Pressure Distribution Inside Nucleons in a Tsallis-MIT Bag Model

Física de partículas

Presenta: **Manuel Alejandro Matías Astorga**
Director de tésis: **Dr. Gerardo Herrera Corral**

A thesis presented for the degree of
Doctor of Philosophy

Cinvestav

Departamento de física
CINVESTAV
CDMX, México
19 de marzo de 2025

ABSTRACT

Resumen

Resumen en español

Abstract

This is the abstract

AGRADECIMIENTOS

CONAHCYT, CINVESTAV, Dr Gerardo H. C.
Agradezco y acredito a Josh Cassidy por la plantilla de la portada de mi tésis.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Entender la estructura interna de los hadrones es fundamental para descifrar las interacciones fuertes descritas por la Cromodinámica Cuántica (QCD). Este conocimiento no solo es crucial para la física de partículas, sino que también tiene implicaciones en la comprensión de la materia en condiciones extremas, como las que existieron en los primeros momentos del universo. Según el modelo de QCD, las partículas hadrónicas están compuestas por quarks, los cuales permanecen confinados dentro de los hadrones. Este confinamiento es una de las características fundamentales de la QCD y explica por qué no se han observado quarks libres en la naturaleza.

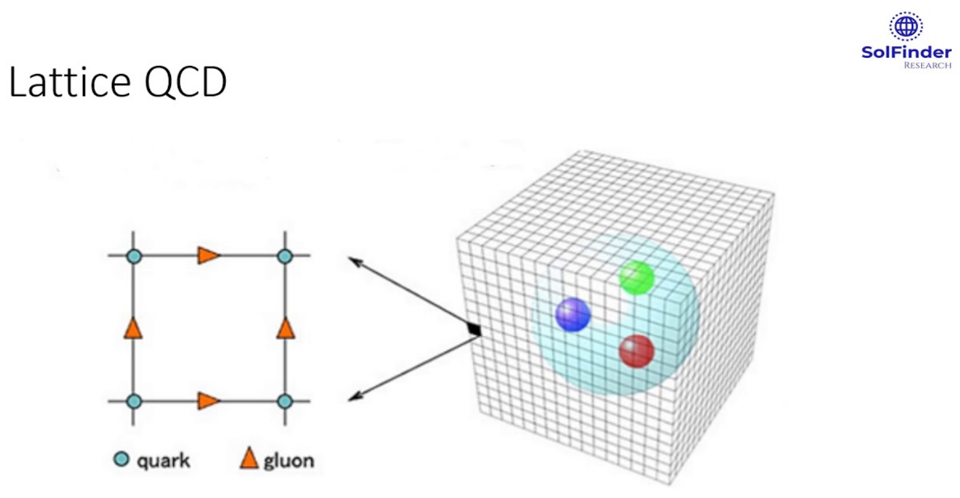

Fig. 1: *Diagrama de una red tipo LQCD, donde los nodos representan quarks y las aristas simbolizan campos gluónicos.* Fuente: Adaptado de Autor (Año).

A lo largo de los años, se han propuesto diversos modelos fenomenológicos para describir la estructura del protón. Entre ellos destacan los modelos de cuerdas [1, 2], que representan hadrones como cuerdas oscilantes; los modelos de bolsa [3, 4], que describen quarks confinados en una cavidad; y los modelos de valones [5]. Cada uno de estos enfoques ofrece una perspectiva única sobre la naturaleza de los hadrones, pero todos enfrentan limitaciones al tratar de capturar la complejidad de las interacciones no lineales entre quarks y gluones.

Para explorar la física de la materia quark, se han desarrollado técnicas avanzadas que permiten estudiar estas interacciones. Una de ellas es la Lattice QCD (LQCD), que utiliza simulaciones numéricas en redes espacio-temporales. Sin embargo, la complejidad de estos cálculos, que involucran millones de nodos, lleva a un problema conocido como *el problema del signo*. Este problema surge en simulaciones Monte Carlo, donde los pesos de las configuraciones cuánticas pueden volverse negativos o incluso complejos, imposibilitando su interpretación como probabilidades clásicas

Recientemente, la colaboración Hadron to Atomic nuclei from Lattice QCD (HAL-QCD) ha utilizado técnicas de LQCD para realizar cálculos de vanguardia en el estudio de interacciones fuertes entre hadrones [6, 7]. Sus resultados, que describen sistemas protón-neutrón y protón-hiperón, han sido comparados con datos experimentales publicados por la colaboración A Large Ion Collider Experiment (ALICE) [8, 9]. Estos avances han sentado las bases para el desarrollo de modelos fenomenológicos más simples, como el que proponemos en este trabajo.

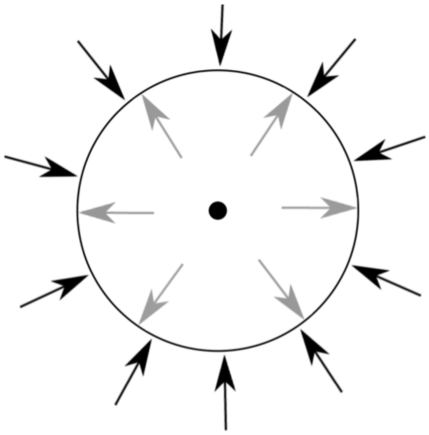

Fig. 2: *Diagrama que ilustra el modelo de bolsa. En el interior, la presión es generada por un plasma de quarks y gluones, mientras que la presión externa mantiene confinados estos componentes dentro del hadrón.* Fuente: Adaptado de Autor (Año).

En este trabajo, proponemos un modelo basado en el modelo de bolsa del Massachusetts Institute of Technology (MIT) [10, 11] y la estadística no extensiva de Tsallis. A este modelo lo denominamos Tsallis-MIT Bag Model (T-MIT Bag Model). El modelo de bolsa del MIT describe hadrones como recipientes cerrados que contienen un mar de quarks y gluones, los cuales interactúan dentro de los límites del hadrón (ver Fig. 2). Sin embargo, este modelo tradicional no captura completamente las interacciones no lineales entre quarks y gluones. Aquí es donde la estadística de Tsallis, una generalización de la estadística de Boltzmann - Gibbs (BG) [13–17], juega un papel crucial.

La estadística de Tsallis introduce un parámetro q que captura las interacciones entre quarks y gluones, simplificando la no linealidad inherente a estas interacciones. Este enfoque ha demostrado ser exitoso en la descripción de sistemas complejos en física de altas energías, desde colisiones electrón-positrón [18, 19] hasta colisiones de iones pesados [24, 25]. En nuestro modelo, combinamos el modelo de bolsa del MIT con la estadística de Tsallis para estimar la distribución de presión total dentro de los nucleones.

El objetivo principal de este trabajo es proponer un modelo fenomenológico que combine el modelo de bolsa del MIT con la estadística no extensiva de Tsallis para estudiar la distribución de presión dentro de los nucleones. Comparamos nuestros resultados con la distribución de presión de quarks obtenida recientemente mediante técnicas de Deep Virtual Compton Scattering (DVCS) [26]. Estas técnicas, que involucran la dispersión de fotones virtuales de altas energías, han permitido medir la presión repulsiva de los quarks cerca del centro del protón y una presión de confinamiento a distancias mayores de 0.6.

En los siguientes capítulos, describiremos en detalle el marco teórico del T-MIT Bag Model, los resultados obtenidos y las comparaciones con datos experimentales. En el Capítulo 1, explicamos el modelo de bolsa y sus limitaciones. En el Capítulo 2, presentamos la estadística no extensiva de Tsallis y su aplicación al plasma de quarks y gluones. En el Capítulo 5, comparamos nuestros resultados con los datos experimentales de presión de quarks, y en el Capítulo 6, discutimos una posible interpretación física del parámetro de Tsallis q. Finalmente, en el Capítulo 7, presentamos las conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo.

CAPÍTULO

1

MODELO DE BOLSA

1.1. Modelo de bolsa: descripción preliminar

El modelo de bolsa es una extensión del modelo de quarks que incorpora un tratamiento relativista de los quarks. En este enfoque, se introduce explícitamente un grado de libertad asociado a la "bolsa", lo que establece una distinción clara entre la física dentro y fuera de la bolsa. Dentro de la bolsa, los quarks se comportan como partículas sin masa, mientras que fuera de ella se consideran infinitamente masivos. Además, existe una diferencia finita en la densidad de energía entre el interior y el exterior: el "vacío de bolsa" tiene una energía más alta que el vacío normal. Este desequilibrio energético es fundamental para entender la formación de hadrones, ya que el tamaño de la bolsa está determinado por un balance entre la energía cinética necesaria para localizar los quarks dentro de la bolsa (debido al principio de incertidumbre) y la energía volumétrica asociada al vacío de bolsa

En este marco teórico, es posible calcular propiedades hadrónicas como las masas de mesones y bariones, así como sus momentos magnéticos y otras cantidades estáticas. Los resultados obtenidos son generalmente satisfactorios, aunque se ha observado que las masas de los mesones pseudoescalares tienden a ser sobreestimadas

La QCD aporta dos contribuciones esenciales al modelo de bolsa

1. **Singlete de color:** Los campos gluónicos, al igual que los quarks, deben anularse fuera de la bolsa. De acuerdo con la ley de Gauss, esto solo es posible si el contenido de la bolsa forma un singlete de color. Esta condición explica por qué los hadrones están compuestos por estados de quarks-antiquarks ($\bar{q}q$) o tres quarks (qqq)

2. **Intercambio de gluones:** La inclusión del intercambio de gluones como una corrección a la propagación libre de los quarks dentro de la bolsa mejora la descripción del espectro de mesones y bariones.

Además, la libertad asintótica de QCD respalda la suposición del modelo de bolsa de que los quarks se propagan casi libremente a distancias cortas. Esta propiedad es crucial para entender el comportamiento de los quarks dentro de la bolsa y su confinamiento en hadrones.

1.1.1. Motivación y fundamentos del modelo de bolsa

En las primeras etapas del desarrollo del modelo de quarks, los hadrones ligeros se describían como estados ligados de quarks que se movían de manera no relativística dentro de un potencial confinante. Sin embargo, en sistemas no relativísticos, las energías de excitación suelen ser pequeñas en comparación con las masas de sus componentes. En el caso de los hadrones, estas energías son comparables a las masas de los quarks, lo que sugiere que un tratamiento no relativístico no es suficiente para describir adecuadamente su espectroscopía y estructura.

Aunque inicialmente se esperaba que la espectroscopía, la estructura y las interacciones de los hadrones pudieran deducirse directamente a partir de primeros principios, las complejidades de la QCD llevaron al desarrollo de modelos aproximados. Entre estos modelos destacan el modelo de bolsa del MIT , el modelo de bolsa del Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) y el modelo de bolsa de solitón. Estos modelos buscan incorporar tres características clave de la estructura hadrónica que no estaban presentes en los enfoques no relativísticos iniciales:

a) **Libertad asintótica:** Una propiedad fundamental de la QCD que permite el uso de la teoría de perturbaciones para describir las interacciones quark-gluón a distancias cortas. Al mismo tiempo, esta propiedad prohíbe la propagación de campos de color a grandes distancias, lo que explica el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones.

b) **Inclusión de gluones:** A diferencia de los modelos no relativísticos, los modelos de bolsa incorporan los gluones como constituyentes hadrónicos y mediadores de las interacciones a corta distancia entre quarks. Esto permite una descripción más completa de las interacciones fuertes.

c) **Marco relativístico e invariante de norma:** Los modelos de bolsa proporcionan un marco teórico que es tanto relativístico como invariante bajo transformaciones de norma, lo que los hace consistentes con los principios fundamentales de la QCD.

