◇ Optique

• Optique géométrique

⊛ Prisme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \qquad n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

⊛ Miroirs sphériques :

$$\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad \overline{FA}\,\overline{FA'} = FS^2 \text{ (Newton)} \qquad \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF}} \text{ (Descartes)}$$

⊛ Lentilles :

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \qquad \overline{FA}\,\overline{FA'} = -f'^2 \text{ (Newton)} \qquad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \text{ (Descartes)}$$

• Modèle scalaire de la lumière

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega \qquad \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_{vide}}(SM) + \phi_S \qquad \delta = p\lambda$$

• Trous d'Young

$$\delta = \frac{2ax}{D} \qquad i = \frac{\lambda D}{2a}$$

• Michelson

⊛ Coin d'air : $\delta = 2e = 2\alpha x \qquad i = \frac{\lambda}{2\alpha}$

⊛ Lame d'air : $\delta = 2e\cos i$

⊛ Contraste/Visibilité : $\mathcal{C} = \frac{E_{max}-E_{min}}{E_{max}+E_{min}}$

• Diffraction

$$\sin i' - \sin i = pn\lambda = p\frac{\lambda}{d}$$

◇ Mécanique

• Mouvements dans les champs $\vec{\mathrm{E}}$ et $\vec{\mathrm{B}}$

$$\vec{f}_{\text{Laplace}} = q\left(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}}\right) \qquad \mathrm{E}p_{\grave{e}l} = q\mathrm{V} + \mathrm{C}^{ste}$$

• Mouvement à forces centrales

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{k}{r^2} \qquad \mathrm{E}_p = \frac{k}{r} \qquad r^2\dot{\theta} = \mathrm{C}^{ste} \text{ Vitesse aréolaire} \qquad \frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = \mathrm{C}^{ste} \qquad v_{lib} = \sqrt{2}v_{sat} = \sqrt{2\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R_T}}}$$

• Changements de référentiels

$$\vec{v}_e = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}} \qquad \vec{f}_{ie} = m\Omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HM}} \qquad \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r$$

• Réduction du problème à 2 corps

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r = \overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} \qquad \mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\ (\textit{masse réduite}) \qquad \mu\ddot{\vec{v}} = f_{\mathrm{G}}(r)\vec{e}_r \Rightarrow \vec{r}(t)\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) \\ m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) \end{cases}$$

• Cinétique des systèmes matériels

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\,\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{T}} \qquad \vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{T}} + \vec{a}_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{T}} + \frac{v^2}{\mathbb{R}}\vec{\mathrm{N}}$$

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}} = \vec{\sigma}_{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge m\,\vec{v}_g \text{ (Varignon)} \qquad \vec{\sigma}_{\mathrm{A}} = \vec{\sigma}^{\star} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} \wedge m\,\vec{v}_g \qquad \mathrm{E}_c = \mathrm{E}_c^{\star} + \frac{1}{2}m\,v_{\mathrm{G}}^2 \text{ (König)}$$

• Cinématique du solide

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{Q}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{S}} \qquad \sigma_\Delta = \mathcal{J}_\Delta\,\Omega \qquad \mathrm{E}_c = \mathcal{J}_\Delta\frac{\Omega^2}{2} \qquad \overrightarrow{\mathrm{M_A}} = \overrightarrow{\mathrm{M_B}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \vec{\mathrm{F}}$$

• Lois de Coulomb

Glissement (opposé au mouvement) : $\left\|\vec{\mathrm{T}}\right\| = f\,\left\|\vec{\mathrm{N}}\right\|$ Non glissement : $\left\|\vec{\mathrm{T}}\right\| \leq f\,\left\|\vec{\mathrm{N}}\right\|$

• Puissance et travail

$$\mathcal{P}_{glisseur} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{v}_{pt\ app} \qquad \mathcal{P}_{couple} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Gamma} \qquad \delta\mathrm{W}_{conserv} = -\mathrm{dE}_p x$$

$$\frac{\mathrm{dE}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\mathrm{W}_{int}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta\mathrm{W}_{ext}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

