

# ◇ Opérateurs différentiels

## • Opérateur gradient

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{\nabla} U \quad \text{où (en cartésiennes)} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Formule du gradient : } \oint_{(\Sigma)} U(M, t) \overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\text{grad}} U(M, t) d\tau$$

## • Opérateur divergence

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{a}(M, t) d\tau, \forall V$$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

## • Opérateur rotationnel

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

## • Opérateur laplacien

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U) \quad \vec{\Delta} \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \nabla^2 \vec{a}$$

$$\text{En cartésiennes : } \Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \vec{\Delta} \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \quad \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

## • Quelques formules de calcul

⊗ À savoir par coeur :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = 0 \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \vec{\Delta} \vec{a}$$

⊗ À savoir retrouver :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U V) = U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U \quad \text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$$

# ◇ Électromagnétisme

---

## • Équations de MAXWELL

$$\operatorname{div} \vec{B}(M; t) = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} E(M; t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M; t)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(M; t) = \frac{\rho(M; t)}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} B(M; t) = \mu_0 \vec{j}(M; t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M; t)$$

# ◇ Thermodynamique

## ● Statique des fluides

⊗ Relation fondamentale de la statique des fluides et applications : (*Signes à adapter*)

$$\overrightarrow{df_p} = -P \overrightarrow{dS} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad P(z) = P_0 \exp\left(\frac{-M_{air} g z}{RT_0}\right)$$

⊗ Poussée d'ARCHIMÈDE :  $\vec{\Pi} = \vec{P}_A = -\rho V g$

## ● Coefficients thermo-élastiques

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \text{ Dilatation thermique} \quad \chi_T = \frac{-1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \text{ Compressibilité isotherme}$$

## ● Equations d'état

$$PV = nRT \quad \left(P + \frac{n^2}{V^2}a\right)(V - nb) = nRT$$

## ● Capacités thermiques

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \Leftrightarrow dU = C_V dT \quad C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P \Leftrightarrow dH = C_P dT$$
$$C_P - C_V = nR \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

## ● Loi de LAPLACE

$$TV^{\gamma-1} = c^{ste} \quad PV^\gamma = c^{ste'} \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = c^{ste''}$$

## ● Fonctions d'état

$$H = U + PV \quad G = H - TS \quad F = U - TS$$
$$dU = T dS - P dV \quad dH = T dS + V dP \quad dF = -S dT - P dV \quad dG = -S dT + V dP$$

## ● Formule de CLAPEYRON

$$h_2 - h_1 = T(v_2 - v_1) \left( \frac{dP}{dT} \right)_{eq}$$
$$\text{Glace}_{0^\circ\text{C}} \xrightarrow{334 \text{ kJ.kg}^{-1}} \text{Eau}_{0^\circ\text{C}} \xrightarrow[\text{donc } 418 \text{ kJ.kg}^{-1}]{4.18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} \text{Eau}_{100^\circ\text{C}} \xrightarrow{2260 \text{ kJ.kg}^{-1}} \text{Vapeur}_{100^\circ\text{C}}$$

## ● Phénomènes de diffusion

Loi de STEPHAN :  $\mathcal{P}_{tot} = \sigma T^4$       Loi de WIEN :  $T \lambda_{max} \approx 2800 \text{ K}.\mu\text{m}$

Loi de conservation :  $\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$

Loi de FICK :  $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} C$  où  $C$  en  $\text{particules.m}^{-3}$  et  $D$  en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$

Loi de FOURIER :  $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$  où  $\vec{j}_Q$  en  $\text{W.m}^{-2}$