Además, algunas variantes del modelo de bolsa, como el modelo de bolsa quiral híbrido, intentan incorporar la simetría quiral, una característica de la QCD que no está presente en los modelos de bolsa tradicionales.

1.2. La aproximación de la cavidad esférica

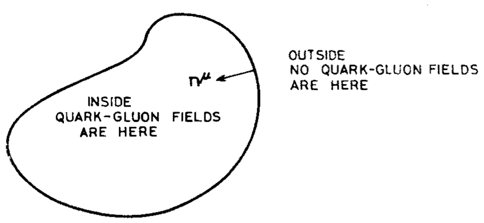

Fig. 1.1: *Dentro de la bolsa se encuentran los quarks encerrados por la presión de la bolsa.*

La aproximación de la cavidad esférica es una simplificación del modelo de bolsa que permite estudiar el comportamiento de los quarks dentro de un hadrón asumiendo que están confinados en una región esférica de radio R_0. En este enfoque, la dinámica de los quarks se describe mediante la ecuación de Dirac, y las condiciones de frontera en la superficie de la bolsa garantizan que los quarks no puedan escapar de la región confinada.

La acción que describe este sistema está dada por:

$$W = \int \mathrm{d}t \left[\int_V \mathrm{d}^3x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - B \right) - \frac{1}{2} \int_S \mathrm{d}^2x \bar{\psi}\psi \right] \tag{1.1}$$

donde V es el volumen ocupado en la bolsa, S es la superficie que encierra al volumen, ψ es el espinor de campo de quark (γ^μ son las Matrices Gamma), $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ es la derivada sobre lo de la derecha menos la derivada sobre lo de la izquierda, m es la masa de los quarks que se mueven en la cavidad esférica que es la bolsa y B es la presión de bolsa.

La acción (1.1) describe la dinámica de los quarks dentro de la bolsa. El primer término, $\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu\psi$, representa la energía cinética de los quarks, mientras que el segundo término, $\bar{\psi}m\psi$, corresponde a su energía de masa. El término B introduce la presión de bolsa, que actúa como una energía de confinamiento que mantiene a los quarks dentro de la región esférica. Finalmente, el término superficial $\frac{1}{2}\int_S \mathrm{d}^2x\bar{\psi}\psi$ garantiza que los quarks no puedan escapar de la bolsa, imponiendo una condición de frontera efectiva para simular que los quarks se comporten como si tuvieran una masa infinita fuera de la bolsa, lo que impide su escape.

Las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera se obtienen al extremizar la acción, ecuación (1.1), bajo variaciones en ψ y V. La ecuación de Dirac dentro de la bolsa es:

$$(i\partial\!\!\!/_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{en}\, V, \tag{1.2}$$

donde $\partial\!\!\!/_\mu = \partial_\mu\gamma^\mu$. Las condiciones de frontera en la superficie S son

$$\left.\begin{aligned} in^\mu\gamma_\mu\psi &= \psi \qquad (1.3\text{a}) \\ \frac{1}{2}n_\mu\partial^\mu(\bar{\psi}\psi) &= B \qquad (1.3\text{b}) \end{aligned}\right\} \quad \text{sobre}\, S,$$

donde n_μ es la normal interior covariante a la superficie. La primera condición de frontera, ecuación (1.3a), requiere que la componente normal del vector corriente $J_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se anule en la superficie, lo que conserva la corriente. La segunda condición, ecuación (1.3b), requiere que la presión externa del campo de quarks se equilibre con la presión de bolsa B (ver Fig. 1.1).

La solución general a las ecuaciones (1.2) y (1.3a) es una superposición de modos normales, cada uno caracterizado por un conjunto de números cuánticos n, κ, j, y m.

$$\psi_\alpha(x,t) = \sum_{n\kappa jm} N(\omega_{n\kappa j})a_\alpha(n\kappa jm)\psi_{n\kappa km}(x,t). \tag{1.4}$$

donde:

- n es el número cuántico principal,
- $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ es el número cuántico de Dirac,
- j y m etiquetan el modo del momento angular y su componente z, respectivamente,
- $N(\omega_{n\kappa j})$ es una constante de normalización,
- $a_\alpha(n\kappa jm)$ son los coeficientes de expansión que determinan la contribución de cada modo,
- y $\psi_{n\kappa km}(x,t)$ son los modos normales de la ecuación de Dirac:

$$\psi_{n\kappa jm}(x,t) = \begin{pmatrix} f_{n\kappa j}(r)\,\Omega_{\kappa jm}(\theta,\phi) \\ ig_{n\kappa j}(r)\,\Omega_{-\kappa jm}(\theta,\phi) \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n\kappa j}t}, \tag{1.5}$$

donde $f_{n\kappa j}(r)$ y $g_{n\kappa j}(r)$ son las funciones radiales, y $\Omega_{\kappa jm}(\theta,\phi)$ son las funciones angulares [10]. Las frecuencias $\omega_{n\kappa j}$ se definen a partir de la expresión

$$\omega_{n\kappa j} = \sqrt{m^2 + R_0^{-2}x_{n\kappa j}^2}, \tag{1.6}$$

donde $x_{n\kappa j}$ son las soluciones de la ecuación trascendental a la que llegamos a partir de (1.3). La condición de frontera cuadrática, la que está igualada a la presión de bolsa B en (1.3b), restringe los modos que pueden ser excitados. Entre otras cosas, permite sólo soluciones para la ecuación de Dirac. Para el caso de los quarks, $j = \frac{1}{2}$, ya sea $\kappa = -1$,

$$\psi_{n\,-1\,\frac{1}{2}\,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0(\omega_{n,-1} r/R_0) U_m \\ -j_1(\omega_{n,-1} r/R_0) \sigma \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,-1} t/R_0} \tag{1.7}$$

o $\kappa = 1$

$$\psi_{n\,1\,\frac{1}{2}\,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1(\omega_{n,1} r/R_0) \sigma \cdot \hat{r} U_m \\ j_0(\omega_{n,1} r/R_0) U_m \end{pmatrix} \times e^{-i\omega_{n,1} t/R_0} \tag{1.8}$$

U_m es un espinor de Pauli bidimensional y $j_\ell(z)$ son las funciones de Bessel esféricas. Hemos omitido los índices j sobre $\omega_{n\kappa}$ ya que solo $j = \frac{1}{2}$ es de interés en el presente (pues tratamos con partículas de *espín* $\frac{1}{2}$, la cual es la componente angular total de los quarks). $N(\omega_{n\kappa})$ es una constante de normalización escogida como

$$N(\omega_{n\kappa}) \equiv \left(\frac{{\omega_{n\kappa}}^3}{2{R_0}^3(\omega_{n\kappa} + \kappa)\sin^2 \omega_{n\kappa}} \right)^{1/2} \tag{1.9}$$

a partir de la restricción de normalización de (1.4) y la imposición de ortogonalidad sobre los modos normales, ecuación (1.5), es decir

$$\int_V \mathrm{d}^3x\, \bar{\psi}_{n\kappa jm}(x) \psi_{n'\kappa' j' m'}(x) = \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \tag{1.10}$$

La condición de frontera lineal, ecuación (1.3a), genera una condición eigenvalor para los modos de frecuencias $\omega_{n\kappa}$

$$j_0(\omega_{n\kappa}) = -\kappa\, j_1(\omega_{n\kappa}),$$ [1]

o

$$\tan \omega_{n\kappa} = \frac{\omega_{n\kappa}}{\omega_{n\kappa} + \kappa} \tag{1.11}$$

Por convención escogemos n positiva (o negativa en dado caso que se escogieran modos de antipartículas, por ejemplo) secuencialmente para etiquetar las raíces positivas (o negativas) de la ecuación (1.11) Las primeras soluciones a (1.11) son

$$\begin{aligned} \kappa = -1: &\quad \omega_{1\,-1} = 2.04; \quad \omega_{2\,-1} = 5.40 \\ \kappa = +1: &\quad \omega_{1\,1} = 3.81; \quad \omega_{2\,1} = 7.00. \end{aligned} \tag{1.12}$$

La condición de frontera cuadrática (1.3a) requiere que $\sum_\alpha (\partial/\partial r) \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x)$ sea independiente de tiempo y dirección para $r = R_0$ (lo que significa sobre la superficie de la bolsa). La independencia angular requiere que $j = \frac{1}{2}$. Para obtener independencia temporal, ajustamos

$$\sum_\alpha a_\alpha^*(n\,\kappa\, j = \frac{1}{2}\, m) a_\alpha(n'\,\kappa'\, j = \frac{1}{2}\, m') = 0, \tag{1.13}$$

[1] Las funciones $j_0(x)$ y $j_1(x)$ son los armónicos esféricos de orden 0 y 1, respectivamente. Sus expresiones son:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

a menos que $n = n'$, $\kappa = \kappa'$ o $n = -n'$, $\kappa = -\kappa'$ en cuyos casos no hay restricción ya que los términos dependientes del tiempo se cancela. La ecuación anterior es una restricción severa sobre los modos que deben ser ocupados. Deberíamos implementar la ecuación anterior requiriendo que para cada grado de libertad interno α sólo un modo normal, $a_\alpha(n\,\kappa\, j = \frac{1}{2}\, m)$ es excitado. Esto automáticamente será el caso para bariones de tres quarks si son requeridos a ser singletes de color.

