

# **Лабораторная работа 4. Системы линейных уравнений**

**Отчет по лабораторной работе 4**

Милёхин Александр НПМмд-02-21

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>17</b>

# List of Figures

4.1	Расширенная матрица . . . . .	7
4.2	Элемент матрицы . . . . .	8
4.3	Вектор строки . . . . .	9
4.4	Преобразование матрицы. Шаг 1 . . . . .	9
4.5	Преобразование матрицы. Шаг 2 . . . . .	10
4.6	Получение единичной матрицы . . . . .	10
4.7	Более высокая точность записи десятичного числа .....	11
4.8	Короткая форма записи десятичного числа .....	11
4.9	Выделение матрицы и вектора .....	12
4.10	Вектор $x$ .....	13
4.11	Матрица $A$ .....	15
4.12	LU-разложение матрицы $A$ .....	16

# 1 Цель работы

Познакомиться с методами исследования систем линейных уравнений в Octave.

## **2 Теоретические сведения**

Вся теоретическая часть по выполнению лабораторной работы была взята из инструкции по лабораторной работе №4 (“Лабораторная работа №4. Описание”) на сайте: <https://esystem.rudn.ru/course/view.php?id=12766>

## **3 Задание**

Выполните работу и задокументируйте процесс выполнения.

## 4 Выполнение лабораторной работы

### 1. Метод Гаусса

Octave содержит сложные алгоритмы, встроенные для решения систем линейных уравнений.

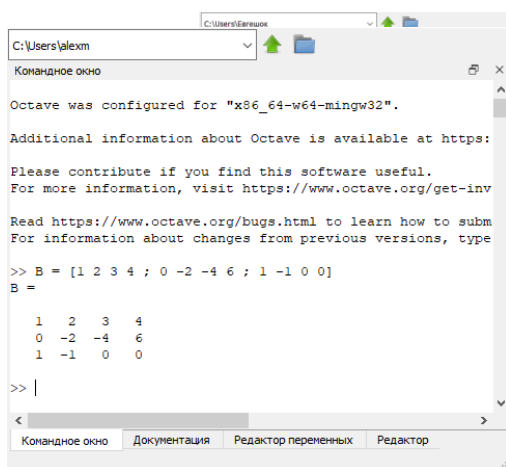
Для решения системы линейных уравнений:

$$Ax = b$$

методом Гаусса можно построить расширенную матрицу вида:

$$B = (A|b).$$

Рассмотрим расширенную матрицу.



```
C:\Users\alexm
Командное окно
Octave was configured for "x86_64-w64-mingw32".
Additional information about Octave is available at https:
Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit https://www.octave.org/get-inv
Read https://www.octave.org/bugs.html to learn how to subm
For information about changes from previous versions, type

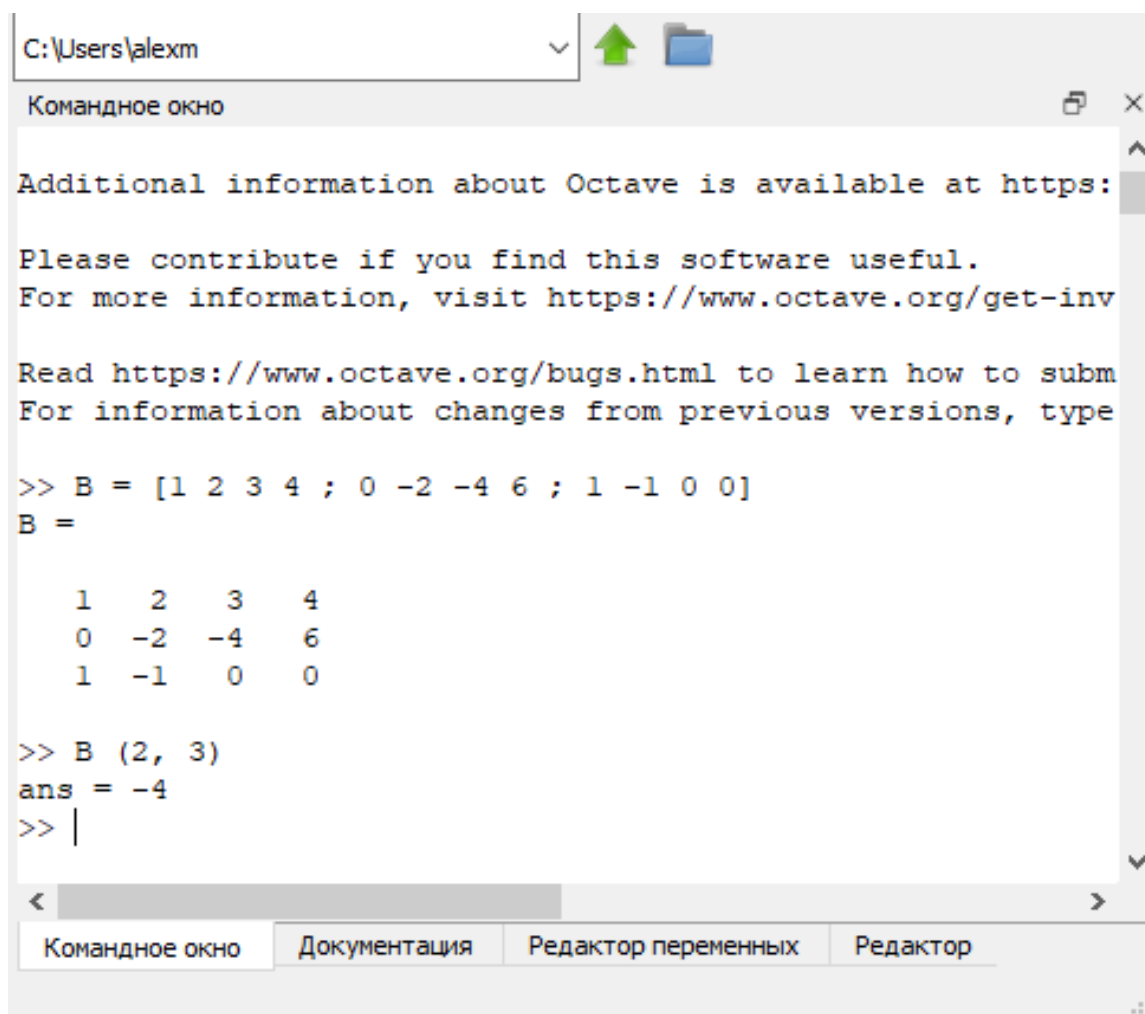
>> B = [1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0]
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1   -1    0    0

>> |
```

Figure 4.1: Расширенная матрица

Ее можно просматривать поэлементно.



The screenshot shows the Octave Command Window interface. The title bar indicates the user is 'alexm' and the window is titled 'Командное окно'. The main text area contains the following text and commands:

```
Additional information about Octave is available at https:
Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit https://www.octave.org/get-inv
Read https://www.octave.org/bugs.html to learn how to subm
For information about changes from previous versions, type

>> B = [1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0]
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1   -1    0    0

>> B (2, 3)
ans = -4
>> |
```

At the bottom, there is a tabbed interface with four tabs: 'Командное окно' (selected), 'Документация', 'Редактор переменных', and 'Редактор'.

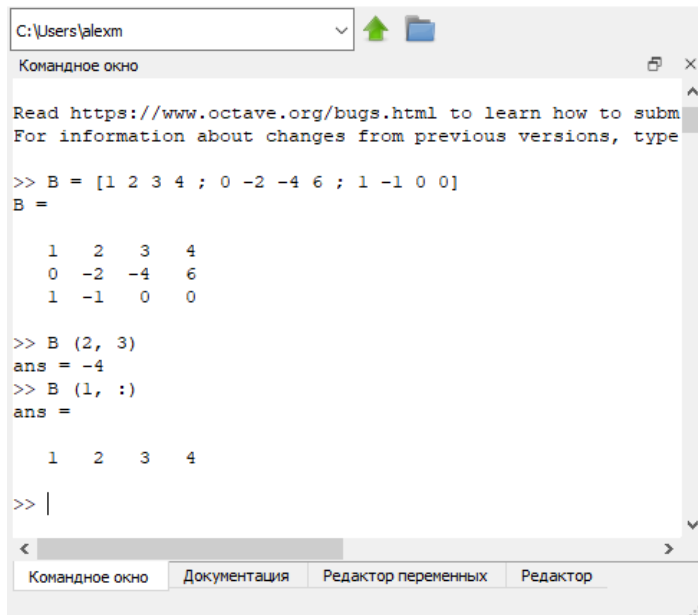
Figure 4.2: Элемент матрицы

Это скаляр, хранящийся в строке 2, столбце 3.

