Отчёт по лабораторной работе №5

Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту

Милёхин Александр НПМмд-02-21

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Изучение алгоритмов Ферма, Соловэя-Штрассена, Миллера-Рабина.

2 Теоретические сведения

Для построения многих систем защиты информации требуются простые числа большой разрядности. В связи с этим актуальной является задача тестирования на простоту натуральных чисел.

Существует два типа критериев простоты: детерминированные и вероятностные. Детерминированные тесты позволяют доказать, что тестируемое число - простое. Практически применимые детерминированные тесты способны дать положительный ответ не для каждого простого числа, поскольку используют лишь достаточные условия простоты. Детерминированные тесты более полезны, когда необходимо построить большое простое число, а не проверить простоту, скажем, некоторого единственного числа. В отличие от детерминированных, вероятностные тесты можно эффективно использовать для тестирования отдельных чисел, однако их результаты, с некоторой вероятностью, могут быть неверными. К счастью, ценой количества повторений теста с модифицированными исходными данными вероятность ошибки можно сделать как угодно малой. На сегодня известно достаточно много алгоритмов проверки чисел на простоту. Несмотря на то, что большинство из таких алгоритмов имеет субэкспоненциальную оценку сложности, на практике они показывают вполне приемлемую скорость работы. На практике рассмотренные алгоритмы чаще всего по отдельности не применяются. Для проверки числа на простоту используют либо их комбинации, либо детерминированные тесты на простоту. Детерминированный алгоритм всегда действует по одной и той же схеме и гарантированно решает поставленную задачу. Вероятностный алгоритм использует генератор случайных чисел и дает

не гарантированно точный ответ. Вероятностные алгоритмы в общем случае не менее эффективны, чем детерминированные (если используемый генератор случайных чисел всегда дает набор одних и тех же чисел, возможно, зависящих от входных данных, то вероятностный алгоритм становится детерминированным).

2.1 Тест Ферма

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
- Выход. «Число n, вероятно, простое» или «Число n составное».

1. Выбрать случайное целое число $a, 2 \leq a \leq n-2$.
2. Вычислить $r = a^{n-1}(mod n)$
3. При $r = 1$ результат: «Число n, вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное».

2.2 Тест Соловэя-Штрассена

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.
- Выход. «Число n, вероятно, простое» или «Число n составное».

1. Выбрать случайное целое число $a, 2 \leq a \leq n-2$.
2. Вычислить $r = a^{(\frac{n-1}{2})}(mod n)$
3. При $r \neq 1$ и $r \neq n-1$ результат: «Число n составное».
4. Вычислить символ Якоби $s = (\frac{a}{n})$
5. При $r = s(mod n)$ результат: «Число n, вероятно, простое». В противном случае результат: «Число n составное».

2.3 Тест Миллера-Рабина

- Вход. Нечетное целое число $n \geq 5$.

- Выход. «Число n, вероятно, простое» или «Число n составное».

1. Представить $n-1$ в виде $n-1=2^s r$, где r - нечетное число
2. Выбрать случайное целое число $a, 2 \leq a \leq n-2$.
3. Вычислить $y = a^r (mod n)$
4. При $y \neq 1$ и $y \neq n-1$ выполнить действия
    - Положить $j = 1$
    - Если $j \leq s-1$ и $y \neq n-1$ то
        - Положить $y = y^2 (mod n)$
        - При $y = 1$ результат: «Число n составное».
        - Положить $j = j+1$
    - При $y \neq n-1$ результат: «Число n составное».
5. Результат: «Число n, вероятно, простое».

3 Выполнение работы

3.1 Реализация алгоритмов на языке Python

```
import random

def ferma(n, count):
    for i in range(count):
        a = random.randint(2, n-1)
        if (a ** (n-1) % n != 1):
            print("Число n составное")
            return False
    print("Число n, вероятно, простое")
    return True

def find_jacobian(a, n):
    if (a == 0):
        return 0
    ans = 1
    if (a < 0):
        a = -a
        if (n % 4 == 3):
            ans = -ans
    if (a == 1):
```

```
        return ans
    while(a):
        if (a < 0):
            a = -a
            if (n % 4 == 3):
                ans = -ans
        while (a % 2 == 0):
            a = a // 2
            if (n % 8 == 3 or n % 8 == 5):
                ans = -ans
        a, n = n, a
        if (a % 4 == 3 and n % 4 == 3):
            ans = -ans
        a = a % n
        if (a > n // 2):
            a = a - n
    if (n == 1):
        return ans
    return 0

def modul(base, exponent, mod):
    x = 1
    y = base
    while (exponent > 0):
        if (exponent % 2 == 1):
            x = (x * y) % mod
        y = (y * y ) % mod
        exponent = exponent // 2
    return x % mod
```

```
def solovay_strassen(p, iter):
    if (p < 2):
        return False
    if (p != 2 and p % 2 == 0):
        return False
    for i in range(iter):
        a = random.randrange(p-1) + 1
        jacobian = (p + find_jacobian(a, p)) % p
        mod = modul(a, (p - 1) / 2, p)
        if (jacobian == 0 or mod != jacobian):
            return False
    return True

def miller_rabin(n):
    if n != int(n):
        print("Число n составное")
        return False
    n = int(n)
    if n == 0 or n == 1 or n == 4 or n == 6 or n == 8 or n == 9:
        print("Число n составное")
        return False
    if n == 2 or n == 3 or n == 5 or n == 7:
        print("Число n, вероятно, простое")
        return True
    s = 0
    d = n - 1
    while d % 2 == 0:
        d >>= 1
```

```
        s += 1
    assert(2 ** s * d == n - 1)
    def probn_sost(a):
        if pow(a, d, n) == 1:
            print("Число n составное")
            return False
        for i in range(s):
            if pow(a, 2 ** i * d, n) == n - 1:
                print("Число n составное")
                return False
        print("Число n, вероятно, простое")
        return True
    for i in range(8):
        a = random.randrange(2, n)
        if probn_sost(a):
            print("Число n составное")
            return False
    print("Число n, вероятно, простое")
    return True

def main():
    n = int(input("Введите число для теста Ферма: "))
    print("Тест Ферма для числа: ", n)
    ferma(n, 500)
    print("Тест Миллера-Рабина")
    n = int(input("Введите число для теста Миллера-Рабина: "))
    miller_rabin(n)
    n = int(input("Введите число для теста Соловэя-Штрассена: "))
    if (solovay_strassen(n, 500)):
```

```
        print (n, "Число n, вероятно, простое")
    else:
        print (n, "Число n составное")

main()
```

3.2 Контрольный пример

```
main()
```

```
Введите число для теста Ферма: 5
Тест Ферма для числа:  5
Число n, вероятно, простое
Тест Миллера-Рабина
Введите число для теста Миллера-Рабина: 5
Число n, вероятно, простое
Введите число для теста Соловэя-Штрассена: 5
5 Число n, вероятно, простое
```

Figure 3.1: Пример работы алгоритмов

4 Выводы

Я изучил алгоритмы Ферма, Соловэя-Штрассена, Миллера-Рабина, а также реализовал данные алгоритмы программно на языке Python.

Список литературы

1. Алгоритмы тестирования на простоту и факторизации
2. Алгоритм проверки на простоту