Una vez que (1.13) es satisfecho, los términos independientes del tiempo en (1.8) pueden ser coleccionados,

$$\sum_{\alpha\, n\, \kappa\, m} \omega_{n\kappa} a_\alpha^*(n\,\kappa\,\frac{1}{2}\,m) a_\alpha(n\,\kappa\,\frac{1}{2}\,m) = 4\pi B R_0^4, \tag{1.14}$$

$$xd \tag{1.15}$$

Conclusiones

a) El campo en la bolsa se comporta sobre el promedio como un gas relativista perfecto; que es, la traza del tensor energía momento asociado con el campo, cuando es promediado sobre tiempo y espacio, es cero:

$$\left\langle \int_R \mathrm{d}^3x (\Theta^\mu_\mu)_{\text{campo}} \right\rangle = 0 \tag{1.16}$$

b) El volumen promediado en el tiempo de una bolsa es proporcional a su energía:

$$E = 4B\langle V\rangle \tag{1.17}$$

c) El estado base y estados excitados más bajos de la bolsa contienen pocos partones de momento promedio de orden $B^{1/4}$ encerrados en un volumen de orden $B^{-3/4}$. [B tiene la dimensión $(\text{longitud})^{-4}$ con $\hbar = c = 1$]

d) En el límite termodinámico la bolsa tiene una temperatura fija, T_0, independiente de su energía. T_0 es de orden $B^{-1/4}$. Esto es equivalente a las siguientes declaraciones

- La energía cinética promedio de los partones es de orden T_0 independiente de la energía de bolsa E proporcionado el último es más grande que T_0: $E \gg T_0$.
- La densidad de nivel asintótico $\zeta(E)$ del sistema es una función exponencial de E:
$$\zeta \sim e^{E/T_0}$$
- El número, N, de partones más antipartones presente en el hadrón es proporcional a su energía:
$$N \propto E/T_0$$

e) Si la dinámica clásica es tal que hay un máximo momento angular del hadrón en una energía total dada E, ese máximo debe ser

$$J_{\text{máx}} = \kappa B^{-1/3} E^{4/3},$$

donde κ es una constante adimensional determinada por la dinámica detallada. Si el límite clásico ($\hbar \to 0$) existe, las correcciones cuánticas a esta fórmula se reducirían por potencias de E. Si no hay trayectoria clásica a seguir, un argumento plausible sugiere que la trayectoría guía podría ser (para un gran E)

$$J_{\text{máx}} = \kappa' B^{-1/2} E^2 \quad (\hbar = 1).$$

f) El momento angular más probable para una E grande está dada por

$$\bar{J} \propto (B^{-1/4}E)^{5/6}$$

CAPÍTULO

2

ESTADÍSTICA DE TSALLIS

2.1. Introducción

La mecánica estadística estándar está basada en la entropía de Boltzmann - Gibbs (BG), Mathematics, Tsallis

$$S_{\mathrm{BG}} = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^{W} p_i = 1 \tag{2.1}$$

donde W es el número de configuraciones microscópicas del sistema y p_i es la probabilidad de acceder a la i-ésima configuración. Sin embargo, sistemas de no lineales dinámicos de muchos cuerpos requieren *ergodicidad* (que su valor esperado sea igual a su promedio a largo plazo). Para sistemas no ergódicos, que sucede con sistemas complejos, no existe razón para usar estadística BG. Por esta razón se ha requerido de una extensión para sistemas de este tipo, llamados *no extensivos* (pues no son proporcional al número total de elementos del sistema), una de ellas es la siguiente, que extiende la entropía de BG como

$$S_q = k\frac{1-\sum_i p_i^q}{q-1} \qquad (q \in \mathbb{R};\ S_{q=1} = S_{\mathrm{BG}}) \tag{2.2}$$

Bajo esta generalización, en un sistema constituido por dos subsistemas probabilisticamente independientes A y B (i.e., si $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$), entonces

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q)\frac{S_q(A)}{k}\frac{S_q(B)}{k}, \tag{2.3}$$

(más adelante se usarán unidades naturales por lo que no aparecerá la constante de BG, k) de donde se observa claramente que cuando $q = 1$ se regresa a la estadística de BG [ref Tsallis statistics].

NOTA: En la misma referencia se agrega la obtención de la energía de Tsallis para las masas

2.2. Presión dentro del hadrón

A partir de la ecuación (2.3), podemos obtener la entropía dentro de un hadrón que consiste en una mezcla de gases quarks y gluon. De esta manera empezamos por considerar el cálculo de cada contribución, los quarks vistos como un gas ideal de Fermi ultrarelativista y los gluones vistos como un gas ideal de Bose - Einstein (BE) ultrarelativista, ambos sin masa y no interactuantes, la interacción vendrá al final del parámetro q de Tsallis

2.2.1. Presión de gluones, un gas ideal de Bose - Einstein ultrarelativista

Los níveles de energía de un bosón visto como un gas ideal de BE están dados por $\epsilon_k = cp = \hbar ck$, p es la magnitud del momento de las partículas del gas, y k la magnitud del vector de onda. Y la función de partición para un gas ideal de BE está determinada por:

$$\Xi^{\mathrm{BE}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \xi e^{-\beta\epsilon_k}}, \tag{2.4}$$

donde $\beta = \frac{1}{kT}$, y $\xi = e^{\beta\mu}$ es la fugacidad del gas, T es la temperatura del gas, V el volumen del gas y μ el potencial químico del gas. El número de partículas promedio en cada estado de energía ϵ_k se calcula a través de la ecuación:

$$\langle n_k \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_k} \ln \Xi^{\mathrm{BE}} \,|_{\xi, V, \epsilon_{i\neq k}}, \tag{2.5}$$

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon_k} - 1} \tag{2.6}$$

De tal manera que el número total de partículas promedio y energía se pueden calcular como

$$N(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle = \sum_k \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon_k} - 1} \tag{2.7}$$

$$E(T, V, \mu) = \sum_k \langle n_k \rangle \epsilon_k = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon_k} - 1}. \tag{2.8}$$

Para una gran cantidad de partículas, podemos sustituir la suma por una integral, considerando el número total de estados en el espacio fase clásico tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int \frac{\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 p}{h^3} \\ &= V \int \frac{4\pi p^2 \mathrm{d}p}{h^3} \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} p^2 \mathrm{d}p \end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando la relación $\epsilon_k = cp$ obtenemos

$$\Sigma = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \epsilon^2 \mathrm{d}\epsilon \tag{2.10}$$

De esta forma, sustituyendo (2.10) en (2.7) y (2.8), obtenemos

$$N(T, V, \mu) = \frac{4\pi V}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 \mathrm{d}\epsilon}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} \tag{2.11}$$

$$E(T,V,\mu)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{\xi^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}\tag{2.12}$$

Dado que tratamos con partículas sin masa, es posible tener infinitas partículas con energía $\epsilon_0=0$. De esta manera, el potencial químico μ debe ser cero pues es posible crear infinitas partículas con energía 0 sin afectar a nuestros resultados puesto que no contribuyen a la energía total del sistema. Así, si $\mu=0$, entonces $\xi=1$. Y sustituyendo en las ecuaciones (2.11) y (2.12) obtenemos

$$N(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^2\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}\tag{2.13}$$

$$E(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}\tag{2.14}$$

Para resolver las integrales, consideramos el cambio de variable $x=\beta\epsilon$, por lo que $\epsilon=\frac{x}{\beta}$ y así $\mathrm{d}\epsilon=\frac{\mathrm{d}x}{\beta}$ y así, entonces

$$N(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\int_0^\infty\frac{x^2\mathrm{d}x}{e^x-1}\tag{2.15}$$

$$E(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^4}\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}\tag{2.16}$$

Con lo cual, obtenemos las funciones especiales $g_n(\xi)$ con $0\leq\xi\leq 1$ tales que

$$g_n(\xi)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\xi^{-1}e^x-1}\tag{2.17}$$

Tal que las integrales de (2.15) y (2.16) se vuelven

$$\int_0^\infty\frac{x^2\mathrm{d}x}{e^x-1}=\Gamma(3)g_3(1)\tag{2.18}$$

$$\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}=\Gamma(4)g_4(1)\tag{2.19}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.18) y (2.19) en (2.15) y (2.16), respectivamente, y usando la propiedad $g_n(1)=\zeta(n)$, con $\zeta(n)$ representando la función zeta de Rienamann, se obtiene

$$N(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\Gamma(3)\zeta(3)\tag{2.20}$$

$$E(T,V)=\frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^4}\Gamma(4)\zeta(4)\tag{2.21}$$

Ya que $\Gamma(n-1)=n!$ y $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ se llega a

$$N(T,V)=8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\zeta(3)\tag{2.22}$$

$$E(T,V)=\frac{8\pi V}{(hc)^3}(kT)^4\frac{\pi^4}{30}\tag{2.23}$$

Y usando unidades naturales $\hbar=k=x=1$ y $h=2\pi\hbar=2\pi$, así entonces

$$N(T,V) = \frac{1}{\pi^2}\zeta(3)VT^3 \tag{2.24}$$

$$E(T,V) = \frac{\pi^2}{30}VT^4 \tag{2.25}$$

Finalmente, dado que hay tres componentes independientes de la carga de color, y consecuentemente $3\times 3-1$ generadores de $SU(3)$, hay 8 diferentes tipos de gluones, y como cada gluón tiene dos proyecciones de espín, el factor de degeneración corresponde a $g_G = 8\times 2 = 16$. Por lo tanto, pasamos a que las expresiones para el número total de gluones y la energía total de gluones como un gas ideal de BE ultrarrelativista son

$$N_G(T,V) = \frac{g_G}{\pi^2}\zeta(3)VT^3 \tag{2.26}$$

$$E_G(T,V) = g_G\frac{\pi^2}{30}VT^4 \tag{2.27}$$

Para calcular la contribución de presión debido a los gluones, partimos de la función de partición Ξ^{BE} y el potencial macrocanónico o potencial gran canónico ϕ

$$\begin{aligned} \phi &= -PV = -kT\ln\Xi^{BE} \\ \Rightarrow P &= \frac{kT}{V}\ln\Xi^{BE} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Calculando el logaritmo de la función de partición (2.4) se tiene

$$\ln\Xi^{BE} = -\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\xi e^{-\beta\epsilon_k}\right) \tag{2.29}$$

Nuevamente ocupamos el hecho de que son estados energéticos tan cercanos y tal cantidad de partículas en distintos estados energéticos, podemos sustituir la suma por una integral, usando el número total de estados (2.10) y el hecho de que no hay potencial químico ($\mu = 0 \Rightarrow \xi = 1$) para obtener

$$\ln\Xi^{BE} = -\frac{4\pi V}{(hc)^3}\int_0^\infty \epsilon^2\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon}\right)\mathrm{d}\epsilon \tag{2.30}$$

Realizando la integral por partes tendremos

$$\begin{aligned} \ln\Xi^{BE} &= -\frac{4\pi V}{(hc)^3}\left[\frac{1}{3}\epsilon^3\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon}\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{3}\beta\int_0^\infty\frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}\right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{kT}{3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{-\beta\epsilon}-1} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Resolviendo la integral, de la misma forma que con la ecuación (2.14), usando (2.19) y simplificando se llega a que la presión ejercida por un gas de partículas ultrarrelativistas tipo BE, usando la expresión (2.28), está dada como

$$P = \frac{1}{3}\frac{E}{V} \tag{2.32}$$

Y dado que existen g_G estados degenerados para la energía de los gluones, entonces, la presión correspondiente a los gluones es, usando (2.27),

$$P_G = g_G\frac{\pi^2}{90}T^4 \tag{2.33}$$

Como cálculo final, hallamos la entropía a partir del potencial gran canónico por medio de la relación

$$\begin{aligned} \phi = E - TS - \mu N = -PV, \\ \Rightarrow S = \frac{1}{T}\left(E + PV - \mu N\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sustituyendo la ecuación (2.32) en (2.34) y considerando $\mu = 0$, la entropía del sistema es

$$S = \frac{4}{3}\frac{E}{T} \tag{2.35}$$

Y tomando en cuenta que tratamos con la energía de gluones (2.27), la entropía del gas de gluones está dado como

$$S_G = 4g_G\frac{\pi^2}{90}VT^3. \tag{2.36}$$

2.2.2. Presión de quarks, un gas ideal de Fermi - Dirac ultrarrelativista

Las partículas ultrarelativistas tienen una relación energía-momento $\epsilon = \|\overrightarrow{p}\|c$[1].