Также можно извлечь целый вектор строки или вектор столбца, используя оператор сечения. Сечение можно использовать для указания ограниченного диа-



пазона. Если не указано начальное или конечное значение, то результатом оператора является полный диапазон.



```
C:\Users\alexm
Командное окно
Read https://www.octave.org/bugs.html to learn how to submit bugs.
For information about changes from previous versions, type 'info'.

>> B = [1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0]
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1   -1    0    0

>> B (2, 3)
ans = -4
>> B (1, :)
ans =

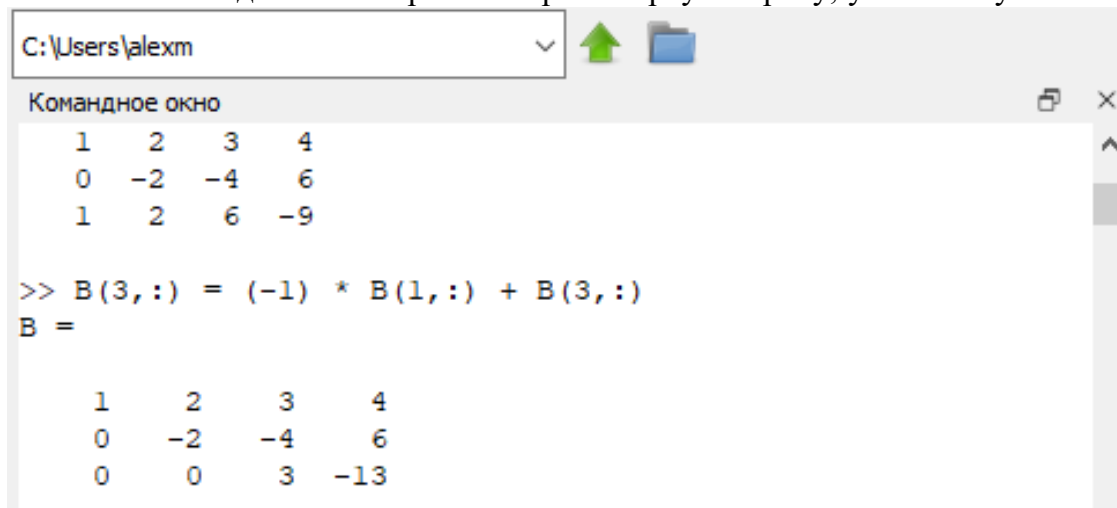
    1    2    3    4

>> |
```

Figure 4.3: Вектор строки

Реализуем теперь явно метод Гаусса.

Сначала добавим к третьей строке первую строку, умноженную на  $-1$ .



```
C:\Users\alexm
Командное окно

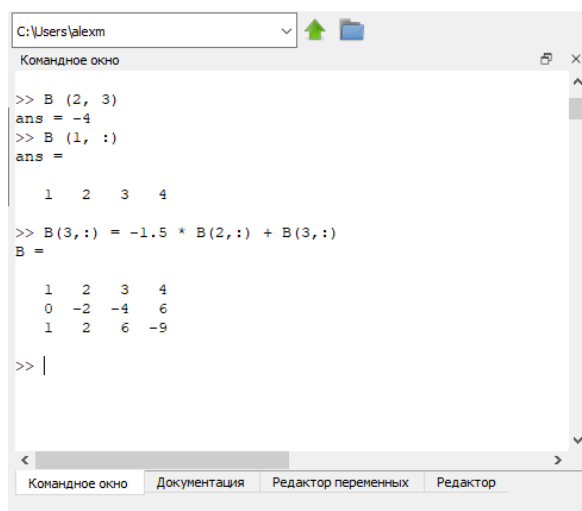
    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1    2    6   -9

>> B (3, :) = (-1) * B (1, :) + B (3, :)
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    0    0    3  -13
```

