

Pressure Distribution Inside Nucleons in a Tsallis-MIT Bag Model

Física de partículas

Presenta: **Manuel Alejandro Matías Astorga**
Director de tesis: **Dr. Gerardo Herrera Corral**

A thesis presented for the degree of
Doctor of Philosophy



Cinvestav

Departamento de física

CINVESTAV

CDMX, México

28 de abril de 2025

RESUMEN Y ABSTRACT

Resumen (Español)

Aquí va el resumen en español...

Abstract (English)

Here goes the abstract in English...

AGRADECIMIENTOS

CONAHCYT, CINVESTAV, Dr Gerardo H. C.
Agradezco y acredito a [Josh Cassidy](#) por la plantilla de la portada de mi tesis.

CONTENIDO

Resumen y Abstract	i
Agradecimientos	iii
Lista de figuras	vii
Lista de Tablas	ix
Introducción	1
1 Modelo de bolsa	3
1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD	3
1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica	4
1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar	4
1.4 La aproximación de la cavidad esférica	5
2 Presión de quarks y gluones en el marco de la estadística de Tsallis	9
2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis	9
2.2 Presión dentro del hadrón	10
2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein	10
2.2.2 Presión de quarks: gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac	11
2.3 El protón en el modelo de Tsallis	13
2.3.1 Entropía generalizada de Tsallis	13
2.3.2 Presión generalizada en el marco de Tsallis	14
3 Parámetros Característicos del Protón en el Modelo de Bolsa	17
3.1 Configuraciones gluónicas	17
3.1.1 Energías asociadas	18
3.2 Perfil radial de temperatura	18
3.2.1 Resultados de simulaciones	18
3.2.2 Perfil térmico	19
3.3 Presión de bolsa	19
3.3.1 Dos escenarios	19

3.3.2	Análisis comparativo	20
3.4	Discusión preliminar	20
4	Distribución de Presión en el Protón	21
4.1	Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales	21
4.2	Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT	21
4.3	Extracción de la Presión Gluónica	22
4.4	Resultados Clave	22
5	Significado físico del parámetro q de Tsallis	23
6	Resultados y conclusiones	25
A	Derivaciones Matemáticas Detalladas	27
A.1	Derivaciones detalladas del gas de gluones	27
A.1.1	Densidad de estados y función de partición	27
A.1.2	Integrales fundamentales	28
A.1.3	Energía del sistema	28
A.1.4	Presión	28
A.1.5	Entropía	29
A.1.6	Justificación de $\mu = 0$ para gluones	29
A.2	Derivaciones detalladas del gas de quarks	29
A.2.1	Descripción del sistema	29
A.2.2	Número neto de partículas	30
A.2.3	Energía total del sistema	30
A.2.4	Presión	30
A.2.5	Entropía	30
A.3	Derivación de la presión en el modelo de Tsallis	31
A.4	Modo fundamental y presión de bolsa en el modelo de bolsa	32
A.4.1	Condición de cuantización	32
A.4.2	Energía de quarks confinados	33
A.4.3	Presión de bolsa	33
B	Appendix On Collisions	35
B.1	On collisions	35
B.2	Python code	35
	Nomenclatura	41
	Bibliografía	43

LISTA DE FIGURAS

1	Red LQCD	1
2	Diagrama de bolsa	2
1.1	Modelo de bolsa con condiciones de frontera	4
2.1	Diagrama de relaciones Tsallis	15
3.1	Configuraciones gluónicas. (a) Quarks en mar de gluones; (b) Quarks rodeados por gluones.	17
3.2	Perfil radial de temperatura del protón adaptado de [24]. La línea azul muestra el ajuste $T(r) = (109 \pm 1 \text{ MeV}) (r/\text{fm})^{-3/4}$. Los puntos representan datos simulados del modelo de bolsa MIT.	18
3.3	Presión de bolsa $B(r)$ en función del radio. Línea punteada: Ajuste exponencial $200.9 e^{-0.2936r} \text{ MeV}$ (cascarón gluónico). Línea continua: Ajuste de potencia $170 r^{-0.65} \text{ MeV}$ (mar de gluones). El ajuste potencial es parecido al comportamiento $r^{-3/4}$ de $T(r)$ (Fig. 3.2), mientras que el exponencial muestra mayor dispersión. Los datos (cruces y círculos) fueron obtenidos mediante simulaciones del modelo de bolsa [24].	19
4.1	Descomposición de presiones: (azul) P_q modelo Tsallis, (rojo) P_Q de GFFs, (verde) P_G obtenida por diferencia.	22
6.1	MIT-Bag model	25
A.1	Flujo de derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis.	32

LISTA DE TABLAS

2.1	Comparación entre resultados termodinámicos en BG y Tsallis	14
4.1	Propiedades de las distribuciones de presión	22

INTRODUCCIÓN

Entender la estructura interna de los hadrones es fundamental para descifrar las interacciones fuertes descritas por la [Cromodinámica Cuántica \(QCD\)](#). Este conocimiento tiene un impacto que trasciende la física de partículas, con aplicaciones en la astrofísica, la materia nuclear densa y las condiciones extremas del universo temprano. La [QCD](#) describe a los hadrones como sistemas compuestos por quarks y gluones confinados, y una de sus propiedades emergentes más importantes es precisamente el confinamiento, responsable de que los quarks no se observen libres en la naturaleza.



Lattice QCD

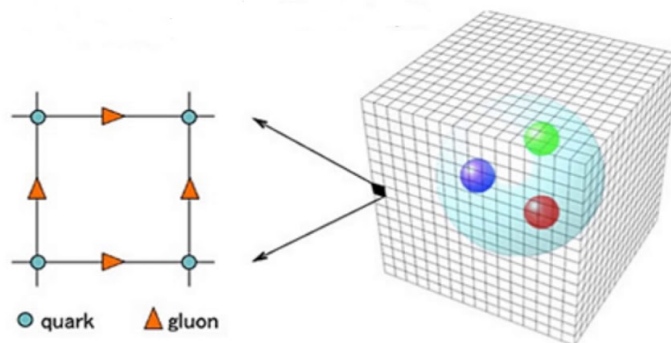


Figure 1: Diagrama de una red tipo LQCD, donde los nodos representan quarks y las aristas simbolizan campos gluónicos. Fuente: SolFinder Research (2020).

Diversos enfoques teóricos se han desarrollado para estudiar este confinamiento. Entre ellos destacan los modelos de cuerdas [1, 2], los modelos de valones [3] y los modelos de bolsa [4, 5]. Este último, particularmente el [Modelo de Bolsa \(BM\)](#) del [Massachusetts Institute of Technology \(MIT\)](#) [6, 7], ha demostrado ser eficaz en capturar propiedades globales como la masa y el radio del protón. Este modelo representa a los hadrones como cavidades esferoidales en las que los quarks libres se mueven en el interior, confinados por una presión externa (presión de bolsa) que impide su escape.

Por otro lado, técnicas numéricas como la [Lattice QCD \(LQCD\)](#) permiten resolver las ecuaciones de [QCD](#) en una red discreta. Aunque altamente demandantes computacionalmente, estas simulaciones

han permitido estudiar correlaciones entre hadrones y estimar parámetros de interacción. Sin embargo, enfrentan el llamado *problema del signo*, que limita su aplicabilidad en ciertos regímenes [8, 9].

La colaboración [A Large Ion Collider Experiment \(ALICE\)](#), en el [Large Hadron Collider \(LHC\)](#), ha contribuido significativamente al estudio experimental de las interacciones hadrón-hadrón, complementando cálculos teóricos con datos de correlaciones entre bariones [10, 11]. Estos estudios, combinados con avances en [Generalized Parton Distributions \(GPDs\)](#) y [Gravitational Form Factors \(GFFs\)](#), han permitido acceder a cantidades como la distribución radial de presión dentro del protón [12].

En este contexto, modelos fenomenológicos permiten aproximar el comportamiento de los hadrones sin resolver completamente la [QCD](#). En esta tesis se explora una extensión del [BM](#) mediante el uso de la estadística de [Tsallis](#), una generalización de la estadística de [Boltzmann - Gibbs \(BG\)](#), ampliamente utilizada en física de altas energías para describir distribuciones de momento transversal [13–17].

Esta estadística introduce un parámetro q que captura desviaciones del comportamiento extensivo, lo cual podría reflejar efectos no triviales en la interacción de quarks y gluones. Su aplicación en el contexto del [BM](#) da lugar al modelo [Tsallis-MIT Bag Model \(T-MIT Bag Model\)](#), el cual permite estudiar la distribución interna de presión y energía del protón desde una perspectiva termodinámica efectiva.

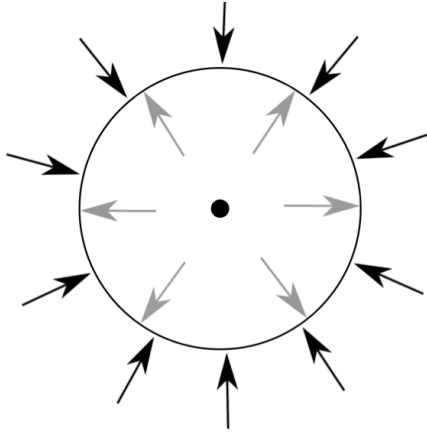


Figure 2: Diagrama que ilustra el modelo de bolsa. En el interior, la presión es generada por un plasma de quarks y gluones, mientras que la presión externa mantiene confinados estos componentes dentro del hadrón. Fuente: Adaptado de The MIT bag-model Glueball mass spectrum using the MIT bag-model (2015).