Hay ciertos bosones con esta relación energía-momento, pero el número de fermiones con masa en reposo despreciable es muy poca. Para casos prácticos, "despreciable" significa una masa en reposo del orden de los neutrinos ($m_\nu < 8$eV). El gas ultrarelativistico de Fermi - Dirac (FD) puede ser visto como un gas caliente de fermiones con masa en reposo no despreciable, esto es, si el momento promedio en el gas es grande comparado con mc, es decir, si la energía térmica promedio kT es grande comparada con la masa en reposo.

A partir de mecánica cuántica relativista, se sabe que uno puede crear pares de partículas y antipartículas (quarks y antiquarks, en nuestro caso) del vacío con un gasto energético de $2mc^2$. Por lo tanto, no debemos considerar un gas de partículas FD solitarias, sino como pares partícula-antipartícula.

Así, trataremos con una mezcla de dos gases ideales FD, entre las cuales, son posibles reacciones "químicas".

La función de partición para un gas ideal de FD está determinada por:

$$\Xi^{\mathrm{FD}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \xi e^{-\beta\epsilon_k}\right) \tag{2.37}$$

En este caso se considera una mezcla de gases (quarks y antiquarks), entonces la función de partición está dada como

$$\Xi\left(T, V, \mu_+, \mu_-\right) = \prod_{\epsilon_+}\left(1 + \xi_+ e^{-\beta\epsilon_+}\right) + \prod_{\epsilon_-}\left(1 + \xi_- e^{-\beta\epsilon_-}\right) \tag{2.38}$$

donde $\xi_+ = e^{\beta\mu_+}$ y $\xi_- = e^{\beta\mu_-}$ y el signo + corresponde a las partículas mientras que el signo − a las antipartículas. El número promedio de partículas en cada estado de energía se puede calcular usando la ecuación (2.5) y se obtiene

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{\xi^{-1}e^{\beta\epsilon_k} + 1} \tag{2.39}$$

por lo que el número total promedio para las partículas se calcularía a través de

[1] De la fórmula general $\epsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, para masa en reposo despreciable.

$$\begin{aligned} N_+(T,V,\mu_+) &= \sum_{\epsilon_+} \langle n_{\epsilon_+} \rangle \\ &= \sum_{\epsilon_+} \frac{1}{\xi_+^{-1} e^{\beta\epsilon_+} + 1} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Y de manera análoga se obtiene el número total promedio de antipartículas

$$\begin{aligned} N_-(T,V,\mu_-) &= \sum_{\epsilon_-} \langle n_{\epsilon_-} \rangle \\ &= \sum_{\epsilon_-} \frac{1}{\xi_-^{-1} e^{\beta\epsilon_-} + 1} \end{aligned} \tag{2.41}$$

En equilibrio termodinámico el número de promedio de partículas y antipartículas cambia constantemente debido al proceso de creación y aniquilación, por lo que no es conveniente fijar el número de ambas y posteriormente determinar los potenciales químicos. En lugar de ello, se realiza el siguiente análisis a fin de fijar el potencial químico.

Los cambios dN_+ y dN_- de los dos números de partículas están relacionados por la relación

$$dN_+ = dN_-$$

Las reacciones que suceden en el gas de quarks y antiquarks son de la forma

$$q + \bar{q} \rightleftharpoons \text{ productos de reacción} + \Delta E$$

observamos que una antipartícula se crea o aniquila con cada partícula. Además, el resto de las partículas generadas por las reacciones creación-aniquilación no juegan un rol en el gas que estamos considerando de quarks antiquarks. Por esta razón, podemos notar que los potenciales químicos de partículas y antipartículas tienen que ser iguales con signos opuestos, ya que los productos de la reacción no contienen potencial químico,

$$\mu_+ + \mu_- = 0, \quad z_+ z_- = 1 \tag{2.42}$$

Los números de partículas N_+ y N_- no son independientes uno de otro, y por lo tanto no hay dos fugacidades independientes, sino en realidad solo uno. Sin embargo, en vez de N_+ y N_- uno puede fijar la diferencia $N = N_+ - N_-$, el excedente de partículas, yaa que no está influenciada por los procesos de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} N &= N_+ - N_- \\ &= \sum_{\epsilon_+ > 0} \frac{1}{\xi_+^{-1} e^{\beta\epsilon_+} + 1} - \sum_{\epsilon_- > 0} \frac{1}{\xi_-^{-1} e^{\beta\epsilon_-} + 1} \end{aligned} \tag{2.43}$$

A partir de esta ecuación, uno determina la fugacidad tomando en cuenta la ecuación (2.42). En este sistema, el excedente N de partículas no cambia por creación-aniquilación, pero el número de partículas medio N_+ y N_- no puede ser controlado.

Para explicar lo anterior, tenemos que considerar el espectro de energía de la ecuación libre de Dirac. En el caso ultrarelativista, $m \to 0$. En este espectro también hay estados de energía $\epsilon \leq -mc^2$ además de los estados de energía positiva $\epsilon \geq mc^2$. Uno puede describir ahora partículas y antipartículas en el espectro simultáneamente, si uno asume que en el vacío, sin partículas, todos los estados de energía negativa continua están ocupadas por electrones (inobservables).

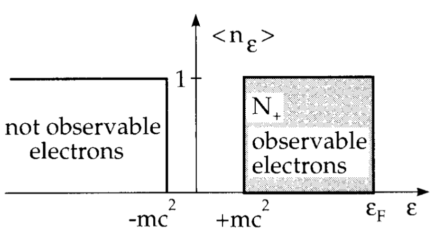

Fig. 2.1: *$\langle n_k \rangle$ para un gas de electrones a $T = 0$*

En esta imagen de partículas (como son los electrones), en el continuo negativo (agujeros) son interpretados como antipartículas.

Para un gas de electrones con N_+ electrones y una energía de Fermi $\epsilon_{\mathrm{FD}} > mc^2$ tenemos en $T = 0$ la situación de la figura 2.1.

Si se aumenta la temperatura del gas de electrones, al principio, los electrones cerca de la energía de Fermi son excitados a estados más altos $\epsilon > \epsilon_{\mathrm{FD}}$. Esto ocurre en un rango de energía de anchura aproximada kT alrededor de la energía de Fermi.

Sin embargo, si la temperatura es del orden de $2mc^2$, más y más electrones de un continuo más bajo pueden ser excitados en estados libres $\epsilon > \epsilon_{\mathrm{FD}}$. Estos electrones dejan huecos en el continuo más bajo, que representan positrones observables. El número de electrones observables también se incrementa. La diferencia $N_+ - N_-$ sin embargo es la misma que antes. La energía negativa de los huecos $\epsilon_{\mathrm{huecos}} < -mc^2$ es simplemente relacionada a la energía positiva del positrón correspondiente como $\epsilon_{e^+} = -\epsilon_{\mathrm{hueco}}$.

El número de electrones y positrones observables puede ser calculado como sigue:

$$N_+ = \sum_{\epsilon>0} \langle n_k \rangle , \quad N_- = \sum_{\epsilon<0} (1 - \langle n_k \rangle) \tag{2.44}$$

donde $\langle n_k \rangle$ está dado por (2.39) y $\mu = \mu_+$ como el potencial químico de los electrones (partículas). La expresión para N_- puede ser transformada como

$$\begin{aligned} N_- &= \sum_{\epsilon<0} \left(1 - \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1}\right) \\ &= \sum_{\epsilon<0} \frac{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon}}{\xi^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1} \\ &= \sum_{\epsilon<0} \frac{1}{\xi e^{-\beta\epsilon} + 1} \end{aligned} \tag{2.45}$$

El espectro de energía de la ecuación libre de Dirac es simétrica alrededor de $\epsilon = 0$. Así, uno puede sustituir $\epsilon \longrightarrow -\epsilon_-$ en (2.45) y entonces consideramos positrones con energía positiva.

$$N_- = \sum_{\epsilon_->0} \frac{1}{\xi e^{\beta\epsilon_-} + 1} \tag{2.46}$$

Y por otro lado $\xi = \xi_-^{-1}$; es decir, $\mu_+ = -\mu_-$. Ambas interpretaciones llevan a los mismos resultados, pero en algunos casos, la imagen de partícula-hueco de Dirac es más conveniente. Por ejemplo, el exceso de partículas en esta imagen es simplemente

$$\begin{aligned} N = N_+ - N_- &= \sum_{\epsilon>0} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon<0} (1 - \langle n_\epsilon \rangle) \\ &= \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon<0} 1 = \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle - \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle^{\mathrm{vac}} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Ahora procedemos con el cálculo de la presión. Tenemos que reescribir las sumas en la ecuación (2.43)

$$g(\epsilon) = g \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \epsilon^2 \tag{2.48}$$

$$\ln \mathcal{Z} = g \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \, \mathrm{d}\epsilon \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon+\mu)}\right) \right] \tag{2.49}$$

de esta manera, podemos reescribir el número total de partículas

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3}\left[\int_0^\infty \frac{\epsilon^2 \mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} - \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 \mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)}+1}\right] \tag{2.50}$$

Para la primera integral se hace el cambio de variable $x = \beta(\epsilon - \mu)$ por lo que $\epsilon = \frac{x}{\beta} + \mu$ y $\mathrm{d}\epsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\beta}$. Para la segunda, se hace $y = \beta(\epsilon + \mu)$ por lo que $\epsilon = \frac{y}{\beta} - \mu$ y $\mathrm{d}\epsilon = \frac{\mathrm{d}y}{\beta}$. Y haciendo los respectivos cambios en los límites de integración, se obtiene

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta}\left[\int_{-\beta\mu}^\infty \frac{(\frac{x}{\beta}+\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x - \int_{\beta\mu}^\infty \frac{(\frac{y}{\beta}-\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y\right] \tag{2.51}$$

Factorizando el término β en los numeradores de (2.51) y reacomodando los límites de integración,podemos reescribir

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\left[\int_{-\beta\mu}^\infty \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x - \int_{\beta\mu}^\infty \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\left[\int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x\right. \\ &\left. - \int_{\beta\mu}^0 \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y - \int_0^\infty \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y\right] \end{aligned} \tag{2.52}$$

Juntando las integrales que van de cero a infinito en (2.52), y reemplazando $y \longrightarrow x$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \frac{(x+\beta\mu)^2-(x-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y \\ &= 4\beta\mu\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Podemos juntar el resto de las integrales si trabajamos una de ellas con un cambio de variable para ajustar los límites integrales a los mismos $y \longrightarrow -x$, como

$$\begin{aligned} -\int_{\beta\mu}^0 \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y &= \int_0^{\beta\mu} \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{-\beta\mu} \frac{(-x-\beta\mu)^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.54}$$

Y de esta manera

$$\begin{aligned} \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x - \int_{\beta\mu}^0 \frac{(y-\beta\mu)^2}{e^y+1}\mathrm{d}y &= \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^x+1}\mathrm{d}x + \int_{-\beta\mu}^0 \frac{(x+\beta\mu)^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 (x+\beta\mu)^2\left[\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\beta\mu}^0 (x+\beta\mu)^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dado que en el paréntesis cuadrado de (2.55), al multiplicar por e^x el segundo término, se llega a que los dos términos dentro del paréntesis dan la unidad. De esta manera, el número de partículas, sustituyendo (2.53) y (2.55) en (2.52)

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\left[4\beta\mu\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x + \int_{-\beta\mu}^{0}(x+\beta\mu)^2\mathrm{d}x\right] \tag{2.56}$$