◇ Opérateurs différentiels

• Opérateur gradient

$$\mathrm{dU} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} = \vec{\nabla}\mathrm{U} \text{ où (en cartésiennes) } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Formule du gradient : $\displaystyle\oiint_{(\Sigma)} \mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$

• Opérateur divergence

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iiint_{(\mathrm{V})} \mathrm{div}\,\vec{a}(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau\ ,\forall \mathrm{V}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$$

• Opérateur rotationnel

$$\oint_{(\mathscr{C})} \vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{(\mathscr{S})} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\wedge\vec{a}$$

• Opérateur laplacien

$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) \qquad \vec{\Delta}\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \nabla^2\vec{a}$$

En cartésiennes : $\displaystyle\Delta\mathrm{U} = \nabla^2\mathrm{U} = \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z^2}$ $\qquad \vec{\Delta}\vec{a}\begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

• Quelques formules de calcul

⊛ À savoir par coeur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right) = 0 \qquad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\vec{a}$$

⊛ À savoir retrouver :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{U\,V}) = \mathrm{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} + \mathrm{V}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U} \qquad \mathrm{div}\,(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$$

• Dérivée particulaire

$$\frac{\mathrm{D}\vec{a}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{a}) = \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{a^2}{2}\right) - \vec{a}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$$

◇ Éléctromagnétisme

• Électrocinétique

$$i = C\frac{dU_c}{dt} \qquad q = CU \qquad U = L\frac{di}{dt} \qquad e = r\eta \text{ (Thèvenin} \sim \text{Norton)}$$

Ampli Op : **Idéal** $\Rightarrow i^{\oplus} = i^{\ominus} = 0$ et en régime **linéaire** $\Rightarrow V^{\oplus} = V^{\ominus}$

$$\tau = RC = \frac{L}{R} \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CE^2 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

• Filtres

$$x = \frac{\omega}{\omega_c} \qquad \underline{H}(\jmath\omega) = \frac{\underline{H_0}}{1+\jmath x} \qquad \underline{H}(\jmath\omega) = \frac{\underline{H_0}\,\jmath x}{1+\jmath x}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \underline{H}(\jmath\omega) = \frac{\underline{H_0}}{1-x^2+\jmath\frac{x}{Q}} \qquad \underline{H}(\jmath\omega) = \frac{-x^2\,\underline{H_0}}{1-x^2+\jmath\frac{x}{Q}} \qquad \underline{H}(\jmath\omega) = \frac{\underline{H_0}}{1+\jmath Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad \Delta x = \frac{1}{Q}$$

⊛ Résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si $Q \gg 1 \Rightarrow x_r \simeq 1$ et $\beta = Q$ la surtension de résonance

• Puissance en régime sinusoïdal

$$\mathcal{P}_{instant} = U\,i \qquad \mathcal{P}_{moy} = U_{eff}I_{eff}\cos\varphi = \mathfrak{Re}(\underline{\mathcal{Z}})\,I_{eff}^2 = \mathfrak{Re}(\underline{Y})\,U_{eff}^2 =$$

⊛ Adaptation d'impédance : $\mathcal{Z}_c = \mathcal{Z}_g^\star$

• Équations de Maxwell

$$\operatorname{div}\vec{B}(M;t) = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,E(M;t) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M;t)$$

$$\operatorname{div}\vec{E}(M;t) = \frac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,B(M;t) = \mu_0\,\vec{j}(M;t) + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M;t)$$

• Induction

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl} \qquad e = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = L\,i$$

◇ Mécanique des fluides

• Statique des fluides

⊛ Relation fondamentale de la statique des fluides et applications :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_p} = \mathrm{P}\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} = \overrightarrow{f_{vol}} \qquad \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = -\rho\,\mathrm{g} \qquad \mathrm{P}(z) = \mathrm{P}_0\,\exp\left(\frac{-\mathrm{M}_{air}\mathrm{g}\,z}{\mathrm{RT}_0}\right)$$

⊛ Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{A}} = -\rho\,\mathrm{V}\,\mathrm{g}$