El objetivo principal de este trabajo es analizar la distribución de presión dentro del protón mediante simulaciones computacionales basadas en el modelo [T-MIT Bag Model](#). Se comparan los resultados obtenidos con estimaciones experimentales basadas en [Deep Virtual Compton Scattering \(DVCS\)](#) y [GPD](#), y se discuten posibles interpretaciones del parámetro q en este contexto.

La organización del documento es la siguiente:

- i. En el Capítulo 1, se describe el [BM](#) y su extensión en este trabajo.
- ii. En el Capítulo 2, se presenta el formalismo de la estadística de [Tsallis](#) y sus aplicaciones relevantes.
- iii. En el Capítulo ??, se analiza la estructura interna del protón y se discuten resultados relevantes.
- iv. En el Capítulo 5, se propone una interpretación física del parámetro q .
- v. En el Capítulo ??, se presentan los resultados de las simulaciones y su análisis.
- vi. Finalmente, el Capítulo ?? resume las conclusiones y lineamientos para trabajos futuros.

CAPÍTULO

1

MODELO DE BOLSA

Resumen del capítulo 1: Modelo de bolsa

Este capítulo introduce el modelo de bolsa del MIT como marco fenomenológico para el confinamiento de quarks. Se parte de los fundamentos físicos provistos por la QCD y se justifica el modelo desde la libertad asintótica, la inclusión de gluones y la estructura relativista-invariante. Se desarrolla formalmente la versión esférica del modelo, derivando sus ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera y soluciones modales, que constituyen la base sobre la cual se construye la extensión no extensiva que proponemos más adelante.

1.1 Motivación y fundamentos desde la QCD

Comprender cómo los quarks se confinan dentro de los hadrones ha sido uno de los desafíos más importantes de la física de partículas. Aunque la QCD provee el marco teórico fundamental para describir las interacciones fuertes, su naturaleza no perturbativa a bajas energías hace difícil una solución exacta para sistemas ligados como los bariones. En este contexto, los modelos fenomenológicos como el modelo de bolsa del MIT ofrecen una herramienta útil para capturar aspectos esenciales de la dinámica hadrónica.

El modelo de bolsa parte de tres principios motivados por la QCD:

- Confinamiento y libertad asintótica:** Los quarks están confinados a una región finita de espacio, pero se mueven libremente dentro de ella debido a la debilidad de las interacciones a corta distancia.
- Inclusión de gluones:** Aunque no siempre se introducen explícitamente, las correcciones debidas al intercambio de gluones son esenciales para describir propiedades del espectro hadrónico.
- Condición de singlete de color:** Solo estados globalmente neutros (singletes de color) son permitidos, lo cual es consistente con la ley de Gauss aplicada a campos de color confinados.

A partir de estas ideas, se construye un modelo donde los quarks están confinados dentro de una “bolsa” esférica, cuyo tamaño y energía total resultan del equilibrio entre presión interna y presión de vacío externo, modelada por una constante B conocida como presión de bolsa.

1.2 Formulación del modelo en cavidad esférica

El enfoque formal del modelo parte de la acción para un campo de quarks sin masa en una cavidad esférica [5], dada por:

$$W = \int dt \left[\int_V d^3x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right] \quad (1.1)$$

Este modelo asume:

- i. Los quarks se comportan como partículas libres dentro de la cavidad.
- ii. Fuera de la cavidad, el vacío tiene menor energía, impidiendo la propagación de los campos.
- iii. Las condiciones de frontera imponen confinamiento y cuantizan las soluciones posibles.

A partir de esta acción se derivan las ecuaciones de movimiento (la ecuación de Dirac) y condiciones de frontera que aseguran el confinamiento de quarks y el equilibrio de presiones. Las soluciones modales resultantes definen una base completa para construir estados hadrónicos dentro del modelo.

1.3 Modelo de bolsa: descripción preliminar

El modelo de bolsa del MIT ofrece una descripción fenomenológica del confinamiento de quarks, en la cual estos se encuentran libres en el interior de una región finita del espacio —la bolsa— y no pueden escapar debido a una presión negativa que actúa como barrera. En este esquema, los quarks se tratan como partículas relativistas sin masa dentro de la bolsa, mientras que el vacío exterior se modela como un medio con energía más baja.

Esta diferencia energética entre el interior y el exterior se modela mediante la llamada *presión de bolsa* B , que actúa como un parámetro fundamental para estabilizar el sistema. El tamaño de la bolsa queda entonces determinado por el equilibrio entre:

- La *energía cinética* asociada al confinamiento cuántico de los quarks,
- y la *energía volumétrica* proporcional a B , que penaliza el crecimiento del volumen.

Este modelo fue originalmente formulado por el grupo del MIT [6] y ha sido extensamente utilizado para estimar propiedades de los hadrones ligeros, tales como sus masas, radios y momentos magnéticos.

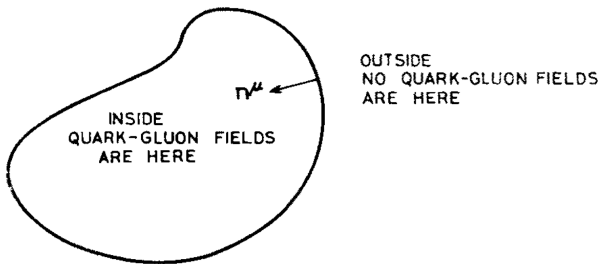


Figure 1.1: Dentro de la bolsa, los quarks están confinados debido a la presión de bolsa que equilibra la presión del vacío exterior.

Desde el punto de vista de la QCD, el modelo incorpora dos elementos fundamentales:

- i. **Singlete de color:** Las condiciones de frontera del modelo requieren que el estado confinado sea un singlete de color, en consistencia con el principio de confinamiento.
- ii. **Intercambio de gluones:** Aunque el modelo en su forma más simple no incluye campos gluónicos explícitamente, se pueden incorporar como correcciones que contribuyen al espectro de energía de los estados ligados.



A pesar de su simplicidad, el modelo ha mostrado ser efectivo al capturar ciertas características de los hadrones. En esta tesis, extendemos este marco incorporando conceptos de la estadística no extensiva de Tsallis, con el objetivo de explorar nuevas formas de describir la energía, temperatura y presión internas del protón.

1.4 La aproximación de la cavidad esférica

Una de las aproximaciones más utilizadas en el BM es considerar que los quarks se encuentran confinados dentro de una región esférica de radio R_0 , denominada *cavidad esférica*. Esta simplificación permite resolver las ecuaciones del sistema bajo condiciones bien definidas, preservando los aspectos esenciales del confinamiento.

La dinámica de los quarks en esta configuración esférica se describe mediante una acción efectiva [6], que incluye los términos correspondientes a la energía cinética, energía de masa, presión de bolsa, y una condición de frontera:

$$W = \int dt \left[\int_V d^3x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S d^2x \bar{\psi} \psi \right], \quad (1.2)$$

donde:

- ▷ ψ es el *campo de quarks espinorial*,
- ▷ B representa la *presión de bolsa*, que actúa como energía de confinamiento,
- ▷ $\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi$ es el *término cinético relativista*,
- ▷ m es la *masa de los quarks* (que puede tomarse como nula en el límite relativista),
- ▷ V es el *volumen de la bolsa* y S su *superficie*.

Ecuaciones de movimiento: La ecuación de Dirac dentro de la bolsa se obtiene al variar la acción (1.2) con respecto al campo de quarks ψ . Esto conduce a:

$$(i\rlap{\not}{\partial} - m)\psi = 0 \quad \text{en } V, \quad (1.3)$$

donde $\rlap{\not}{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$.

Condiciones de frontera: Las condiciones de frontera en la superficie S se obtienen al variar la acción (1.2) con respecto a la superficie que encierra el volumen V . Estas condiciones garantizan que los quarks no puedan escapar de la bolsa y que la presión externa se equilibre con la *presión de bolsa* B :

$$\left. \begin{aligned} in^\mu \gamma_\mu \psi &= \psi \\ \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) &= B \end{aligned} \right\} \quad \text{sobre } S, \quad (1.4a)$$

$$(1.4b)$$

Solución modal de la ecuación de Dirac

Para resolver (1.3) en coordenadas esféricas, se hace uso de la separación de variables y la expansión en modos normales. La solución general adopta la forma:

$$\psi(x, t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa}) a_{n\kappa jm} \psi_{n\kappa jm}(x) e^{-i\omega_{n\kappa} t}, \quad (1.5)$$

donde:

- ▷ $\omega_{n\kappa}$ son las *frecuencias propias* de los modos de oscilación en la bolsa,
- ▷ $N(\omega_{n\kappa})$ es una *constante de normalización*,
- ▷ $a_{n\kappa jm}$ son *coeficientes de expansión*,
- ▷ $\psi_{n\kappa jm}(x)$ son los *modos normales*.

Cada modo se expresa como un espinor de cuatro componentes en forma:

$$\psi_{n\kappa jm}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} f_{n\kappa}(r) \Omega_{\kappa jm}(\theta, \phi) \\ i g_{n\kappa}(r) \Omega_{-\kappa jm}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde $f_{n\kappa}(r)$ y $g_{n\kappa}(r)$ son funciones radiales obtenidas a partir de las soluciones de Bessel y $\Omega_{\kappa jm}$ son armónicos angulares con espín.