Figure 4.4: Преобразование матрицы. Шаг 1

Далее добавим к третьей строке вторую строку, умноженную на  $-1.5$ .



```
C:\Users\alexm
Командное окно

>> B (2, 3)
ans = -4
>> B (1, :)
ans =

    1    2    3    4

>> B(3,:) = -1.5 * B(2,:) + B(3,:)
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1    2    6   -9

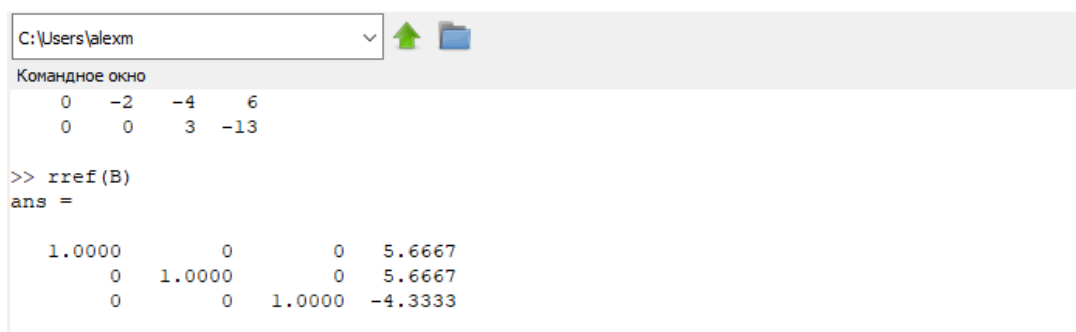
>> |
```

Figure 4.5: Преобразование матрицы. Шаг 2

Матрица теперь имеет треугольный вид. Очевидным образом получим ответ: 5.66667; 5.66667; -4.33333

Этот ответ был получен путем решения третьей строки матрицы, а впоследствии подставлением найденных элементов в другие строки матрицы. Либо этот ответ можно получить приведя матрицу к единичной (треугольной), цифры справа — это и есть ответ.

Конечно, Octave располагает встроенной командой для непосредственного поиска треугольной формы матрицы.



```
C:\Users\alexm
Командное окно

    0   -2   -4    6
    0    0    3  -13

>> rref(B)
ans =

    1.0000    0    0    5.6667
    0    1.0000    0    5.6667
    0    0    1.0000   -4.3333
```

Figure 4.6: Получение единичной матрицы

Следует обратить внимание, что все числа записываются в виде чисел с плавающей точкой (то есть десятичных дробей). Пять десятичных знаков отображаются по умолчанию. Переменные на самом деле хранятся с более высокой точностью, и при желании можно отобразить больше десятичных разрядов.

```

C:\Users\alexm
Командное окно

0   -2   -4    6
0    0    3  -13

>> rref(B)
ans =

    1.0000         0         0    5.6667
         0    1.0000         0    5.6667
         0         0    1.0000   -4.3333

>> format long
>> rref(B)
ans =

    1.0000000000000000         0         0    5.666666666666667
         0    1.0000000000000000         0    5.666666666666666
         0         0    1.0000000000000000   -4.333333333333333

>> |

```

Figure 4.7: Более высокая точность записи десятичного числа

Вернем предыдущий формат представления.

```

C:\Users\alexm
Командное окно

1   2   3   4
0  -2  -4   6
1   2   6  -9

>> B(3,:) = (-1) * B(1,:) + B(3,:)
B =

    1   2   3   4
    0  -2  -4   6
    0   0   3  -13

>> rref(B)
ans =

    1.0000         0         0    5.6667
         0    1.0000         0    5.6667
         0         0    1.0000   -4.3333

>> format long
>> rref(B)
ans =

    1.0000000000000000         0         0    5.666666666666666
         0    1.0000000000000000         0    5.666666666666666
         0         0    1.0000000000000000   -4.333333333333333

>> format short
>> |