Haciendo el cambio de variable $z = x + \beta\mu$ en la última integral se obtiene

$$N = \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\left[4\beta\mu\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x + \int_0^{\beta\mu} z^2\mathrm{d}z\right] \tag{2.57}$$

Y de manera análoga a lo que es la función (2.17), tenemos las funciones especiales $f_n(\xi)$ con $0 \leq \xi \leq 1$:

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\xi^{-1}e^x+1} \tag{2.58}$$

Entonces la primera integral de (2.57) se vuelve

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \Gamma(2)f_2(1) = f_2(1) \tag{2.59}$$

Por último, las funciones $f_n(\xi)$ cumplen con la propiedad:

$$f_n(1) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\zeta(n) \tag{2.60}$$

Usando la ecuación (2.60) y que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ en la primera integral de (2.57), se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} \tag{2.61}$$

Y para la segunda integral, se obtiene simplemente

$$\int_0^{\beta\mu} z^2\mathrm{d}z = \frac{(\beta\mu)^3}{3} \tag{2.62}$$

Sustituyendo (2.61) y (2.62) en (2.57) se llega a la expresión

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{1}{\beta^3}\left[4\beta\mu\frac{\pi^2}{12} + \frac{(\beta\mu)^3}{3}\right] \\ &= 4\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\left[\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{\mu}{kT}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^3\right] \end{aligned} \tag{2.63}$$

Y ahora, analógamente con el gas ideal de BE, la expresión se reescribe en unidades naturales usando $c = \hbar = k = 1$ y $h = 2\pi$, y se agrega el factor de degeneración de los quarks g_Q

$$N_Q = \frac{g_Q}{6}\left[\frac{\mu}{T} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^3\right]VT^3 \tag{2.64}$$

El factor de degeneración de los quarks se compone del producto del número de proyecciones de espín (N_s), el número de colores, N_c, y el número de sabores, N_f, a consideración $g_G = N_sN_cN_f$. Para este caso, se tienen $N_s = 2$ proyecciones de espín, $N_c = 3$ colores y $N_f = 2$ sabores, u y d, dado que bajo este esquema, analizamos materia nuclear ordinaria. Por tanto $g_Q = 12$.

Para calcular la contribución de los quarks y antiquarks a la energía del sistema, se considera

$$E = E_+ + E_- = \sum_{\epsilon_+ > 0} \langle n_{\epsilon_+} \rangle \epsilon_+ + \sum_{\epsilon_- > 0} \langle n_{\epsilon_-} \rangle \epsilon_- \tag{2.65}$$

donde E_+ es la energía de los quarks y E_- de los antiquarks. Usando la ecuación (2.39), y la relación entre las fugacidades explicada con anterioridad (2.42), podemos establecer que

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\epsilon_+ > 0} \frac{\epsilon_+}{e^{\beta(\epsilon_+ - \mu)} + 1} + \sum_{\epsilon_- > 0} \frac{\epsilon_-}{e^{\beta(\epsilon_- + \mu)} + 1} \\ &\Rightarrow \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[\int_0^\infty \frac{\epsilon^3 \mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 \mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon + \mu)} + 1} \right] \end{aligned} \tag{2.66}$$

Donde se ha usado el número total de estados en el espacio fase clásico (2.10). A partir de aquí, se procede a hacer el mismo procedimiento que para el cálculo del número total de partículas para resolver las integrales (2.66), de lo que se llega fácilmente a que

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[2 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} \mathrm{d}x + 6(\beta\mu)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \mathrm{d}x + \int_{-\beta\mu}^0 (x + \beta\mu)^3 \, \mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[2 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} \mathrm{d}x + 6(\beta\mu)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \mathrm{d}x + \int_0^{\beta\mu} z^3 \mathrm{d}z \right] \end{aligned} \tag{2.67}$$

Donde se ha usado el cambio de variable $z = x + \beta\mu$ para la última integral. Para resolver las primeras integrales, hacemos uso de las funciones (2.58)

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \Gamma(4) f_4(1) = \frac{7\pi^4}{120} \tag{2.68}$$

La segunda integral se obtuvo con anterioridad (2.61), y la tercera se cálcula directamente como

$$\int_0^{\beta\mu} z^3 \mathrm{d}z = \frac{(\beta\mu)^4}{4} \tag{2.69}$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (2.68), (2.61) y (2.69) en (2.67), obtenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{\beta^4} \left[2 \left(\frac{7\pi^4}{120} \right) + 6(\beta\mu)^2 \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4} (\beta\mu)^4 \right] \\ &= \frac{4\pi V}{(hc)^3} (kT)^4 \left[\frac{7\pi^4}{60} + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^4 \right] \end{aligned} \tag{2.70}$$

Finalmente, usando unidades naturales como con el número de partículas, y agregando el factor de degeneración, obtenemos la energía del gas de quarks - antiquarks

$$E_Q = g_Q \left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right] V T^4 \tag{2.71}$$

Para finalizar el cálculo de cantidades termodinámicas en este modelo, calculamos la presión producida por los quarks y antiquarks de manera análoga como con los gluones. La presión está definida por la ecuación (2.28), entonces para este caso, tenemos la función de partición que está dada como

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \sum_{\epsilon_+} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_+ - \mu)} \right) + \sum_{\epsilon_-} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_- + \mu)} \right) \\ &\Rightarrow \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left[\int_0^\infty \epsilon^2 \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)} \right) \mathrm{d}\epsilon + \int_0^\infty \epsilon^2 \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon + \mu)} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.72}$$

donde se han reemplazado las sumas por las integrales. Para resolver las integrales, ocupamos integración por partes, para la primera integral tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \epsilon^2 \ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right)\mathrm{d}\epsilon &= \frac{\epsilon^3}{3}\ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right)\Big|_0^\infty + \frac{\beta}{3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} \\ &= \frac{\beta}{3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\end{aligned} \tag{2.73}$$

En el cual, después de evaluar en los límites en la ecuación (2.73), se llega a que se cancela el primer término. Para la segunda integral de (2.72) se procede similarmente y se obtiene

$$\int_0^\infty \epsilon^2 \ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon+\mu)}\right) = \frac{\beta}{3}\int_0^\infty \frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)}+1} \tag{2.74}$$

Y, sustituyendo las ecuaciones (2.73) y (2.74) en (2.72), obtenemos

$$\ln\Xi = \frac{4\pi V}{(hc)^3}\frac{\beta}{3}\left[\int_0^\infty \frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^3\mathrm{d}\epsilon}{e^{\beta(\epsilon+\mu)}+1}\right] \tag{2.75}$$

Y, volviendo con la expresión (2.28), podemos reescribirla aprovechando la expresión integral (2.66), para obtener la expresión de presión total de gluones con unidades naturales como

$$P = \frac{1}{3}\frac{E}{V} \tag{2.76}$$

Y sustituyendo para el caso de la energía de quarks E_Q (2.71) en la exprsión anterior, obtenemos

$$P_Q = \frac{g_Q}{3}\left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^4\right] T^4 \tag{2.77}$$

La entropía se puede calcular a partir de una expresión similar a (2.34), la cual es

$$\phi = E - TS - \sum_i \mu_i N_i = -PV \tag{2.78}$$

$$S = \frac{1}{T}\left(E + PV - \sum_i \mu_i N_i\right) \tag{2.79}$$

donde la suma es sobre todas las especies de partículas, en este caso quarks y antiquarks. Por tanto, para el caso del gas de Fermi, tenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T}\left(E + PV - \mu_+ N_+ - \mu_- N_-\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(E + PV - \mu V\right) \\ &= \frac{4}{3}\frac{E}{T} - \mu\frac{N}{T}\end{aligned} \tag{2.80}$$

donde se ha usado el hecho de que $\mu_+ = \mu$ y $\mu_- = -\mu$. Y sustituyendo las ecuaciones (2.71) y (2.64) en (2.80), obtenemos la entropía de los quarks

$$S_Q = g_Q\left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^3 \tag{2.81}$$

donde se ha considerado el factor de degeneración $g_Q = 12$ correspondiente de este gas de quarks.

2.3. El protón en el modelo de Tsallis

2.3.1. La entropía en el modelo de Tsallis

Consideramos protones como un gas de quarks y gluones. En esta formulación de sistemas no extensivos con dos componentes. La correlación entre las dos especies son representadas por el valor del parámetro de Tsallis q. La entropía no extensiva para un sistema constituido de dos subsistemas A y B está dada por la ecuación (2.3). En este caso, los subsistemas son los dos gases constituidos de quarks (Q) y gluones (G), donde el gas de quarks es una mezcla conjunta de quarks y antiquarks como se ha explicado en la sección 2.2.2. Con todo esto en consideración, la entropía del protón está dada, considerando unidades naturales, como

$$S_q(Q+G) = S_q(Q) + S_q(G) + (1-q)S_q(Q)S_q(G) \tag{2.82}$$

donde $S_q(Q)$ representa la entropía de Tsallis de los quarks, $S_q(G)$ es la entropía de Tsallis de los gluones y $S_q(Q+G)$ es la entropía del sistema conjunto, considerando que el último término, ese con el factor de Tsallis q, es el que contiene toda la información de la interacción de los subsistemas (las autointeracciones se excluyen en esta primera aproximación).

La interacción fuerte entre los subsistemas debe tener efectos sobre las propiedades físicas del sistema quark-gluon. Las correlaciones deben modificar el comportamiento de las propiedades termodinámicas. Ello conlleva a cambiar la forma de calcular estas propiedades. Es así que, en analogía con la entropía de Tsallis para dos subsistemas probabilísticamente independientes, proponemos la entropía del sistema como

$$S_q(Q+G) = S_1(Q) + S_1(G) + (1-q)S_1(Q)S_1(G) \tag{2.83}$$

donde, como podrá notarse, se ha hecho que ambos subsistemas se consideran como esos de BG convencional, esto equivale a excluir la interacción dentro de cada subsistema, de tal manera que el parámetro q de Tsallis es el que introduce toda la interacción entre los subsistemas en el término cruzado de (2.83). Así, cuando $q = 1$ en (2.83), se recuperará la entropía total correspondiente a la suma de las ecuaciones (2.36) y (2.81)

$$\begin{aligned} S_{Q+G} &= S_Q + S_G \\ &= g_Q \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^3 + 4g_G\frac{\pi^2}{90}VT^3 \\ &= \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^3 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Donde la última igualdad de (2.84), se obtiene al sustituir los valores de los factores de degeneración correspondientes de quarks y gluones. Cabe notar que S_{Q+G} corresponderá igualmente a la entropía en un marco de BG.