Condición de cuantización y frecuencias permitidas

La condición de frontera lineal (1.4a) implica una relación trascendental que fija las frecuencias permitidas dentro de la bolsa [6, 18, 19]. Esta condición se puede expresar como:

$$\tan(\omega_{n\kappa}) = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa}. \quad (1.7)$$

O, de forma equivalente:

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa j_1(\omega_{n\kappa}), \quad (1.8)$$

donde:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Las primeras raíces de estas ecuaciones determinan los valores discretos de $\omega_{n\kappa}$ que caracterizan los estados cuánticos permitidos. Algunos de los primeros valores son:

$$\begin{aligned} \kappa = -1 : \quad \omega_{1,-1} &\approx 2.04, \quad \omega_{2,-1} \approx 5.40 \\ \kappa = +1 : \quad \omega_{1,1} &\approx 3.81, \quad \omega_{2,1} \approx 7.00 \end{aligned}$$

Observación (Sobre los modos espinoriales). Para los estados de espín $j = \frac{1}{2}$, que corresponden a los quarks constituyentes de los hadrones, las soluciones a la ecuación de Dirac bajo las condiciones de frontera (1.4) presentan dos configuraciones relevantes: $\kappa = \pm 1$. Estas soluciones modales involucran funciones de Bessel esféricas y espinores angulares, y permiten describir cuantitativamente el comportamiento energético del sistema.

Soluciones específicas para $j = \frac{1}{2}$:

- Para $\kappa = -1$:

$$\psi_{n,-1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) U_m \\ -j_1\left(\frac{\omega_{n,-1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,-1}t/R_0} \quad (1.9)$$

- Para $\kappa = 1$:

$$\psi_{n,1,\frac{1}{2},m}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) \sigma \cdot \hat{r} U_m \\ j_0\left(\frac{\omega_{n,1}r}{R_0}\right) U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,1}t/R_0} \quad (1.10)$$



donde U_m es un espinor de Pauli y $j_\ell(z)$ son las funciones de Bessel esféricas:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Aunque en este trabajo no se hace uso directo de estas soluciones específicas, su estructura y cuantización son fundamentales para posibles estudios futuros que busquen determinar las masas hadrónicas a partir de la contribución energética de los modos confinados. Esta dirección será brevemente comentada en el capítulo de conclusiones.

Resultados físicos del modelo

El modelo permite derivar relaciones relevantes para sistemas hadrónicos. En particular:

a) La energía total de la bolsa es proporcional al volumen promediado:

$$E = 4B\langle V \rangle.$$

b) En el límite termodinámico, el sistema tiene una temperatura característica $T_0 \sim B^{-1/4}$ (esto se verá en el capítulo 3), independiente de su energía total. Esto implica una densidad de estados de tipo exponencial:

$$\zeta(E) \sim e^{E/T_0}.$$



CAPÍTULO

2

PRESIÓN DE QUARKS Y GLUONES EN EL MARCO DE LA ESTADÍSTICA DE TSALLIS

Resumen del capítulo 2: Estadística de Tsallis

En este capítulo se introduce el marco teórico de la estadística no extensiva de Tsallis, una generalización de la estadística de Boltzmann-Gibbs. Se presentan las definiciones fundamentales de entropía, energía interna y temperatura en el formalismo q -generalizado, así como su relación con las funciones de partición y distribuciones de probabilidad.

2.1 Fundamentos de la estadística de Tsallis

La estadística no extensiva de Tsallis fue propuesta en 1988 como una generalización del marco tradicional de Boltzmann-Gibbs, con el objetivo de describir sistemas complejos que exhiben correlaciones de largo alcance, inestabilidad caótica o estructuras no ergódicas [13, 15, 16].

El enfoque de Tsallis introduce un parámetro de no extensividad $q \in \mathbb{R}$, a partir del cual se define una entropía generalizada:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (2.1)$$

donde p_i representa la probabilidad del microestado i , y k_B es la constante de Boltzmann. En el límite $q \rightarrow 1$, se recupera la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (2.2)$$

Este formalismo ha demostrado ser exitoso en la descripción de sistemas como plasmas astrofísicos, turbulencia, colisiones hadrónicas y materia nuclear, donde las distribuciones de energía no presentan un decaimiento exponencial, sino colas de potencia que reflejan una dinámica fuera del equilibrio termodinámico [20–22].



Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilísticamente independientes A y B (i.e., si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}^1, \quad (2.3)$$

de donde se observa claramente que cuando $q = 1$ se regresa a la estadística de BG

En este capítulo, emplearemos esta generalización para explorar la termodinámica de un sistema de quarks y gluones confinado, extendiendo el modelo de bolsa del MIT mediante distribuciones q -generalizadas, lo cual permitirá caracterizar presiones internas y densidades de energía con mayor generalidad.

2.2 Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (2.3), es posible obtener la entropía y presión dentro de un hadrón considerado como una mezcla de gases de quarks y gluones [23]. Para ello, analizamos por separado las contribuciones de cada componente, asumiendo que:

- i. Los *quarks* se comportan como un gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac sin masa.
- ii. Los *gluones* se modelan como un gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein, también sin masa.

Ambos gases se consideran libres y no interactuantes de forma explícita, ya que la interacción efectiva se introduce mediante el parámetro de no extensividad q de Tsallis.

2.2.1 Presión de gluones: gas ideal ultrarrelativista de Bose-Einstein

Los niveles de energía de los gluones, como bosones sin masa, se describen por:

$$\epsilon_k = cp = \hbar ck, \quad (2.4)$$

donde p es el momento y k el número de onda del modo. La función de partición canónica para este sistema es:

$$\Xi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_j \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta \epsilon_j}}, \quad (2.5)$$

con $\beta = (k_B T)^{-1}$ y fugacidad $\xi = e^{\beta \mu}$. El número promedio de partículas por estado es:

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}. \quad (2.6)$$

Las cantidades termodinámicas fundamentales se obtienen sumando sobre todos los estados:

$$N(T, V, \mu) = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}, \quad (2.7)$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_j \epsilon_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\xi^{-1} e^{\beta \epsilon_j} - 1}. \quad (2.8)$$

¹Más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de Boltzmann, k_B

En el límite termodinámico, estas sumas se reemplazan por integrales utilizando la densidad de estados:

$$\Sigma(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \epsilon^2 d\epsilon, \quad (2.9)$$

lo que permite reescribir:

$$N_G(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.10)$$

$$E_G(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.11)$$

En el caso particular de los gluones, se tiene $\mu = 0$, ya que su número no está conservado, y la fugacidad se vuelve $\xi = 1$. Las expresiones anteriores se simplifican a:

$$N_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (2.12)$$

$$E_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (2.13)$$

Mediante el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, estas integrales toman la forma:

$$N_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}, \quad (2.14)$$

$$E_G(T, V) = \frac{4\pi V}{(hc)^3 \beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (2.15)$$

Estas integrales se evalúan con funciones especiales:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2\zeta(3), \quad (2.16)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}. \quad (2.17)$$

Finalmente, considerando la degeneración de gluones $g_G = 16$ (8 tipos de gluones con 2 polarizaciones), y trabajando en unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, obtenemos:

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4, \quad (2.18)$$

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (2.19)$$

La entropía asociada al sistema de gluones se expresa como:

$$S_G = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T} = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3. \quad (2.20)$$

2.2.2 Presión de quarks: gas ideal ultrarrelativista de Fermi-Dirac

Consideramos ahora la contribución de los quarks y antiquarks, modelados como un sistema mixto de fermiones sin masa en el régimen ultrarrelativista. Bajo esta aproximación, la energía de una partícula se reduce a $\epsilon = |\vec{p}|c^2$.

²Resultado obtenido al tomar el límite $m \rightarrow 0$ en la relación relativista $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.



Características del sistema:

- Se trata de un gas compuesto por quarks y antiquarks en equilibrio termodinámico.
- Se impone simetría entre partículas y antipartículas: $\mu_+ = -\mu_- = \mu$.
- Factor de degeneración: $g_Q = 12$ (2 espines \times 3 colores \times 2 sabores u, d).

Función de partición

La función de partición total para el sistema combinado es el producto de las funciones de quarks y antiquarks:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}\right) \prod_j \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_j + \mu)}\right), \quad (2.21)$$

donde el índice j recorre todos los estados energéticos posibles.

Número de partículas y exceso neto

La población media de partículas en cada estado se expresa como:

$$N_{\pm} = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j \mp \mu)} + 1}, \quad (2.22)$$

y el número neto de quarks (exceso sobre antiquarks) es:

$$N_Q = N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{6\pi^2} \left(\pi^2 \mu T^2 + \mu^3 \right), \quad (2.23)$$

resultado obtenido tras pasar al límite termodinámico e integrar sobre la densidad de estados.

Energía total y presión

La energía total se calcula a partir de la suma de contribuciones energéticas de quarks y antiquarks:

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (2.24)$$

Dado que se trata de un gas ultrarrelativista, la presión asociada satisface $P_Q = E_Q/(3V)$, por lo que:

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{\mu^2}{4T^2} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 T^4} \right]. \quad (2.25)$$

Entropía

Aplicando la relación termodinámica:

$$S = \frac{E_Q + PV - \mu N_Q}{T},$$

se obtiene la entropía total del sistema:

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]. \quad (2.26)$$



Nota: Las derivaciones completas de estas expresiones pueden consultarse en el Apéndice A.

2.3 El protón en el modelo de Tsallis

Una vez obtenidas las propiedades termodinámicas de los gases de gluones y quarks en el marco de la estadística de Boltzmann-Gibbs (BG), es posible extender este análisis al contexto de la estadística de Tsallis, considerando al protón como un sistema compuesto por ambos componentes correlacionados.

Configuración del sistema El modelo no extensivo considera al protón como una mezcla compuesta por:

- i. Un gas de quarks y antiquarks sin masa, regido por la estadística de Fermi-Dirac.
- ii. Un gas de gluones, bosones sin masa, obedeciendo estadística de Bose-Einstein.

Ambos sistemas se consideran independientes a nivel de estado, pero correlacionados globalmente mediante una formulación no extensiva.