```

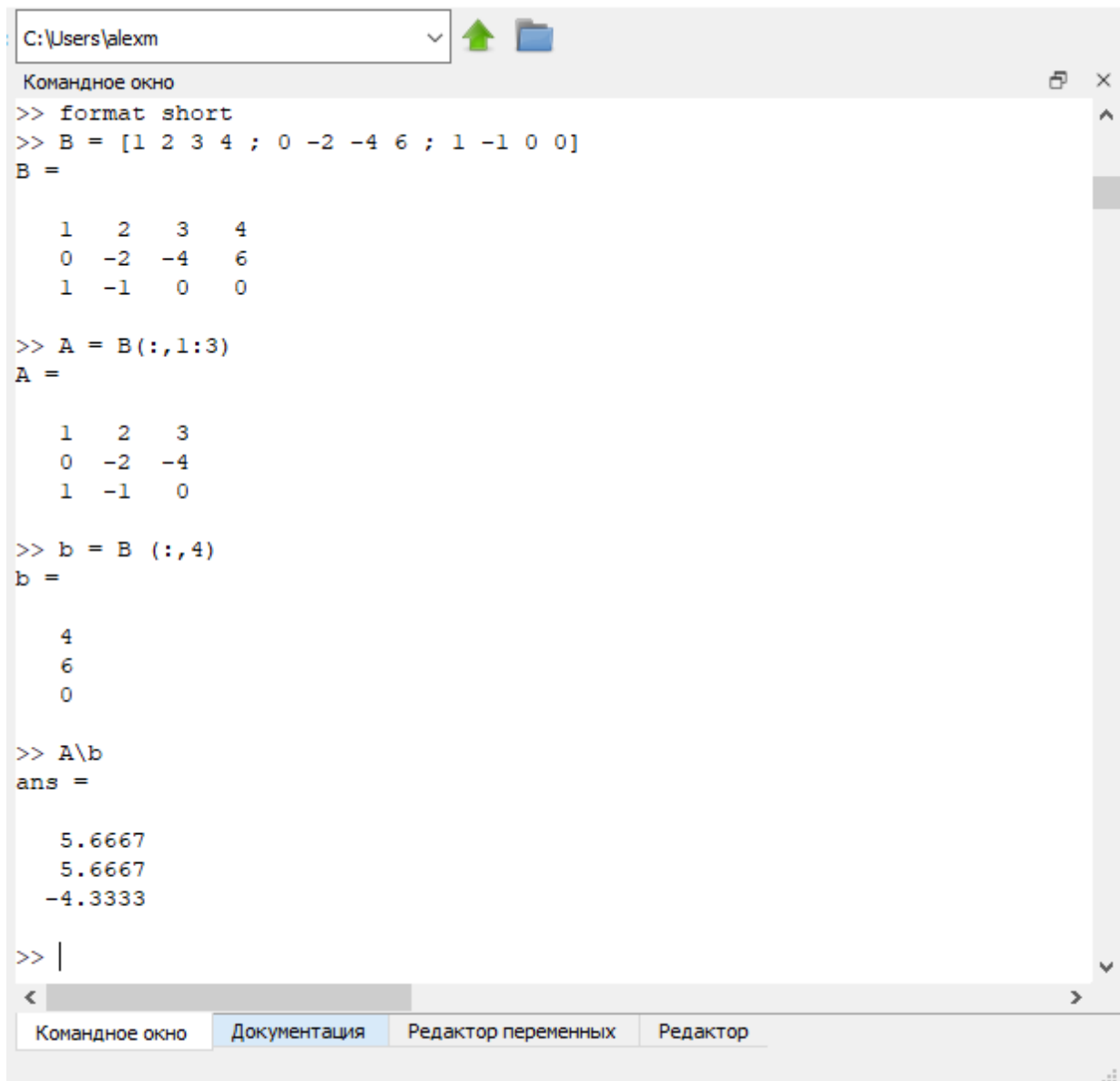
Figure 4.8: Короткая форма записи десятичного числа

