

◇ Mécanique

- Mouvement à forces centrales
- Réduction du problème à 2 corps

$$\vec{r} = r \vec{e}_r = \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ (masse réduite)} \quad \mu \ddot{\vec{v}} = f_G(r) \vec{e}_r \Rightarrow \vec{r}(t) \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) \\ m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t) \end{cases}$$

- Cinétique des systèmes matériels

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_g \text{ (VARIGNON)} \quad \vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_g \quad E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2 \text{ (KÖNIG)}$$

- Cinématique du solide

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}_S \quad \sigma_\Delta = \mathcal{J}_\Delta \Omega \quad E_c = \mathcal{J}_\Delta \frac{\Omega^2}{2} \quad \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

- Lois de COULOMB

$$\text{Glissement (opposé au mouvement)} : \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| \quad \text{Non glissement} : \|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$$

- Puissance et travail

$$\mathcal{P}_{\text{glisseur}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{pt \text{ app}} \quad \mathcal{P}_{\text{couple}} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Gamma} \quad \delta W_{\text{conserv}} = -dE_p$$
$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta W_{\text{int}}}{dt} + \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

◇ Opérateurs différentiels

• Opérateur gradient

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{\nabla} U \text{ où (en cartésiennes) } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Formule du gradient : } \oint_{(\Sigma)} U(M, t) \overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\text{grad}} U(M, t) d\tau$$

• Opérateur divergence

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{a}(M, t) d\tau, \forall V$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

• Opérateur rotationnel

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

• Opérateur laplacien

$$\Delta U = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right) \quad \vec{\Delta} \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \nabla^2 \vec{a}$$

$$\text{En cartésiennes : } \Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \vec{\Delta} \vec{a} \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \quad \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

• Quelques formules de calcul

⊗ À savoir par coeur :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right) = 0$$

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \right) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{a}) - \vec{\Delta} \vec{a}$$

⊗ À savoir retrouver :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (U V) = U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U$$

$$\text{div} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$$

• Dérivée particulaire

$$\frac{D \vec{a}}{Dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) (\vec{a}) = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{a^2}{2} \right) - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$$

◇ Électromagnétisme

• Équations de MAXWELL

$$\operatorname{div} \vec{B}(M; t) = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} E(M; t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M; t)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(M; t) = \frac{\rho(M; t)}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} B(M; t) = \mu_0 \vec{j}(M; t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M; t)$$

• Induction

◇ Mécanique des fluides

● Statique des fluides

⊗ Relation fondamentale de la statique des fluides et applications : (*Signes à adapter*)

$$\overrightarrow{df_p} = -P \overrightarrow{dS} \quad \overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{f_{vol}} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad P(z) = P_0 \exp\left(\frac{-M_{air} g z}{RT_0}\right)$$

⊗ Poussée d'ARCHIMÈDE : $\vec{\Pi} = \vec{P}_A = -\rho V g$

● Cinématique des fluides

⊗ Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad \rho = C^{ste} \rightarrow \text{div } \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{S} = C^{ste}$$

⊗ Vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$

● La viscosité

$$\overrightarrow{df_{viscosité}} = \eta \frac{dV_x}{dy} dS \vec{x} \quad \overrightarrow{f_{vol/viscosité}} = \eta \Delta \vec{v} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (m^2.s^{-1})$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad \text{NAVIER-STOCKES}$$

On en déduit : BERNOULLI (permanent, parfait, incompressible, LdC/irrotationnel)

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = C^{ste}$$

$$\overrightarrow{f_{flu \rightarrow sphère}} = -6\pi\eta r \vec{v} \quad \text{Re} = \frac{rv}{\nu} \quad \overrightarrow{f_{flu \rightarrow objet}} = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x \text{ (coeff trainée)}$$

● Ondes acoustiques

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad P = \mathcal{Z} v \quad \mathcal{Z} = \rho_0 c$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \rho_0 v^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{2} \chi_S p^2}_{\text{énergie élastique}}$$

énergie cinétique énergie élastique

◇ Thermodynamique

● Coefficients thermo-élastiques

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \text{ Dilatation thermique} \quad \chi_T = \frac{-1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \text{ Compressibilité isotherme}$$

● Equations d'état

$$PV = nRT \quad \left(P + \frac{n^2}{V^2} a \right) (V - nb) = nRT$$

● Capacités thermiques

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \leftrightarrow dU = C_V dT \quad C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P \leftrightarrow dH = C_P dT$$
$$C_P - C_V = nR \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

● Loi de LAPLACE

$$TV^{\gamma-1} = C^{ste} \quad PV^\gamma = C^{ste'} \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{ste''}$$

● Fonctions d'état

$$H = U + PV \quad G = H - TS \quad F = U - TS$$
$$dU = T dS - P dV \quad dH = T dS + V dP \quad dF = -S dT - P dV \quad dG = -S dT + V dP$$

● Formule de CLAPEYRON

$$h_2 - h_1 = T(v_2 - v_1) \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{éq}}$$
$$\text{Glace}_{0^\circ\text{C}} \xrightarrow{334 \text{ kJ.kg}^{-1}} \text{Eau}_{0^\circ\text{C}} \xrightarrow[\text{donc } 418 \text{ kJ.kg}^{-1}]{4.18 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} \text{Eau}_{100^\circ\text{C}} \xrightarrow{2260 \text{ kJ.kg}^{-1}} \text{Vapeur}_{100^\circ\text{C}}$$

● Phénomènes de diffusion

$$\text{Loi de STEPHAN : } \mathcal{P}_{tot} = \sigma T^4 \quad \text{Loi de WIEN : } T \lambda_{max} \approx 2800 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \text{ (conservation)} \quad \vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} C \text{ (FICK)} \quad \vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \text{ (FOURIER)}$$

$\text{part.m}^{-3} \quad \text{W.m}^{-2}$