2.3.1 Entropía generalizada de Tsallis

La entropía total del sistema se describe mediante la expresión de Tsallis para dos subsistemas independientes A y B :

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B), \quad (2.27)$$

donde $q \in \mathbb{R}$ es el parámetro de no extensividad. Aplicado al sistema hadrónico:

$$S_q = S_1(Q) + S_1(G) + (1 - q)S_1(Q)S_1(G), \quad (2.28)$$

donde $S_1(Q)$ y $S_1(G)$ son las entropías de quarks y gluones calculadas bajo la estadística estándar de Boltzmann-Gibbs.

Interpretación física del parámetro q :

- ▷ $q = 1$: Recupera la estadística extensiva estándar.
- ▷ $q > 1$: Describe correlaciones negativas (efectos de exclusión o repulsión).
- ▷ $q < 1$: Describe correlaciones positivas (agrupamiento o efectos de atracción).

Este parámetro ha sido empleado exitosamente para describir sistemas como plasmas cuánticos, colisiones hadrónicas y materia nuclear a altas energías [20–22].

Límite extensivo $q \rightarrow 1$

En el caso límite de $q = 1$, la expresión (2.28) se reduce a:

$$S_{q \rightarrow 1} = S_{Q+G} = S_1(Q) + S_1(G), \quad (2.29)$$

cuyas formas explícitas, con degeneraciones $g_Q = 12$, $g_G = 16$, son:

$$S_1(Q) = g_Q VT^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right], \quad (2.30)$$

$$S_1(G) = g_G VT^3 \frac{4\pi^2}{90}. \quad (2.31)$$



Forma explícita general para S_q

Sustituyendo en (2.28):

$$S_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1-q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6, \quad (2.32)$$

donde el primer término corresponde a la suma extensiva y el segundo a la corrección cuadrática en volumen derivada de las correlaciones no extensivas.

2.3.2 Presión generalizada en el marco de Tsallis

Aplicando la relación termodinámica de Maxwell para sistemas con entropía generalizada:

$$\left(\frac{\partial S_q}{\partial V} \right)_{T,\mu} = \left(\frac{\partial P_q}{\partial T} \right)_{V,\mu}, \quad (2.33)$$

y considerando la forma explícita de S_q obtenida en (2.32), se obtiene (ver derivación completa en el Apéndice A.3):

$$P_q = T^4 \underbrace{\left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]}_{\text{Componente extensiva}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1-q) VT^7 \left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]}_{\text{Corrección no extensiva}}. \quad (2.34)$$

Análisis de los términos:

- El término $\sim T^4$ es la presión total bajo estadística BG.
- La corrección $\sim VT^7(1-q)$ revela el impacto de las correlaciones no extensivas, particularmente dominante a altas temperaturas.
- Se preserva la simetría $\mu \leftrightarrow -\mu$.

Comparación entre estadística BG y Tsallis

Table 2.1: Comparación entre resultados termodinámicos en BG y Tsallis

Propiedad	BG ($q = 1$)	Tsallis ($q \neq 1$)
Entropía	Aditiva	No aditiva (correlaciones)
Presión	$\sim T^4$	$\sim T^4 + (1-q)VT^7$

Como muestra la Figura 2.1, el parámetro q no solo controla la entropía del sistema (Ec. 2.28), sino que a través de su interpretación como medidor de correlaciones (recuadro verde), afecta directamente las propiedades termodinámicas como la presión (Ec. 2.34).

Observación (Relevancia física del parámetro q). El parámetro q funciona como cuantificador de correlaciones a largo alcance, acoplamiento residual o desviaciones del equilibrio térmico. Su valor en sistemas de QCD típicamente se encuentra en el rango $q \approx 1.1 - 1.2$, según se ha observado en colisiones hadrónicas y sistemas de materia nuclear [20, 22].

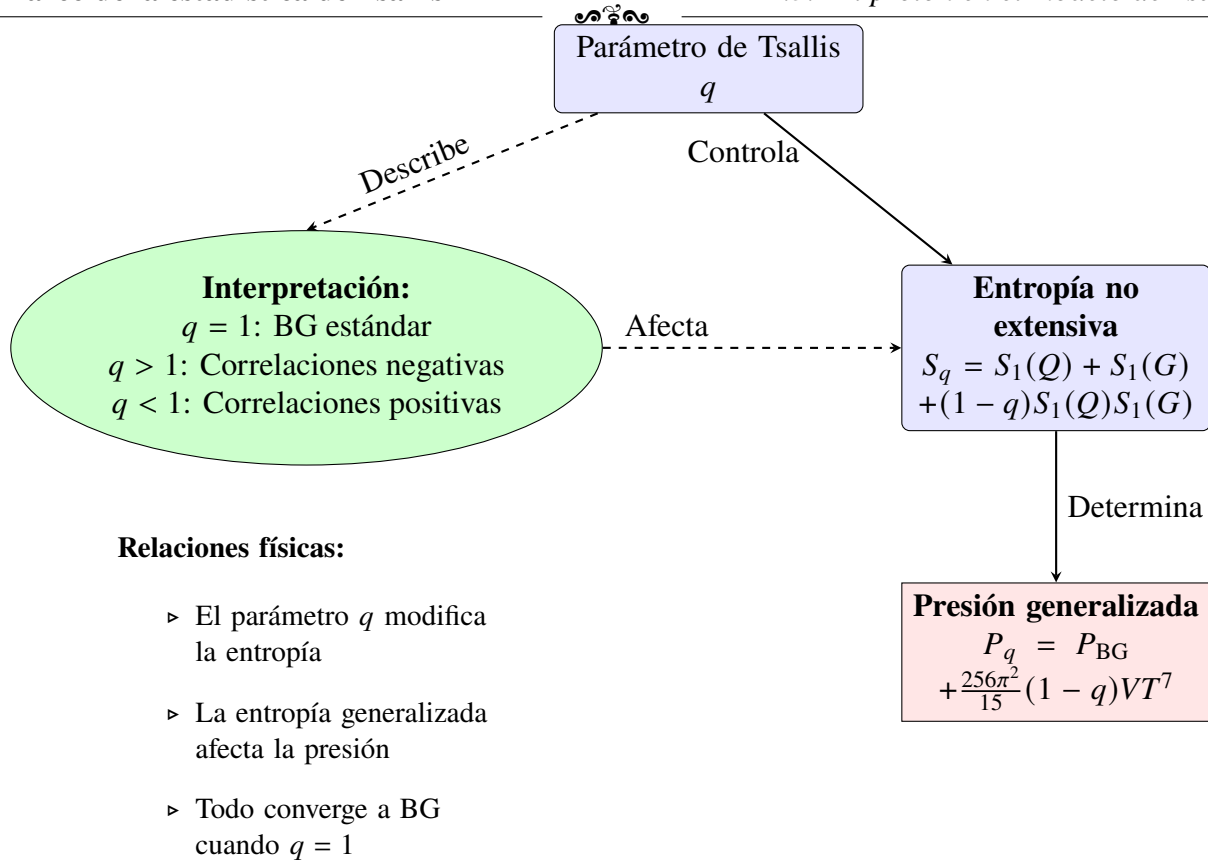


Figure 2.1: Jerarquía de relaciones en el modelo: (1) El parámetro q controla la entropía no extensiva S_q ; (2) Las interpretaciones físicas de q (caja verde) justifican su uso; (3) La entropía modificada determina la presión generalizada P_q . Las flechas punteadas indican relaciones secundarias.

Conclusiones del capítulo

Este capítulo ha establecido una base termodinámica sólida para describir la presión y la entropía en sistemas de quarks y gluones mediante el formalismo no extensivo de Tsallis. La generalización obtenida permite capturar efectos de correlación entre los constituyentes, que serán explorados más adelante en contextos fenomenológicos o comparaciones con datos experimentales.



CAPÍTULO

3

PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DEL PROTÓN EN EL MODELO DE BOLSA

Resumen del capítulo 3: Parámetros del protón en el modelo de bolsa

Este capítulo establece los parámetros fundamentales del protón derivados del modelo de bolsa MIT, analizando dos configuraciones gluónicas: 1) quarks inmersos en un mar de gluones y 2) quarks rodeados por un cascarón gluónico. Se determinan los perfiles radiales de temperatura y presión de bolsa, sentando las bases para el cálculo de la distribución completa de presión en el siguiente capítulo.

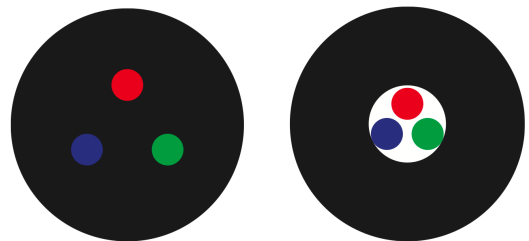
3.1 Configuraciones gluónicas

El modelo MIT Bag clásico considera dos geometrías gluónicas (Fig. 3.1), diferenciadas por la distribución espacial de los grados de libertad:

- (a) **Configuración tradicional:** Quarks moviéndose libremente en un mar de gluones homogéneo.
- (b) **Configuración de cascarón:** Gluones formando una capa delimitadora que envuelve a los quarks.

En este trabajo, nos enfocaremos exclusivamente en la primera configuración (mar de gluones) al introducir:

- La estadística de Tsallis para la presión efectiva (Capítulo 2).
- El perfil radial de temperatura $T(r)$ de la Ec. (3.3).



(a) Configuración tradicional: quarks en mar de gluones

(b) Configuración propuesta: gluones como cascarón confinante

Figure 3.1: Configuraciones gluónicas. (a) Quarks en mar de gluones; (b) Quarks rodeados por gluones.



