Eigenvalues și eigenvectors pentru matrici simetrice

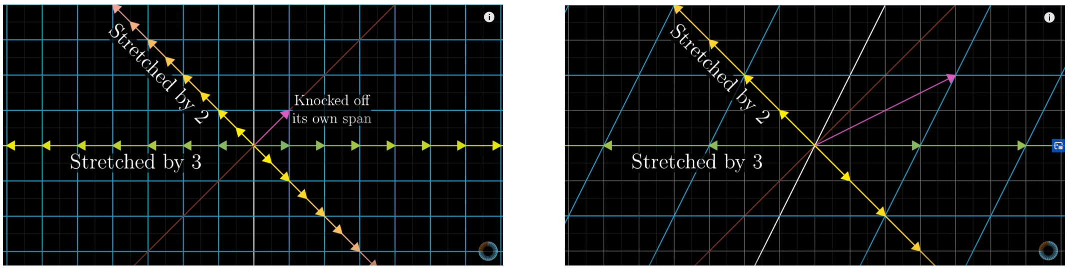
Răzvan Gabriel Apostu

16 Mai 2020

1 Definiții și context

Eigenvectors sau vectorii proprii sunt vectori nenuli, care în urma unei transformări asupra spațiului din care fac parte, nu își schimbă direcția. **Eigenvalues** sau valorile proprii reprezintă factorul cu care un astfel de vector va fi scalat în urma transformării.

În contextul abordat de lucrare și anume în aplicarea perechii de concepte în matricile simetrice, păstrăm ca observație faptul că o matrice simetrică **A** va conține exact n valori proprii (nu neapărat diferite) pentru n vectori proprii.



(a) Înainte (b) După

Figure 1: sursa: 3Blue1Brown [2]

1.1 Definiție formală

Definiție 1. Fie o matrice $A \in R^{n*n}$. Un număr $\lambda \in C$ se numește valoare proprie a matricei A, dacă există un vector nenul $v \in C^n$ astfel încât:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{v} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{v} \tag{1}$$

sau

$$Av = \lambda v \tag{2}$$

Un vector $v \neq 0$ ce satisface formula (2) se va numi **vector propriu** al matricei A asociat valorii proprii λ.

1.2 Utilizare

Vectorii proprii sunt utilizati pentru proprietățile lor într-o varietate de domenii și proiecte precum:

- Identificarea comportamentului corpurilor supuse la rotație sau vibrație în fizică
- Recunoașterea faciala $\Rightarrow$ **eigenfaces** sau compresie și reconstrucție [1]
- Epidemiologie prin calcularea factorului $R0$ în studiul răspândirii bolilor infecțioase (ex. COVID-19)

2 Metoda lui Jacobi

Metoda lui Jacobi constă în găsirea tuturor vectorilor și valorilor proprii pentru o matrice reală simetrică prin transformări ortogonale succesive, până la diagonalizarea completă a matricii A. La finalul șirului de transformări, matricea rezultat (A') va conține pe diagonala principală valorile proprii.
În contrast cu alte abordări, cum ar fi algoritmul QR, prin metoda lui Jacobi (o versiune ciclică cu aplicare simultană de "sweeps"), calculele pot fi aplicate în paralel, lucru care a sporit popularitatea acestei abordări în contextul arhitecturii îmbunătățite de procesare în paralel. Mai multe detalii pot fi identificate în lucrarea lui M. Berry despre calculul algoritmic al eigenvalues în medii simetrice.[5] .

Definiție 2. Fie $A' \in R^{n*n}$. Spunem despre A' și A că sunt similare dacă și numai dacă există o matrice nesingulară R astfel încat este satisfacută ecuația (numită și transformare similară):

$$A' = R^{-1} * A * R \tag{3}$$

Dacă R (numită și matricea *rotației Jacobi*) este matricea unitară, A' devine:

$$A' = R^T * A * R \tag{4}$$

Metoda lui Jacobi presupune (în forma sa iterativă) aplicarea succesivă a transformărilor unitare (prin R_i) până la obținerea formei **aproape** diagonale pentru A':

$A'_1 = {R_1}^T * A * R_1$
$A'_2 = {R_2}^T * A'_1 * R_2$
...
$A'_i = A' = {R_i}^T * A'_{i-1} * R_i$

Transformările R_i vor fi alese astfel încat fiecare să elimine o pereche de elemente non-diagonale, în ordinea valorilor (candidatul cu valoare maximă este ales primul). O astfel de matrice va fi de forma:

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & cos\alpha & & -sin\alpha & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & sin\alpha & & cos\alpha & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

unde $cos\alpha$ va avea coordonatele (p , p) respectiv (q , q), diagonala va fi umplută de 1 (în afara termenilor completați), iar restul elementelor vor fi 0. Unghiul α se va folosi astfel încât în urma transformării, termenul $a'_{pq} \in A'_i$ să fie egal cu 0.

Prin segmentarea relației (4) pentru calcul mai ușor, obținem termenii reprezentativi [4]:

$a'_{pp} = a_{pp}cos^2\alpha + 2a_{qp}sin\alpha cos\alpha + a_{qq}sin^2\alpha$
$a'_{qq} = a_{pp}sin^2\alpha - 2a_{qp}sin\alpha cos\alpha + a_{qq}cos^2\alpha$

2.1 Implementare

Aflarea valorilor proprii urmând metoda lui Jacobi poate fi redusă la calculul $tan\alpha$, urmat de aplicarea rotației și a update-ului valorilor în noua matrice A'_i. Valoarea tangentei poate fi calculată în funcție de termenii de pe pozițiile p și q din matricea A_i prin:

$$tan\alpha = \left[\frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{qp}} \pm \sqrt{(\frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{qp}})^2 + 1}\right]^{-1} \tag{6}$$

În urma acestui calcul, vom afla și noile valori a'_{pp} si a'_{qq}. Condiția de oprire a algorimului va fi atinsă când nu vor mai exista elemente non-diagonale diferite de *"aproape 0"*. Pe diagonala principală vom identifica valorile proprii (**eigenvalues**). **Eigenvectors** vor fi identificați pe coloanele din matricea finală R_i.

O implementare a algoritmului Jacobi iterativ poate fi analizată aici [6].

References

[1] Eigenfaces
https://towardsdatascience.com/eigenfaces-recovering-humans-from-ghosts-17606c328184

[2] 3Blue1Brown: Eigenvectors and eigenvalues — Essence of linear algebra
https://www.youtube.com/watch?v=PFDu9oVAE-g

[3] Metode numerice pentru problema de valori proprii
https://ftp.utcluj.ro/pub/users/chisalita/Scoala%20Doctorala/2010-2011/CURS%204%20-%20partea%20I.pdf

[4] Probleme de valori si vectori proprii
http://phys.ubbcluj.ro/ tbeu/NMP/C9_rom.pdf

[5] An overview of parallel algorithms for the singular value and symmetric eigenvalue problems
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037704278990366X

[6] Python Jacobi (Exemplu)
https://github.com/mateuv/MetodosNumericos/blob/master/python/NumericalMethodsInEngineeringWit