

---

# Целочисленная арифметика многократной точности

---

Милёхин Александр НПМмд-02-21

# Цель лабораторной работы

---

Ознакомление с алгоритмами целочисленной арифметики многократной точности, а также их последующая программная реализация.

# Длинная арифметика

---

Высокоточная (длинная) арифметика — это операции (базовые арифметические действия, элементарные математические функции и прочее) над числами большой разрядности (многоразрядными числами), то есть числами, разрядность которых превышает длину машинного слова универсальных процессоров общего назначения (более 128 бит).

## Сложение неотрицательных целых чисел

---

- Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .
  - Выход. Сумма  $w = w_0 w_1 \dots w_n$ , где  $w_0$ - цифра переноса, всегда равная 0 либо 1
1. Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $j$  идет по разрядам,  $k$  следит за переносом).
  2. Присвоить  $w_j = (u_j + v_j + k) \pmod{b}$ , где  $k = \left\lfloor \frac{u_j + v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
  3. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то присвоить  $w_0 = k$  и результат:  $w$ .

# Вычитание неотрицательных целых чисел

- 
- Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n$ ,  $u > v$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .
  - Выход. Разность  $w = w_0 w_1 \dots w_n = u - v$ .
- Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $k$  – заём из старшего разряда).
  - Присвоить  $w_j = (u_j - v_j + k) \pmod{b}$ ;  $k = \left\lfloor \frac{u_j - v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
  - Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

# Умножение неотрицательных целых чисел столбиком

- Вход. Числа  $u = u_1u_2 \dots u_n, v = v_1v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .
- 
- Выход. Произведение  $w = uv = w_1w_2 \dots w_{m+n}$ .
  - Выполнить присвоения:  $w_{m+1} = 0, w_{m+2} = 0, \dots, w_{m+n} = 0, j = m$  ( $j$  перемещается по номерам разрядов числа  $v$  от младших к старшим)
  - Если  $v_j = 0$ , то присвоить  $w_j = 0$  и перейти к шагу 6.
  - Присвоить  $i = n, k = 0$  (значение  $i$  идет по номерам разрядов числа  $u$ ,  $k$  отвечает за перенос).
  - Присвоить  $t = u_i \cdot v_j + w_{i+j} + k, w_{i+j} = t \pmod{b}, k = \left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$ .
  - Присвоить  $i = i - 1$ . Если  $i > 0$ , то возвращаемся на шаг 4, иначе присвоить  $w_j = k$ .
  - Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то вернуться на шаг 2. Если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

# Быстрый столбик

- 
- Вход. Числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .
  - Выход. Произведение  $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$ .
1. Присвоить  $t = 0$ .
  2. Для  $s$  от 0 до  $m + n - 1$  с шагом 1 выполнить шаги 3 и 4.
  3. Для  $i$  от 0 до  $s$  с шагом 1 выполнить присвоение  $t = t + u_{n-i} \cdot v_{m-s+i}$ .
  4. Присвоить  $w_{m+n-s} = t \pmod{b}, t = \left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$ . Результат:  $w$ .

# Деление многоразрядных целых чисел

- Вход. Числа  $u = u_n \dots u_1 u_0, v = v_t \dots v_1 v_0, n \geq t \geq 1, v_t \neq 0$ .
  - Выход. Частное  $q = q_{n-1} \dots q_0$ , остаток  $r = r_t \dots r_0$ .
- 

1. Для  $j$  от 0 до  $n - t$  присвоить  $q_j = 0$ .
2. Пока  $u \geq vb^{n-t}$ , присвоить  $q_j = 0$ .
3. Для  $i = n, n - 1, t + 1$  выполнять пункты 3.1 – 3.4:
  - 3.1. если  $u_i \geq v_t$ , то присвоить  $q_{i-t-1} = b - 1$ , иначе присвоить  $q_{i-t-1} = \frac{u_i b + u_{i-1}}{v_t}$ .
  - 3.2. пока  $q_{i-t-1}(v_t b + v_{t-1}) > u_i b^2 + u_{i-1} b + u_{i-2}$  выполнять  $q_{i-t-1} = 1$ .
  - 3.3 присвоить  $u = u - q_{i-t-1} b^{i-t-1} v$ .
  - 3.4. если  $u < 0$ , то присвоить  $u = u + v b^{i-t-1}, q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$ .
4.  $r = u$ . Результат  $q$  и  $r$ .



# Результаты выполнения лабораторной работы

---

Я изучил алгоритмы целочисленной арифметики, а также реализовал их программно на языке Python.

---

**Спасибо за внимание**