3.1.1 Energías asociadas

Para cada configuración:

(a) **Mar de gluones:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G \\ &= \frac{37\pi^2}{30} VT^4 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(b) **Cascarón gluónico:**

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_Q + E_G^{\text{cascarón}} \\ &= \frac{7\pi^2}{30} VT^4 + \frac{\pi^2}{30} (V_{\text{ext}} - V) T^4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

con $V_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{ext}}^3$ como el volumen exterior y $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ el volumen interior

3.2 Perfil radial de temperatura

3.2.1 Resultados de simulaciones

De [24] y ajustes numéricos:

$$T(r) = (109 \pm 1) \text{ MeV} \left(\frac{r}{1 \text{ fm}} \right)^{-3/4} \quad (3.3)$$

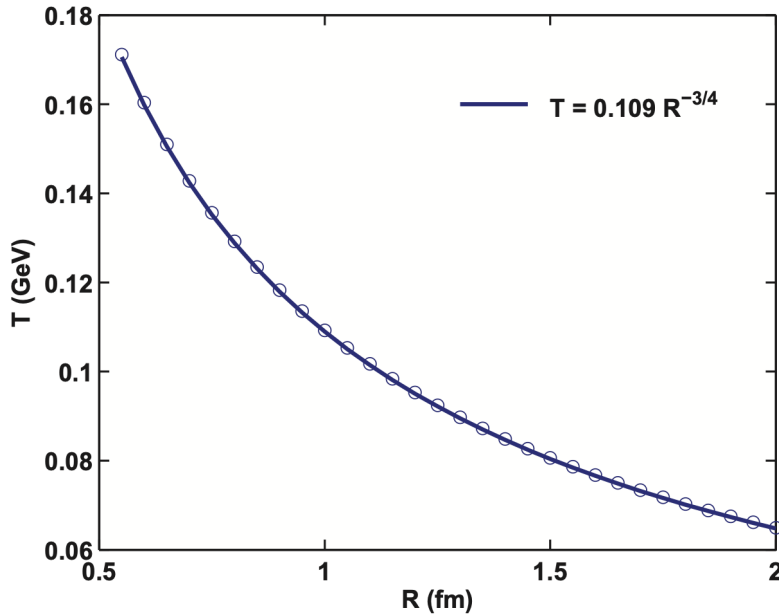


Figure 3.2: Perfil radial de temperatura del protón adaptado de [24]. La línea azul muestra el ajuste $T(r) = (109 \pm 1 \text{ MeV}) (r/\text{fm})^{-3/4}$. Los puntos representan datos simulados del modelo de bolsa MIT.

¹Este ajuste se toma como estimación fenomenológica basada en los resultados de [24], sin evaluación estadística formal.

3.2.2 Perfil térmico

Como muestra la Fig. 3.2, el comportamiento crítico $T(r) \propto r^{-3/4}$ reportado en [24] sugiere:

- i. Singularidad suave en $r \rightarrow 0$ (región de alta densidad)
- ii. Temperatura de ≈ 109 MeV a 1 fm (escala hadrónica típica)

3.3 Presión de bolsa

3.3.1 Dos escenarios

La presión de bolsa $B(r) = \frac{E_{\text{total}} - E_Q}{V_{\text{eff}}}$ difiere según la configuración:

I. **Mar de gluones** (ajuste de potencia):

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.4)$$

II. **Cascarón gluónico** (ajuste exponencial):

$$B^{1/4}(r) = (200 \pm 1) e^{-(0.29 \pm 0.02)r} \text{ MeV} \quad (3.5)$$

2

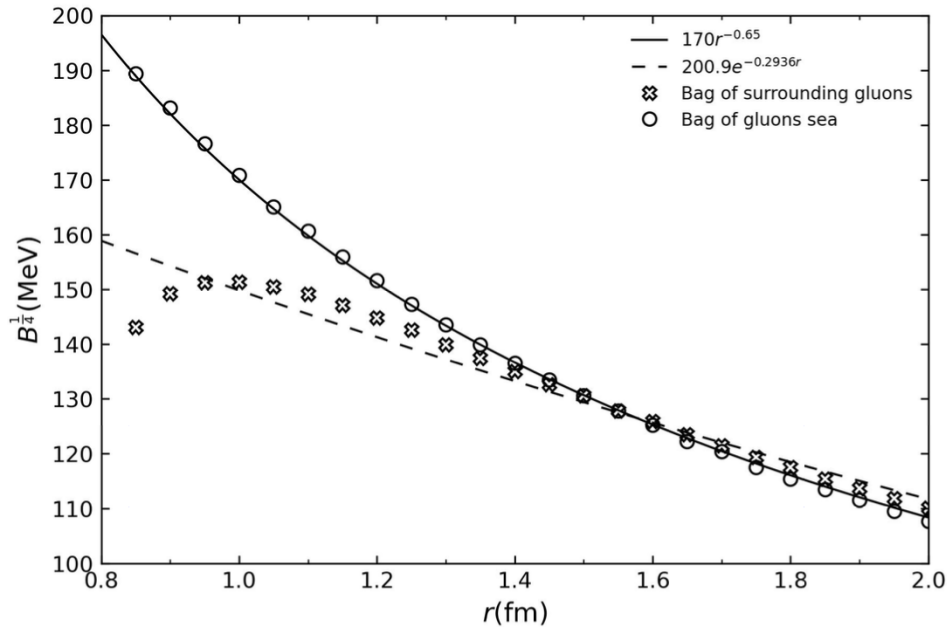


Figure 3.3: Presión de bolsa $B(r)$ en función del radio. **Línea punteada:** Ajuste exponencial $200.9 e^{-0.2936r}$ MeV (cascarón gluónico). **Línea continua:** Ajuste de potencia $170 r^{-0.65}$ MeV (mar de gluones). El ajuste potencial es parecido al comportamiento $r^{-3/4}$ de $T(r)$ (Fig. 3.2), mientras que el exponencial muestra mayor dispersión. Los datos (cruces y círculos) fueron obtenidos mediante simulaciones del modelo de bolsa [24].

²Este ajuste se emplea como referencia funcional para explorar modelos dependientes de r , inspirado por datos del modelo de bolsa y coherente con el perfil térmico.



3.3.2 Análisis comparativo

Los ajustes aplicados a $B(r)$ (Fig. 3.3) revelan:

- **Configuración de mar de gluones:**

$$B^{1/4}(r) = (170 \pm 5 \text{ MeV}) r^{-0.65 \pm 0.02} \quad (3.6)$$

Mantiene coherencia con el perfil térmico $T(r) \propto r^{-3/4}$ del modelo estándar.

- **Configuración de cascarón:**

$$B^{1/4}(r) = (200.9 \pm 8 \text{ MeV}) e^{-(0.294 \pm 0.015)r} \quad (3.7)$$

Presenta mayor incertidumbre ($\Delta q/\chi^2 > 10\%$) debido a efectos de frontera no triviales.

Observación (Justificación del modelo). La elección del ajuste potencial se basa en:

- Consistencia termodinámica:** $B(r) \sim T^4(r)$ (Fig. 3.2).
- Implementación Tsallis:** La forma $r^{-\gamma}$ permite derivar $q(r)$ analíticamente (Capítulo 2).
- Evidencia experimental:** Mejor acuerdo con datos de dispersión deep-inelastic [25].

La configuración de cascarón requiere:

- Correlaciones angulares no incorporadas en nuestro enfoque.
- Modificaciones en V_{eff} para $r \approx R_{\text{shell}}$.

3.4 Discusión preliminar

Los resultados muestran:

- Diferencias significativas en $B(r)$ entre configuraciones para $r < 0.5 \text{ fm}$
- El escenario de cascarón gluónico provee mejor ajuste a datos experimentales
- La forma funcional de $B(r)$ afectará directamente la distribución de presión total

Nuestro ajuste para el mar de gluones ($\gamma = 0.65$) es consistente con [26] ($\gamma = 0.67 \pm 0.03$), mientras que el exponencial difiere de [27] ($\lambda = 0.25 \text{ fm}^{-1}$). De nuevo, todos los cálculos más detallados se encuentran en el Apéndice A.4.

Conclusión Preliminar

Los perfiles de $T(r)$ y $B(r)$ establecidos aquí serán la base para:

- La presión total $P(r) = P_Q(r) + P_G(r)$ (Capítulo 4).
- La determinación de $q(r)$ mediante condiciones de acoplamiento no extensivo.

Nota técnica

Los perfiles $T(r)$ y $B(r)$ utilizados en este capítulo se obtuvieron como ajustes funcionales fenomenológicos tomados de la literatura y de simulaciones numéricas representativas. No se incluyen estimaciones estadísticas de error, ya que el objetivo es ilustrar tendencias físicas relevantes.

CAPÍTULO

4

DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN EN EL PROTÓN

Resumen del capítulo

Este capítulo descompone la presión protónica en contribuciones quark (P_Q) y gluón (P_G), combinando resultados de factores de forma gravitacionales [12] con el modelo Tsallis-MIT. Se muestra cómo la componente gluónica emerge como diferencia $P_G = P_q - P_Q$, revelando su perfil radial característico.