De esta manera, podemos reescribir la ecuación (2.83) como

$$S_q = S_Q + S_G + (1-q)S_Q S_G \tag{2.85}$$

donde las entropías de los subsistemas de quarks y de gluones ya se han definido por las ecuaciones (2.36) y (2.81) así que

$$\begin{aligned} S_q =& g_Q \left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^3 + 4g_G\frac{\pi^2}{90}VT^3 \\ &+ (1-q)\, g_Q g_G \frac{4\pi^2}{90}\left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] V^2T^6 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Luego de reordenar y sustituir los factores de degeneración se llega a que

$$S_q = \left[\frac{74\pi^2}{45} + 2\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^3 + \frac{128\pi^2}{15}(1-q)\left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right]^2\right] V^2T^6 \tag{2.87}$$

De donde fácilmente se puede comprobar que cuando $q = 1$, devolvemos a la expresión (2.84)

2.3.2. La presión en el modelo de Tsallis

Partimos de la relación de Maxwell

$$\left.\frac{\partial S_q}{\partial V}\right|_{V,\mu} = \left.\frac{\partial P_q}{\partial T}\right|_{V,\mu} \tag{2.88}$$

Donde se ha considerado que el volumen y la temperatura se mantienen como cantidades extensivas, pero la entropía ni la presión son extensivas, es decir, podemos aplicarles estadística de Tsallis.Así, derivando (2.87) con respecto de V, se obtiene

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial S_q}{\partial V}\right|_{V,\mu} &= \left[7g_Q + 4g_G\right]\frac{\pi^2}{90}T^3 + \frac{1}{6}g_Q\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 T^3 \\ &+ \frac{8\pi^2}{90}g_Q g_G(1-q)\left[\frac{7\pi^2}{90} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^6\end{aligned} \tag{2.89}$$

Considerando que la expresión anterior cumple con la relación de Maxwell (2.88), podemos hallar la presión de Tsallis P_q, integrando la expresión anterior con respecto a la temperatura, T, y así obtenemos

$$\begin{aligned}P_q &= \left[\frac{7}{4}g_Q + g_G\right]\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{12}g_Q\left[\frac{\mu}{T}\right]^2 T^4 \\ &+ \frac{8\pi^2}{90}g_Q g_G(1-q)\left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^7 + C(V,\mu,q).\end{aligned} \tag{2.90}$$

Ya que el parámetro $q \neq 1$ de alguna forma incluye las interacciones entre los quarks y los gluones, para $q = 1$ se debe cumplir que $P_{q=1} = P_Q + P_G$. Esta condición se utiliza para determinar la constante de integración $C(V,\mu,q)$. Por lo tanto, para $q = 1$ se debería cumplir que, usando las ecuaciones (2.33) y (2.77)

$$\begin{aligned}P_{q=1} &= P_Q + P_G \\ &= \frac{g_Q}{3}\left[\frac{7\pi^2}{120} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^4\right] T^4 + g_G\frac{\pi^2}{90}T^4 \\ &= \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^4\right] T^4 \\ &= \left[\frac{7}{4}g_Q + g_G\right]\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{12}g_Q\left[\frac{\mu}{T}\right]^2 T^4 + C(V,\mu,q).\end{aligned} \tag{2.91}$$

Tal, que al despejar la constante de integración de la expresión anterior, podemos encontrar que

$$C(V,\mu,q) = \frac{1}{3}g_Q\left[\frac{1}{8\pi^2}\mu^4\right] \tag{2.92}$$

Y sustituyendo en (2.90), llegamos a que

$$
\begin{aligned}
P_q = &\left[\frac{7}{4}g_Q + g_G\right]\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{3}g_Q\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^4\right]T^4 \\
&+ \frac{8\pi^2}{90}g_Q g_G(1-q)\left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right]VT^7
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Y sustituyendo los valores de los factores de degeneración, se llega a que la presión en la estadística de Tsallis de un sistema de quarks y gluones está dada como

$$
P_q = \left[\frac{37\pi^2}{90} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^4\right]T^4 + \frac{256\pi^2}{15}(1-q)\left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right]VT^7 \tag{2.94}
$$

De donde es fácil corroborar que, viendo la tercera línea de (2.91), se cumple para el caso trivial $q = 1$.

CAPÍTULO

3

CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA DEL PROTÓN

El protón, al ser considerado compuesto por quarks y gluones independientes entre sí, puede separar sus contribuciones energéticas por cada una de las partes. El BM describe a los quarks como siendo confinados dentro del hadrón. Aunque hay varias versiones del modelo de bolsa, la característica principal es la fenomenología de confinamiento de quarks. Los gluones son bosones mediadores que transfieren las interacciones entre quarks. Como ya hemos detallado en la sección 2.2, la energía y el número total de partículas para un sistema de quarks y gluones sin masa dentro de un hadrón están dadas por

$$N = N_Q + N_G = \frac{16\zeta(3)}{\pi^2} V T^3 \tag{3.1}$$

$$E = E_Q + E_G = \frac{37}{30}\pi^2 V T^4. \tag{3.2}$$

Tomando la masa de un nucleón como la energía total $E_t = M$, y siendo este como un sistema local en equilibrio térmico y despreciando el potencial químico, podemos calcular los cambios de temperatura con el radio del protón. De acuerdo con [Some characteristic parameters], se tiene una fórmula simulada numéricamente para la temperatura en función de la distacia al centro del protón, r, como

$$T = 0.109 \left[\frac{\text{GeV}}{\text{fm}}\right] r^{-3/4}, \quad (r \text{ en fm}) \tag{3.3}$$

A alrededor de 1 fm, la temperatura es alrededor de 105 MeV. Cuando el radio de un protón es menor de 0.6 fm, la temperatura probablemente

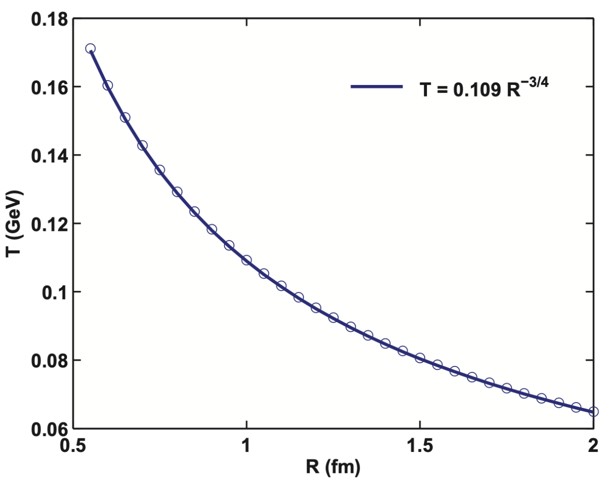

Fig. 3.1: *Ajuste realizado a una simulación numérica de la temperatura dentro del protón como función del radio*

será aproximada a 170 MeV, cercana a la temperatura crítica a la que el hadron se rompe a quarks.

Como vimos antes, en el capítulo 1, las soluciones a la ecuación (1.11), nos dan los límites de los radios de los hadrones considerando la relación $\omega_{n\kappa} = p_{n\kappa}R$, tenemos que para el estado más bajo accesible del sistema (que notaremos como $\omega_{1\,-1} = \omega_0 = 2.04$) y así para un protón, tenemos que la máxima energía cinética accesible para los quarks y gluones en el interior está dado por

$$p_{0_m} = \frac{2.04}{R} \tag{3.4}$$

Si tomamos p_{0_m} como el límite superior, podemos separar la energía de quarks del total de un protón

$$E_Q = \frac{\left(g_Q + g_{\bar{Q}}\right)V}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_{0_m}} \frac{p^3\mathrm{d}p}{1+e^{p/T(r)}} \tag{3.5}$$

Por simplicidad, despreciamos el potencial químico, $\mu = 0$, tratamos los quarks como sin masa y $g_Q = g_{\bar{Q}} = N_c N_s N_f = 3\times 2\times 2 = 12$, con N_c es el número de colores (3 colores disponibles), N_s el número de espín (2 espínes accesibles), y N_f es el número de sabores (2 por ser *up* y *down*).

La energía de contribución de gluones proporciona el efecto de presión dirigido desde fuera de la bolsa dada por

$$B = \frac{E_t - E_Q}{V} \tag{3.6}$$

Existen dos posibles escenarios como se muestra en la figura 3.2, el volumen del gas de gluones es ya sea $\frac{4\pi}{3}R^3$ o $\frac{4\pi}{3}R_i^3$.

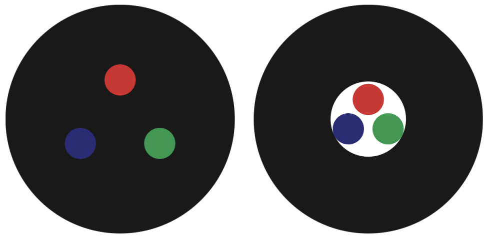

Fig. 3.2: *Tenemos dos posibilidades, i) que los quarks estén inmersos en un mar de gluones (izquierda) o ii) que los quarks estén* ***rodeados*** *por un mar de gluones(derecha)*

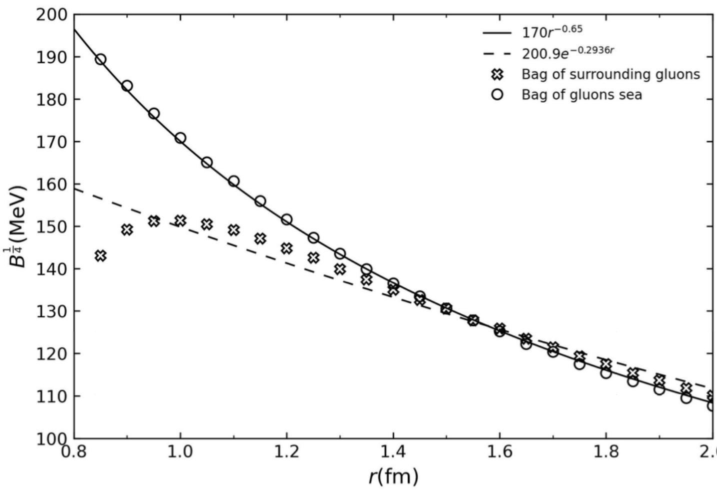

Fig. 3.3: *Ajuste realizado a una simulación numérica de la presión de bolsa dentro del protón como función del radio. Tenemos dos posibles escenarios: El primero (representado por las cruces) considera a los quarks rodeados por un mar de gluones, mientras que el segundo (círculos) considera a los quarks en un mar de gluones. []*

A partir del hecho de que la presión de bolsa depende del volumen de la misma, podemos pensar que la presión de bolsa cambiara con el radio (como se muestra en la figura (3.3)). Se pueden obtener los ajustes a ambos casos (el ajuste polinomial es el que mejor coeficiente de correlación obtiene para el caso de un mar de gluones),

$$B^{1/4} = 0.17\left[\frac{\text{GeV}}{\text{fm}}\right] r^{-0.65} \tag{3.7}$$

o un ajuste exponencial para el segundo caso, gluones rodeando quarks, que obtiene, de entre varios otros ajustes (lineal, exponencial, logarítmico, polinomial) el mejor coeficiente de correlación

$$B^{1/4} = 0.201e^{-0.293[\frac{1}{\mathrm{fm}}]r} \text{ [GeV]} \quad (3.8)$$

Como una primera aproximación, usamos una presión de bolsa que es finita al centro del hadron y se desvanece a grandes distancias. Para este propósito, hemos determinado que una aproximación ajustable para la presión de bolsa es una exponencial de la forma (3.8), esta expresión, contiene el comportamiento que deseamos y esperamos para lo que sucede en el centro del hadrón, que en el centro la presión de la bolsa sea finita pero para grandes distancias se desvanezca.

