

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.28})$$



Resumen de resultados fundamentales

- **Número neto de quarks:** $N = \frac{g_Q V}{6} (\pi^2 \mu T^2 + \mu^3)$
- **Energía:** $E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]$
- **Presión:** $P_Q = \frac{1}{3} \frac{E_Q}{V}$
- **Entropía:** $S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]$

Estas expresiones son esenciales para el cálculo de la entropía total del sistema quark-gluón bajo el enfoque de Tsallis en la sección 2.2, donde la no extensividad se introduce mediante una correlación entre las contribuciones individuales de quarks y gluones.

A.3 Derivación de la presión en el modelo de Tsallis

Partimos de la relación de Maxwell para sistemas termodinámicos generalizados:

$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu} = \left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V, \mu}, \quad (\text{A.29})$$

donde S_q representa la entropía total del sistema (quarks + gluones) bajo el formalismo de Tsallis. Asumimos que el volumen V y la temperatura T son cantidades extensivas, mientras que la entropía y la presión pueden presentar no extensividad a través del parámetro q .

La expresión de entropía total está dada por (véase ecuación 2.32):

$$S_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V T^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6. \quad (\text{A.30})$$

Al derivar con respecto a V , obtenemos:

$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu} = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] T^3 + 2 \cdot \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V T^6. \quad (\text{A.31})$$

Aplicando la relación de Maxwell (A.29), esta derivada corresponde a la derivada de la presión con respecto a la temperatura:

$$\left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V, \mu} = \left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu}. \quad (\text{A.32})$$

Para obtener P_q , integramos la expresión (A.31) con respecto a T :

$$P_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] \int T^3 dT + 2 \cdot \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V \int T^6 dT + C(V, \mu, q). \quad (\text{A.33})$$

Al integrar término a término e imponer la condición de consistencia con el caso $q = 1$, se determina la constante de integración $C(V, \mu, q)$ de modo que:

$$P_{q=1} = P_Q + P_G.$$

Usando las expresiones conocidas para gases de quarks (Fermi-Dirac) y gluones (Bose-Einstein) en el límite de Boltzmann-Gibbs:

$$P_{q=1} = \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4, \quad (\text{A.34})$$

lo que permite determinar explícitamente $C(V, \mu, q)$. Finalmente, sustituimos y simplificamos para obtener la expresión completa:

$$P_q = \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right] T^4 + \frac{256\pi^2}{15} (1-q) \left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7. \quad (\text{A.35})$$

Esta expresión generaliza la presión del sistema a partir de la entropía de Tsallis e incluye explícitamente un término no extensivo que escala con VT^7 . Este término se anula en el límite $q \rightarrow 1$, recuperando así la expresión clásica de Boltzmann-Gibbs.

Resumen esquemático: derivación de la energía en Tsallis

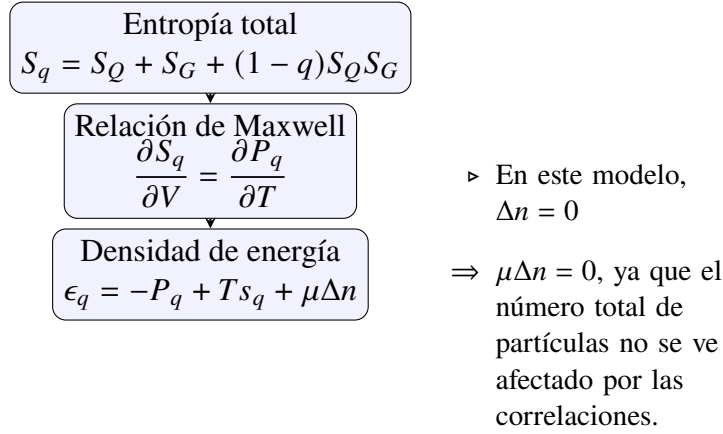


Fig. A.1: Flujo de derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis.

A.4 Modo fundamental y presión de bolsa en el modelo de bolsa

En el modelo de bolsa del MIT, las soluciones permitidas para las funciones de onda de los quarks están determinadas por una condición de contorno sobre la superficie de la bolsa esférica. Esta condición conduce a una ecuación de autovalores, cuyas soluciones discretas determinan los posibles modos normales.

A.4.1 Condición de cuantización

La ecuación de cuantización más baja para el modo esférico se escribe como:

$$\omega_{n\kappa} = p_{n\kappa} R, \quad (\text{A.36})$$

donde $\omega_{n\kappa}$ es la energía adimensionalizada, $p_{n\kappa}$ es el momento cuántico, y R es el radio de la bolsa. El modo fundamental ($n = 1, \kappa = -1$) tiene el valor:

$$\omega_0 = \omega_{1,-1} \approx 2.04. \quad (\text{A.37})$$

Este valor define un momento máximo accesible para los quarks dentro de la bolsa:

$$p_{\max} = \frac{\omega_0}{R}. \quad (\text{A.38})$$



A.4.2 Energía de quarks confinados

Bajo este límite, la energía cinética de los quarks (en ausencia de potencial químico y masa) se expresa como:

$$E_Q = \frac{(g_Q + g_{\bar{Q}})V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_{\max}} \frac{p^3 dp}{1 + e^{p/T(r)}}, \quad (\text{A.39})$$

donde se ha asumido simetría quark-antiquark y $g_Q = 12$, como antes.