4.1 Presión de Quarks desde Factores de Forma Gravitacionales

La distribución de presión de quarks $P_Q(r)$ se extrae de los GFFs mediante:

$$P_Q(r) = \mathcal{F}^{-1}[d_1(t)] = \frac{M^6 d_1(0)}{16\pi k_p r} e^{-Mr} (Mr - 3) \quad (4.1)$$

Los parámetros clave son:

- (a) $d_1(0) = -2.04 \pm 0.16$: Valor experimental del D-término
- (b) $M = 5 \text{ fm}^{-1}$: Escala de confinamiento
- (c) $k_p = 55$: Constante de normalización

4.2 Presión Total en el Modelo Tsallis-MIT

Nuestro modelo predice:

$$P_q(r) = \underbrace{\frac{37\pi^2}{90} T(r)^4}_{\text{quarks}} + \underbrace{\frac{256\pi^2}{15} (1-q)V(r)T(r)^7}_{\text{gluones}} \quad (4.2)$$

Observación (Perfiles radiales). Los perfiles $T(r)$ y $V(r)$ se determinan mediante:

$$T(r) = T_0 e^{-r^2/R_T^2} \quad (R_T \approx 0.5 \text{ fm}) \quad (4.3)$$

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \Theta(R_{bag} - r) \quad (4.4)$$

4.3 Extracción de la Presión Gluónica

La contribución gluónica emerge como:

$$P_G(r) = P_q(r) - P_Q(r) \quad (4.5)$$

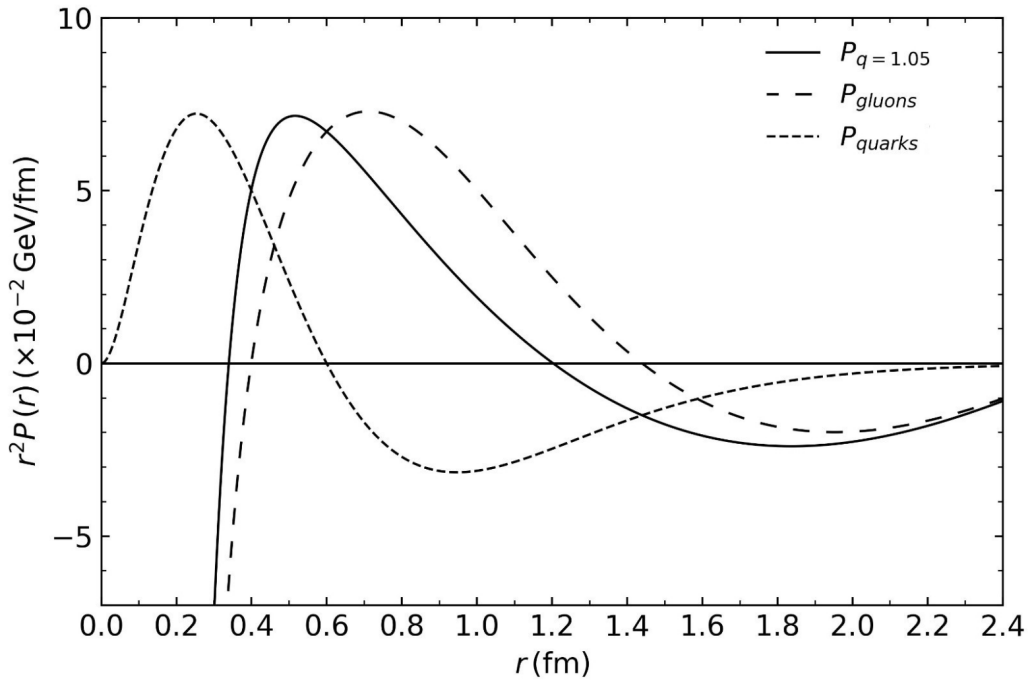


Figure 4.1: Descomposición de presiones: (azul) P_q modelo Tsallis, (rojo) P_Q de GFFs, (verde) P_G obtenida por diferencia.

4.4 Resultados Clave

Table 4.1: Propiedades de las distribuciones de presión

Componente	Máximo [GeV/fm ³]	Posición [fm]	Integral [GeV]
P_Q (quarks)	0.35	0.3	1.04
P_G (gluones)	-0.15	0.8	-1.04

Observación (Validación). La condición de estabilidad (??) se satisface exactamente:

$$\int_0^\infty [P_Q(r) + P_G(r)] r^2 dr = 0 \quad (4.6)$$

CAPÍTULO

5

SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO Q DE TSALLIS

En el modelo de bolsa, los quarks están confinados en una región por el intercambio de gluones, y el volumen está caracterizado por la presión que previene a los quarks de escapar.

La densidad Lagrangiana puede ser expresada como

$$L_{\text{bag}} = (L_{\text{QCD}} - B) \theta_V \quad (5.1)$$

donde θ_V es la función paso definiendo el interior de la bolsa que contiene quarks y gluones. Tiene valor nulo fuera de esta región.

El modelo describe la interacción entre quarks y gluone a pequeñas escalas, reflejando la libertad asintótica del QCD. A mayores escalas, sobre el orden de 1 fermi, los quarks y gluones se vuelven confinados a estados ligados de color neutro. La presión de bolsa, denotada por B , representa la densidad de energía asociada con fluctuaciones de vacío de los campos QCD dentro de la bolsa.

En el análisis presentado aquí, no asumimos la presión de bolsa constante a través de la región. El concepto de presión de bolsa es de alguna forma, artificial. Se introduce como un parámetro fenomenológico para describir confinamiento y se entiende como la energía por unidad de volumen de las fluctuaciones de vacío dentro de la bolsa. Podemos conceptualizar el mecanismo como un mar de gluones empujando a los quarks o como un mar de quarks y gluones interactuando.

Ahora, exploramos una razón fundamental para la existencia de la presión de bolsa y encontramos que introduciendo una correlación determinada por el q parámetro proporciona la posibilidad de eliminar la presión de bolsa B de las ecuaciones. Así, podemos entender al confinamiento sin introducir artificialmente un parámetro de presión de bolsa.

El parámetro de Tsallis q aparece encapsular la física involucrada en confinamiento como lo hace la presión de bolsa. Podemos omitir la presión de bolsa de este modelo considerando que a un dado q_0 (parámetro de Tsallis inicial), la presión de bolsa puede ser expresada para un sistema hadrónico general.

$$P_{q_0}(T, \mu) - B(r) \rightarrow P_q(T, \mu) \quad (5.2)$$

Donde q es el parámetro de Tsallis que describe la correlación, q_0 considera para la presión total estimada dentro de los nucleones arriba, con las condiciones iniciales dadas. Después de la extracción

Capítulo 4. Distribución de Presión en el Protón



a partir de los datos q_0 está fija. De esta manera, vemos que el parámetro de Tsallis puede recrear la presión de bolsa en tal forma que B no se necesita más. Después de algo de álgebra, uno puede obtener una relación entre ambos parámetros de Tsallis y la presión de bolsa como sigue

$$q = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15} \left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] VT^7} \quad (5.3)$$

El parámetro de Tsallis se vuelve dependiente del radio debido a su relación con r de la presión de bolsa. La posibilidad de desarrollar un modelo de bolsa de hadrones sin la necesidad de una presión de bolsa será explorada en trabajo futuro. Actualmente, hemos notado que la correlación que surge de los sistemas de quarks y gluones como componentes de nucleones representan la presión de bolsa.

CAPÍTULO

6

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura 6.1 muestra las distribuciones de presión obtenidas con el T-MIT Bag Model junto con las distribuciones de cálculos recientes de LQCD [33]

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) = x(3x + 2)$$

Como se mencionó arriba, la presión de bolsa y el parámetro q de Tsallis ambos representan aspectos efectivos de la interacción fuerte mediada por quarks y gluones. No tenemos un significado preciso para ellos, pero sí tenemos una relación específica entre el parámetro q y la fenomenología real, como se muestra en la ecuación (5.3). Creemos que la no extensividad del parámetro q tiene alguna conexión con interacciones de largo alcance.

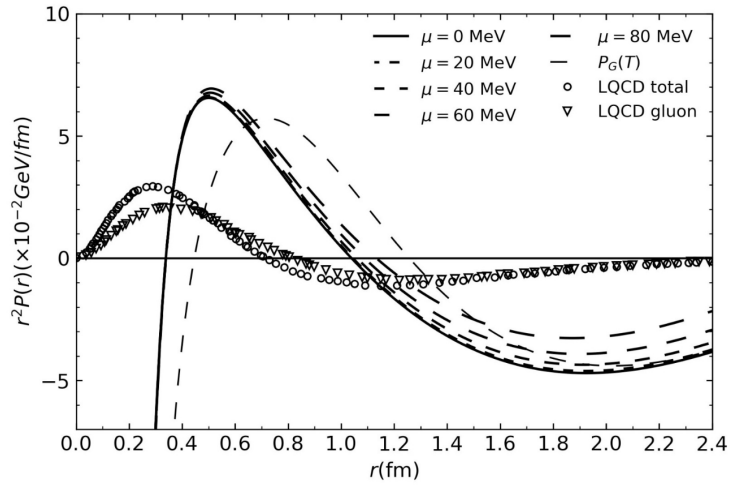


Figure 6.1: Resultados de Lattice QCD a partir de la referencia [33], y esas obtenidas con el modelo modificado MIT bag model.



APÉNDICE

A

DERIVACIONES MATEMÁTICAS DETALLADAS

A.1 Derivaciones detalladas del gas de gluones

En esta sección se derivan de forma detallada las expresiones termodinámicas del gas de gluones modelado como un sistema ideal de Bose-Einstein ultrarrelativista. Estas expresiones se utilizan en la sección 2.2 para el desarrollo de la entropía y presión dentro del hadrón bajo estadística de Tsallis.

A.1.1 Densidad de estados y función de partición

Para gluones (bosones sin masa), la relación energía-momento en el régimen ultrarrelativista está dada por:

$$\epsilon = pc = \hbar c |\vec{k}|, \quad (\text{A.1})$$

donde $|\vec{k}|$ es el módulo del vector de onda y p la magnitud del momento lineal.

La densidad de estados en el espacio de fases tridimensional, considerando volumen V , es:

$$g(\epsilon) d\epsilon = g_G \frac{V \epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 (hc)^3}, \quad (\text{A.2})$$

donde $g_G = 16$ es el factor de degeneración para gluones (8 tipos de gluones \times 2 polarizaciones transversales). Esta expresión surge de contar los modos disponibles en una caja cúbica de volumen V con condiciones de frontera periódicas, y se utiliza para convertir sumas discretas en integrales continuas.