CAPÍTULO

4

SIGNIFICADO FÍSICO DEL PARÁMETRO Q DE TSALLIS

En el modelo de bolsa, los quarks están confinados en una región por el intercambio de gluones, y el volumen está caracterizado por la presión que previene a los quarks de escapar.

La densidad Lagrangiana puede ser expresada como

$$L_{\mathrm{bag}} = \left(L_{\mathrm{QCD}} - B\right) \theta_{\mathrm{V}} \tag{4.1}$$

donde θ_{V} es la función paso definiendo el interior de la bolsa que contiene quarks y gluones. Tiene valor nulo fuera de esta región.

El modelo describe la interacción entre quarks y gluone a pequeñas escalas, reflejando la libertad asintotica del QCD. A mayores escalas, sobre el orden de 1 fermi, los quarks y gluones se vuelven confinados a estados ligados de color neutro. La presión de bolsa, denotada por B, representa la densidad de energía asociada con fluctuaciones de vacío de los campos QCD dentro de la bolsa.

En el análisis presentado aquí, no asumimos la presión de bolsa constante a través de la región. El concepto de presión de bolsa es de alguna forma, artificial. Se introduce como un parámetro fenomenológico para describir confinamiento y se entiende como la energía por unidad de volumen de las fluctuaciones de vació dentro de la bolsa. Podemos conceptualizar el mecanismo como un mar de gluones empujando a los quarks o como un mar de quarks y gluones interactuando.

Ahora, exploramos una razón fundamental para la existencia de la presión de bolsa y encontramos que introduciendo una correlación determinada por el q parámetro proporciona la posibilidad de eliminar la presión de bolsa B de las ecuaciones. Así, podemos entender al confinamiento sin introducir artificialmente un parámetro de presión de bolsa.

El parámetro de Tsallis q aparece encapsular la física involucrada en confinamiento como lo hace la presión de bolsa. Podemos omitir la presión de bolsa de este modelo considerando que a un dado q_0 (parámetro de Tsallis inicial), la presión de bolsa puede ser expresada para un sistema hadrónico general.

$$P_{q_0}(T,\mu) - B(r) \to P_q(T,\mu) \tag{4.2}$$

Donde q es el parámetro de Tsallis que describe la correlación, q_0 considera para la presión total estimada dentro de los nucleones arriba, con las condiciones iniciales dadas. Después de la extracción a partir de los datos q_0 está fija. De esta manera, vemos que el parámetro de Tsallis puede recrear la presión de bolsa en tal forma que B no se necesita más. Después de algo de álgebra, uno puede obtener una relación entre ambos parámetros de Tsallis y la presión de bolsa como sigue

$$q = q_0 + \frac{B(r)}{\frac{256\pi^2}{15}\left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right] VT^7} \tag{4.3}$$

El parámetro de Tsallis se vuelve dependiente del radio debido a su relación con r de la presión de bolsa. La posibilidad de desarrollar un modelo de bolsa de hadrones sin la necesidad de una presión de bolsa será explorada en trabajo futuro. Actualmente, hemos notado que la correlación que surge de los sistemas de quarks y gluones como componentes de nucleones representan la presión de bolsa.

CAPÍTULO

5

DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN TOTAL Y PRESIÓN DE GLUONES

La distribución de presión total está dada por

$$P_q = \left[\frac{7}{4}g_Q + g_G\right]\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{12}g_Q\left[\frac{\mu}{T}\right]^2 T^4 + \frac{8\pi^2}{90}g_Q g_G\,(1-q)\left[\frac{\pi^2}{90} + \frac{1}{30}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right]VT^7 + C\,(V,\mu,q) \quad (5.1)$$

con $C(V,\mu,q) = \frac{1}{2\pi^2}\mu^4$, donde para $q = 1$ se recupera la presión total convencional de BG es debido a los quarks y gluones y puede ser visto en la figura 5.1. La presión está dada como una función del radio para varios potenciales químicos a parámetro q fijo. Si se incrementa la densidad de las partículas a una temperatura dada, los hadrones eventualmente se "romperán", es decir, resultará en deconfinamiento. Esto pasa a densidades de aproximadamente $0.72/\mathrm{fm}^3$ o potenciales químicos por sobre el orden de 430MeV[Referencia 35]. A altar temperaturas, la transición de fase sería alcanzable en densidades más bajas

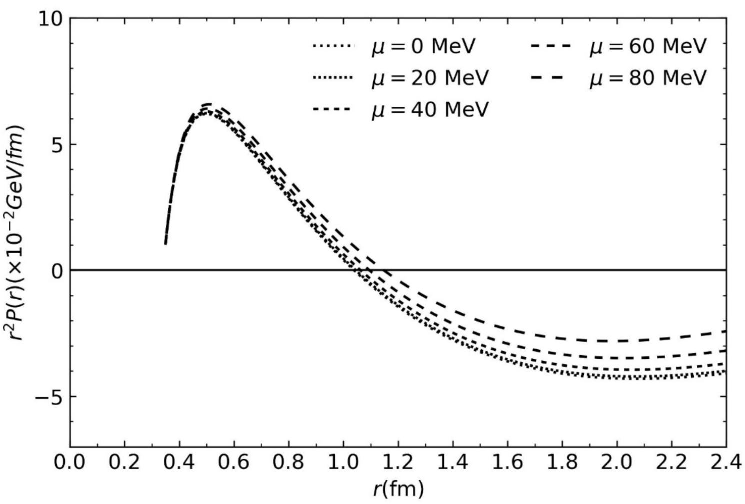

Fig. 5.1: *Distribución de presión radial en el protón contra la distancia radial desde el centro para distintos potenciales químicos. El parámetro de Tsallis usado fue $q = 1.05$.*

Las distribuciones estimadas muestra una presión repulsiva debajo de 1 fermi y luego una presión confinante por encima de esa distancia desde el centro del protón

La distribución de presión que resulta de las interacciones de los quarks en el protón contra la distancia radial desde el centro del protón fue obtenida en [referencia de nature]. usando datos experimentales. Una presión repulsiva fuerte cerca del centro del protón se desvanece a una distancia radial de aproximadamente 0.6fm. Más allá de esa distancia, la presión de ligadura aparece. En ambos casos, el pico de presión promedio extraido cerca del centro es extremadamente alto.

En [26], la distribución de presión de quarks dentro del protón es obtenida considerando un sistema quark aislado sin interacciones de gluones, encontrada usando Gravitational form factors (GFF) usando la expresión para

$$d_1(t) = d_1(0)\left(1 - \frac{t}{M^2}\right)^{-\alpha} \tag{5.2}$$

que viene de la expansión de Gegengabauer del término D (uno de los GFF)

$$D(z,t) = \left(1 - z^2\right)\left[d_1(t)C_1^{3/2}(z) + \cdots\right] \tag{5.3}$$

Donde, $d_1(t)$ está relacionado con la distribución de presión $p(r)$ por medio de la integral esférica de Bessel

$$d_1(t) \propto \int \frac{j_0(r\sqrt{-t})}{2t} p(r)\mathrm{d}^3 r, \tag{5.4}$$

donde j_0 es la primera función de Bessel esférica. A partir de (5.4), podemos encontrar la distribución de presión $p(r)$ de quarks en términos de $d_1(t)$. La presión está dada por

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{1}{k_p \pi^2}\int_0^\infty x^4 j_0(rx) d_1(-x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{M^6 d_0}{16\pi\|M\|k_p} e^{-\|M\|r}\left(-3 + r\|M\|\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde k_p es la constante de proporcionalidad en (5.4), el parámetro $\alpha = 3$ y la constante $d_0 = d_1(0) = -2.04$ están dadas en [nature], mientras que la constante de proporcionalidad $k_p = 55$ y $\|M\| = 5$ son propuestos para reproducir los resultados de [Nature]

El perfil resultante se muestra en la figura 5.2. Usamos esta distribución de presión de quarks para estimar la contribución de los gluones como una substracción del total mostrado arriba.

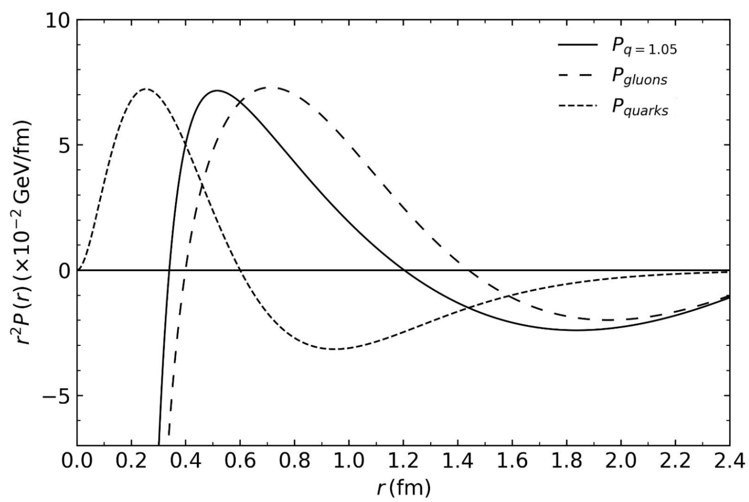

Fig. 5.2: *Extracción de la distribución de presión de gluones a partir del valor central en la referencia [26]. El potencial qu´ímico* $\mu = 100$MeV *fue usado para el perfil de la presión total.*

CAPÍTULO

6

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura 6.1 muestra las distribuciones de presión obtenidas con el T-MIT Bag Model junto con las distribuciones de cálculos recientes de LQCD [33]

$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + 1) = x(3x + 2)$

Como se mencionó arriba, la presión de bolsa y el parámetro q de Tsallis ambos representan aspectos efectivos de la interacción fuerte mediada por quarks y gluones. No tenemos un significado preciso para ellos, pero sí tenemos una relación específica entre el parámetro q y la fenomenología real, como se muestra en la ecuación (4.3). Creemos que la no extensividad del parámetro q tiene alguna conexión con interacciones de largo alcance.