A.4.3 Presión de bolsa

La energía total del sistema está compuesta por la contribución de quarks y gluones. La presión de bolsa se interpreta como la presión neta que impide que los quarks escapen del volumen de confinamiento, y se define como:

$$B(r) = \frac{E_{\text{total}} - E_Q}{V}, \quad (\text{A.40})$$

siendo E_{total} la energía de la cavidad completa a temperatura $T(r)$.

Esta expresión es la base para determinar la función $B(r)$ a partir de simulaciones numéricas, como se presenta en la Fig. 3.3.

A.5 Reconstrucción de la Presión de Quarks $P_Q(r)$

La distribución de presión de quarks se obtiene a partir del término D de los factores de forma gravitacionales (GFFs). Partimos de la parametrización fenomenológica:

$$d_1(t) = d_1(0) \left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{-\alpha} \quad (\text{A.41})$$

El término $d_1(t)$ se conecta a la distribución radial de presión mediante una transformada de Bessel:

$$d_1(t) \propto \int \frac{j_0(r\sqrt{-t})}{2t} p(r) r^2 dr \quad (\text{A.42})$$

donde j_0 es la función de Bessel esférica de primer tipo.

Al invertir esta relación, se obtiene:

$$p(r) = -\frac{1}{k_p \pi^2} \int_0^\infty x^4 j_0(rx) d_1(-x^2) dx \quad (\text{A.43})$$

Evaluando explícitamente la integral para el ansatz de $d_1(t)$, se llega a una forma cerrada:

$$P_Q(r) = \frac{M^6 d_1(0)}{16\pi k_p r} e^{-Mr} (Mr - 3) \quad (\text{A.44})$$

donde los parámetros son:

- $d_1(0) = -2.04$,
- $M = 5 \text{ fm}^{-1}$,
- $\alpha = 3$,
- $k_p = 55$.

Esta solución reproduce correctamente el comportamiento observado experimentalmente en [13].

A.6 Modelo de Presión Total $P_q(r)$ en el Tsallis-MIT Bag Model

En el marco del modelo Tsallis-MIT, la presión total se compone de dos contribuciones:

1. Presión de quarks: proporcional a $T(r)^4$,
2. Corrección gluónica Tsallis: proporcional a $(1 - q)T(r)^7$.

La expresión completa es:

$$P_q(r) = \frac{37\pi^2}{90}T(r)^4 + \frac{256\pi^2}{15}(1 - q)VT(r)^7 \quad (\text{A.45})$$

donde:

- $T(r) = T_0 e^{-r^2/R_T^2}$ es el perfil de temperatura radial,
- $V = \frac{4}{3}\pi R_{bag}^3$ es el volumen fijo de la bolsa,
- q es el parámetro de no extensividad.

Este modelo permite interpolar entre el comportamiento extensivo de Boltzmann-Gibbs ($q \rightarrow 1$) y correcciones no extensivas importantes para sistemas densos o con fuertes correlaciones.

A.7 Unidades y Factores de Conversión

En todo el trabajo se han empleado **unidades naturales** donde $\hbar = c = 1$. En estas unidades:

$$1 \text{ fm} = \frac{1}{197.3269804} \text{ MeV}^{-1} \quad (\text{A.46})$$

De esta manera:

- MeV^4 puede convertirse en MeV/fm^3 mediante un factor de $(1/\hbar c)^3$.
- MeV^7 necesita conversión distinta debido al volumen adicional (el término T^7 incluye ya V).

Los factores utilizados fueron:

$$\text{CONVERSION}_{T^4} = \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^3 \quad (\text{A.47})$$

$$\text{CONVERSION}_{T^7} = \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^6 \quad (\text{A.48})$$

Este tratamiento asegura que todas las presiones estén expresadas en unidades consistentes de MeV/fm^3 .

ACRÓNIMOS

ALICE A Large Ion Collider Experiment. [2](#)

BG Boltzmann – Gibbs. [2](#), [12](#)

BM Modelo de Bolsa. [1](#), [2](#)

DVCS Deep Virtual Compton Scattering. [2](#)

LHC Large Hadron Collider. [2](#)

LQCD Lattice QCD. [2](#)

MIT Massachusetts Institute of Technology. [1](#), [5](#), [6](#)

QCD Cromodinámica Cuántica. [1](#), [2](#), [5](#), [6](#)

T-MIT Bag Model Tsallis-MIT Bag Model. [2](#)



GLOSARIO

Distribuciones Generalizadas de Partones (GPDs) Funciones que describen la correlación entre la posición y el momento de los partones dentro de un hadrón. Son fundamentales para acceder a la distribución tridimensional de quarks y gluones.. [2](#)