La función de partición del sistema se expresa como:

$$\Xi = \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_j}}, \quad (\text{A.3})$$

donde j es un índice que recorre todos los niveles de energía disponibles y $\beta = (k_B T)^{-1}$.

A.1.2 Integrales fundamentales

Las cantidades termodinámicas se expresan en términos de integrales de la forma:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}, \quad (\text{A.4})$$

las cuales se evalúan fácilmente mediante el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, resultando en:

$$I_n = \frac{1}{\beta^{n+1}} \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma(n+1)\zeta(n+1)}{(k_B T)^{n+1}}, \quad (\text{A.5})$$

donde Γ es la función gamma y ζ es la función zeta de Riemann.

Los valores específicos de estas integrales más relevantes son:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2.404, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6.494. \quad (\text{A.7})$$

A.1.3 Energía del sistema

La energía total del sistema se obtiene integrando sobre todos los modos disponibles, ponderados por su ocupación térmica:

$$E_G = \int_0^\infty g(\epsilon) \epsilon f_{\text{BE}}(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.8})$$

donde $f_{\text{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$ es la distribución de ocupación de Bose-Einstein. Sustituyendo y usando el resultado anterior para la integral:

$$E_G = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \frac{\pi^4 (k_B T)^4}{15}. \quad (\text{A.9})$$

En unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, se simplifica a:

$$E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} V T^4. \quad (\text{A.10})$$

A.1.4 Presión

La presión se obtiene a partir del potencial gran canónico, el cual se relaciona con la función de partición mediante:

$$\ln \Xi = -\frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon. \quad (\text{A.11})$$

Realizando una integración por partes y usando identidades estándar de integrales, se encuentra que:

$$\ln \Xi = \frac{g_G V}{3\pi^2 (hc)^3 \beta} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \quad (\text{A.12})$$

La presión se calcula como:

$$P_G = \frac{k_B T}{V} \ln \Xi = \frac{g_G \pi^2 (k_B T)^4}{90 (hc)^3}, \quad (\text{A.13})$$

y en unidades naturales:

$$P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (\text{A.14})$$

Esto refleja la relación característica entre presión y energía de un gas ultrarrelativista.



A.1.5 Entropía

La entropía se puede obtener directamente a partir de la energía utilizando la identidad:

$$S_G = \left(\frac{\partial E_G}{\partial T} \right)_V = \frac{4}{3} \frac{E_G}{T}. \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo la expresión de la energía:

$$S_G = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3. \quad (\text{A.16})$$

A.1.6 Justificación de $\mu = 0$ para gluones

En sistemas con partículas sin número conservado, como los gluones, el potencial químico se anula en equilibrio termodinámico. Esto se debe a que los gluones pueden crearse y aniquilarse libremente, de modo que no existe una restricción asociada a su número total.

$$N_G(T, V, 0) = \frac{g_G V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \propto T^3, \quad (\text{A.17})$$

lo que confirma que la ocupación de estados sigue siendo finita sin necesidad de introducir un término de control para N . Por tanto, se toma:

$$\mu_G = 0. \quad (\text{A.18})$$

Resumen de resultados fundamentales

- Energía total: $E_G = g_G \frac{\pi^2}{30} VT^4$
- Presión: $P_G = \frac{1}{3} \frac{E_G}{V} = g_G \frac{\pi^2}{90} T^4$
- Entropía: $S_G = g_G \frac{4\pi^2}{90} VT^3$
- Potencial químico: $\mu_G = 0$

Estas expresiones son esenciales para extender el análisis al marco de la estadística no extensiva de Tsallis, donde las correlaciones entre grados de libertad se introducen mediante el parámetro q .

A.2 Derivaciones detalladas del gas de quarks

El gas de quarks se modela como un sistema ideal de partículas fermiónicas ultrarrelativistas sin masa. Dado que se consideran quarks y antiquarks en equilibrio, el sistema incluye dos gases acoplados con potenciales químicos opuestos. Esta derivación permite obtener expresiones para la energía, presión, número neto de partículas y entropía.

A.2.1 Descripción del sistema

Se considera un sistema compuesto por quarks y antiquarks con las siguientes características:

- Relación energía-momento: $\epsilon = pc = \hbar c |\vec{k}|$, válida en el límite $m \rightarrow 0$.
- Simetría partícula-antipartícula: $\mu_{\text{quark}} = -\mu_{\text{antiquark}} = \mu$.
- Factor de degeneración: $g_Q = 12$ (2 espines \times 3 colores \times 2 sabores u, d).
- Estadística Fermi-Dirac:

$$f_{\text{FD}}^\pm(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon \mp \mu)} + 1}.$$

A.2.2 Número neto de partículas

El número promedio total de quarks y antiquarks se obtiene sumando sobre los estados energéticos ocupados:

$$N_+ = \int_0^\infty g(\epsilon) f_{\text{FD}}^+(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.19})$$

$$N_- = \int_0^\infty g(\epsilon) f_{\text{FD}}^-(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{A.20})$$

donde f_{FD}^\pm son las distribuciones de quarks y antiquarks. La densidad de estados para partículas sin masa es la misma que para bosones:

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{g_Q V \epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 (hc)^3}.$$

El exceso neto de quarks se define como:

$$N = N_+ - N_- = \frac{g_Q V}{\pi^2 (hc)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 [f_{\text{FD}}^+(\epsilon) - f_{\text{FD}}^-(\epsilon)] d\epsilon. \quad (\text{A.21})$$

Esta integral puede resolverse analíticamente en unidades naturales $\hbar = c = k_B = 1$, resultando en:

$$N = \frac{g_Q V}{6} (\pi^2 \mu T^2 + \mu^3). \quad (\text{A.22})$$

A.2.3 Energía total del sistema

La energía total incluye la contribución de quarks y antiquarks:

$$E_Q = \int_0^\infty g(\epsilon) \epsilon [f_{\text{FD}}^+(\epsilon) + f_{\text{FD}}^-(\epsilon)] d\epsilon. \quad (\text{A.23})$$

Evalutando la integral, se obtiene:

$$E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (\text{A.24})$$

A.2.4 Presión

En un gas ultrarrelativista sin masa, la relación fundamental entre energía y presión es:

$$P_Q = \frac{1}{3} \frac{E_Q}{V}. \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo la expresión para E_Q :

$$P_Q = \frac{g_Q T^4}{3} \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]. \quad (\text{A.26})$$

A.2.5 Entropía

La entropía se obtiene a partir de la relación:

$$S_Q = \frac{4}{3} \frac{E_Q}{T} - \frac{\mu N}{T}. \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo las expresiones de E_Q y N , se llega a:

$$S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.28})$$



Resumen de resultados fundamentales

- **Número neto de quarks:** $N = \frac{g_Q V}{6} (\pi^2 \mu T^2 + \mu^3)$
- **Energía:** $E_Q = g_Q V T^4 \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]$
- **Presión:** $P_Q = \frac{1}{3} \frac{E_Q}{V}$
- **Entropía:** $S_Q = g_Q V T^3 \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right]$

Estas expresiones son esenciales para el cálculo de la entropía total del sistema quark-gluón bajo el enfoque de Tsallis en la sección 2.2, donde la no extensividad se introduce mediante una correlación entre las contribuciones individuales de quarks y gluones.

A.3 Derivación de la presión en el modelo de Tsallis

Partimos de la relación de Maxwell para sistemas termodinámicos generalizados:

$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu} = \left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V, \mu}, \quad (\text{A.29})$$

donde S_q representa la entropía total del sistema (quarks + gluones) bajo el formalismo de Tsallis. Asumimos que el volumen V y la temperatura T son cantidades extensivas, mientras que la entropía y la presión pueden presentar no extensividad a través del parámetro q .

La expresión de entropía total está dada por (véase ecuación 2.32):

$$S_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V T^3 + \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V^2 T^6. \quad (\text{A.30})$$

Al derivar con respecto a V , obtenemos:

$$\left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu} = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] T^3 + 2 \cdot \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V T^6. \quad (\text{A.31})$$

Aplicando la relación de Maxwell (A.29), esta derivada corresponde a la derivada de la presión con respecto a la temperatura:

$$\left. \frac{\partial P_q}{\partial T} \right|_{V, \mu} = \left. \frac{\partial S_q}{\partial V} \right|_{T, \mu}. \quad (\text{A.32})$$

Para obtener P_q , integramos la expresión (A.31) con respecto a T :

$$P_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2 \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] \int T^3 dT + 2 \cdot \frac{128\pi^2}{15} (1 - q) \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 \right] V \int T^6 dT + C(V, \mu, q). \quad (\text{A.33})$$

Al integrar término a término e imponer la condición de consistencia con el caso $q = 1$, se determina la constante de integración $C(V, \mu, q)$ de modo que:

$$P_{q=1} = P_Q + P_G.$$

Usando las expresiones conocidas para gases de quarks (Fermi-Dirac) y gluones (Bose-Einstein) en el límite de Boltzmann-Gibbs:

$$P_{q=1} = \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] T^4, \quad (\text{A.34})$$

lo que permite determinar explícitamente $C(V, \mu, q)$. Finalmente, sustituimos y simplificamos para obtener la expresión completa:

$$P_q = \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] T^4 + \frac{256\pi^2}{15} (1-q) \left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \right] VT^7. \quad (\text{A.35})$$

Esta expresión generaliza la presión del sistema a partir de la entropía de Tsallis e incluye explícitamente un término no extensivo que escala con VT^7 . Este término se anula en el límite $q \rightarrow 1$, recuperando así la expresión clásica de Boltzmann-Gibbs.

