◇ Opérateurs différentiels

• Opérateur gradient

$$\mathrm{dU} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \vec{\nabla}\mathrm{U} \ \text{ où (en cartésiennes) } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Formule du gradient : } \oiint_{(\Sigma)} \mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$$

• Opérateur divergence

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \mathrm{div}\,\vec{a}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau\ ,\forall \mathrm{V}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$$

• Opérateur rotationnel

$$\oint_{(\mathscr{C})} \vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{(\mathscr{S})} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\wedge\vec{a}$$

• Opérateur laplacien

$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) \qquad \vec{\Delta}\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \nabla^2\vec{a}$$

$$\text{En cartésiennes : } \Delta\mathrm{U} = \nabla^2\mathrm{U} = \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z^2} \qquad \vec{\Delta}\vec{a}\begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

• Quelques formules de calcul

⊛ À savoir par coeur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) = 0 \qquad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\vec{a}$$

⊛ À savoir retrouver :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{U\,V}) = \mathrm{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} + \mathrm{V}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \qquad \mathrm{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$$

◇ Éléctromagnétisme

• Équations de Maxwell

$$\mathrm{div}\vec{B}(M;t) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,E(M;t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M;t)$$

$$\mathrm{div}\vec{E}(M;t) = \frac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,B(M;t) = \mu_0\,\vec{j}(M;t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M;t)$$

◇ Thermodynamique

• Statique des fluides

⊛ Relation fondamentale de la statique des fluides et applications : *(Signes à adapter)*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_p} = -\mathrm{P}\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} \qquad \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g \qquad \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}_0\,\exp\left(\frac{-\mathrm{M}_{air}\,g\,z}{\mathrm{RT}_0}\right)$$

⊛ Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \vec{\mathrm{P}_\mathrm{A}} = -\rho\mathrm{V}\,g$

• Coefficients thermo-élastiques

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{V}}\left.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\right|_{\mathrm{P}} \text{ Dilatation thermique} \qquad \chi_\mathrm{T} = \frac{-1}{\mathrm{V}}\left.\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}\right|_{\mathrm{T}} \text{ Compressibilité isotherme}$$

• Equations d'état

$$\mathrm{PV} = n\mathrm{RT} \qquad \left(\mathrm{P} + \frac{n^2}{\mathrm{V}^2}a\right)(\mathrm{V} - n\,b) = n\mathrm{RT}$$

• Capacités thermiques

$$\mathrm{C_V} = \left.\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}}\right|_{\mathrm{V}} \leftrightarrow \mathrm{dU} = \mathrm{C_V}\,\mathrm{dT} \qquad \mathrm{C_P} = \left.\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{T}}\right|_{\mathrm{P}} \leftrightarrow \mathrm{dH} = \mathrm{C_P}\,\mathrm{dT}$$

$$\mathrm{C_P} - \mathrm{C_V} = n\mathrm{R} \qquad \gamma = \frac{\mathrm{C_P}}{\mathrm{C_V}} \qquad \mathrm{C_V} = \frac{n\mathrm{R}}{\gamma - 1} \qquad \mathrm{C_P} = \frac{n\mathrm{R}\gamma}{\gamma - 1}$$

• Loi de Laplace

$$\mathrm{TV}^{\gamma-1} = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} \qquad \mathrm{PV}^{\gamma} = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}'} \qquad \mathrm{T}^{\gamma}\mathrm{P}^{1-\gamma} = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}''}$$

• Fonctions d'état

$$\mathrm{H} = \mathrm{U} + \mathrm{PV} \qquad \mathrm{G} = \mathrm{H} - \mathrm{TS} \qquad \mathrm{F} = \mathrm{U} - \mathrm{TS}$$

$$\mathrm{dU} = \mathrm{T\,dS} - \mathrm{P\,dV} \qquad \mathrm{dH} = \mathrm{T\,dS} + \mathrm{V\,dP} \qquad \mathrm{dF} = -\mathrm{S\,dT} - \mathrm{P\,dV} \qquad \mathrm{dG} = -\mathrm{S\,dT} + \mathrm{V\,dP}$$

• Formule de Clapeyron

$$h_2 - h_1 = \mathrm{T}(v_2 - v_1)\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dT}}\right)_{éq}$$

$$\underset{0°\mathrm{C}}{\text{Glace}} \xrightarrow{334\,\mathrm{kJ.kg^{-1}}} \underset{0°\mathrm{C}}{\text{Eau}} \xrightarrow[\textit{donc}\ 418\,\mathrm{kJ.kg^{-1}}]{4.18\,\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}} \underset{100°\mathrm{C}}{\text{Eau}} \xrightarrow{2260\,\mathrm{kJ.kg^{-1}}} \underset{100°\mathrm{C}}{\text{Vapeur}}$$

• Phénomènes de diffusion

Loi de Stephan : $\mathscr{P}_{tot} = \sigma\,\mathrm{T}^4$ Loi de Wien : $\mathrm{T}\,\lambda_{max} \approx 2800\ \mathrm{K}.\mu m$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0\ (\textit{conservation}) \qquad \underset{part.m^{-3}}{\vec{j}_n} = -\mathrm{D}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{C}\ (\text{Fick}) \qquad \underset{\mathrm{W}.m^{-2}}{\vec{j}_\mathrm{Q}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}\ (\text{Fourier})$$