Form Factors Gravitacionales (GFFs) Funciones relacionadas con la distribución de momento de energía dentro de los hadrones, accesibles experimentalmente mediante procesos de dispersión como la DVCS.. [2](#)

Modelo de Bolsa Modelo fenomenológico en el cual los quarks están confinados en una región espacial limitada por una presión externa denominada presión de bolsa. Utilizado para describir propiedades básicas de los hadrones como masas y radios.. [7](#)

Tsallis La estadística de Tsallis, propuesta por Constantino Tsallis en 1988, es una generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs que se utiliza para describir sistemas con propiedades no extensivas, es decir, sistemas donde las interacciones entre partículas no son aditivas. La entropía de Tsallis se define como:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q \right),$$

donde q es el parámetro de no extensividad, p_i es la probabilidad del estado i , y W es el número total de estados posibles. Para $q \rightarrow 1$, la entropía de Tsallis se reduce a la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.$$

La estadística de Tsallis ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo física de altas energías, sistemas complejos, y física de plasmas, entre otros. [2](#), [7](#)



NOMENCLATURA

La siguiente es la lista de los símbolos matemáticos que fueron usados durante este trabajo

Constantes Físicas

k_B	Constante de Boltzmann	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
\hbar	Constante reducida de Planck	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}$
h	Constante de Planck	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
c	Velocidad de la luz en el vacío	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$

Símbolos relevantes de la tesis

V	Volumen de la bolsa (constante)
$T(r)$	Perfil radial de temperatura
$B(r)$	Perfil radial de presión de bolsa
q	Parámetro de no extensividad de Tsallis
$P(r)$	Distribución de presión radial



BIBLIOGRAFÍA

- [1] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70(1): 93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). [Elsevier].
- [2] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. [Springer].
- [3] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539>. [APS].
- [4] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/. [Numdam].
- [5] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315>. [Annual Reviews].
- [6] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. [APS].
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: [doi:10.1103/PhysRevD.10.2599](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2599). [APS].
- [8] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki. $N\Omega$ dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050>. [Elsevier].
- [9] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki. $p \Xi^-$ correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967: 856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041>. [Elsevier].



- [10] TASSO Collaboration. Jet production and fragmentation in $e^+ e^-$ annihilation at 12 to 43 GeV. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 22(4):307–340, December 1984. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01547419>. [Springer].
- [11] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the LHC. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6>. [Nature].
- [12] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive p- ϕ interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.172301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301>. [APS].
- [13] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. [Nature].
- [14] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. [Springer].
- [15] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). [Elsevier].
- [16] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. [Springer].
- [17] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. [Springer].
- [18] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy pp collisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5):054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. [APS].
- [19] A. Hall et al. Deeply virtual compton scattering at herA. *JHEP*, 05:034, 2018. doi: 10.1007/JHEP05(2018)034. [inspirehep].
- [20] M. Y. Han and Y. Nambu. Three-triplet model with double su(3) symmetry. *Physical Review*, 139(4B):B1006–B1010, aug 1965. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.139.B1006>.
- [21] K. Babu Joseph and M. N. Sreedharan Nair. A phenomenological bag model with variable bag pressure. *Pramana*, 16:49, 1981. doi: 10.1007/BF02847892. [inspirehep].
- [22] Leo Lagerkvist and Filip Samuelsson. The MIT bag-model. glueball mass spectrum using the MIT bag-model. *Department of Theoretical Physics Royal Institute of Technology (KTH)*, page 27, may 2015. URL <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf>. [<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf>].
- [23] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132>. [EPJ].



- [24] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y>. [Springer].
- [25] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at lhc energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: 10.1088/1361-6471/aaaea0. [IOPScience].
- [26] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics (Classical Theoretical Physics)*. Springer, 2001. ISBN 0-387-94299-8.
- [27] Z. G. Tan, Z. D. Li, and Y. Chen. Some characteristic parameters of proton from the bag model. *Results in Physics*, 12:190–192, March 2019. ISSN 2211-3797. doi: 10.1016/j.rinp.2018.11.027. [Elsevier].
- [28] V. D. Burkert et al. Colloquium: Gravitational form factors of the proton. *Rev. Mod. Phys.*, 92: 015004, 2020. doi: 10.1103/RevModPhys.92.015004. [arxiv].
- [29] P. E. Shanahan et al. Nonperturbative aspects of the qcd energy-momentum tensor. *Phys. Rev. D*, 100:094502, 2019. doi: 10.1103/PhysRevD.100.094502.
- [30] K. Johnson. The m.i.t bag model. *ACTA PHYSICA POLONICA*, B6(6):1–28, 1975. URL <https://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=6&page=865>.
- [31] P. E. Shanahan and W. Detmold. The pressure distribution and shear forces inside the proton. *Physical Review Letters*, 122(7):072003, February 2019. ISSN 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.122.072003. [arXiv].