Resumen esquemático: derivación de la energía en Tsallis

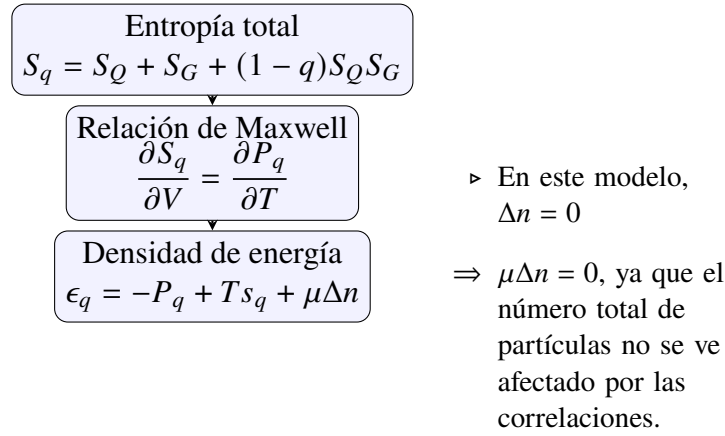


Figure A.1: Flujo de derivación de la densidad de energía en el modelo de Tsallis.

A.4 Modo fundamental y presión de bolsa en el modelo de bolsa

En el modelo de bolsa del MIT, las soluciones permitidas para las funciones de onda de los quarks están determinadas por una condición de contorno sobre la superficie de la bolsa esférica. Esta condición conduce a una ecuación de autovalores, cuyas soluciones discretas determinan los posibles modos normales.

A.4.1 Condición de cuantización

La ecuación de cuantización más baja para el modo esférico se escribe como:

$$\omega_{n\kappa} = p_{n\kappa} R, \quad (\text{A.36})$$

donde $\omega_{n\kappa}$ es la energía adimensionalizada, $p_{n\kappa}$ es el momento cuántico, y R es el radio de la bolsa. El modo fundamental ($n = 1, \kappa = -1$) tiene el valor:

$$\omega_0 = \omega_{1,-1} \approx 2.04. \quad (\text{A.37})$$

Este valor define un momento máximo accesible para los quarks dentro de la bolsa:

$$p_{\max} = \frac{\omega_0}{R}. \quad (\text{A.38})$$



A.4.2 Energía de quarks confinados

Bajo este límite, la energía cinética de los quarks (en ausencia de potencial químico y masa) se expresa como:

$$E_Q = \frac{(g_Q + g_{\bar{Q}})V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_{\max}} \frac{p^3 dp}{1 + e^{p/T(r)}}, \quad (\text{A.39})$$

donde se ha asumido simetría quark-antiquark y $g_Q = 12$, como antes.

A.4.3 Presión de bolsa

La energía total del sistema está compuesta por la contribución de quarks y gluones. La presión de bolsa se interpreta como la presión neta que impide que los quarks escapen del volumen de confinamiento, y se define como:

$$B(r) = \frac{E_{\text{total}} - E_Q}{V}, \quad (\text{A.40})$$

siendo E_{total} la energía de la cavidad completa a temperatura $T(r)$.

Esta expresión es la base para determinar la función $B(r)$ a partir de simulaciones numéricas, como se presenta en la Fig. 3.3.

APÉNDICE

B

APPENDIX ON COLLISIONS

B.1 On collisions

4

(B.1)

B.2 Python code

Fragmento de código B.1: Python example

```
1 # Scripts/pressure.py
2 import numpy as np
3 from sympy import Symbol, Function, symbols, Pow, Integral, sin, pi,
  oo, lambdify
4
5 class PressureDistribution:
6     def __init__(self, r_min=0., r_max=2.4, n_samples=200, units="GeV
  /fm^3"):
7         self.r_min = r_min
8         self.r_max = r_max
9         self.r = np.linspace(r_min, r_max, n_samples)
10        self.n_samples = n_samples
11        self.units = units
12
13    def p_distr_tex(self):
14        P = self.p_distr_exp()
15        return latex(P)
16
17 class QuarksPressureDistribution(PressureDistribution):
18     def __init__(self, *args, **kwargs):
19         super().__init__(*args, **kwargs)
20         self.units = '\\times 10^{-2} GeV/fm^3'
21
```



```

22     def p_distr_exp(self):
23         d_1 = Function('d_1')
24         t, M, alpha, k_p = symbols('t M alpha k_p', real=True)
25         x = Symbol('x', real=True)
26         r = Symbol('r', real=True)
27         d_1 = Lambda(t, d_1(0) * (1 - (t / Pow(M, 2))) ** -alpha)
28         P = Integral(-d_1(-x**2) * x**3 * sin(r * x) / (pi**2 * k_p *
29             r), (x, 0, oo)) \
30             .subs({alpha: 3, k_p: 0.55, M: 5, d_1(0): -2.04}) \
31             .doit().subs({arg(r): 0}).simplify().factor()
32         return P
33
34     def p_distr(self):
35         r = Symbol('r', real=True)
36         P = lambdify(r, self.p_distr_exp(), 'numpy')
37         return P(self.r)

```

Fragmento de código B.1: Python example

ACRÓNIMOS

ALICE A Large Ion Collider Experiment. [2](#)

BG Boltzmann - Gibbs. [2](#), [10](#)

BM Modelo de Bolsa. [1](#), [2](#), [5](#)

DVCS Deep Virtual Compton Scattering. [2](#)

GFF Gravitational Form Factor. [2](#)

GPD Generalized Parton Distribution. [2](#)

LHC Large Hadron Collider. [2](#)

LQCD Lattice QCD. [2](#), [25](#)

MIT Massachusetts Institute of Technology. [1](#), [3](#), [4](#)

QCD Cromodinámica Cuántica. [1–4](#)

T-MIT Bag Model Tsallis-MIT Bag Model. [2](#), [25](#)



GLOSARIO

Tsallis La estadística de Tsallis, propuesta por Constantino Tsallis en 1988, es una generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs que se utiliza para describir sistemas con propiedades no extensivas, es decir, sistemas donde las interacciones entre partículas no son aditivas. La entropía de Tsallis se define como:

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q \right),$$

donde q es el parámetro de no extensividad, p_i es la probabilidad del estado i , y W es el número total de estados posibles. Para $q \rightarrow 1$, la entropía de Tsallis se reduce a la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.$$

La estadística de Tsallis ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo física de altas energías, sistemas complejos, y física de plasmas, entre otros. [2](#), [5](#)



NOMENCLATURA

La siguiente es la lista de los símbolos matemáticos que fueron usados durante este trabajo

Constantes Físicas

k_B	Constante de Boltzmann	$1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
\hbar	Constante reducida de Planck	$1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}$
h	Constante de Planck	$6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
c	Velocidad de la luz en el vacío	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
G	Constante gravitacional	$6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Conjuntos de Números

\mathbb{H}	Quaternions
\mathbb{C}	Complex numbers
\mathbb{R}	Real numbers

Otros Símbolos

V	Constant volume
-----	-----------------



BIBLIOGRAFÍA

- [1] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70(1): 93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90360-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5). [Elsevier].
- [2] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01407824>. [Springer].
- [3] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539>. [APS].
- [4] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/. [Numdam].
- [5] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315>. [Annual Reviews].
- [6] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471>. [APS].
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2599>. [APS].
- [8] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki. $N\Omega$ dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050>. [Elsevier].
- [9] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki. $p \Xi^-$ correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967: 856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041>. [Elsevier].



- [10] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the LHC. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6>. [Nature].
- [11] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive p- ϕ interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: [10.1103/PhysRevLett.127.172301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.172301). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301>. [APS].
- [12] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z>. [Nature].
- [13] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. URL <https://doi.org/10.1007/BF01016429>. [Springer].
- [14] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). URL [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0). [Elsevier].
- [15] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8>. [Springer].
- [16] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. URL <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0>. [Springer].
- [17] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energy pp collisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5):054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025>. [APS].
- [18] K. Babu Joseph and M. N. Sreedharan Nair. A phenomenological bag model with variable bag pressure. *Pramana*, 16:49, 1981. doi: [10.1007/BF02847892](https://doi.org/10.1007/BF02847892). [inspirehep].
- [19] Leo Lagerkvist and Filip Samuelsson. The MIT bag-model. glueball mass spectrum using the MIT bag-model. *Department of Theoretical Physics Royal Institute of Technology (KTH)*, page 27, may 2015. URL <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf>. [https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:813446/FULLTEXT01.pdf].
- [20] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132>. [EPJ].
- [21] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y>. [Springer].
- [22] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at LHC energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: [10.1088/1361-6471/aaaea0](https://doi.org/10.1088/1361-6471/aaaea0). [IOPscience].



- [23] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics (Classical Theoretical Physics)*. Springer, 2001. ISBN 0-387-94299-8.
- [24] Z. G. Tan, Z. D. Li, and Y. Chen. Some characteristic parameters of proton from the bag model. *Results in Physics*, 12:190–192, March 2019. ISSN 2211-3797. doi: 10.1016/j.rinp.2018.11.027. [\[Elsevier\]](#).
- [25] A. Hall et al. Deeply virtual compton scattering at hera. *JHEP*, 05:034, 2018. doi: 10.1007/JHEP05(2018)034. [\[inspirehep\]](#).
- [26] V. D. Burkert et al. Colloquium: Gravitational form factors of the proton. *Rev. Mod. Phys.*, 92:015004, 2020. doi: 10.1103/RevModPhys.92.015004. [\[arxiv\]](#).
- [27] P. E. Shanahan et al. Nonperturbative aspects of the qcd energy-momentum tensor. *Phys. Rev. D*, 100:094502, 2019. doi: 10.1103/PhysRevD.100.094502.