Подгонка полиномиальной кривой

Милёхин Александр НПМмд-02-21

Цель работы

Ознакомиться с некоторыми операциями в среде Octave для решения таких задач, как подгонка полиномиальной кривой, матричных преобразований, вращений, отражений и дилатаций.

Подгонка полиномиальной кривой

В статистике часто рассматривается проблема подгонки прямой линии к набору данных. Решим более общую проблему подгонки полинома к множеству точек. Пусть имеется матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

В матрице заданы значения x в столбце 1 и значения y в столбце 2.

Подгонка полиномиальной кривой

Построим уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$. Подставив значения матрицы A, получаем следующую систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на форму матрицы коэффициентов A. Третий столбец – все единицы, второй столбец – значения x, а первый столбец – квадрат значений x. Правый вектор – это значения y.

Подгонка полиномиальной кривой

Есть несколько способов построить матрицу коэффициентов в Octave. Один из подходов: использовать команду ones для создания матрицы единиц, а затем перезаписать 1-й и 2-й столбцы необходимыми данными. Результат показан на Fig.

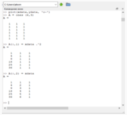


Figure 1: Система линейных уравнений

Решение по методу наименьших квадратов получается из решения уравнения $A^T A b = A^T b$, где b – вектор коэффициентов полинома.

Подгонка полиномиальной кривой

Решим задачу методом Гаусса. После чего построим соответствующий график параболы (Fig. 2).

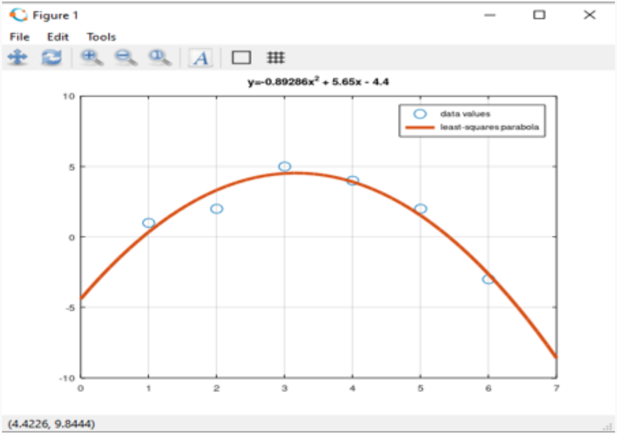
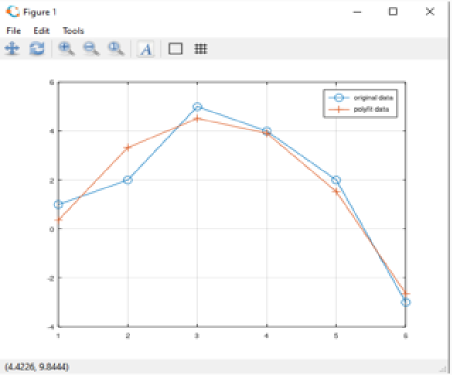


Figure 2: График параболы

Подгонка полиномиальной кривой

Процесс подгонки может быть автоматизирован встроенными функциями Octave. Для этого мы можем использовать встроенную функцию для подгонки полинома polyfit. После чего рассчитаем значения в точках и построим исходные данные.



Матричные преобразования

Существует несколько способов представления изображения в виде матрицы. Один из них состоит в том, чтобы перечислить последовательно соединенные вершины, чтобы получить ребра простого графа. В качестве примера, закодируем граф-домик. Эффективный метод закодирования состоит в выборе пути, проходящем по каждому ребру ровно один раз (цикл Эйлера).

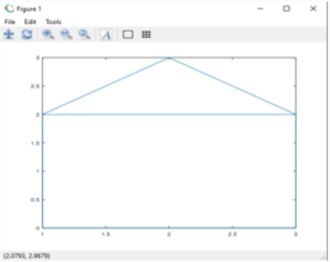


Figure 4: Полученный граф

Вращение

Вращения могут быть получены с использованием умножения на специальную матрицу. Вращение точки (x, y) относительно начала координат определяется как

$$R \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right),$$

где

$$R = \left(\begin{array}{cc} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{array} \right),$$

θ - угол поворота (измеренный против часовой стрелки).

Вращение

Теперь, чтобы произвести повороты матрицы данных D, нам нужно вычислить произведение матриц RD. Повернём граф дома на 90° и 225°. Вначале переведём угол в радианы. Результаты показаны на скриншоте ниже.

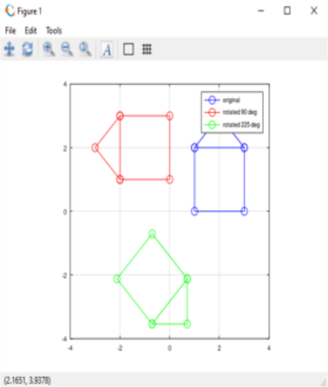


Figure 5: Реализация и результаты вращения

Отражение

Если l – прямая, проходящая через начало координат, то отражение точки (x, y) относительно прямой l определяется как

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} cos(2\theta) & sin(2\theta) \\ sin(2\theta) & -cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

θ - угол между прямой l и осью абсцисс (измеренный против часовой стрелки).

Дилатация

Дилатация (расширение/сжатие) может выполняться умножением матриц. Если T - матрица со значениями k на главной диагонали, то матричное произведение TD – преобразование дилатации D с коэффициентом k. Увеличим граф дома в 2 раза.

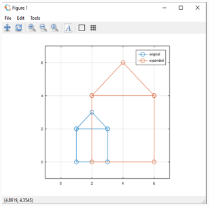


Figure 6: Результат увеличения

Результат лабораторной работы

Я ознакомился с некоторыми операциями в среде Octave для решения таких задач, как подгонка полиномиальной кривой, матричных преобразований, вращений, отражений и дилатаций.

Спасибо за внимание