• Cinématique des fluides

⊛ Conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0 \qquad \rho = \mathrm{C}^{ste} \to \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \to \vec{v}\cdot\vec{\mathrm{S}} = \mathrm{C}^{ste}$$

⊛ Vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$

• La viscosité

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f_{viscosité}} = \eta\frac{\mathrm{dV}_x}{\mathrm{d}y}\mathrm{dS}\,\vec{x} \qquad \overrightarrow{f_{vol/viscosité}} = \eta\,\Delta\vec{v} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (m^2.s^{-1})$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} + \rho\,\vec{g} + \eta\,\Delta\vec{v} \qquad \text{Navier-Stockes}$$

On en déduit : Bernouilli (permanent, parfait, incompressible, LdC/irrotationnel)

$$\rho\frac{v^2}{2} + \mathrm{P} + \rho g z = \mathrm{C}^{ste}$$

$$\overrightarrow{f_{flu\to sphère}} = -6\pi\eta\,r\,\vec{v} \qquad \mathrm{Re} = \frac{rv}{\nu} \qquad \overrightarrow{f_{flu\to objet}} = \frac{1}{2}\rho\,v^2\,\mathrm{S}\,\mathrm{C}_x \text{ (coeff trainée)}$$

• Ondes acoustiques

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\chi_S} \qquad c = \sqrt{\frac{\gamma\mathrm{RT}}{\mathrm{M}}} \qquad \mathrm{P} = \mathcal{Z}\,v \quad \mathcal{Z} = \pm\rho_0 c$$

$$\mathrm{E} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_0 v^2}_{\substack{\text{énergie}\\ \text{cinétique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\chi_S p^2}_{\substack{\text{énergie}\\ \text{élastique}}}$$

◇ Thermodynamique

• Coefficients thermo-élastiques

$$\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P \text{ Dilatation thermique} \qquad \chi_T = \frac{-1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T \text{ Compressibilité isotherme}$$

• Equations d'état

$$PV = nRT \qquad \left(P + \frac{n^2}{V^2}a\right)(V - nb) = nRT$$

• Capacités thermiques

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V \leftrightarrow dU = C_V\,dT \qquad C_P = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P \leftrightarrow dH = C_P\,dT$$

$$C_P - C_V = nR \qquad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

• Loi de Laplace

$$TV^{\gamma-1} = C^{ste} \qquad PV^{\gamma} = C^{ste'} \qquad T^{\gamma}P^{1-\gamma} = C^{ste''}$$

• Fonctions d'état

$$H = U + PV \qquad G = H - TS \qquad F = U - TS \qquad \delta W = -P_{ext}\,dV$$

$$dU = T\,dS - P\,dV \qquad dH = T\,dS + V\,dP \qquad dF = -S\,dT - P\,dV \qquad dG = -S\,dT + V\,dP$$

• Formule de Clapeyron

$$h_2 - h_1 = T(v_2 - v_1)\left(\frac{dP}{dT}\right)_{éq}$$

$$\underset{0°C}{\text{Glace}} \xrightarrow{334\,kJ.kg^{-1}} \underset{0°C}{\text{Eau}} \xrightarrow[\textit{donc } 418\,kJ.kg^{-1}]{4.18\,kJ.kg^{-1}.K^{-1}} \underset{100°C}{\text{Eau}} \xrightarrow{2260\,kJ.kg^{-1}} \underset{100°C}{\text{Vapeur}}$$

• Phénomènes de diffusion

Loi de Stephan : $\mathcal{P}_{tot} = \sigma\, T^4$ Loi de Wien : $T\,\lambda_{max} \approx 2800\ K.\mu m$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \ (\textit{conservation}) \qquad \underset{part.m^{-3}}{\vec{j}_n} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,C \ (\text{Fick}) \qquad \underset{W.m^{-2}}{\vec{j}_Q} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T \ (\text{Fourier})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\Delta T \ (\textit{eq chaleur}) \qquad \Phi_{1\to 2} = hS(T_1 - T_2) \ (\text{Newton})$$