## 2. Левое деление

Встроенная операция для решения линейных систем вида

$$Ax = b$$

в Octave называется левым делением и записывается как `A \ b`. Выделим из расширенной матрицы `B` матрицу `A`, а также вектор `b`.



```
C:\Users\alexm
Командное окно
>> format short
>> B = [1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0]
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1   -1    0    0

>> A = B(:,1:3)
A =

    1    2    3
    0   -2   -4
    1   -1    0

>> b = B(:,4)
b =

    4
    6
    0

>> A\b
ans =

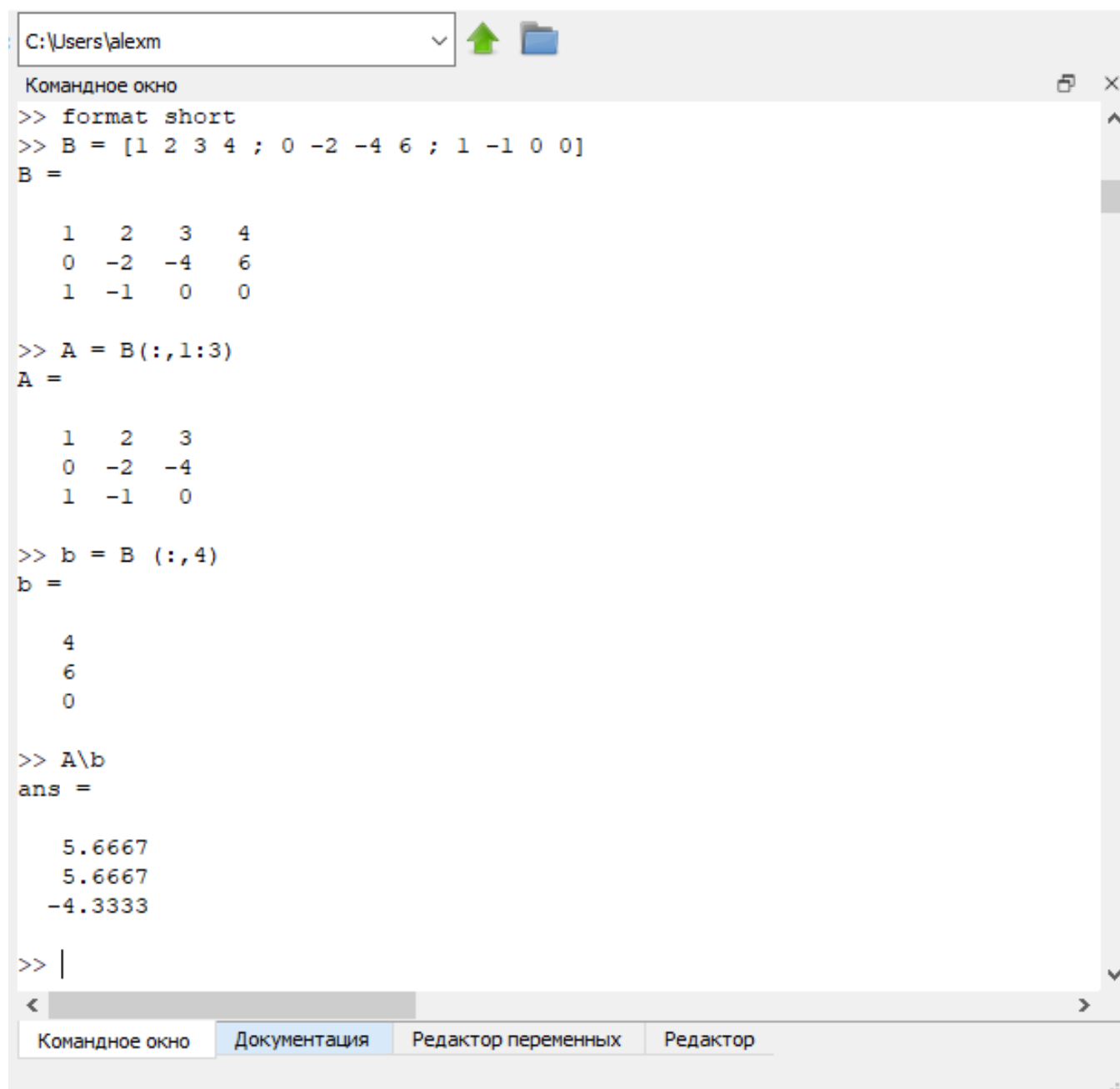
    5.6667
    5.6667
   -4.3333

>> |
```

The screenshot shows the Octave Command Window interface. At the top, there is a path bar showing 'C:\Users\alexm' and icons for file operations. The main area contains the command history and output. The user defines a 3x4 matrix B, extracts a 3x3 matrix A from its first three columns, and extracts a 3x1 vector b from its fourth column. Finally, the left division operation A\b is performed, resulting in a 3x1 vector of solutions. The bottom of the window features a tabbed interface with 'Командное окно' (Command Window) selected, along with 'Документация' (Documentation), 'Редактор переменных' (Variable Editor), and 'Редактор' (Editor).