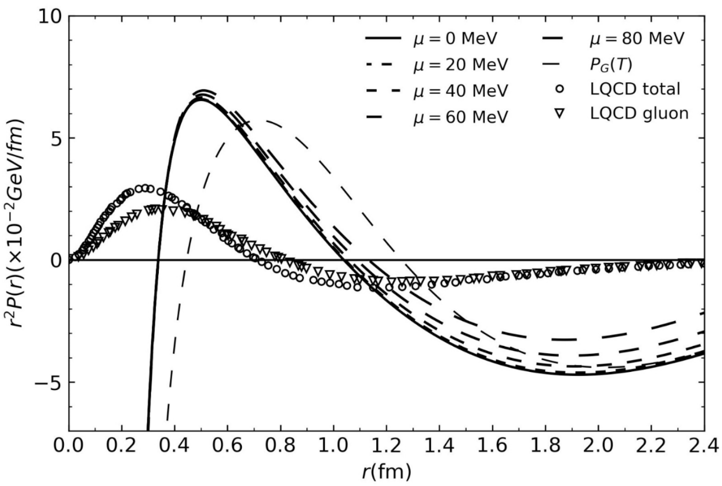

Fig. 6.1: *Resultados de Lattice QCD a partir de la referencia [33], y esas obtenidas con el modelo modificado MIT bag model.*

APÉNDICE

A

APPENDIX ON COLLISIONS

A.1. On collisions

$$4 \tag{A.1}$$

A.2. Python code

Fragmento de código A.1: Python example

```
# Scripts/pressure.py
import numpy as np
from sympy import Symbol, Function, symbols, Pow, Integral, sin, pi,
   oo, lambdify

class PressureDistribution:
    def __init__(self, r_min=0., r_max=2.4, n_samples=200, units="GeV
       /fm^3"):
        self.r_min = r_min
        self.r_max = r_max
        self.r = np.linspace(r_min, r_max, n_samples)
        self.n_samples = n_samples
        self.units = units

    def p_distr_tex(self):
        P = self.p_distr_exp()
        return latex(P)

class QuarksPressureDistribution(PressureDistribution):
    def __init__(self, *args, **kwargs):
        super().__init__(*args, **kwargs)
        self.units = '\\times 10^{-2} GeV/fm^3'

```

```python
    def p_distr_exp(self):
        d_1 = Function('d_1')
        t, M, alpha, k_p = symbols('t M alpha k_p', real=True)
        x = Symbol('x', real=True)
        r = Symbol('r', real=True)
        d_1 = Lambda(t, d_1(0) * (1 - (t / Pow(M, 2))) ** -alpha)
        P = Integral(-d_1(-x**2) * x**3 * sin(r * x) / (pi**2 * k_p *
            r), (x, 0, oo)) \
            .subs({alpha: 3, k_p: 0.55, M: 5, d_1(0): -2.04}) \
            .doit().subs({arg(r): 0}).simplify().factor()
        return P

    def p_distr(self):
        r = Symbol('r', real=True)
        P = lambdify(r, self.p_distr_exp(), 'numpy')
        return P(self.r)
```

Fragmento de código A.1: Python example

ACRÓNIMOS

ALICE A Large Ion Collider Experiment. 2

BE Bose - Einstein. 10, 12, 17

BG Boltzmann - Gibbs. 2, 9, 20, 29

BM Modelo de Bolsa. 23

DVCS Deep Virtual Compton Scattering. 2

FD Fermi - Dirac. 13

GFF Gravitational form factors. 30

HAL-QCD Hadron to Atomic nuclei from Lattice QCD. 2

LQCD Lattice QCD. 2, 31

MIT Massachusetts Institute of Technology. 2, 4, 5

QCD Cromodinámica Cuántica. 1, 3, 4

SLAC Stanford Linear Accelerator Center. 4

T-MIT Bag Model Tsallis-MIT Bag Model. 2, 31

GLOSARIO

mathematics Mathematics is what mathematicians do. 9

Matrices Gamma Las matrices gamma (γ^μ) son un conjunto de matrices que cumplen con las relaciones de anticonmutación del álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I,$$

donde $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ es el anticonmutador, $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski, e I es la matriz identidad. En la representación de Dirac, las matrices gamma tienen la forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ^i son las matrices de Pauli. Estas matrices son fundamentales en la formulación de la ecuación de Dirac, que describe partículas fermiónicas como los quarks y los electrones. 4

Tsallis La estadística de Tsallis, propuesta por Constantino Tsallis en 1988, es una generalización de la entropía de Boltzmann-Gibbs que se utiliza para describir sistemas con propiedades no extensivas, es decir, sistemas donde las interacciones entre partículas no son aditivas. La entropía de Tsallis se define como:

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{i=1}^{W} p_i^q\right),$$

donde q es el parámetro de no extensividad, p_i es la probabilidad del estado i, y W es el número total de estados posibles. Para $q \to 1$, la entropía de Tsallis se reduce a la entropía de Boltzmann-Gibbs:

$$S_1 = -\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i.$$

La estadística de Tsallis ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, incluyendo física de altas energías, sistemas complejos, y física de plasmas, entre otros. 2, 9

NOMENCLATURA

The next list describes several symbols that will be later used within the body of the document

Physics Constants

k_{B}	Boltzmann constant	$1.380649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
$\hbar$	Reduced Planck constant	$1.054571817 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
h	Planck constant	$6.62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,Hz^{-1}}$
c	Speed of light in a vacuum	$299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
G	Gravitational constant	$6.67430 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

Number Sets

$\mathbb{H}$	Quaternions
$\mathbb{C}$	Complex numbers
$\mathbb{R}$	Real numbers

Other Symbols

V	Constant volume

BIBLIOGRAFÍA

[1] X. Artru and G. Mennessier. String model and multiproduction. *Nuclear Physics B*, 70(1): 93–115, February 1974. ISSN 0550-3213. doi: https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5. URL https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90360-5. [Elsevier].

[2] B. Andersson, G. Gustafson, and B. Söderberg. A general model for jet fragmentation. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 20(4):317–329, December 1983. ISSN 1434-6052. doi: https://doi.org/10.1007/BF01407824. URL https://doi.org/10.1007/BF01407824. [Springer].

[3] P. N. Bogolioubov. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 8(2):163–189, 1968. URL http://www.numdam.org/item/AIHPA_1968__8_2_163_0/. [Numdam].

[4] C E DeTar and J F Donoghue. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 33(1):235–264, dec 1983. doi: https://doi.org/10.1146/annurev.ns.33.120183.001315. [Annual Reviews].

[5] Rudolph C. Hwa and M. Sajjad Zahir. Parton and valon distributions in the nucleon. *Physical Review D*, 23(11):2539–2553, June 1981. ISSN 0556-2821. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2539. [APS].

[6] Takumi Iritani, Sinya Aoki, Takumi Doi, Faisal Etminan, Shinya Gongyo, Tetsuo Hatsuda, Yoichi Ikeda, Takashi Inoue, Noriyoshi Ishii, Takaya Miyamoto, and Kenji Sasaki. NΩ dibaryon from lattice qcd near the physical point. *Physics Letters B*, 792:284–289, May 2019. ISSN 0370-2693. doi: https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.050. [Elsevier].

[7] Tetsuo Hatsuda, Kenji Morita, Akira Ohnishi, and Kenji Sasaki. p Ξ^- correlation in relativistic heavy ion collisions with nucleon-hyperon interaction from lattice qcd. *Nuclear Physics A*, 967: 856–859, November 2017. ISSN 0375-9474. doi: https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.04.041. [Elsevier].

[8] ALICE Collaboration. Unveiling the strong interaction among hadrons at the lhc. *Nature*, 588(7837):232–238, December 2020. ISSN 1476-4687. doi: https://doi.org/10.1038/s41586-020-3001-6. [Nature].

[9] ALICE Collaboration. Experimental evidence for an attractive p-φ interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 127:172301, Oct 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.172301. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.172301. [APS].

[10] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9(12):3471–3495, jun 1974. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471. URL https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471. [APS].

[11] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn. Baryon structure in the bag theory. *Physical Review D*, 10(8):2599–2604, oct 1974. doi: doi:10.1103/physrevd.10.2599. [APS].

[12] Carolina Barboza Mendoza and G. Herrera Corral. Quark matter description in a tsallis entropy approach. *The European Physical Journal A*, 55(9), September 2019. ISSN 1434-601X. doi: https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12834-y. [Springer].

[13] Constantino Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, jul 1988. doi: https://doi.org/10.1007/BF01016429. URL https://doi.org/10.1007/BF01016429. [Springer].

[14] C. Beck and E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:267–275, May 2003. ISSN 0378-4371. doi: https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0. URL https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0. [Elsevier].

[15] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, 2009. doi: https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8. URL https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8. [Springer].

[16] Constantino Tsallis and Zochil Gonzalez Arenas. Nonextensive statistical mechanics and high energy physics. *EPJ Web of Conferences*, 71:00132, 2014. ISSN 2100-014X. doi: https://doi.org/10.1051/epjconf/20147100132. [EPJ].

[17] C. Tsallis. Nonadditive entropy: The concept and its use. *The European Physical Journal A*, 40(3), May 2009. ISSN 1434-601X. doi: https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0. URL https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10799-0. [Springer].

[18] I. Bediaga, E.M.F. Curado, and J.M. de Miranda. A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+ e^- \to$ hadrons. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 286 (1–2):156–163, October 2000. ISSN 0378-4371. doi: https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X. URL https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X. [Elsevier].

[19] TASSO Collaboration. Jet production and fragmentation in $e^+ e^-$ annihilation at 12 to 43 GeV. *Zeitschrift for Physik C Particles and Fields*, 22(4):307–340, December 1984. ISSN 1434-6052. doi: https://doi.org/10.1007/BF01547419. [Springer].

[20] CMS Collaboration. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Phys. Rev. Lett.*, 105:022002, Jul 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.022002. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.022002. [APS].

[21] L. Marques, J. Cleymans, and A. Deppman. Description of high-energyppcollisions using tsallis thermodynamics: Transverse momentum and rapidity distributions. *Physical Review D*, 91(5):054025, March 2015. ISSN 1550-2368. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025. URL https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.054025. [APS].

[22] T Bhattacharyya, J Cleymans, L Marques, S Mogliacci, and M W Paradza. On the precise determination of the tsallis parameters in proton–proton collisions at lhc energies. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45(5):055001, March 2018. ISSN 1361-6471. doi: 10.1088/1361-6471/aaaea0. [IOPScience].

[23] Arvind Khuntia, Sushanta Tripathy, Raghunath Sahoo, and Jean Cleymans. Multiplicity dependence of non-extensive parameters for strange and multi-strange particles in proton-proton collisions at $\sqrt{s}$ = 7 s = 7 tev at the lhc. *The European Physical Journal A*, 53 (5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8. URL https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12291-8. [Springer].

[24] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, and Venktesh Singh. Transverse momentum spectra of hadrons in high energy pp and heavy ion collisions. *Journal of Physics Communications*, 2(3):035003, March 2018. ISSN 2399-6528. doi: 10.1088/2399-6528/aab00f. [IOPScience].

[25] Kapil Saraswat, Prashant Shukla, Vineet Kumar, and Venktesh Singh. Strange hadron production in pp, ppb and pbpb collisions at lhc energies. *The European Physical Journal A*, 53(5), May 2017. ISSN 1434-601X. doi: https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7. URL https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12276-7. [Springer].

[26] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557(7705):396–399, May 2018. ISSN 1476-4687. doi: https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z. URL https://doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z. [Nature].

[27] CLAS Collaboration. Measurement of deeply virtual compton scattering beam-spin asymmetries. *Phys. Rev. Lett.*, 100:162002, Apr 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.162002. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.162002. [APS].

[28] CLAS Collaboration. Cross sections for the exclusive photon electroproduction on the proton and generalized parton distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 115:212003, Nov 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.212003. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.212003. [APS].

[29] Dimitar Lubomirov Mihaylov. First experimental test of hal qcd lattice calculations for the multi strange hyperon - nucleon interaction with alice. *Nuclear Physics A*, 1005:121760, January 2021. ISSN 0375-9474. doi: https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760. URL https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121760. [Elsevier].

[30] Frank Wilczek. Quantum chromodynamics: The modern theory of the strong interaction. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, (32):177–209, 1982. URL https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141. https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ns.32.120182.001141.

[31] K. Johnson. The m.i.t bag model. *ACTA PHYSICA POLONICA*, B6(6):1–28, 1975. URL https://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=6&page=865.