◇ Opérateurs différentiels

• Opérateur gradient

$$\mathrm{dU} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \vec{\nabla}\mathrm{U} \text{ où (en cartésiennes) } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Formule du gradient : } \oiint_{(\Sigma)} \mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$$

• Opérateur divergence

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a}(\mathrm{M},t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \mathrm{div}\,\vec{a}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau \;, \forall \mathrm{V}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

• Opérateur rotationnel

$$\oint_{(\mathscr{C})} \vec{a}(\mathrm{M},t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{(\mathscr{S})} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(\mathrm{M},t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

• Opérateur laplacien

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) \qquad \vec{\Delta}\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \nabla^2 \vec{a}$$

$$\text{En cartésiennes : } \Delta \mathrm{U} = \nabla^2 \mathrm{U} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2} \qquad \vec{\Delta}\vec{a} \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

• Quelques formules de calcul

⊛ À savoir par coeur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) = 0 \qquad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\vec{a}$$

⊛ À savoir retrouver :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{U\,V}) = \mathrm{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} + \mathrm{V}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \qquad \mathrm{div}\,(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$$

• Dérivée particulaire

$$\frac{\mathrm{D}\vec{a}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{a}) = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{a^2}{2}\right) - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$$

◇ Éléctromagnétisme

• Équations de Maxwell

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M};t) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \mathrm{E}(\mathrm{M};t) = -\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}(\mathrm{M};t)$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M};t) = \frac{\rho(\mathrm{M};t)}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \mathrm{B}(\mathrm{M};t) = \mu_0\,\vec{j}(\mathrm{M};t) + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t}(\mathrm{M};t)$$

◇ Mécanique des fluides

• Statique des fluides

⊛ Relation fondamentale de la statique des fluides et applications : *(Signes à adapter)*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_p} = -\mathrm{P}\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} = \overrightarrow{f_{vol}} \qquad \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g \qquad \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}_0\,\exp\left(\frac{-\mathrm{M}_{air}g\,z}{\mathrm{RT}_0}\right)$$

⊛ Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{A}} = -\rho\mathrm{V}\,g$

• Cinématique des fluides

⊛ Conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0 \qquad \rho = \mathrm{C}^{ste} \;\rightarrow \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \;\rightarrow \vec{v}\cdot\vec{\mathrm{S}} = \mathrm{C}^{ste}$$

⊛ Vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$

• La viscosité

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_{viscosit\acute{e}}} = \eta\frac{\mathrm{dV}_x}{\mathrm{d}y}\mathrm{dS}\,\vec{x} \qquad \overrightarrow{f_{vol/viscosit\acute{e}}} = \eta\,\Delta\vec{v} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (m^2.s^{-1})$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} + \rho\,\vec{g} + \eta\,\Delta\vec{v} \qquad \text{Navier-Stockes}$$

On en déduit : Bernouilli (permanent, parfait, incompressible, LdC/irrotationnel)

$$\rho\frac{v^2}{2} + \mathrm{P} + \rho g z = \mathrm{C}^{ste}$$

$$\overrightarrow{f_{flu\rightarrow sph\grave{e}re}} = -6\pi\eta\,r\,\vec{v} \qquad \mathrm{Re} = \frac{rv}{\nu} \qquad \overrightarrow{f_{flu\rightarrow objet}} = \frac{1}{2}\rho\,v^2\,\mathrm{S}\,\mathrm{C}_x \text{ (coeff trainée)}$$

• Ondes acoustiques

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\chi_\mathrm{S}} \qquad c = \sqrt{\frac{\gamma\mathrm{RT}}{\mathrm{M}}} \qquad \mathrm{P} = \mathcal{Z}\,v \quad \mathcal{Z} = \rho_0 c$$

$$\mathrm{E} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_0 v^2}_{\substack{\text{énergie}\\ \text{cinétique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\chi_\mathrm{S}p^2}_{\substack{\text{énergie}\\ \text{élastique}}}$$

◇ Thermodynamique

• Coefficients thermo-élastiques

$$\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P \text{ Dilatation thermique} \qquad \chi_T = \frac{-1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T \text{ Compressibilité isotherme}$$

• Equations d'état

$$PV = nRT \qquad \left(P + \frac{n^2}{V^2}a\right)(V - nb) = nRT$$

• Capacités thermiques

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V \leftrightarrow dU = C_V\, dT \qquad C_P = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P \leftrightarrow dH = C_P\, dT$$

$$C_P - C_V = nR \qquad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

• Loi de Laplace

$$TV^{\gamma-1} = C^{ste} \qquad PV^{\gamma} = C^{ste'} \qquad T^{\gamma}P^{1-\gamma} = C^{ste''}$$

• Fonctions d'état

$$H = U + PV \qquad G = H - TS \qquad F = U - TS$$

$$dU = T\,dS - P\,dV \qquad dH = T\,dS + V\,dP \qquad dF = -S\,dT - P\,dV \qquad dG = -S\,dT + V\,dP$$

• Formule de Clapeyron

$$h_2 - h_1 = T(v_2 - v_1)\left(\frac{dP}{dT}\right)_{éq}$$

$$\underset{0°C}{\text{Glace}} \xrightarrow{334\,\text{kJ.kg}^{-1}} \underset{0°C}{\text{Eau}} \xrightarrow[\textit{donc}\ 418\,\text{kJ.kg}^{-1}]{4.18\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} \underset{100°C}{\text{Eau}} \xrightarrow{2260\,\text{kJ.kg}^{-1}} \underset{100°C}{\text{Vapeur}}$$

• Phénomènes de diffusion

Loi de Stephan : $\mathcal{P}_{tot} = \sigma\, T^4$ Loi de Wien : $T\,\lambda_{max} \approx 2800$ K.μm

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0\ (\textit{conservation}) \qquad \underset{part.m^{-3}}{\vec{j}_n} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,C\ (\text{Fick}) \qquad \underset{W.m^{-2}}{\vec{j}_Q} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T\ (\text{Fourier})$$