Figure 4.9: Выделение матрицы и вектора

После чего найдём вектор  $x$ .



The image shows a MATLAB Command Window with the following commands and outputs:

```
C:\Users\alexm
Командное окно
>> format short
>> B = [1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0]
B =

     1     2     3     4
     0    -2    -4     6
     1    -1     0     0

>> A = B(:,1:3)
A =

     1     2     3
     0    -2    -4
     1    -1     0

>> b = B(:,4)
b =

     4
     6
     0

>> A\b
ans =

     5.6667
     5.6667
    -4.3333

>> |
```

The window has a title bar with the path 'C:\Users\alexm' and standard window controls. At the bottom, there are tabs for 'Командное окно' (Command Window), 'Документация' (Documentation), 'Редактор переменных' (Variable Editor), and 'Редактор' (Editor).

Figure 4.10: Вектор  $x$

### 3. LU-разложение

- LU-разложение:

LU разложение – это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу  $A$  в виде:

$$A = LU,$$

где  $L$  – нижняя треугольная матрица, а  $U$  – верхняя треугольная матрица. Эта факторизованная форма может быть использована для решения уравнения  $Ax = b$ .

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица  $A$  обратима, а все главные миноры матрицы  $A$  невырождены. Этот метод является одной из разновидностей метода Гаусса.

- Решение систем линейных уравнений:

Если известно LU-разложение матрицы  $A$ , то исходная система может быть записана как:

$$LUx = b.$$

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система:

$$Ly = b.$$

Поскольку  $L$  – нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

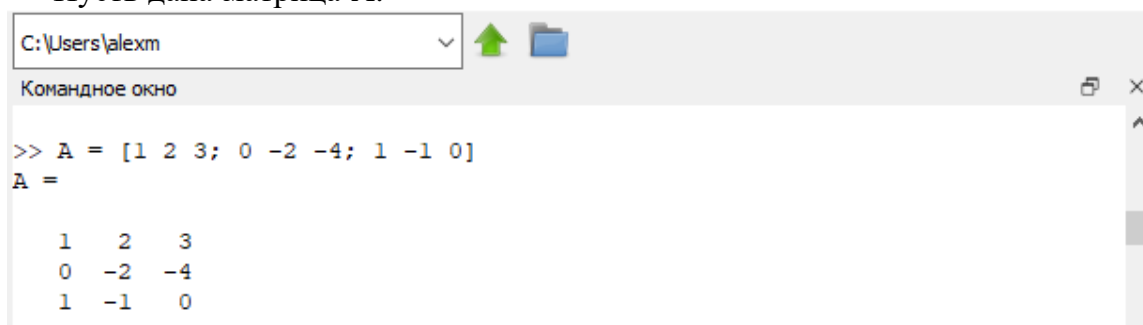
На втором шаге решается система:

$$Ux = y.$$

Поскольку  $U$  – верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

- Задание:

Пусть дана матрица  $A$ .



```
C:\Users\alexm
Командное окно

>> A = [1 2 3; 0 -2 -4; 1 -1 0]
A =

     1     2     3
     0    -2    -4
     1    -1     0
```

Figure 4.11: Матрица  $A$

С помощью Octave нужно расписать её LU-разложение.  
Распишем LU-разложение матрицы  $A$ .

```
C:\Users\alexm
Командное окно

>> A = [1 2 3; 0 -2 -4; 1 -1 0]
A =

     1     2     3
     0    -2    -4
     1    -1     0

>> [L, U, P] = lu(A)
L =

    1.0000         0         0
    1.0000    1.0000         0
         0    0.6667    1.0000

U =

     1     2     3
     0    -3    -3
     0     0    -2

P =

Permutation Matrix

     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0

>> |
```

Командное окно   Документация   Редактор переменных   Редактор

Figure 4.12: LU-разложение матрицы A



## 5 Выводы

Я познакомился с методами исследования систем линейных уравнений в Octave.